

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ  
MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF RUSSIA  
PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

---

**Л**  
**ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
ПО ПРОБЛЕМАМ ДИНАМИКИ,  
ФИЗИКИ ЧАСТИЦ, ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ  
И ОПТОЭЛЕКТРОНИКИ**

**Посвящается 55-летию  
Российского университета дружбы народов**

**Тезисы докладов**

*Москва, РУДН, 13–16 мая 2014 г.*

---

**Л**  
**ALL-RUSSIA CONFERENCE  
ON PROBLEMS IN DYNAMICS,  
PARTICLE PHYSICS, PLASMA PHYSICS  
AND OPTOELECTRONICS**

**Dedicated to the 55-th anniversary  
of Peoples' Friendship University of Russia**

*Moscow, Russia, 13–16 May 2014 г.*

**Москва  
Российский университет дружбы народов  
2014**

УДК 53(063)  
ББК 22.3  
В85

Утверждено  
РИС Ученого совета  
Российского университета  
дружбы народов

## ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Председатель оргкомитета –  
д.ф.-м.н., профессор *Ю.П. Рыбаков*

Заместитель председателя –  
к.ф.-м.н., доцент *Я.Н. Шаар*

Ответственный секретарь –  
студент *Висуэте Франсиско*

д.х.н., профессор, декан факультета физико-математических  
и естественных наук *Л.Г. Воскресенский*,  
д.ф.-м.н., профессор *В.П. Милантьев*, д.ф.-м.н, проф. *В.И. Ильгисонис*,  
д.т.н., профессор, засл. деят. науки РФ *Г.П. Башарин*,  
д.ф.-м.н., профессор *К.Е. Самуйлов*, д.ф.-м.н, проф. *Н.С. Ерохин*,  
д.ф.-м.н., профессор *Л.А. Севастьянов*, д.ф.-м.н., профессор *А.Л. Скубачевский*,  
к.ф.-м.н., профессор *И.Л. Толмачев*, д.т.н., проф. *В.А. Комоцкий*

**В85 Л Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники : тезисы докладов.** Москва, РУДН, 13–16 мая 2014 г. – Москва : РУДН, 2014. – 290 с. : ил.

УДК 53(063)  
ББК 22.3

ISBN 978-5-209-06091-8

© Коллектив авторов, 2014  
© Российский университет дружбы народов,  
Издательство, 2014

## «ИЗВЛЕЧЕНИЕ» КОРНЯ КВАДРАТНОГО ИЗ ДАЛАМБЕРТИАНА

Н.В. Самсоненко<sup>1)</sup>, А. Усман Манга<sup>2)</sup>, Ф. Ндахайо<sup>3)</sup>

## «SQUARE ROOT “EXTRACTION” OF DALAMBERTIAN »

N.V. Samsonenko<sup>1)</sup>, A. Ousmane Manga<sup>2)</sup>, F. Ndahayo<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> Department of Theoretical Physics, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

<sup>2)</sup> Department of Physics, Abdou Moumouni University, Niamey, Niger

<sup>3)</sup> Department of Physics, University of Rwanda, Butare, Rwanda

e-mail: [nsamson@bk.ru](mailto:nsamson@bk.ru)

Обычно считается, что при «извлечении» квадратного корня из оператора Даламбера

$\square = \Delta - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}$  приходят к уравнениям 1-го порядка типа уравнения Дирака в виде:

$$\text{для частиц со спином } \frac{1}{2}, \quad \left( \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right) \psi = 0 \quad (1)$$

$$\text{для частиц со спином } 0, 1. \quad \left( \beta^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right) \psi = 0 \quad (2)$$

Здесь матрицы  $\gamma^\mu$  и  $\beta^\mu$  удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Дирака–Клиффорда (ДК)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\delta^{\mu\nu} \quad (3)$$

и алгебры Петтио–Дуффина–Кеммера (ПДК)

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\alpha + \beta^\alpha \beta^\nu \beta^\mu = \delta^{\mu\nu} \beta^\alpha + \delta^{\nu\alpha} \beta^\mu. \quad (4)$$

Если не ограничивать ранг матриц  $\gamma^\mu$  и  $\beta^\mu$ , то уравнений типа (1) и (2) может быть предложено **бесконечно много**, но физический интерес представляют уравнения с матрицами наименьшего ранга (в случае ДК-алгебры с  $r = 2, 4$ ; в случае алгебры ПДК с  $r = 5, 10$ ). Ранг матриц  $\beta$  в (3) можно понизить ( $5 \rightarrow 4$ ,  $10 \rightarrow 4$ ) с учётом того факта, что волновые функции уравнения (2) в случае алгебры (4) ПДК реализуют приводимые представления группы Лоренца. Например, нами были предложены более простые уравнения типа (2) для массивных ( $m \neq 0$ ) частиц со спином  $s = 0$  [1] и  $s = 1$  [2] с матрицами  $\beta$  ранга  $r = 4$ , удовлетворяющими соотношениям (4).

Оказывается, что не все простейшие возможности, возникающие при «извлечении» корня квадратного из Даламбертиана и содержащиеся в (1) и (2) при условиях (3) и (4) уже исчерпаны. Например, было предложено [3] более простое уравнение, чем уравнения (1) и (2) в виде

$$\left( u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right) \varphi = 0 \quad (5)$$

с матрицами  $u^\mu$ , удовлетворяющими абелевой алгебре

$$u^\mu u^\nu - u^\nu u^\mu = 0. \quad (6)$$

Релятивистская инвариантность уравнения (5) очевидна, если в качестве матриц  $u^\mu$  уравнения (5) взять, например, 4-вектор скорости частицы. Уравнений типа (5) также

существует бесконечно много, если не ограничивать ранг представлений группы Лоренца, к которым принадлежит волновая функция  $\varphi$ .

Ниже мы покажем, что даже алгебрами (3), (4), (6) **не исчерпываются все возможности**.

Рассмотрим это на примере уравнения Максвелла. Ещё со времен Майорана [4] известны десятки записей этих уравнений в виде (1) и (2), в том числе и при отображении напряжённостей полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (тензора электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$ ) на пространства спиноров и кватернионов.

Введём **действительные неэрмитовы** матрицы  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  ранга 3, являющиеся генераторами группы трёхмерных вращений  $SO(3)$  [5]

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

удовлетворяющие коммутационными соотношениям

$$\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = \sigma_3. \quad (8)$$

Используя очевидное тождество  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} = \text{rot } \vec{a}$  уравнение Максвелла в вакууме запишем в виде:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H} = 0, \quad (9.a)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = 0, \quad (9.b)$$

Домножив уравнения (9.б) на « $i$ » и, складывая два уравнения, получим:

$$\vec{F} = \vec{E} + i\vec{H}. \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} + i(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \right] \vec{F} = 0, \quad (10)$$

Здесь мы ввели, следуя Майоране [4], комплексный вектор  $\vec{F}$ , удовлетворяющий условию изотропности Картана

$$|\vec{F}|^2 = \vec{F}^* \cdot \vec{F} = \vec{E}^2 + \vec{H}^2 \neq 0. \quad \vec{F}^2 = \vec{F} \cdot \vec{F} = \vec{E}^2 - \vec{H}^2 + 2i(\vec{E} \cdot \vec{H}) = 0,$$

Проверим, удовлетворяет ли квадрированное уравнение волновому уравнению Даламбера как это имеет место в случае уравнения Дирака для каждой из 4-х комплексных (или 8 действительных) компонент волновой функции по отдельности. Для этого домножим (10) слева на сопряжённый оператор в квадратных скобках:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - i(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} + i(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \right] \vec{F} = 0. \quad (11)$$

Получим:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \right] \vec{F} = 0. \quad (12)$$

Учитывая соотношение  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F}$ , что в обычных обозначениях эквивалентно формуле  $\text{rot rot } \vec{F} = \text{grad div } \vec{F} - \Delta \vec{F}$ , при дополнительном условии  $\text{div } \vec{F} = 0$  получаем волновое уравнение

$$\left( \Delta - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right) \vec{F} = 0. \quad (13)$$

Разделяя действительные и мнимые части в уравнении (13), получим 6 скалярных волновых уравнений для полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\square \vec{H} = 0. \quad \square \vec{E} = 0, \quad (14)$$

Таким образом, уравнения Максвелла (9.а) и (9.б) могут быть записаны в форме уравнения Дирака (10), но с использованием **3-рядных действительных неэрмитовых** матриц  $\vec{\sigma}$  в (7), совершенно отличных от матриц Майорана. Запись уравнений Максвелла в виде (10) обладает определёнными преимуществами при переходе к квантовой теории, поскольку комплексный вектор  $\vec{F} = \vec{E} + i\vec{H}$  можно рассматривать как **волновую функцию**, так как величина  $\vec{F}^* \vec{F} = \vec{E}^2 + \vec{H}^2$  является плотностью энергии

$$\int \vec{F}^* \vec{F} dV = \int (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) dV = \varepsilon. \quad (15)$$

После нормировки на полную энергию  $\varepsilon$  (деления обеих частей выражения (15) на константу  $\varepsilon$ ) подынтегральное выражение можно интерпретировать как **плотность вероятности**:

$$\int \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \vec{F}^* \right) \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \vec{F} \right) dV = 1. \quad (16)$$

Интересно, что введённые неэрмитовы матрицы  $\vec{\sigma}$  не удовлетворяют коммутационным соотношениям (3), (4), (6).

Если дополнить комплексный 3-вектор  $\vec{F} = \vec{E} + i\vec{H}$  до комплексного 4-вектора

$$\psi = \left\{ \begin{array}{l} \vec{H} + i\vec{E} \\ i(\mathbf{H} + i\varepsilon) \end{array} \right\},$$

где введены дополнительные скалярное  $\varepsilon$  и псевдоскалярное  $\mathbf{H}$  поля

(**инвариантные** при преобразованиях Лоренца), то придём к обобщённой симметричной системе уравнений Максвелла с электрическими и магнитными зарядами, допускающей существование **продольных** электрических и магнитных полей **в вакууме** [6]. При этом использовались матрицы  $\alpha$ -размерности  $4 \times 4$ , удовлетворяющие алгебре ДК (3), но **не являющиеся**  $\gamma$ -матрицами Дирака в силу дополнительного соотношения  $\alpha^i \alpha^j = i\alpha^k$ .

Фактически, это есть генераторы представления ранга 4 группы  $SU(2)$ , как и матрицы  $\rho_i$ ,  $\sigma_k$ , использованные Дираком, также удовлетворяющие соотношениям (3) и дополнительным условиям  $\rho^i \rho^j = i\rho^k$ ,  $\sigma^i \sigma^j = i\sigma^k$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ; циклическая перестановка индексов).

## Литература

- [1]. Samsonenko N. Les equations du premier ordre les plus simples pour des particules de spin "0" // Annales de la Fondation Lois de Broglie. Vol. 6, No 4, 1981, p. 341-346.
- [2]. Samsonenko N. Une nouvelle equation du premier ordre pour une particule de spin "1" // Annales de la Fondation Lois de Broglie. Vol. 6, No 4, 1981, p. 347-372.
- [3]. Sapogin L. Nuovo Cimento, 53A, 251 (1979).
- [4]. Majorana E. Scientific Manuscripts, unpublished, deposited at the "Domus Galilaeana", Pisa: Quaderno 2, p. 101/1; 3, p. 11, 160; 15, p. 16; 17, p. 83, 159 (1928-1932).
- [5]. Давыдов А.С. Квантовая механика. – М.: Наука, 1973. – С. 82.
- [6]. Самсоненко Н.В. К проблеме уравнений Максвелла в спинорной форме. // В сб. «Проблемы квантовой физики». – М.: УДН, 1977. – С. 23-28.

## ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE HILL EQUATION WITH A SLOWLY VARYING PARAMETER

E.M. Maslov and V.A. Koutvitsky

*Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation  
of the Russian Academy of Sciences, Troitsk, Russia.*

We consider a general Hill equation

$$d^2Y/d\theta^2 + h(\rho, \theta)Y = 0, \quad (1)$$

where  $h(\rho, \theta)$  is a real  $2\pi$ -periodic even function with respect to the fast variable  $\theta$ , and a parameter  $\rho$  varies slowly in accordance with the equation

$$d\rho/d\theta = \varepsilon R(\rho) \quad (\varepsilon \ll 1). \quad (2)$$

In the inflationary cosmology such equations describe evolution of perturbations of the oscillating inflaton scalar field at the post-inflation reheating stage [1- 4]. In this case the scale factor or the energy density of the oscillating scalar background, both evolving slowly when expanding the Universe, can play the role of the parameter  $\rho$ .

The solutions of Eq. (1) are constructed in the form of asymptotic expansions,

$$Y^+(\theta) = \psi^+(\rho, \theta)e^{\xi^+(\theta)}, \quad Y^-(\theta) = \psi^-(\rho, \theta)e^{\xi^-(\theta)}, \quad (3)$$

$$\psi^\pm = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n^\pm(\rho, \theta), \quad d\xi^\pm/d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mu_n^\pm(\rho), \quad (4)$$

where  $\psi_n^\pm(\rho, \theta) = \psi_n^\pm(\rho, \theta + 2\pi)$ ,  $\psi_0^\pm(\rho, \theta) = \psi_0(\rho, \pm\theta)$ ,  $\mu_0^\pm(\rho) = \pm\mu_0(\rho)$  with normalizing  $\psi_0(\rho, 0) = 1$ ,  $\psi_n^\pm(\rho, 0) = 0$  ( $n \geq 1$ ),  $\xi^\pm(0) = 0$ . Substituting (3), (4) into Eq. (1) and setting  $\psi_n^\pm(\rho, \theta) = X_n^\pm(\rho, \theta)e^{\mp\mu_0(\rho)\theta}$ , we arrive at the inhomogeneous Hill equations

$$\partial^2 X_n^\pm / \partial \theta^2 + h(\rho, \theta)X_n^\pm = F_n^\pm(\rho, \theta)e^{\pm\mu_0(\rho)\theta}, \quad (5)$$

where  $F_0^\pm = 0$ , and the functions  $F_n^\pm(\rho, \theta) = F_n^\pm(\rho, \theta + 2\pi)$  ( $n \geq 1$ ) contain  $\psi_m^\pm$  with  $m < n$ . For example,

$$F_1^\pm(\rho, \theta) = -2R \frac{\partial^2 \psi_0^\pm}{\partial \rho \partial \theta} - 2R\mu_0^\pm \frac{\partial \psi_0^\pm}{\partial \rho} - R \frac{d\mu_0^\pm}{d\rho} \psi_0^\pm - 2\mu_1^\pm \frac{\partial \psi_0^\pm}{\partial \theta} - 2\mu_0^\pm \mu_1^\pm \psi_0^\pm. \quad (6)$$

Note that  $\rho$  in Eq. (5) is just a parameter.

Suppose we know the solutions  $X_0^\pm(\rho, \theta) = \psi_0(\rho, \pm\theta)e^{\pm\mu_0(\rho)\theta}$  of the homogeneous Hill equation (Eq. (5) with  $n = 0$ ). They can be obtained, e.g., by the Lindemann-Stieltjes method [4-7]. Then the solutions  $X_n^\pm(\rho, \theta)$  of Eq. (5) for any  $n \geq 1$  and, hence,  $\psi_n^\pm(\rho, \theta)$ , are given by

$$X_n^\pm(\rho, \theta) = \psi_n^\pm(\rho, \theta)e^{\pm\mu_0\theta} = \frac{1}{W_0} \left[ X_0^-(\rho, \theta) \left( \beta_n^\pm + \int_0^\theta X_0^+(\rho, \theta) F_n^\pm(\rho, \theta) e^{\pm\mu_0\theta} d\theta \right) - X_0^+(\rho, \theta) \left( \beta_n^\pm + \int_0^\theta X_0^-(\rho, \theta) F_n^\pm(\rho, \theta) e^{\pm\mu_0\theta} d\theta \right) \right], \quad (7)$$

where  $W_0(\rho) = W[X_0^+, X_0^-]$  is the Wronskian. The requirement of  $2\pi$ -periodicity of  $\psi_n^\pm(\rho, \theta)$  with respect to  $\theta$  leads to the conditions

$$\beta_n^\pm(\rho) = \frac{1}{e^{\pm 4\pi\mu_0} - 1} \int_0^{2\pi} X_0^\pm(\rho, \theta) F_n^\pm(\rho, \theta) e^{\pm\mu_0\theta} d\theta, \quad (8)$$

$$\int_0^{2\pi} X_0^\mp(\rho, \theta) F_n^\pm(\rho, \theta) e^{\pm\mu_0\theta} d\theta = 0, \quad (9)$$

the later determining  $\mu_n^\pm(\rho)$  for  $n \geq 1$ .

Thus the general solution of Eq. (1) is written as

$$Y(\theta) = c^+ \psi^+(\rho, \theta) e^{\xi^+(\theta)} + c^- \psi^-(\rho, \theta) e^{\xi^-(\theta)}, \quad (10)$$

where the constants  $c^\pm$  are related to the initial conditions by the formulas

$$c^\pm = \frac{1}{W(\rho(0))} \left[ \frac{1}{2} W^\mp(\rho(0)) Y(0) \mp Y_\theta(0) \right], \quad (11)$$

$$W = \frac{1}{2} (W^+ + W^-), \quad W^\pm = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n W_n^\pm, \quad (12)$$

$$W_n^\pm(\rho) = \mp 2 \left[ \mu_n^\pm(\rho) + \left( \frac{\partial \psi_n^\pm(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} \right]. \quad (13)$$

For the purposes of illustration we then consider Lamé equation with a slowly varying parameter.

## References

- [1] L.A. Kofman, A.D. Linde, and A.A. Starobinsky, Phys. Rev. Lett. **73**, 3195 (1994).
- [2] Y. Shtanov, J. Traschen, and R. Brandenberger, Phys. Rev. D **51**, 5438 (1995).
- [3] L.A. Kofman, A.D. Linde, and A.A. Starobinsky, Phys. Rev. D **56**, 3258 (1997).
- [4] P.B. Greene, L.A. Kofman, A.D. Linde, and A.A. Starobinsky, Phys. Rev. D **56**, 6175 (1997).
- [5] E.M. Maslov and A.G. Shagalov, Physica D **152-153**, 769 (2001).
- [6] V.A. Koutvitsky and E.M. Maslov, J. Math. Phys., **47**, 022302 (2006).
- [7] V. Koutvitsky and E. Maslov, Int. Conf. Diff-2012, Suzdal, Russia, June 29 – July 4, 2012, Abstracts of talks, p. 211.

## CONTROL OF PROGRAMMED MOTION IN HIGHER ORDER NONHOLONOMIC SYSTEMS

Chernet Tuge Deressa, Jimma University, Ethiopia

Chernettuge@gmail.com

### 1. Introduction:

M. R. Flannery in 2011 applied D'Alembert-Lagrange's principle to higher order constraints and established new dynamic equations and transposition relations between  $\delta\dot{q}_j$  and  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta q_j}{dt}\right)$ ,  $\delta\ddot{q}_j$  and  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\dot{q}_j}{dt}\right)$  for first and second order nonholonomic constraints. The results are the following.

1. For constraints of the form

$$\phi_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{t}) = 0, k = 1, 2, \dots, d \quad (1)$$

i). The work done by the constraint forces is given by:

$$\left(\frac{\partial\phi_k}{\partial\dot{q}_j}\right)\delta q_j = 0 \quad (2)$$

ii). The dynamic equation is proved to be:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{ex} + \lambda_k \left(\frac{\partial\phi_k}{\partial\dot{q}_j}\right) \quad (3)$$

iii). The transposition relation is:

$$\delta\phi_k - \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial\phi_k}{\partial\dot{q}_j}\right)\delta q_j\right] = 0 \quad (4)$$

2. For constraints of the form:

$$\psi_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{t}) = 0, (k = 1, \dots, d) \quad (5)$$

i. The work done by the constraint forces is given by

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial\ddot{q}_j}\delta q_j = 0 \quad (6)$$

ii. The dynamic equation is proved to be

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{ex} + \lambda_k \left(\frac{\partial\psi_k}{\partial\ddot{q}_j}\right) \quad (7)$$

iii. The transposition relation is:  $\delta\psi_k - \frac{d^2}{dt^2}\left[\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial\ddot{q}_j}\right)\delta q_j\right] = 0$

*The main purpose of this paper is to develop dynamic reference control model for trajectory tracking of programmed motion based on the above dynamic equation of higher order nonholonomic constraints.*

**Note that:** A **programmed constraint** is any requirement put on a physical system motion specified by an equation. A **programmed motion** is a system motion that satisfies a programmed constraint



## 2. Dynamic Model for Control of Programmed Motion.

The constrained dynamic equation (7) can be written in the form:

$$\begin{cases} M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{D}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Q}^{ex} \\ \psi_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = 0, (k = 1, \dots, d) \end{cases} \quad (8)$$

where  $M(\mathbf{q})$  is a  $(n \times n)$  positive definite symmetric inertia matrix,  $\boldsymbol{\lambda}$  is a  $d$ -dimensional vector of Lagrange's multipliers,  $\mathbf{J}(\mathbf{t}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left( \frac{\partial \psi_k}{\partial \ddot{q}_i} \right)$  is a full rank  $(d \times n)$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , is  $n \times 1$  matrix, contains all other position and velocity terms (vector of centripetal and Coriolis forces terms),  $\mathbf{D}(\mathbf{q})$  is the  $n$ -vector of gravitational torques,  $\mathbf{Q}^{ex}$  is an external force

For **model-based control of programmed motion**, the dynamic model is to be transformed to the reduced-state form. The concept of **Null space** is used to eliminate the Lagrange multiplier in (8). From Eq. (6) we have:

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial \ddot{q}_j} \delta q_j = 0$$

This can be written as:

$$A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (9)$$

Where,  $A = \frac{\partial \psi_k}{\partial \ddot{q}_j}$ ,  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

Let  $S$  be  $n \times (n - d)$ , full rank matrix made from the basis vectors of the null space of  $A$  in (9) such that  $S(\mathbf{q}) = [g_1(\mathbf{q}) \ g_2(\mathbf{q}) \ \dots \ g_{n-d}(\mathbf{q})]$

Then there exists velocity vector  $\mathbf{v}(t) = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n-d}]^T$  such that

$$\dot{\mathbf{q}} = S(\mathbf{q})\mathbf{v}(t) \quad (10)$$

Substituting  $\dot{\mathbf{q}}$  in (8) and premultiplying it by  $S^T$  we obtain:

$$\tilde{M}\dot{\mathbf{v}}(t) + F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \tilde{D}(\mathbf{q}) = \tilde{E} \quad (11)$$

Where,

$$\tilde{M} = S^T M(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}), F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = S^T [M(\mathbf{q}) \dot{S}(\mathbf{q}) \mathbf{v}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})], \tilde{D}(\mathbf{q}) = S^T \mathbf{D}(\mathbf{q}), \tilde{E} = S^T \mathbf{Q}^{ex}$$

The constrained dynamic equation (7) is now changed to *reference Control model* for programmed motion given by:

$$\begin{cases} \tilde{M}\dot{\mathbf{v}}(t) + F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \tilde{D}(\mathbf{q}) = \tilde{E} \\ \psi_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = 0, (k = 1, \dots, d) \end{cases} \quad (12)$$

The advantage of (12) is that, it doesn't include the constraint force and hence is convenient for tracking control.

Equation (12) is said to be *reference control model* because it is used for planning a dynamically possible trajectory of a given dynamic system and a programmed motion. An example is provided to make the concept clear.

**Example:** Consider a wheeled mobile robot shown in the fig1. The natural constraints of the system are given by:

$$\begin{aligned} -\dot{x}_a \sin \theta + \dot{y}_a \cos \theta &= 0, \\ \dot{x}_a \cos \theta + \dot{y}_a \sin \theta + \dot{\theta} L &= R \dot{\phi}_R, \end{aligned}$$

$$\dot{x}_a \cos\theta + \dot{y}_a \sin\theta - \dot{\theta}L = R\dot{\phi}_L$$

Let us add a *programmed constraint* to the robot, that we require it to move along a curve whose curvature is 5, i.e.

$$\dot{x}_a \ddot{y}_a - \dot{y}_a \ddot{x}_a - 5[\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2]^{3/2} = 0.$$

Based on (12) we can get the plane (dynamically possible trajectory for the robot) or the required curve can be obtained. Indeed, it can be shown that,

$$m\dot{y}_a \ddot{y}_a + m\dot{x}_a \ddot{x}_a = 0$$

Where,  $m$  is the mass of the robot. The *required curve* as a result of the programmed constraint is obtained to be:

$$x_a = \frac{1}{5b} \sin(5bt), y_a = \frac{-1}{5b} \cos(5bt), \theta = 5bt \quad (*)$$

for a non-zero constant  $b$ .

The *Dynamic Control Model* is developed by considering only the **natural constraints** (without the programmed constraint) from:

$$\begin{cases} M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{D}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Q}^{ext} \\ \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Where  $\mathbf{B}$  is the usual Jacobian matrix given by  $\mathbf{B} = \left( \frac{\partial \psi_k}{\partial \dot{q}_i} \right)$

**Remark: Natural constraints** includes holonomic and linear first order nonholonomic constraints that are not programmed constraints.

Using the concept of Null space employed above (13) can be written in the form:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{N}} = \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$\boldsymbol{\tau}$  is the control input. Equation (14) is said to be *dynamic control model*.

For the purpose of programmed motion tracking control, we use both equations (12) and (14). The required trajectory is obtained from (12) based on the given programmed constraint and the control tracking is done by (14).

Moreover for stabilization purpose we use the well known control method called Computed Torque(CT).

If  $\mathbf{x}_f$  is the reference trajectory and  $\mathbf{q}$  is the actual trajectory vectors

then from CT method the torque is required is given by:

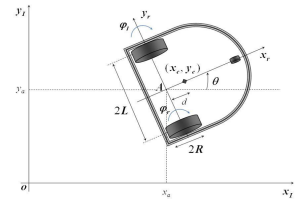
$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{x}}_f + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{x}}_f + \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (15a)$$

Eq.(15a) is the first torque required to start motion tracking. (15a) is then improved to (15b) to look for appropriate entries of the positive definite symmetric matrices  $\mathbf{K}_d$  and  $\mathbf{K}_p$

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) [\ddot{\mathbf{x}}_f - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_p \mathbf{e}] + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (15b)$$

Where  $\mathbf{e} = \mathbf{x}_f - \mathbf{q}$  is the error encountered while tracking,

*Note: The main objective of tracking a programmed motion is to find a torque that constrain the motion of the dynamics towards the required trajectory.*



Let us continue with the example started above. With regarding to equation(\*) let us take  $b = 1/10$  and then the reference trajectory becomes:

$$x_f = 2\sin(0.5.t); \quad y_f = -2.\cos(0.5.t); \quad \theta_f = 0.5.t;$$

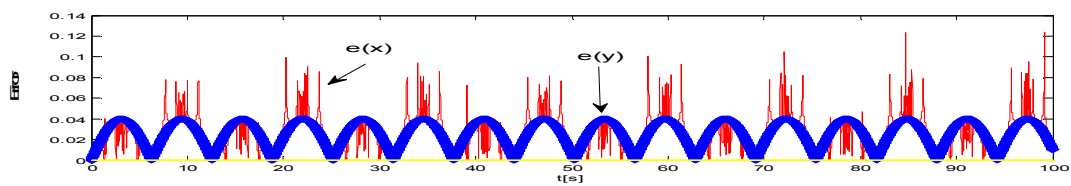
**Simulation.** We obtain  $\tau$  from (15a) and then actual position from the first part of (14).

The new trajectory becomes:  $x_f = \sin(0.5t); \quad y_f = -\cos(0.5t), \quad \theta_f = 0.5t$

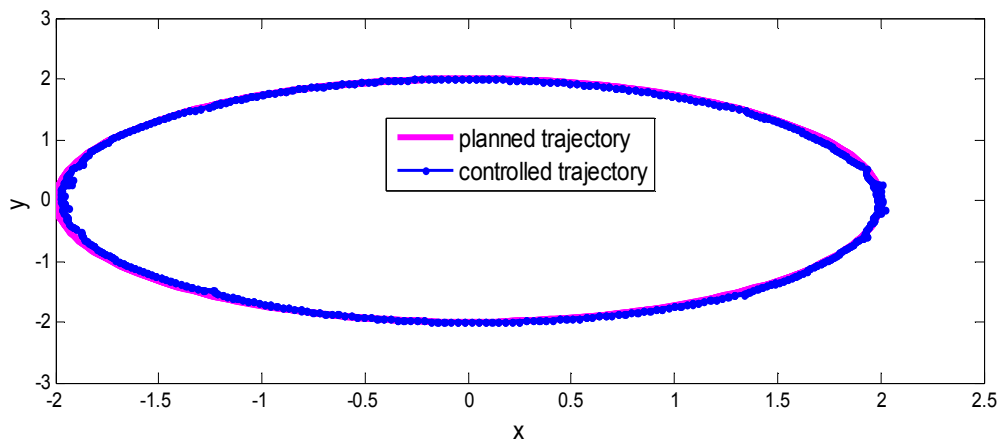
After several experimentation on MATLAB, the following simulation is made using

$$k_{d\_11}=0.01, k_{d\_22}=0.01, k_{p\_11}=0.01, k_{p\_22}=0.01, k_{d\_33}=1, k_{p\_33}=10$$

Error simulation result:



The planned trajectory and the controlled trajectory with good harmony are shown in figure 3.



## COSMOLOGICAL MODELS WITH AN EFFECTIVE $\Lambda$ -TERM IN LYRA MANIFOLD

V.K. Shchigolev\*

*Department of Theoretical Physics, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk 432000, Russia*

Lyra's geometry [1] provides one of the possible alternatives in modification of the cosmological models, the need for which is almost generally recognized. Such a modification of the gravitational theory has long been known, but now it again attracts attention due to the opening of the late-time cosmological acceleration. This fact follows from the supernovae of type Ia observations, Cosmic Microwave Background Radiation and Baryon Acoustic Oscillations in galaxy surveys. Different versions of the scalar-tensor theories are involved to solve the problem of late acceleration. Recently, a number of interesting results have been obtained for the effective cosmological term in Lyra geometry [2]-[4]. One should recall that the displacement vector field has a purely geometrical origin. Therefore, it seems rather logical that such a field in the dynamical equations of cosmological models should be considered as a constant, possibly associated with a cosmological constant, or as a hidden parameter which is masked in some dynamical parameters of the model. We intend to apply this idea to the models in Lyra geometry. Initially, an auxiliary cosmological term as a kind of "bare" cosmological term  $\Lambda(t)$ , somehow interacting with the displacement vector field, is substituted into the gravitational equations.

Einstein's field equations in Lyra's geometry, in normal gauge, can be written with a time-varying  $\Lambda$  - term as

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} + \frac{3}{2} \phi_i \phi_k - \frac{3}{4} g_{ik} \phi^j \phi_j = T_{ik},$$

where  $\phi_i$  is a displacement vector. For simplicity, we assume that the gravitational constant  $8\pi G = 1$ . Considering the matter to be a perfect fluid, we have  $T_{ik} = (\rho_m + p_m) u_i u_k - p_m g_{ik}$ ,

where  $u_i = (1, 0, 0, 0)$  is 4-velocity of the co-moving observer, satisfying  $u_i u^i = 1$ . Let  $\phi_i$  be a time-like vector field of displacement,  $\phi_i = (2\beta/\sqrt{3}, 0, 0, 0)$ , where  $\beta = \beta(t)$  is a function of time alone. Given a spatially-flat FRW- metric, we can reduce the field equations to the following set:

$$3H^2 = \rho_m + \Lambda + \beta^2, \quad 2\dot{H} = -(\rho_m + p_m + 2\beta^2),$$

where  $H = \dot{a}/a$  is the Hubble parameter, and an overdot stands for differentiation with respect to cosmic time  $t$ . The continuity equation is  $\dot{\rho}_m + \dot{\Lambda} + 2\beta\dot{\beta} + 3H(\rho_m + p_m + 2\beta^2) = 0$ . If we are going to preserve the continuity equation for matter in its standard form, the field equation yields the following equation for the  $\Lambda$  term and displacement field:

$$\Lambda_{;i} = \frac{3}{2} \left( \phi_i \phi^k - \frac{1}{2} \delta_i^k \phi^j \phi_j \right)_{;k}.$$

Consequently, we have the following continuity equation for the matter:  $\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0$ .

One can obtain that  $\dot{\Lambda} + 2\beta\dot{\beta} + 6H\beta^2 = 0$ . Here, we study our model with the assumption of  $\Lambda \neq const$ . Moreover, we suppose that the last equation is satisfied by a certain  $\Lambda(t)$ , which can be found as the result of formal integration as  $\Lambda = -\beta^2 - 6 \int H\beta^2 dt + \Lambda_0$ , where  $\Lambda_0$  is a constant of integration. The substitution of this expression into the Friedmann equations allows us to get the basic equations of the model as  $3H^2 = \rho_{eff}$ ,  $2\dot{H} = -(\rho_{eff} + p_{eff})$ , where we have introduced the effective cosmological constant  $\Lambda_{eff}(t) = \Lambda_0 - 6 \int H\beta^2 dt$ , and the effective values of the energy density and pressure with the following expressions:

$$\rho_{eff} = \rho_m + \Lambda_{eff}, \quad p_{eff} = p_m - \Lambda_{eff} - \frac{\dot{\Lambda}_{eff}}{3H}.$$

Therefore, the auxiliary  $\Lambda$  - term is disappeared now, and an effective  $\Lambda_{eff}$  - term (13), generated by the displacement field, is appeared.

It is easy to verify that the effective energy density and pressure also satisfy the continuity equation in its usual form:  $\dot{\rho}_{eff} + 3H(\rho_{eff} + p_{eff}) = 0$ .

We consider three examples of solution for our model in the simple cases.

1. First of all, we consider the case of inflationary model, when  $H = H_0 = const.$  and  $a(t) = a_0 \exp(H_0 t)$ . Then we get that  $\Lambda_{eff} = \Lambda_0 - 6H_0 \int \beta^2 dt$ . It is easy to find that

$$p_m = \Lambda_0 - 3H_0^2 - 6H_0 \int \beta^2 dt - 2\beta^2, \quad \rho_m = -\Lambda_0 + 3H_0^2 + 6H_0 \int \beta^2 dt.$$

In addition, it follows that  $\rho_m + p_m = -2\beta^2$ . As well known, there are several approaches to investigate stability of a model. For instance, one can use the fact that the sound-speed squared should not be negative,  $c_s^2 = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \geq 0$ . For our model, we conclude that this stability condition can

be expressed as  $c_s^2 = -1 - \frac{1}{3H_0} \frac{d \ln \beta^2}{dt} \geq 0$ .

If we assume that our universe is filled with a perfect fluid described by some effective EoS  $p_m = w_m \rho_m$ , then we have  $w_m = -1 - 2\beta^2 / \rho_m$ . Therefore, due to the real character of the displacement vector and non-negativity of the matter density, we obtain  $w_m \leq -1$ . It means that the matter should be of the phantom nature. For example, it can be a phantom scalar field  $\phi(t)$ , for which  $\rho_m = -\dot{\phi}^2 / 2 + V(\phi)$ ,  $p_m = \rho_m = -\dot{\phi}^2 / 2 - V(\phi)$ . It follows that  $\dot{\phi}^2 = 2\beta^2$  and

$$V(\phi) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + 3H_0 \int \dot{\phi}^2 dt + 3H_0^2 - \Lambda_0.$$

In this case, the stability condition (20) can be written as:  $d \ln \dot{\phi}^2 / dt \leq -3H_0$ . For the evolving exponentially field with  $\phi = \phi_0 \exp(-\lambda t)$ , we have the potential of the following form

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} (\lambda - 3H_0) \phi^2 + V_0, \quad \text{where } V_0 \text{ is a constant, and the stability condition reduces to the inequality } \lambda \geq (3/2)H_0. \text{ At this, the displacement vector field is obtained in the form: } \beta(t) = \pm(\lambda \phi_0 / \sqrt{2}) \exp(-\lambda t).$$

2. In the second simplest case when the displacement vector is constant, that is  $\beta^2 = \beta_0^2$ , we have that  $\Lambda_{eff}(t) = \Lambda_0 - 6\beta_0^2 \ln[a(t)/a_0]$ , where  $a_0$  is a constant of integration (the present-day value of the scale factor). If we assume that the matter component of the Universe can be described by a barotropic perfect fluid with some constant EoS parameter:  $w_m \leq 1$ , then  $\rho_m = \rho_0 a^{-3(1+w_m)}$ ,

where  $\rho_0$  is a constant of integration. Then the field equations take the following form:

$$3H^2 = \rho_0 a^{-3(1+w_m)} + \Lambda_0 - 6\beta_0^2 \ln[a(t)/a_0], \quad 2\dot{H} = -(1+w_m)\rho_0 a^{-3(1+w_m)} - 2\beta_0^2.$$

As known, the SNIa Union2 database includes 557 SNIa and provides one of the possible observational restrictions on cosmological models. For this end, we express the scale factor  $a$  in terms of redshift  $z$  by the relation  $a = (1+z)^{-1}$ , where we put the present value of scale factor to be 1. Considering the definitions of the dimensionless energy densities,  $\Omega_{m_0} = \rho_0 / 3H_0^2 a_0^{3(1+w_m)}$ ,  $\Omega_{\Lambda_0} = \Lambda_0 / 3H_0^2$ ,  $\Omega_{\beta_0} = 2\beta_0^2 / H_0^2$ , the Friedmann equation can be written as  $E^2(z) = \frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{m_0} (1+z)^{3(1+w_m)} + \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{\beta_0} \ln(1+z)$ , where  $H_0$  is the present value of the Hubble parameter. As well known, the distance modulus  $\mu$  is given by  $\mu(z) = 5 \log_{10}(d_L / \text{Mpc}) + 25$ , where  $d_L$  is the luminosity distance. In the flat universe, it is connected with redshift as follows

$$d_L = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H_0 E(z')}.$$

We study our model for a small value  $z$  compared with unity, that is for the epoch close to the present time. Retaining in the series expansion of the power and logarithmic functions only linear terms and using the relation  $\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda_0} = 1$ , we obtain

$$d_L = \frac{2(1+z) \left( \sqrt{1 + [3(1+w_m)\Omega_{m0} + \Omega_{\beta_0}]z} - 1 \right)}{H_0 [3(1+w_m)\Omega_{m0} + \Omega_{\beta_0}]}.$$

Using this expression, we can obtain the distance modulus in terms of redshift parameter  $z$  and find the best-fit values of  $\Omega_{\beta_0}$  and  $\Omega_{m0}$ . Thus, one could be able to estimate the magnitude of  $\beta_0^2 = H_0^2 \Omega_{\beta_0} / 2$ .

3. Now consider the following example, making use of the phenomenological law  $\Lambda_{eff} = \alpha / a^2(t)$ . We obtain  $\beta^2(t) = \frac{\alpha}{3a^2(t)}$  and

$$\rho_{eff} = \rho_0 a^{-3(1+w_m)} + \Lambda_0 + \alpha a^{-2}, \quad p_{eff} = w_m \rho_0 a^{-3(1+w_m)} - \Lambda_0 - \frac{1}{3} \alpha a^{-2}.$$

One can see that the term with  $\alpha$  in the effective parameters reveals itself quite similar to the curvature of three-dimensional cross-section  $\sim k / a^2$ . However, recall that the model is built in the flat space-time. The appearance of this curvature-like contribution in the energy and pressure is absolutely due to the displacement vector. Introducing in addition to  $\Omega_{m0}$  and  $\Omega_{\Lambda_0}$  one more dimensionless energy density  $\Omega_\alpha = \alpha / 3H_0^2 a_0^2$ , the following equation for the effective EoS  $w_{eff} = p_{eff} / \rho_{eff}$  can be obtained:

$$w_{eff} = \frac{w_m \Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda_0} x^{3(1+w_m)} - \frac{1}{3} \Omega_\alpha x^{(1+3w_m)}}{\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda_0} x^{3(1+w_m)} + \Omega_\alpha x^{(1+3w_m)}},$$

where and below  $x = a / a_0$  is the dimensionless scale factor. At this, the deceleration parameter can be obtained as  $q = -1 - \dot{H} / H^2 = (1 + 3w_{eff}) / 2$ . Assuming  $w_m > -1$ , we have  $w_{eff} \rightarrow -1$  as  $x \rightarrow \infty$  regardless of the values  $\Omega_\alpha$  and  $\Omega_{\Lambda_0}$ . Note that the effective EoS is able to cross the phantom divide line  $w_{eff} = -1$  at a certain value  $x = \bar{x}$ , which satisfies the following equation:  $\bar{x}^{1+3w_m} = -(w_m + 1) \frac{3\Omega_{m0}}{2\Omega_\alpha}$ . If  $\bar{x} \neq 0$ , then the crossing occurs at  $w_m < -1$ .

For the Friedmann equation, we obtain the following equation for the dimensionless scale factor

$$H_0^{-2} \dot{x}^2 = \Omega_{m0} x^{-(1+3w_m)} + \Omega_{\Lambda_0} x^2 + \Omega_\alpha.$$

One can find the analytical solutions to this equation for some values of the barometric index of matter  $w_m$ . Let us note an interesting feature of this equation regarding its coefficients, i.e., the relative densities of energy. Assuming that at the early stages of evolution the matter exists mostly in the form of radiation, i.e.  $w_m = w_r = 1/3$ , then we can that equation for a non-negative  $y = x^2$  as  $\dot{y} = 2H_0\sqrt{\Omega_{m0} + \Omega_\alpha y + \Omega_{\Lambda_0} y^2}$ . The real and non-oscillating solutions for  $y$  can be obtained if the discriminant of quadratic polynomial is not negative:  $\Omega_\alpha^2 - 4\Omega_{m0}\Omega_{\Lambda_0} \geq 0$ . Assuming the limiting case of zero and taking into account the identity  $\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_\alpha = 1$ , we can obtain the following interesting relations:  $\Omega_{m0} = \left(1 - \sqrt{\Omega_{\Lambda_0}}\right)^2$ ,  $\Omega_\alpha = 2\sqrt{\Omega_{\Lambda_0}}\left(1 - \sqrt{\Omega_{\Lambda_0}}\right)$ .

Choosing, as an example,  $\Omega_{\Lambda_0} = 0.72$ , we obtain the approximate values  $\Omega_{m0} = 0.02$ ,  $\Omega_\alpha = 0.26$ , which we used above. When these conditions, the equation for  $y$  can be easily integrated and gives:

$$a = a_0 \left[ \frac{1 - \sqrt{\Omega_{\Lambda_0}}}{\sqrt{\Omega_{\Lambda_0}}} \left( e^{2H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda_0}}t} - 1 \right) \right]^{1/2},$$

where the constant of integration is chosen according to the condition  $a = 0$  as  $t = 0$ . Because  $a_0$  corresponds to the present scale factor, it is easy to find the age of the universe  $t_0$  as

$$t_0 = -\frac{1}{2H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda_0}}} \ln\left(1 - \sqrt{\Omega_{\Lambda_0}}\right), \text{ that for } \Omega_{\Lambda_0} = 0.72 \text{ gives } t_0 \approx 1.112/H_0.$$

We have to note that our model can be more realistic if we introduce one more matter component that interacts with the first one or not. Each of these components should be responsible for its own contribution to the total energy density.

[1] G. Lyra, Math. Z. 54 52, 1951.

[2] V. K. Shchigolev, E. A. Semenova, arXiv: gr-qc/1203.0917

[3] V. K. Shchigolev, Mod.Phys.Lett. A 27 1250164, 2012.

[4] V. K. Shchigolev, Chin. Phys. Lett. Vol. 30, No. 11 119801, 2013.



---

**CYLINDRICALLY AND AXIALLY SYMMETRIC WORMHOLES.  
THROATS IN VACUUM?**

K. A. Bronnikov and M. V. Skvortsova

*Center for Gravitation and Fundamental Metrology, VNIIMS, Moscow, Russia*

*Institute of Gravitation and Cosmology, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow,  
Russia*

We discuss the existence conditions of wormhole throats and wormholes as global configurations in general relativity under the assumptions of cylindrical and axial symmetries. It is pointed out, in particular, that wormhole throats can exist in static, cylindrically symmetric space-times under slightly different conditions as compared with spherical symmetry. In cylindrically symmetric space-time with rotation, throats can exist in the presence of ordinary matter or even in vacuum space-times. However, there are substantial difficulties in obtaining asymptotically flat wormhole configurations: such examples are yet to be found. Some features of interest are discussed in static, axially symmetric configurations, including wormholes with singular rings and wrongly seeming regular wormhole throats in the Zipoy-Voorhees vacuum space-time.

## METRICAL CONCEPTION OF THE SPACE-TIME GEOMETRY

Yuri A. Rylov

Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,

e-mail: [rylov@ipmnet.ru](mailto:rylov@ipmnet.ru)

Conception of the space-time geometry describes an interaction of concepts in the space-time geometry. Hierarchy of concepts is essential in the conception. There are two conceptions in the space-time geometry: (1) axiomatic conception and (2) metric conception.

Geometry has been arisen many years ago as a science on a shape of geometrical objects and on their mutual disposition in space. It was the proper Euclidean geometry GE. Any geometrical object in GE can be constructed of blocks. Blocks are segments of straight line. Any geometrical object  $O$  can be filled by a set  $S$  of straight line segments  $L$  in such a way, that any point  $\forall P \in O$  belongs to one and only one segment  $L \in S$ . Segments  $L$  have no common points. This property of GE can be used for construction of any geometrical object  $O$  of the Euclidean geometry GE. Properties of the straight line segment can be formulated as some statements  $St1$ . The rules of displacement of the straight line segments can be also formulated as some statements  $St2$ . Using these statements  $St1$  and  $St2$ , one can formulate the rules for construction of any geometrical object in GE. Considering  $St = St1 \wedge St2$  as basic statements (axioms) of GE, one can obtain the rules of any geometrical object construction as a logical corollary of  $St$  and of definition of the geometric object. These rules can be formulated as some statements. The set of these statements forms the proper Euclidean geometry GE. Such a form of the Euclidean geometry GE presentation can be qualified as the axiomatic conception of GE.

The Euclidean geometry GE is considered formally as a logical construction founded on the set  $St$  of Euclidean axioms. Usually one does not consider the reasons, why the logical construction describes the Euclidean geometry GE. One believes, that any logical construction, containing axioms about properties of the simplest geometrical objects such as the straight line, describes some geometry  $G$  which may differ from GE. The symplectic geometry has no relation to properties of geometrical objects. Nevertheless, it is treated as some kind of a geometry, because it is a logical construction, which is close to the Euclidean geometry GE.

For construction of a generalized geometry  $G$  one uses another set  $Sg$  of axioms  $Ag$ . If the axioms  $Sg$  are consistent, one obtains a generalized geometry  $G$ , which is a logical construction in the framework of the axiomatic conception of a geometry.

In such a way one constructed the geometry GM of the space-time, known as the geometry of Minkowski. Such a logical construction is possible, because axioms describing properties of straight lines are practically the same in GE and in GM. However, if the properties of the straight line segments in the generalized geometry  $G$  differ from those in GE, the logical

construction of  $G$  becomes to be problematic. Let us imagine that the straight line segment  $Lg$  in  $G$  has the shape of a hollow tube. In this case a usage of the segments  $Lg$  as constructing blocks for construction of geometric objects becomes to be impossible. In the microcosm the real space-time geometry is discrete, and the straight line segments have the shape of hollow tubes. In this case axiomatic conception of the space-time geometry cannot describe the real space-time geometry. Then a connection between the geometry as a logical construction and geometry as a science on the shape of geometrical objects fails. It means that capacities of the axiomatic conception for construction of generalized geometries are restricted.

Besides, a construction of a geometrical object in  $GE$  and in the generalized geometry  $G$ , obtained from  $GE$  in the framework of the axiomatic conception, needs a proof of numerous theorems. In other words, a construction of a geometrical object in  $G$  needs a repeating of the construction of this object in  $GE$ . There is another way of a geometrical object  $O$  construction in  $G$ . One constructs  $OE$  in  $GE$  and thereafter one deforms  $GE$  into  $G$ . At this deformation the geometrical object  $OE$  in  $GE$  is deformed in the geometrical object  $O$  in  $G$ . The deformation procedure of  $OE$  is much simpler, than the construction of  $OE$  and  $O$  from constructing blocks (it means a proof of theorems). Such a procedure of the geometric object construction is used in the metric conception of a geometry. This procedure (deformation) is very simple.

The fact is that, the Euclidean geometry can be presented completely in terms of its metric  $d(P, Q)$ . Here the quantity  $d(P, Q)$  is the distance between  $\forall P, Q \in \Omega$ .

Here  $\Omega$  is the set of points, where the Euclidean geometry  $GE$  is given. Instead of  $d$  it is convenient to use the world function  $W(P, Q) = \frac{1}{2} d^2(P, Q)$ . The world function is real even in the geometry of Minkowski, where the distance  $d$  is imaginary for spacelike intervals. Idea of metric conception is not new [1]. Unfortunately, the distance geometry of Blumenthal [1] is not a monistic conception, when a geometry is described completely in terms of distance and only in terms of distance. Blumenthal failed to construct a monistic conception of geometry, although the monism is very important for the metric conception construction.

In the metric conception the world function  $W$  of a generalized geometry is defined as a single-valued function

$$W : \Omega \times \Omega \rightarrow R, \quad W(P, Q) = W(Q, P) \quad W(P, P) = 0, \forall P, Q \in \Omega \quad (1)$$

Here  $\Omega$  is the point set, where the geometry is given. In the Euclidean geometry  $GE$  the world function  $W$  has definite properties which can be described by additional restrictions.

The Euclidean geometry  $GE$  is formulated in terms of the world function  $W$  and only in terms of the world function. Geometrical vector (g-vector)  $PQ = \{P, Q\}$  is defined as an ordered set of two points  $P$  and  $Q$ . The term "geometrical vector" is used in order to distinguish it from the

linvector  $u$ , which is defined as an element of the linear vector space  $L_n$ , which is used in GE, and  $u \in L_n$ . In GE linvector and g-vector can coincide. However after deformation of GE they do not coincide, generally speaking.

Two g-vectors  $PQ$  and  $RS$  are equivalent ( $PQ \text{ eqv } RS$ ), if their lengths are equal and they are in parallel ( $PQ \cdot RS = |PQ| \cdot |RS|$ )

$$(PQ \text{ eqv } RS): (PQ \cdot RS) = |PQ| \cdot |RS| \wedge |PQ| = |RS| \quad (2)$$

Here  $(PQ \cdot RS)$  is the scalar product of two g-vectors  $PQ$  and  $RS$ , defined in terms of the world function in the form

$$(PQ \cdot RS) = W(P, S) + W(Q, R) - W(P, R) - W(Q, S) \quad (3)$$

The length  $|PQ|$  of the g-vector  $PQ$  is defined by the relation

$$|PQ| = \sqrt{2\sigma(P, Q)} \quad (4)$$

Here  $\sigma$  is the world function of GE. Equivalence of two g-vectors is defined by (2).

ng-vectors  $P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n$  are linear dependent, if and only if the Gram determinant

$$F_n(P_n) = \det \left\| (P_0P_i \cdot P_0P_k) \right\|, \quad i, k=0, 1, \dots, n \quad (5)$$

Vanishes

$$F_n(P_n) = 0 \quad (6)$$

The relations (4), (2), (6) are general geometric relations. They are valid in any generalized geometry  $G$  obtained as a result of deformation of GE. Deformation of GE into  $G$  is obtained at the replacement  $\sigma \rightarrow W$  in relations (4), (2), (6). Here  $\sigma$  is the world function of GE, and  $W$  is the world function of  $G$ .

There are the special relations of the  $n$ -dimensional proper Euclidean geometry, which have the form [2].

In the framework of metric conception geometrical objects are described in terms of world function, and one can recognize the same object in different space-time geometries.

In the framework of the metric conception any generalized geometry is obtained by replacement of the Euclidean world function  $\sigma$  by the world function  $W$  of the generalized geometry  $G$  in relations (4), (2), (6). Such a replacement in the special relations of GE is not produced, because these relations describe properties of the world function  $\sigma$  of GE.

The Riemannian geometry which is used as the most general geometry in the axiomatic conception cannot be described without a reference to a coordinate system. It is a defect of the

axiomatic conception with respect to the metric conception. One cannot identify the same geometric object in different space-time geometries described in the axiomatic conception. It is also a defect of the axiomatic conception. The set of physical space-time geometries is more powerful, than the set of Riemannian space-time geometries. It is also a defect of the axiomatic conception at its use as a space-time geometry.

In the general relativity, where the space-time geometry is determined by the matter distribution, one should use the metric conception for a description of the space-time geometry. A use of the metric conception leads to impossibility of the dark holes formation [3]. The reason of such an impossibility is the induced antigravitation, arising in the case, when the matter is very dense [4].

In the metric conception world line of a tachyon wobbles with infinite amplitude, and detection of a single tachyon is impossible. However, the tachyon gas forms the dark matter, and its gravitational influence can be detected [5, 6]. The metric conception of the space-time geometry solves easily the problem of the dark matter, which fails to be solved in the framework of the axiomatic conception.

## References

- [1] L. M. Blumenthal, Theory and Applications of Distance Geometry, Oxford, Clarendon Press, 1953.
- [2] Yu.A.Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002), (see also *ArXiv: math.MG/0103002* ).
- [3] Yu. A. Rylov, General relativity extended to non-Riemannian space-time geometry. *e-print /0910.3582v7*
- [4] Yu. A. Rylov, Induced antigravitation in the extended general relativity. *Gravitation and Cosmology*, Vol. 18, No. 2, pp. 107.112,( 2012).
- [5] Yu. A. Rylov, Tachyon gas as a candidate for dark matter, *Vestnik RUDN ser. Mathematics. Informatics, Physics* (2013), iss 2 pp.159-173 (In Russian)
- [6] Yu. A. Rylov, Dynamic equations for tachyon gas, *Int. J. Theor. Phys.* **52**, 133(10), 3683- 3695, (2013).
- [7] Yu.A.Rylov Logical reloading. What is it and what is a profit from it? *Int. J. Theor. Phys.* DOI: 10.1007/s10773.014.2039 .3

## ON A CLASS OF AXIALLY SYMMETRIC WAVE SOLUTIONS TO THE YANG-MILLS EQUATIONS

*A. S. Rabinowitch*

Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science, Moscow, Russia

E-mail: [rabial@mail.ru](mailto:rabial@mail.ru)

In the present work we study axially symmetric wave solutions to the Yang-Mills equations with  $SU(2)$  symmetry which play an important role in modern physics. These equations can be represented as [1, 2]

$$D_\mu F^{k,\mu\nu} \equiv \partial_\mu F^{k,\mu\nu} + g\varepsilon_{klm} F^{l,\mu\nu} A_\mu^m = (4\pi/c) J^{k,\nu}, \quad (1)$$

$$F^{k,\mu\nu} = \partial^\mu A^{k,\nu} - \partial^\nu A^{k,\mu} - g\varepsilon_{klm} A^{l,\mu} A^{m,\nu}, \quad (2)$$

where  $A^{k,\nu}$  and  $F^{k,\mu\nu}$  are potentials and strengths of a Yang-Mills field, respectively,  $k, l, m = 1, 2, 3$ ;  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ,  $J^{k,\nu}$  are three 4-vectors of source current densities,  $\varepsilon_{klm}$  is the antisymmetric tensor,  $\varepsilon_{123} = 1$ ,  $g$  is the constant of electroweak interactions,  $D_\mu$  is the Yang-Mills covariant derivative,  $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ ,  $x^\mu$  are space-time coordinates of the Minkowski geometry,  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ,  $t$  is time, and  $x, y, z$  are spatial rectangular coordinates.

The Yang-Mills equations (1)–(2) have the following consequence [1, 2]:

$$D_\nu J^{k,\nu} \equiv \partial_\nu J^{k,\nu} + g\varepsilon_{klm} J^{l,\nu} A_\nu^m = 0. \quad (3)$$

Let us examine Yang-Mills fields generated by macroscopic sources of the classical form

$$J^{k,\nu} = \Theta^k V^\nu, \quad (4)$$

where  $\Theta^k$  and  $V^\nu$  are source charge densities and 4-velocities of source points, respectively.

As is well known, the Yang-Mills equations (1)–(2) are covariant under rotations of the field sources  $J^{k,\nu}$  in the three-dimensional gauge space [1, 2]. Performing such gauge rotations, we can reduce the field sources (4) to the following form:

$$J^{1,\nu} = J^\nu, \quad J^{2,\nu} = J^{3,\nu} = 0, \quad (5)$$

where  $J^V$  is a classical 4-vector of current densities. It should be noted that the Yang-Mills equations (1)–(2) with the field sources of form (5) were investigated in Ref. [3].

From (3) with  $k=1$  and (5) we come to the differential equation of charge conservation

$$\partial_\nu J^V = 0. \quad (6)$$

Examine now non-Abelian waves propagated through axially symmetric sources of the following form conforming to (5):

$$\begin{aligned} J^{1,0} = j^0(\eta, \rho), \quad J^{1,1} = xj^1(\eta, \rho), \quad J^{1,2} = yj^1(\eta, \rho), \quad J^{1,3} = j^3(\eta, \rho), \\ J^{2,\nu} = J^{3,\nu} = 0, \\ \eta = \omega x^0 - z, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \omega = \text{const}, \end{aligned} \quad (7)$$

where  $j^\nu$  are some functions of the wave phase  $\omega x^0 - z$  and the radial coordinate  $\rho$ .

This problem was studied in Ref. [4]. In it axially symmetric wave solutions to the Yang-Mills equations (1)–(2) with the examined field sources (6) were sought in the form

$$A^{k,0} = u^k(\eta, \rho), \quad A^{k,1} = xv^k(\eta, \rho), \quad A^{k,2} = yv^k(\eta, \rho), \quad A^{k,3} = w^k(\eta, \rho). \quad (8)$$

Further we will use results obtained in our work [4].

First it should be noted that after substituting expressions (8) into formula (2), we find

$$\begin{aligned} F^{k,01} = xq^k(\eta, \rho), \quad F^{k,02} = yq^k(\eta, \rho), \quad F^{k,03} = s^k(\eta, \rho), \\ q^k = \omega v_\eta^k + (1/\rho)u_\rho^k - g\varepsilon_{klm}u^l v^m, \quad s^k = \omega w_\eta^k - u_\eta^k - g\varepsilon_{klm}u^l w^m, \end{aligned} \quad (9)$$

where  $u_\eta^k \equiv \partial u^k / \partial \eta$ ,  $u_\rho^k \equiv \partial u^k / \partial \rho$ , and also obtain

$$\begin{aligned} F^{k,12} = 0, \quad F^{k,13} = xh^k(\eta, \rho), \quad F^{k,23} = yh^k(\eta, \rho), \\ h^k = -(1/\rho)w_\rho^k - v_\eta^k - g\varepsilon_{klm}v^l w^m. \end{aligned} \quad (10)$$

Let us now substitute expressions (7)–(10) for the field sources, potentials, and strengths into the Yang-Mills equations (1). Then we come to the following system of equations:

$$\rho q_\rho^k + 2q^k - s_\eta^k - g\varepsilon_{klm}(\rho^2 q^l v^m + s^l w^m) = -(4\pi/c)j^0 \delta_k, \quad (11)$$

$$\omega q_\eta^k + h_\eta^k + g\varepsilon_{klm}(q^l u^m + h^l w^m) = (4\pi/c)j^1 \delta_k, \quad (12)$$

$$\omega s_\eta^k + \rho h_\rho^k + 2h^k + g\varepsilon_{klm}(s^l u^m - \rho^2 h^l v^m) = (4\pi/c)j^3 \delta_k, \quad (13)$$

where

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = \delta_3 = 0. \quad (14)$$

Consider the case of transversal non-Abelian waves in which the vector of energy flow is parallel to the direction  $z$  of the wave propagation. Then we should put

$$F^{k,03} = s^k = 0. \quad (15)$$

From (9) and (15) we have

$$(\omega w^k - u^k)_\eta - g \varepsilon_{klm} u^l w^m = 0. \quad (16)$$

Multiplying (16) by  $\omega w^k - u^k$  and summing the product over  $k$ , we find, taking into account the antisymmetry of  $\varepsilon_{klm}$ ,

$$\frac{d}{d\eta} \sum_{k=1}^3 (\omega w^k - u^k)^2 = 0. \quad (17)$$

Let us assume that the considered waves are absent and have zero potentials when  $\eta \leq 0$ . Then, as follows from (17), we have

$$u^k = \omega w^k. \quad (18)$$

From (9), (10), and (18) we obtain

$$q^k = -\omega h^k. \quad (19)$$

Substituting equalities (15), (18), and (19) into Eqs. (11)–(13), we come to the following system of equations:

$$j^0 = \omega j^3, \quad (20)$$

$$\rho h_\rho^k + 2h^k - g\rho^2 \varepsilon_{klm} h^l v^m = (4\pi/c) j^3 \delta_k, \quad (21)$$

$$(1 - \omega^2)(h_\eta^k + g \varepsilon_{klm} h^l w^m) = (4\pi/c) j^1 \delta_k. \quad (22)$$

It should be noted that the following sources  $j^0, j^3$  satisfy equality (20) which are the sum of the sources  $j_1^0, j_1^3$  and  $j_2^3, j_2^3$  with different signs of the charges of their carriers:

$$\begin{aligned} j^0 &= j_1^0 + j_2^0, & j^3 &= j_1^3 + j_2^3, \\ j_1^0 &= \alpha(\eta, \rho)[1 + \omega\beta_1(\eta, \rho)], & j_2^0 &= -\alpha(\eta, \rho)[1 - \omega\beta_2(\eta, \rho)], \\ j_1^3 &= j_1^0 \beta_2, & j_2^3 &= -j_2^0 \beta_1, \end{aligned} \quad (23)$$

where  $\alpha(\eta, \rho), \beta_1(\eta, \rho)$ , and  $\beta_2(\eta, \rho)$  are arbitrary functions.

Examine the system of equations (21) and (22) describing the transversal non-Abelian waves under consideration. Let us use equalities (3), (5), and (6). From them we readily find

$$\partial_\nu J^{1,\nu} = 0, \quad J^{1,\nu} A_\nu^2 = 0, \quad J^{1,\nu} A_\nu^3 = 0. \quad (24)$$



Taking into account (7) and (8), from (24) we obtain

$$\omega j_{\eta}^0 + \rho j_{\rho}^1 + 2j^1 - j_{\eta}^3 = 0, \quad (25)$$

$$j^0 u^k - \rho^2 j^1 v^k - j^3 w^k = 0, \quad k = 2, 3. \quad (26)$$

Owing to (5), we can choose a gauge rotation about the first axis in the gauge space so as to also fulfill equality (26) when  $k = 1$ . Then because of (18) and (20), Eq. (26) acquires the form

$$\rho^2 j^1 v^k + (1 - \omega^2) j^3 w^k = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (27)$$

Using equality (20) again, we can represent Eq. (25) as

$$\rho j_{\rho}^1 + 2j^1 = (1 - \omega^2) j_{\eta}^3. \quad (28)$$

Let us denote

$$f^k = \rho^2 h^k, \quad a = \rho^2 j^1 / (1 - \omega^2), \quad b = \rho j^3. \quad (29)$$

Using (29), we can rewrite equalities (27) and (28) as

$$a \rho v^k = -b w^k, \quad (30)$$

$$a_{\rho} = b_{\eta}. \quad (31)$$

Let us turn to Eqs. (21) and (22). Using (29), we can represent them in the form

$$f_{\rho}^k - g \rho \varepsilon_{klm} f^l v^m = (4\pi / c) b \delta_k, \quad (32)$$

$$f_{\eta}^k + g \varepsilon_{klm} f^l w^m = (4\pi / c) a \delta_k. \quad (33)$$

Consider Eqs. (30)–(33). From Eq. (30) we have

$$v^k = b \sigma^k, \quad w^k = -\rho a \sigma^k, \quad (34)$$

where  $\sigma^k = \sigma^k(\eta, \rho)$  are some functions.

Substituting (34) into Eqs. (32) and (33), we obtain

$$f_{\rho}^k = b \lambda_k, \quad f_{\eta}^k = a \lambda_k, \quad (35)$$

where

$$\lambda_k = (4\pi / c) \delta_k + g \rho \varepsilon_{klm} f^l \sigma^m. \quad (36)$$

Let us turn to solving Eqs. (35). From them we easily obtain

$$af_{\rho}^k - bf_{\eta}^k = 0. \quad (37)$$

Let us now show that Eqs. (37) have the following solutions:

$$f^k = \Phi^k(\xi), \quad \Phi^k(0) = 0, \quad \xi = \int_0^{\rho} b d\rho, \quad b = \rho j^3(\eta, \rho), \quad (38)$$

where  $\Phi^k(\xi)$  are arbitrary differentiable functions that should be zero when  $\xi = 0$  because of (29).

Indeed, from (38) we have, taking into account (31),

$$\xi_{\rho} = b, \quad \xi_{\eta} = \int_0^{\rho} b_{\eta} d\rho = \int_0^{\rho} a_{\rho} d\rho = a, \quad (39)$$

$$f^k = \Phi^k(\xi), \quad f_{\rho}^k = (d\Phi^k/d\xi)b, \quad f_{\eta}^k = (d\Phi^k/d\xi)a, \quad (40)$$

where it is used that because of (29),  $a = 0$  when  $\rho = 0$ .

From formulas (40) we easily come to equalities (37). Therefore, formulas (38) give solutions to Eqs. (37).

Because of the arbitrariness of the functions  $\Phi^k$ , the obtained formulas (38) give the general solutions to Eqs. (37), since they are partial differential equations of the first order.

Let us now substitute expressions (38) for the functions  $f^k$  and formulas (40) for their derivatives into Eqs. (35)–(36). Then these equations acquire the form

$$d\Phi^k/d\xi - g\rho\varepsilon_{klm}\Phi^l\sigma^m = (4\pi/c)\delta_k, \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = \delta_3 = 0, \quad (41)$$

where we have taken (14) into account.

Multiplying Eqs. (41) by  $\Phi^k$  and then summing them over  $k$ , we obtain, using the antisymmetry of  $\varepsilon_{klm}$ ,

$$\sum_{k=1}^3 \Phi^k d\Phi^k/d\xi = (4\pi/c)\Phi^1. \quad (42)$$

Besides (42), from Eqs. (41) we derive

$$\sigma^2 = \frac{1}{g\rho\Phi^1(\xi)} \frac{d\Phi^3}{d\xi} + \frac{\Phi^2(\xi)}{\Phi^1(\xi)} \sigma^1, \quad \sigma^3 = -\frac{1}{g\rho\Phi^1(\xi)} \frac{d\Phi^2}{d\xi} + \frac{\Phi^3(\xi)}{\Phi^1(\xi)} \sigma^1. \quad (43)$$

Using relations (9), (10), (15), (19), and (38), we come to the following formulas for the field strengths in the considered transversal waves:

$$F^{k,01} = -(\omega x / \rho^2) \Phi^k(\xi), \quad F^{k,02} = -(\omega y / \rho^2) \Phi^k(\xi), \quad F^{k,03} = 0, \quad (44)$$

$$F^{k,12} = 0, \quad F^{k,13} = (x / \rho^2) \Phi^k(\xi), \quad F^{k,23} = (y / \rho^2) \Phi^k(\xi), \quad (45)$$

$$\Phi^k(0) = 0, \quad \xi = \int_0^\rho j^3 d\rho, \quad j^3 = j^3(\omega x^0 - z, \rho), \quad (46)$$

where  $\Phi^k(\xi)$  are arbitrary differentiable functions satisfying relation (42) and equal to zero when  $\xi = 0$ .

The obtained formulas (44)–(46) describe the Yang-Mills field strengths  $F^{k,\mu\nu}$  for the considered class of transversal non-Abelian waves propagated at the constant phase velocity  $\omega c$  through field sources in the direction of their axis of symmetry  $z$ .

## REFERENCES

- [1] L.H. Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [2] L.D. Faddeev, A.A. Slavnov, Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory, Benjamin, London, 1990.
- [3] A. S. Rabinowitch, Nonlinear Physical Fields and Anomalous Phenomena, Nova Science Publishers, New York, 2009.
- [4] A.S. Rabinowitch, New wave solutions of the Yang-Mills equations with axially symmetric Sources, International Journal of Advanced Mathematical Sciences 1 (2013) 109-121.

## ON THE HOMOTOPY PERTURBATION METHOD IN COSMOLOGY

V. K. Shchigolev

*Department of Theoretical Physics, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk 432000, Russia*

The basic equation governing dynamics of the cosmic evolution is known as the Friedmann equation. Since this equation is relevant to many cosmological models, any approach to its solving is always of great interest. The homotopy perturbation method was first proposed by Dr. Ji-Huan He [1-3] for solving differential and integral equations. This method has been extensively studied over a number of years and successfully developed by numerous authors. As well known, this method is a combination of homotopy in topology and classic perturbation techniques. The HPM has a significant advantage in that it provides an analytical approximate solution to a wide range of nonlinear problems in applied sciences.

Applications of the HPM cover the nonlinear differential equations, nonlinear integral equations, nonlinear differential-integral equations, difference-differential equations, and fractional differential equations. It has been shown that this method allows us to solve effectively, easily, and accurately a large class of nonlinear problems, and generally one or two iterations can lead to highly accurate solutions. The HPM yields a very rapid convergence of the solution series in most cases considered so far in literature. In the present work, we show that the usage of this method in cosmology also can provide good results where obtaining the exact analytical solutions is basically impossible [4].

The Einstein's field equations with a constant  $\Lambda$  - term can be written as

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = T_{ik},$$

where we assume that the gravity coupling constant  $8\pi G = 1$  for the sake of simplicity. All other symbols have their usual meanings. Considering the matter as a perfect fluid with the energy density  $\rho_m$  and pressure  $p_m$ , we have the following tensor of energy-momentum (TEM) of matter  $T_{ik} = (\rho_m + p_m)u_i u_k - p_m g_{ik}$ , where  $u_i = (1, 0, 0, 0)$  is 4-velocity of the co-moving observer, satisfying  $u_i u^i = 1$ . The line element of a spatially flat FRW space-time can be represented by  $ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ , where  $a(t)$  is a scale factor of the Universe. Given this metric, we can reduce the field equation to the following set:

$$3H^2 = \rho_m + \Lambda, \quad 2\dot{H} + 3H^2 = -p_m + \Lambda,$$

where  $H = \dot{a} / a$  is the Hubble parameter, and the overdot stands for differentiation with respect to cosmic time  $t$ . The continuity equation is  $\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0$ . Integrating this equation for a constant equation of state (EoS) parameter  $w_m = p_m / \rho_m$ , we have  $\rho_m = \rho_{m0} a^{-3(1+w_m)}$ , where  $\rho_{m0}$  is a constant of integration. By substitution of this result into the Friedmann equation along with the Hubble parameter, we obtain the following main equation of the model:  $\dot{a}^2 = H_\Lambda^2 [\Omega_{m\Lambda} a^{-(1+3w_m)} + a^2]$  where  $H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$ ,  $\Omega_{m\Lambda} = \frac{\rho_{m0}}{\rho_\Lambda} = \frac{\rho_{m0}}{3H_\Lambda^2}$  is the dimensionless density parameter of matter, and  $\rho_\Lambda = \Lambda/3$  is the vacuum energy density. By introducing the dimensionless cosmic time  $\tau = H_\Lambda t$ , the Friedmann equation becomes  $a'^2 = \Omega_{m\Lambda} a^{-(1+3w_m)} + a^2$ , where the prime stands for the derivative with respect to  $\tau$ . The Friedmann equation (10) is substantially non-linear, with the exception of the obvious case of quasi-vacuum EoS,  $w_m = -1$ . So hereinafter we are interested in the EoS of matter  $w_m \neq -1$ .

As a test example we consider the case of FRW cosmology with the only form of matter represented by the pressureless dust. The EoS of such a matter is known as  $w_m = 0$ . Therefore, the Friedmann equation after multiplying by the scale factor  $a$  becomes as follows:  $a a'^2 = \Omega_{m\Lambda} + a^3$ . The exact solution to this equation can be readily found in the form

$$a_{exact}(\tau) = \left[ \Omega_{m\Lambda} \cdot \sinh^2 \left( \frac{3}{2} \tau \right) \right]^{1/3}.$$

Now on, we consider the HPM of solving equation (16). For this end, we suppose the following homotopy  $a a'^2 - a^3 - p \Omega_{m\Lambda} = 0$ ,  $p \in [0,1]$ , and assume that the solution of (16) can be expressed as a series in  $p$  by  $a(\tau) = a_0(\tau) + p a_1(\tau) + p^2 a_2(\tau) + \dots$

The initial condition  $a_0(0)$  can be freely chosen. Here we set  $a_0(0) = -a_1(0) = \tilde{a}_0 = const. \neq 0$  and  $a_i(0) = 0$ , where  $i > 1$ . The substitution of (19) into equation (18) yields

$$\begin{aligned} p^0 : a_0 a_0'^2 - a_0^3 &= 0, \\ p^1 : 2a_0 a_0' a_1' + (a_0'^2 - 3a_0^2) a_1 - \Omega_{m\Lambda} &= 0, \\ p^2 : 2a_0 a_0' a_2' + (a_0'^2 - 3a_0^2) a_2 + a_0 a_1'^2 - 3a_0 a_1^2 + 2a_1 a_0' a_1' &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

It is noteworthy that we obtain the set of linear equations. Their solutions with the initial conditions given above can be readily found as  $a_0(\tau) = \tilde{a}_0 e^\tau$ ,  $a_1(\tau) = \tilde{a}_0 e^\tau [\tilde{\Omega}_m (1 - e^{-3\tau}) - 1]$ ,  $a_2(\tau) = \tilde{a}_0 e^\tau \left[ \frac{7}{6} \tilde{\Omega}_m (1 - \tilde{\Omega}_m) (1 - e^{-3\tau}) + \frac{1}{4} \tilde{\Omega}_m^2 (1 - e^{-6\tau}) \right]$ , where and below  $\tilde{\Omega}_m = \Omega_{m\Lambda} / 6\tilde{a}_0^3$ .

In accordance with the HPM, it follows that the solution is given by

$$a(\tau) = \frac{\tilde{a}_0}{12} e^\tau \left[ \left( 26 - 11\tilde{\Omega}_m \right) \tilde{\Omega}_m - 2 \left( 13 - 7\tilde{\Omega}_m \right) \tilde{\Omega}_m e^{-3\tau} - 3\tilde{\Omega}_m^2 e^{-6\tau} - \dots \right].$$

In order to determine the free parameter  $\tilde{a}_0$  in this solution, let us compare (27) with a series expansion of the exact solution (17) in  $\exp(-2\tau)$  represented by

$$a_{exact}(\tau) = \sqrt[3]{\frac{\Omega_{m\Lambda}}{4}} e^\tau \left[ 1 - \frac{2}{3} e^{-3\tau} - \frac{1}{9} e^{-6\tau} - \dots \right].$$

If we put, for example,  $\Omega_{m\Lambda} = 4, \Rightarrow \tilde{\Omega}_m = 2/3\tilde{a}_0^3$  for the sake of simplicity, then we can rewrite the HPM solution as follows

$$a(\tau) = \tilde{a}_0 e^\tau \left[ \frac{1}{18\tilde{a}_0^3} \left( 26 - \frac{22}{3\tilde{a}_0^3} \right) - \frac{1}{9\tilde{a}_0^3} \left( 13 - \frac{14}{3\tilde{a}_0^3} \right) e^{-3\tau} - \frac{1}{9\tilde{a}_0^6} e^{-6\tau} - \dots \right].$$

As can be seen from the behavior of the HPM solution in time compared with the exact solution, this solution approaches the exact solution in a much greater degree than the last approximate solution of the same order. It should be emphasized that in the HPM solution we are able to fine-tune the model by means of the free parameter  $\tilde{a}_0$ . One can see that a fairly high degree of accuracy is achieved in solving the Friedmann equation by the HPM, even by means of two iterations.

Let us now consider the model with the dust and a quentessence ( $w_q < -1/3$ ). For example, we put  $w_q = -2/3$ . Then we can obtain the following Friedmann equation:  $a a'^2 = \Omega_{m\Lambda} + \Omega_{q\Lambda} a^2 + a^3$ , where  $\Omega_{m\Lambda} = \rho_{q0} / 3H_\Lambda$ . This Friedmann equation can be solved only in quadratures, and does not have an exact analytical solution. So the attempt to solve this equation with the HPM and a comparison of it with the corresponding numerical solution are of certain interest.

In this case, we suppose the following homotopy:  $a a'^2 - a^3 - p(\Omega_{m\Lambda} + \Omega_{q\Lambda} a^2) = 0$ ,  $p \in [0,1]$ , and assume that the solution can be expressed as a series in  $p$ . Here, we set  $a_0(0) = \tilde{a}_0 = const. \neq 0$  and  $a_i(0) = 0$ , where  $i \neq 0$ . As a result, we have

$$p^0 : a_0'^2 - a_0^2 = 0,$$

$$p^1 : 2a_0 a_0' a_1' + (a_0'^2 - 3a_0^2) a_1 - \Omega_{m\Lambda} - \Omega_{q\Lambda} a_0^2 = 0,$$

$$p^2 : 2a_0 a_0' a_2' - 2a_0^2 a_2 + a_0 (a_1'^2 - 3a_1^2) + 2a_0' a_1 a_1' - 2\Omega_{q\Lambda} a_0 a_1 = 0.$$

It is easy to obtain the exact solutions as follows

$$a_1(\tau) = \tilde{a}_0 e^\tau \left[ \tilde{\Omega}_q (1 - e^{-\tau}) + \tilde{\Omega}_m (1 - e^{-3\tau}) \right], \quad a_2(\tau) = e^\tau \left[ - (2\tilde{a}_0 \tilde{\Omega}_q - 1) (\tilde{\Omega}_q + \tilde{\Omega}_m) (1 - e^{-\tau}) + \frac{\tilde{\Omega}_q}{4} (3\tilde{a}_0 \tilde{\Omega}_q - 2) (1 - e^{-2\tau}) - 2\tilde{a}_0 \tilde{\Omega}_m (\tilde{\Omega}_q + \tilde{\Omega}_m) (1 - e^{-3\tau}) - \frac{\tilde{\Omega}_m}{4} (5\tilde{a}_0 \tilde{\Omega}_q + 1) (1 - e^{-4\tau}) + \frac{\tilde{a}_0 \tilde{\Omega}_m^2}{4} (1 - e^{-6\tau}) \right],$$

where  $\tilde{\Omega}_q = \Omega_{q\Lambda} / 2\tilde{a}_0$ , and the initial condition  $a_1(0) = a_2(0) = 0$  is applied. As a result, the approximate solution of the Friedmann equation is given by

$$a(\tau) = e^\tau \left( A_0 + A_{-1} e^{-\tau} + A_{-2} e^{-2\tau} + A_{-3} e^{-3\tau} + A_{-4} e^{-4\tau} + A_{-6} e^{-6\tau} \right),$$

where

$$A_0 = \tilde{a}_0 (\tilde{\Omega}_q + \tilde{\Omega}_m + 1) + \frac{(2\tilde{\Omega}_q + 3\tilde{\Omega}_m)}{4} - \frac{\tilde{a}_0}{4} (5\tilde{\Omega}_q^2 + 21\tilde{\Omega}_q\tilde{\Omega}_m + 7\tilde{\Omega}_m^2),$$

$$A_{-1} = (2\tilde{a}_0\tilde{\Omega}_q - 1)(\tilde{\Omega}_q + \tilde{\Omega}_m) - \tilde{a}_0\tilde{\Omega}_q, \quad A_{-2} = -\frac{1}{4}\tilde{\Omega}_q(3\tilde{a}_0\tilde{\Omega}_q - 2),$$

$$A_{-3} = \tilde{a}_0\tilde{\Omega}_m(2\tilde{\Omega}_q + 2\tilde{\Omega}_m - 1), \quad A_{-4} = \frac{1}{4}\tilde{\Omega}_m(5\tilde{a}_0\tilde{\Omega}_q + 1), \quad A_{-6} = -\frac{1}{4}\tilde{a}_0\tilde{\Omega}_m^2.$$

As an illustrative example, we can set  $\Omega_{m\Lambda} = 0.4$ ,  $\Omega_{q\Lambda} = 1/35$ . For these values of the relative densities of matter and, for example,  $\tilde{a}_0 = 1.1$ , one can find from (39) that  $A_0 = 1.204623506$ ,  $A_{-2} = 0.006354359928$ ,  $A_{-3} = -0.04814604228$ ,  $A_{-4} = 0.01341633573$ ,  $A_{-6} = -0.0006899125812$ . The graphs of  $a(\tau)$  for the numerical solution and the HPM solution are plotted in Fig. 1.

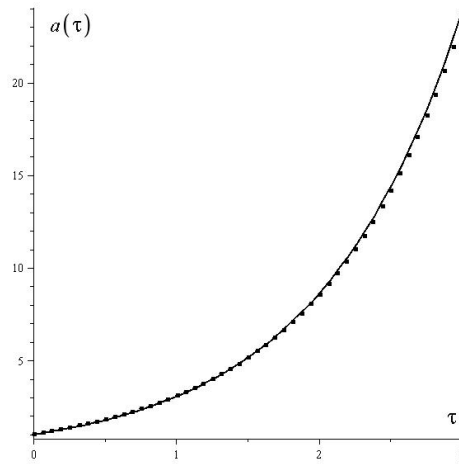


Figure 1. The scale factor  $a(\tau)$  is shown for the numerical solution with  $a_0(0) = 1$  (dotted line), obtained with the help of Maple, and for the HPM solution with  $\tilde{a}_0 = 1.1$  (solid line).

It can be seen that two lines which describe the numerical solution and the approximate solution (with  $\tilde{a}_0 = 1.1$ ) look almost identical. It is quite remarkable that the further and better approximation could be achieved by means of the further fine-tuning of  $\tilde{a}_0$ .

Given the analytical solution obtained here, we are able now to study this model further. It is not our aim here to consider all its features in detail. Note only that one can obtain almost all parameters of the model by means of the Hubble parameter  $H = \dot{a} / a$ . From our HPM solution,

it is easy to derive the following equation for the Hubble parameter:

$$H(\tau) = H_{\Lambda} \frac{A_0 - \sum_{n=2}^4 (n-1) A_{-n} e^{-n\tau} - 5 A_{-6} e^{-6\tau}}{A_0 + \sum_{n=1}^4 A_{-n} e^{-n\tau} + A_{-6} e^{-6\tau}}.$$

Hence we can see that  $H(\tau \rightarrow \infty) = H_{\Lambda}$

Thus, the results of the present work reveal that the HPM is very effective and simple for obtaining approximate solutions of the Friedmann equation in cosmology.

- [1] J. H. He, A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems, *Int. J. Nonlinear Mech.*, 35, No. 1, 37–43, 2000.
- [2] J.H. He, Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique, *Appl. Math. Comput.*, Vol. 135, 73–79, 2003.
- [3] J.H. He, Some Asymptotic Methods for Strongly Nonlinear Equations, *Int.J.Mod.Phys.B*, Vol. 20, No. 10, 1141-1199, 2006.
- [4] V. K. Shchigolev, *Universal Journal of Applied Mathematics* 2(2): 99-103, 2014.



## ROTATION OF AN ELASTIC SPHERE ABOUT ITS MASS CENTRE IN THE GRAVITATIONAL FIELD OF TWO ATTRACTING CENTRES

Baranova E.Y., Vilke V.G.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

There is a model problem of the Earth as an elastic uniform sphere moving in the gravitational field of two particles the Moon and the Sun. We suppose that the Sun is fixed and the centre of the Earth moves around the Sun in the circular orbit and the Moon moves around the Earth's centre in the circular orbit too. The Earth deformations are determined by centrifugal forces of inertia and gravitational forces of attraction of two particles the Moon and the Sun. The problem of this research is to determine a rotation law of the deformable sphere (the Earth) about its mass centre.

In the problem there is a small parameter inversely proportional to the coefficient of elasticity of the sphere. As a result it appears that the sphere deformations due to centrifugal forces of inertia and gradient field of gravitational forces are small.

Deformed state of the sphere is determined under the motion separation method as a solution of the quasistatic problem of elasticity theory [1,2].

The sphere deformations field is considered as a sum of four displacement fields

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \sum_{k=1}^4 \mathbf{u}_k(\mathbf{r}, t).$$

Here  $\varepsilon$  is the small parameter. The displacement fields  $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$  and  $\mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t)$  are produced by the gravitational fields of the Moon and the Sun and named by tidal deformations. The displacement field  $\mathbf{u}_3(\mathbf{r})$  is permanent and it appears because of the inertia centrifugal forces field acting under the sphere rotation and determines the sphere compressing. The permanent field  $\mathbf{u}_4$  corresponds to spherically symmetric deformation of the sphere.

At first we consider disturbed motion of the deformable sphere without regard for the influences of the Moon and the Sun. The motion equations describe regular precession like the one in the Euler case of the inertial motion of the symmetrical solid body. In the case of the Earth this motion occurs with the constant angular velocity and has the Chandler term  $T_c = 428$  days [3].

After substitution the Earth's values for the expression of the sphere comparative compressing due to centrifugal forces under the rotation equivalent magnitudes of the coefficient of elasticity and Poisson ratio are found.

Then influence of the Moon and the Sun is considered. The moment of the external forces acting at the points of the deformed sphere is caused by the field of the gravitational forces of the attraction of the two particles the Moon and the Sun. The potential energy of the gravitation

forces is the integral over the sphere of the specific potential of gravitational forces. Satellite approach of the gravitational potential is used in the problem [4].

The shape of the sphere changes under the influence of the field of centrifugal forces. As a result the sphere deformations are occurred and the inertia tensor of the deformed sphere is axisymmetric relative to the axis of rotation.

The sphere inertia tensor which components depend on time is found.

Perturbation of angular velocity is also found. The changes of the first and second projections are the superposition of the oscillations with Chandler term 428 days and oscillations with twenty-four hours period, their amplitudes change with the period half a month and half a year. The third projection of the angular velocity disturbance is the sum of the constant and periodic additives with the periods half a month and half a year. All this corresponds to the real values of the angular velocity of the Earth rotation [3].

The represented model doesn't consider disturbances under seasonal climatic conditions and dynamics of the atmosphere.

#### References

[1] Vilke V.G. Motion of an elastic sphere in the central Newtonian field. PMM. 1980. V.44. Issue 3. P. 395-402.

[2] Vilke V.G., Shatina A.V. On combined reciprocating and rotating motion of an elastic sphere in the gravitational field of an attracting centre and a satellite. Cosmic research, 2004, v. 42, №1. P. 95-106

[3] Sydorenkov N.S. Physics of the Earth rotation instabilities. M.: Phismathlit. 2002. 384 p.

[4] Beletcky V.V. Satellite motion relative to its centre mass in the gravitational field. M.: MSU. 1975. 308 p.

## STABILIZATION OF OSCILLATIONS IN THE MODEL CONTAINING THREE COUPLED SUBSYSTEMS

Valentin N. Tkhai, Ivan N. Barabanov

Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Consider the model containing three coupled subsystems of the second order [1]. We suppose that each of generating subsystems admit a family of periodic solutions. Each subsystem is assumed to operate in the ordinary mode [2] at the point of interest (the main oscillations mode of the MCCS)

In the frame of MCCS concept we can state two kinds of stabilization problems: 1) to stabilize oscillations of the set of generating subsystems by small periodic coupling controls; 2) to stabilize the oscillations of MCCS itself.

Both problems are solved on the base of stability conditions for MCCS. Those stability conditions for the MCCS containing three subsystems of the second order are found in explicit form and are based on the analysis of Lyapunov exponents of the MCCS.

The obtained results can be applied to stabilize various systems, such as chains of mechanical oscillators, wind turbine, coupled pendulums, etc.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Researches (13-01-00347a, 13-01-00376a) and by the Program 14 of the Branch of Power Engineering, Industrial Engineering, Mechanics, and Control Processes of Russian Academy of Sciences.

### References:

1. V.N. Tkhai. The Model Containing Coupled Subsystems // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 6. P. 919--931.
2. V.N. Tkhai. The Period on a Family of Nonlinear Oscillations and Periodic Motions of a Perturbed System at a Critical Point of the Family // J.Appl. Math. Mech. 2010. V. 74. No. 5. P. 579--586.

## THE MODEL CONTAINING THREE COUPLED SUBSYSTEMS: EXISTENCE OF OSCILLATIONS IN THE MAIN MODE

Valentin N. Tkhai, Ivan N. Barabanov

Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The model containing coupled subsystems (MCCS) is introduced in [1] to describe systems encountered in nature, engineering, etc. The model is described by a system of ordinary differential equations (ODE), where subsystems are autonomous ODEs. The coupling between subsystems is characterized by a numeric parameter  $\varepsilon$ , the subsystems becoming independent as  $\varepsilon = 0$ . The N-planet problem serves as an example of the MCCS with single-leveled subsystems. In this paper we consider the MCCS that contains three subsystems at a single level. The subsystems are supposed to operate in the ordinary mode. The problem existence of oscillations is solved.

Consider the MCCS that consists of three subsystems of second order. Each subsystem is supposed to admit a family of oscillations with period depending on a single parameter [2]. In the point of interest each subsystem operates in the ordinary mode, i.e. the derivative of the period with respect to parameter is nonzero. The mode when all subsystems operate in the ordinary mode is called the main mode of oscillations of MCCS.

In order to determine necessary and sufficient conditions for oscillations to exist a special system of amplitude equations is constructed. Those conditions are formulated in terms of the existence of a simple solution.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Researches (13-01-00347a, 13-01-00376a) and by the Program 14 of the Branch of Power Engineering, Industrial Engineering, Mechanics, and Control Processes of Russian Academy of Sciences.

### References:

1. V.N. Tkhai. The Model Containing Coupled Subsystems // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 6. P. 919--931.
2. V.N. Tkhai. The Period on a Family of Nonlinear Oscillations and Periodic Motions of a Perturbed System at a Critical Point of the Family // J.Appl. Math. Mech. 2010. V. 74. No. 5. P. 579--586.

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ МЕХАНИКИ НЬЮТОНА: ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Владимир В. Кассандров, Илдус Ш. Хасанов

Email: vkassan@rambler.ru, khasanov@sci.pfu.edu.ru

*Институт гравитации и космологии, Российский университет дружбы народов, Москва*

### Abstract

In development of the old ideas of Stueckelberg-Wheeler-Feynman on “one-electron Universe”, we define trajectories of motions of the ensemble of (two kinds of) identical point-like particles by the algebraic system of implicit equations. We choose the polynomial form of the functions which define a single “worldline” and represent by their roots (real and complex conjugate) a model for dynamics of particles. The dynamics includes events of “merging” of some two particles modelling the processes of annihilation/creation. Correlations in the location and motion of the particles-roots relate, in particular, to the Vieta's formulas. Analyzing these relations we found that this algebraic construction reproduces by itself the general structure of Newtonian mechanics including almost the complete set of the canonical conservation laws.

В представляемом подходе, основанном на идеях *алгебродинамики*, вместо стандартного параметрического способа задания мировой линии в виде  $x_\alpha = f_\alpha(t)$ , мы [1,2] используем ее *неявное* задание системой 3-х алгебраических уравнений, включающих также параметр эволюции  $t$  — абсолютное ньютоновское время:

$$F_\alpha(x_1, x_2, x_3, t) = 0, \alpha = 1, 2, 3. \quad (1)$$

При этом для фиксированного значения параметра  $t$  система (1) имеет, вообще говоря, счетный набор решений  $x_\alpha(t)$ , множество которых описывает положение и динамику целого ансамбля частиц на одной и той же мировой линии и реализует тем самым концепцию «одноэлектронной Вселенной» Уилера-Фейнмана-Штюкельберга [3,4].

В качестве генерирующих функций для системы (1) выбираются *полиномы* с вещественными коэффициентами, что позволяет при любом  $t$  определить *полное число корней* (и ассоциируемых с ними частиц) над полем  $\mathbb{C}$ . При этом частицы будут представлены двумя типами, с координатами, соответствующими чисто вещественным (R-частицы) или комплексно-сопряженным корням (C-частицы) генерирующей системы. На вещественном срезе 3-мерного пространства имеем множество *несвязных* ветвей траекторий и богатую динамику, воспроизводящую, в частности, процессы аннигиляции/рождения при слиянии пары вещественных корней с их последующим переходом в комплексно-сопряженную пару, и обратно. Помимо того, именно полиномиальный вид исходных функций позволяет с помощью известных *формул Виета* выявить корреляции между положениями и динамикой корней-частиц (см. ниже).

По-видимому, впервые рассмотрел динамику корней полинома Гаусс [5]. В 1836 г. он показал, что все нули *производной* произвольного комплексного полинома, отличные от кратных корней самого полинома, являются положениями равновесия для эффективного радиального поля сил, создаваемого частицами, расположенными в точках  $\mathbb{C}$ -плоскости, отвечающих корням самого полинома; при этом каждая частица создает силу, обратно пропорциональную расстоянию. В дальнейшем задачу динамики корней полиномов рассматривали многие авторы (см. например [6]), но общая теория до сих пор отсутствует.

Для упрощения мы ограничивались случаем *плоского* движения. Рассматривая временной параметр  $t$  на равных правах с координатами  $x$  и  $y$ , мы также предполагали полиномиальную зависимость генерирующих уравнений от времени. Тогда, в невырожденном случае, соответствующая система уравнений может быть представлена в виде

$$\begin{cases} F_1(x, y, t) = \sum_{k=0}^n \sum_{i,j,s}^{i+j+s=k} A_{ijs}^k x^i y^j t^s \\ F_2(x, y, t) = \sum_{k=0}^m \sum_{i,j,s}^{i+j+s=k} B_{ijs}^k x^i y^j t^s \end{cases}, \quad (2)$$

где коэффициенты  $A_{ijs}^k$  и  $B_{ijs}^k$  есть просто вещественные константы.

Для исследования и нахождения всех корней системы (2) использовался метод *результантов* [7]. Исключая одну из переменных  $x$  и  $y$  с помощью вычисления результатантов, приходим к двум полиномиальным уравнениям степени  $N = mn$ , каждое из которых зависит лишь от одной из координатных переменных и параметра эволюции  $t$ :

$$R_y(x, t) = a_0 x^N + a_1 x^{N-1} + \dots + a_N \quad (3)$$

$$R_x(y, t) = b_0 y^N + b_1 y^{N-1} + \dots + b_N,$$

где в коэффициентах  $a_0 = \text{const}$ ,  $a_1 \sim t$ , ...,  $a_N \sim t^N$  соблюдается линейный закон возрастания по  $t$  и аналогично для  $b_i, i = 0 \dots N$  (см. [8]).

Находя при фиксированном параметре  $t = t_0$  все  $N$  корней (над  $\mathbb{C}$ ) каждого из результатантов ([3]) и сопоставляя их в пары с учётом (2), находим все  $N$  корней этой исходной системы.

Сведение исходной 2D системы к *одномерным* полиномиальным уравнениям вида (3) позволяет применить к анализу корреляций в положении и динамике различных частиц известные *формулы Виета*.

В частности, первая (линейная по корням) формула Виета запишется в виде:

$$\sum x_k = - \frac{a_1(t)}{a_0} = A(t) \quad (4)$$

$$\sum y_k = - \frac{b_1(t)}{b_0} = B(t)$$

В правых частях, в силу вышесказанного, величины  $A(t), B(t)$  линейно зависят от времени. Очевидно, что  $A(t), B(t)$  можно рассматривать как координаты *центра масс* для замкнутой системы  $N$  частиц одинаковой массы ( $m_1 = m_2 = \dots = m_N$ ). Поэтому для любой (невырожденной) системы полиномиальных уравнений центр масс соответствующей ее решениям системы частиц движется *прямолинейно и равномерно*.

Дифференцируя данные соотношения, находим, что проекции скоростей частиц  $\sum \dot{x}_i(t)$  и  $\sum \dot{y}_i(t)$  сохраняются, что соответствует *закону сохранения импульса* для частиц одинаковой массы. Важно, что сохранение полного импульса имеет место лишь при учёте второго типа частиц, отвечающих комплексно-сопряженным корням системы (2). Дифференцируя полученные соотношения повторно, в качестве следствия получаем "ослабленную" версию 3-го закона Ньютона: сумма мгновенных ускорений всех частиц в

системе (или, эквивалентно, результирующих сил, действующих на все частицы) постоянна и равна нулю.

Аналогично рассматривался вопрос о законах сохранения, связанных с "высшими" (нелинейными по корням) формулами Виета. Действительно, в соответствующих формулах степени  $J=1, \dots, N-1$  правые части представляют собой полиномы степени  $J$  по  $t$ . Поэтому, после  $J$  дифференцирований по времени, каждая из формул Виета приводит к некоторой *не зависящей от времени* связи между положениями различных частиц и их производными высших порядков по времени.

Для перехода отсюда к обычной форме законов сохранения, воспользовавшись *тождествами Ньютона*, получим "модифицированные" формулы Виета, левые части которых представляют собой суммы  $J$ -ых степеней координат  $x$  или  $y$  всех корней системы (2), а правые — полиномы по  $t$  степени  $J$ . После  $J$  дифференцирований по  $t$ , получаем прямые аналоги законов сохранения, первый из которых (при  $J=1$ ) — это рассмотренный выше закон сохранения импульса.

Заметим, что интерес представляют, по-видимому, только комбинации сохраняющихся величин, имеющих правильные трансформационные свойства при преобразованиях группы вращений. С этой точки зрения, только квадратичные формулы Виета имеют непосредственное физическое значение, приводя к SO(2)-инвариантному закону сохранения вида

$$\sum [v_i^2(t) + \vec{a}_i(t)\vec{r}_i(t)] = const, \quad (4)$$

где  $\vec{r}_i(t)$ ,  $\vec{v}_i(t)$ ,  $\vec{a}_i(t)$  — мгновенные радиус-векторы, скорости и ускорения отдельных частиц.

Формула (4) представляет собой «усиленную» версию известной *теоремы вириала* классической механики, где, однако, она справедлива только для усредненных по периоду финитных движений значений.

Заметим, что при условии существования разложения результирующего ускорения (силы) на попарные и потенциальные (возможность чего в контексте общей «полиномиальной динамики» пока не доказана и даже не очевидна), эта формула оказывается тесно связанной с каноническим *законом сохранения полной механической энергии*.

Что касается третьего канонического и SO(2)-ковариантного закона сохранения «полного момента импульса», он также, по-видимому, имеет место для произвольной (невырожденной) системы полиномиальных уравнений. Это не удастся, к сожалению, доказать в общем виде (поскольку неизвестно прямое 2D-обобщение формул Виета), однако, становится «практически достоверным» после рассмотрения многочисленных примеров полиномиальной динамики с различными степенями  $n$  и  $m$ , в которых, с использованием специальной процедуры, величина полного момента *вычислялась точно*, не прибегая к численному нахождению корней соответствующей системы уравнений. Более того, для некоторых частных случаев найдены соответствующие «феноменологические» формулы для величины полного момента импульса.

Вышеописанные свойства единой «полиномиальной динамики» проиллюстрированы на примере *случайно выбранной* генерирующей системы с полиномами степени  $n=7$ ,  $m=5$ , определяющей динамику "замкнутой" механической системы из 35 частиц двух типов, включая взаимные переходы R- и C- частиц друг в друга. Рассмотрен также пример 3-х

мерной полиномиальной динамики, соответствующей решениям системы 3-х уравнений с полиномами степеней  $n=3$ ,  $m=2$ ,  $k=2$  и описывающей, соответственно, 12 частиц двух различных типов. Полный импульс, момент импульса и аналог полной механической энергии (5) системы частиц в каждом из примеров сохраняются и были вычислены точно.

Демонстрируется также компьютерная анимация самосогласованной динамики обоих типов частиц, восстановленная путем численного вычисления всех решений генерирующих уравнений с помощью системы компьютерной алгебры “Mathematica 9”.

### Список литературы

- [1] Kassandraov V V Khasanov I Sh *Algebraic roots of Newtonian mechanics: correlated dynamics of particles on a unique worldline*. 2013 J. Phys. A:Math. Theor. **46** 175—206 (arXiv:1211.7002 [physics.gen-ph])
- [2] Kassandraov V V Khasanov I Sh Markova N V *Algebraic Dynamics on a Single Worldline: Vieta Formulas and Conservation Laws*. 2014 Vestnik RUDN. Math., Inform., Phys. **2** (arXiv:1402.6158 [math-ph])
- [3] Feynman R P *Nobel Lecture*. 1966 Phys. Today **19** (8) 31—45
- [4] Stueckelberg E C G *Remarque à propos de la création de paires de particules en théorie de relativité*. 1941 Helv. Phys. Acta **14** 588
- [5] Prasolov V V, 2004 *Polynomials*, Springer, Berlin
- [6] Khovanskii A G, 1991 *Fewnomials*, Providence: Amer. Math. Soc., Translations of Math. Monographs **88** 140p.
- [7] Dolotin V Morozov A, 2007, *Introduction to Non-Linear Algebra*, World Sci., Singapore (arXiv: hep-th/0609022)
- [8] Калинина Е А и Утяшев А Ю, 2002, *Теория исключения*, НИИ химии СПбГУ, СПб



## АТОМ ВОДОРОДА И ГЕОМЕТРИИ ДЕ СИТТЕРА

О.В. Веко<sup>1</sup>, О.В. Казмерчук<sup>1</sup>, Е.М. Овсиюк<sup>1</sup>, В.М. Редьков<sup>2</sup><sup>1</sup>УО «Мозырский Государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина», Мозырь, Беларусь<sup>23</sup>Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси

**1. Введение.** В работе исследуется влияние геометрий де Ситтера на квантово-механическое описание атома водорода на основе уравнения Клейна--Фока--Гордона. Анализируются оба случая геометрий: де Ситтера  $dS$  и анти де Ситтера  $AdS$ . В случае пространства  $dS$  проведен качественный анализ классического выражения для квадрата обобщенного радиального импульса. Уравнение  $p^2=0$  сводится к полиному четвертой степени, характер расположения корней полинома говорит, что существует режим трех положительных вещественных корней и одного отрицательно вещественного корня, который отвечает ситуации нахождения частицы в эффективной потенциальной яме с расположенной справа конечно запрещенной для классического движения областью, и далее существует область разрешенная для классического движения. Другими словами, геометрия де Ситтера интересна тем, что атом водорода оказывается здесь принципиально нестабильной квантово-механической системой, частица может туннелировать из потенциальной ямы через потенциальный барьер в область далекую от места расположения центрального заряда. Соответствующее квантово-механическое уравнение сведено к уравнению типа Гойна с 4-мя особыми точками; некоторый предварительный анализ возможных решений выполнен. Найдены приближенные значения корней полинома 4-й степени, на этой основе вычислены основной член и первая по кривизне поправка к уровням энергии (вещественной части уровней); оценена вероятность распада системы. Аналогичное исследование выполнено для случая пространства  $AdS$ : Проведен качественный анализ классического выражения для квадрата обобщенного радиального импульса; уравнение  $p^2=0$  также сводится к полиному четвертой степени. Характер расположения корней полинома говорит, что возможен только режим двух положительных вещественных корней и двух отрицательных, который отвечает ситуации нахождения частицы в эффективной потенциальной яме с расположенной справа запрещенной для классического движения областью вплоть до бесконечности. Другими словами, атом водорода оказывается здесь стабильной системой. Соответствующее квантово-механическое уравнение сведено к уравнению типа Гойна с 4-мя особыми точками; некоторый предварительный анализ возможных решений выполнен.

**2. Пространство де Ситтера.** Рассмотрим уравнение Клейна-Фока-Гордона с кулоновским потенциалом в статической метрике пространства де Ситтера

$$dS^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

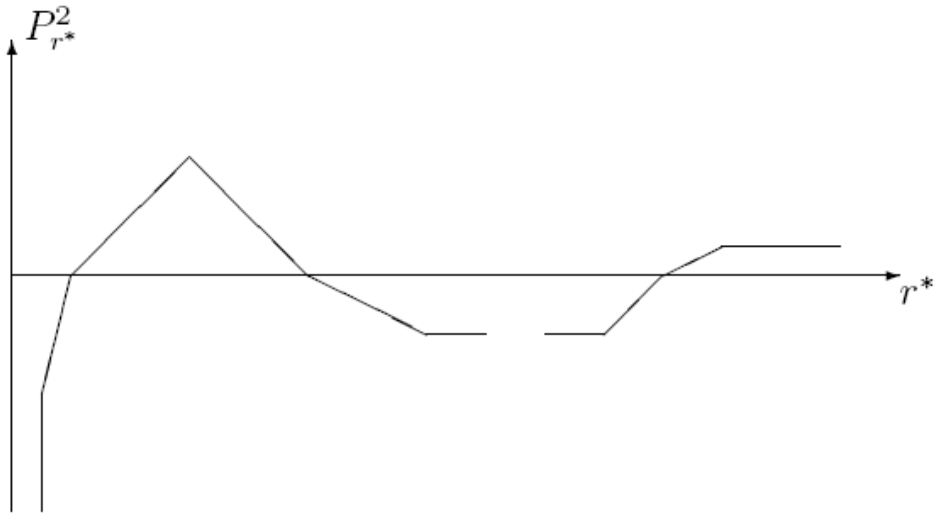
Переменные разделяются подстановкой  $\Phi = e^{-i\epsilon t/\hbar} Y_{lm}(\theta\phi) f(r)$ :

$$\frac{d^2}{dr^2} f + \frac{2(1-2r^2/\rho^2)}{r(1-r^2/\rho^2)} \frac{d}{dr} f + \left[ \frac{(\epsilon + e^2/r)^2}{c^2 \hbar^2} \frac{1}{(1-r^2/\rho^2)^2} - \left( \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \frac{1}{1-r^2/\rho^2} \right] f = 0. \quad (2.1)$$

Поведение квадрата обобщенного импульса

$$p_r^2 = \frac{(\epsilon + e^2/r)^2}{c^2} \frac{1}{(1-r^2/\rho^2)^2} - \left( M^2 c^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) \frac{1}{1-r^2/\rho^2}.$$

указывает [1] на нестабильность системы в пространстве де Ситтера:



**Рис. 1** График функции  $p_r^2$ ,  $r^* = \frac{\rho}{2} \ln \frac{1+r/\rho}{1-r/\rho}$

В безразмерных величинах  $x = \frac{r}{\rho}$ ,  $\frac{\epsilon\rho}{c\hbar} = E$ ,  $\frac{e^2}{c\hbar} = \alpha$ ,  $\frac{M^2 c^2 \rho^2}{\hbar^2} \Rightarrow M^2$  (2.1)

принимает вид

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left[ \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right] \frac{df}{dx} + \left[ \frac{\alpha^2 - l(l+1)}{x^2} + \frac{1}{4} \frac{(E+\alpha)^2}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \frac{(E-\alpha)^2}{(x+1)^2} + \frac{2E\alpha}{x} - \frac{(E+2\alpha)^2 - \alpha^2 - 2[M^2 + l(l+1)]}{4(x-1)} + \frac{(E-2\alpha)^2 - \alpha^2 - 2[M^2 + l(l+1)]}{4(x+1)} \right] f = 0$$

Сделаем

подстановку:  $f = x^A (1-x)^B (1+x)^C F$ :

$$A = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(l+1/2)^2 - \alpha^2}, \quad B = \pm \frac{i}{2} (E+\alpha), \quad C = \pm \frac{i}{2} (E-\alpha)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f}{dx^2} + \left[ \frac{2A+2}{x} + \frac{2B+1}{x-1} + \frac{2C+1}{x+1} \right] \frac{df}{dx} + \\ & + \left[ \frac{2A+3B+3C+2(AB+AC+BC)+M^2-E^2/2-3\alpha^2/2+l(l+1)}{(x-1)(x+1)} + \right. \\ & \left. + \frac{2(-E\alpha+B-C+AB-AC)}{x(x-1)(x+1)} \right] f = 0; \end{aligned} \quad (2.2)$$

его можно отождествить с общим уравнением (см. [2]) Гойна  $G(a; q, \lambda, \beta, \gamma, \delta; z)$

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \left[ \frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\lambda + \beta - \gamma - \delta + 1}{x-a} \right] \frac{dG}{dx} + \frac{\lambda \beta x - q}{x(x-1)(x-a)} G = 0$$

$$a = -1, \quad \gamma = 2(A+1), \quad \delta = 2B+1, \quad q = 2(E\alpha - B + C - AB + AC),$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{3}{2} + A + B + C \pm \sqrt{\frac{9}{4} + A^2 + B^2 + C^2 + A + \frac{3\alpha^2}{2} + \frac{E^2}{2} - M^2 - l(l+1)}, \\ \beta &= \frac{3}{2} + A + B + C \mp \sqrt{\frac{9}{4} + A^2 + B^2 + C^2 + A + \frac{3\alpha^2}{2} + \frac{E^2}{2} - M^2 - l(l+1)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Функция Гойна по своему определению симметрична по  $\lambda, \beta$ . С учетом тождества  $A^2 + A + \alpha^2 - l(l+1) = 0$  эти формулы упрощаются:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{3}{2} + A + B + C \pm \sqrt{B^2 + C^2 + \frac{E^2 + \alpha^2}{2} - M^2 + \frac{9}{4}}, \\ \beta &= \frac{3}{2} + A + B + C \mp \sqrt{B^2 + C^2 + \frac{E^2 + \alpha^2}{2} - M^2 + \frac{9}{4}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ищем решения, конечные в начале координат, поэтому выбираем  $A = -1/2 + \sqrt{(l+1/2)^2 - \alpha^2}$ . В зависимости от выбора  $B, C$  имеем 4 возможности:

$$(+, +) \quad B = +\frac{i}{2}(E + \alpha), \quad C = +\frac{i}{2}(E - \alpha), \quad B + C = +iE, \quad B^2 + C^2 = -\frac{E^2 + \alpha^2}{2};$$

$$(-, -) \quad B = -\frac{i}{2}(E + \alpha), \quad C = -\frac{i}{2}(E - \alpha), \quad B + C = -iE, \quad B^2 + C^2 = -\frac{E^2 + \alpha^2}{2};$$

$$(+, -) \quad B = +\frac{i}{2}(E + \alpha), \quad C = -\frac{i}{2}(E - \alpha), \quad B + C = +i\alpha, \quad B^2 + C^2 = -\frac{E^2 + \alpha^2}{2};$$

$$(-, +) \quad B = -\frac{i}{2}(E + \alpha), \quad C = +\frac{i}{2}(E - \alpha), \quad B + C = -i\alpha, \quad B^2 + C^2 = -\frac{E^2 + \alpha^2}{2}.$$

Во всех четырех случаях выполняется тождество

$$B^2 + C^2 + \frac{E^2 + \alpha^2}{2} = -\frac{E^2 + \alpha^2}{2} + \frac{E^2 + \alpha^2}{2} = 0$$

следовательно, выражения для  $\lambda, \beta$  упрощаются еще более

$$\lambda = \frac{3}{2} + A + B + C \pm \sqrt{-M^2 + \frac{9}{4}}, \quad \beta = \frac{3}{2} + A + B + C \mp \sqrt{-M^2 + \frac{9}{4}},$$

Найдем в 4-х случаях выражение для параметров

$$(+, +) \quad q = 2\alpha [E - i(A+1)], \quad (-, -) \quad q = 2\alpha [E + i(A+1)],$$

$$(+, -) \quad q = 2E [\alpha - i(A+1)], \quad (-, +) \quad q = 2E [\alpha + i(A+1)].$$

$$(+, +) \quad \lambda = \frac{1}{2} + A + 1 + iE \pm i\sqrt{M^2 - \frac{9}{4}}, \quad \beta = \frac{1}{2} + A + 1 + iE \mp i\sqrt{M^2 - \frac{9}{4}}$$

$$(-, -) \quad \lambda = \frac{1}{2} + A + 1 - iE \pm i\sqrt{M^2 - \frac{9}{4}}, \quad \beta = \frac{1}{2} + A + 1 - iE \mp i\sqrt{M^2 - \frac{9}{4}},$$

$$(+, -) \quad \lambda = \frac{1}{2} + A + 1 + i\alpha \pm i\sqrt{M^2 - \frac{9}{4}}, \quad \beta = \frac{1}{2} + A + 1 + i\alpha \mp i\sqrt{M^2 - \frac{9}{4}},$$

$$(-, +) \quad \lambda = \frac{1}{2} + A + 1 - i\alpha \pm i\sqrt{M^2 - \frac{9}{4}}, \quad \beta = \frac{1}{2} + A + 1 - i\alpha \mp i\sqrt{M^2 - \frac{9}{4}}.$$

Дальше продвинуться с анализом этих решений не удастся.

**3. Пространство анти де Ситтера.** Геометрия анти де Ситтера является одной из простых осциллирующих моделей Вселенной. Однако в этом пространстве-времени существует и статическая система координат:

$$dS^2 = \left(1 + \frac{r^2}{\rho^2}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r^2}{\rho^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.1)$$

Рассмотрим в этих координатах уравнение Клейна-Фока-Гордона с внешним кулоновским потенциалом; после разделения переменных получаем

$$\frac{d^2}{dr^2} f + \frac{2(1+2r^2/\rho^2)}{r(1+r^2/\rho^2)} \frac{d}{dr} f + \left[ \frac{(\varepsilon + e^2/r)^2}{c^2 \hbar^2} \frac{1}{(1+r^2/\rho^2)^2} - \left( \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \frac{1}{1+r^2/\rho^2} \right] f = 0. \quad (3.2)$$

В безразмерных величинах  $x = \frac{ir}{\rho}$ ,  $\frac{\varepsilon\rho}{c\hbar} = E$ ,  $\frac{e^2}{c\hbar} = \alpha$ ,  $\frac{M^2 c^2 \rho^2}{\hbar^2} \Rightarrow M^2$ , уравнение (3.2) принимает вид

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2(1-2x^2)}{x(1-x^2)} \frac{d}{dx} - (E + \frac{i\alpha}{x})^2 \frac{1}{(1-x^2)^2} + (M^2 - \frac{l(l+1)}{x^2}) \frac{1}{1-x^2} \right] f = 0 \quad (3.3)$$

В уравнении (3.3) сделаем подстановку  $f = x^A (x-1)^B (x+1)^C F$ :

$$A = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(l+1/2)^2 - \alpha^2}, \quad B = \pm \frac{1}{2}(E + i\alpha), \quad C = \pm \frac{1}{2}(E - i\alpha)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left[ \frac{2A+2}{x} + \frac{2B+1}{x-1} + \frac{2C+1}{x+1} \right] \frac{df}{dx} +$$

$$+ \left[ \frac{2A+3B+3C+2(AB+AC+BC) - M^2 + E^2/2 - 3\alpha^2/2 + l(l+1)}{(x-1)(x+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(iE\alpha + B - C + AB - AC)}{x(x-1)(x+1)} \right] f = 0. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) можно сопоставить с общим уравнением Гойна (детали опускаем).

Можно провести качественный анализ задачи на основе исследования поведения квадрата обобщенного импульса; вводим нормировку для радиального импульса на  $Mc$  и используем безразмерные величины:

$$\frac{p_r^2}{M^2 c^2} \Rightarrow p^2, \quad \frac{r}{\rho} \Rightarrow r, \quad \frac{L^2}{M^2 c^2 \rho^2} \Rightarrow L^2, \quad \frac{e^2}{\rho} \frac{1}{Mc^2} = q;$$

$$p^2(r) = (\varepsilon + \frac{q}{r})^2 \frac{1}{(1+r^2)^2} - (1 + \frac{L^2}{r^2}) \frac{1}{1+r^2}. \quad (3.6)$$

Найдем точки остановки движения (точки поворота)  $p_r^2 = 0$ :

$$r^4 - r^2(\varepsilon^2 - L^2 - 1) - 2\varepsilon q r + (L^2 - q^2) = 0 \quad (3.7)$$

Воспользуемся разложением

$$r^4 + Ar^2 + Br + C = [(r-r_1)(r-r_2)][(r-r_3)(r-r_4)],$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0, \quad A = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4,$$

$$B = -(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4), \quad C = r_1 r_2 r_3 r_4. \quad (3.8)$$

Здесь  $A = -(\varepsilon^2 - L^2 - 1)$ ,  $B = -2\varepsilon q$ ,  $C = (L^2 - q^2)$ . Соотношение  $r_1 r_2 r_3 r_4 = C > 0$  говорит, что если предполагать вещественность всех четырех корней (точек поворота), то возможны, например, два следующих варианта (следим за знаками корней):

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) \sim (-, -, -, -), \quad (r_1, r_2, r_3, r_4) \sim (+, +, +, +)$$

Однако, принимая во внимание соотношения (3.8), заключаем, что оба варианта невозможны из-за равенства  $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$ . Также в силу  $r_1 r_2 r_3 r_4 = C > 0$  не могут реализовываться и варианты  $(r_1, r_2, r_3, r_4) \sim (-, -, -, +)$   $(r_1, r_2, r_3, r_4) \sim (+, +, +, -)$  Единственный возможный и интерпретируемый вариант соотносится со случаем

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) \sim (-, -, +, +) \quad r_4 > r_3 > 0; \quad (3.9)$$

здесь  $r_4 > r_3 > 0$  – физические точки поворота. Таким образом, качественный анализ показывает, что спектр энергии атома водорода на фоне геометрии анти де Ситтера должен быть дискретным, и атом водорода должен быть стабильным с точки зрения квантовой механики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Отчик В.С., Редьков В.М. Квантовомеханическая задача Кеплера в пространствах постоянной кривизны. / Препринт № 298 ИФ АН БССР. Минск, 1986. 49 с.
2. S.Ju. Slavyanov, W. Lay. Special functions. A unified theory based on singularities. Oxford: Oxford Univ.Press, 2000.

#### **O.V. Veko, K.V.. Kazmerchuk, E.M. Ovsyuk, V.M. Red'kov. The hydrogen atom and de Sitter geometries**

The hydrogen atom theory in developed in de Sitter spaces of constant and negative curvature on the base of Klein-Fock-Gordon wave equation in static coordinate. After separation of the variables in both model the problem reduces to the Heun type second order differential equation with four singular points. Qualitative examination shows that the energy spectrum for the hydrogen atom in de Sitter space should be quasistationary, that is this system becomes in this model principally unstable. Similar analysis shows that in anti de Sitter model, the hydrogen atom should be stable in the sense of the quantum mechanics.

Теория атома водорода в пространствах де Ситтера положительной и отрицательной кривизны исследуется на основе уравнения Клейна-Фока-Гордона. После разделения переменных в обоих случаях задача сведена к общему уравнению Гойна с 4-мя особыми точками. Качественный анализ показывает, что спектр энергии атома

водорода на фоне геометрии де Ситтера должен быть квазистационарным, т.е. атом водорода является принципиально нестабильной физической системой в этой модели пространства-времени. Аналогичный анализ говорит, спектр энергии атома водорода на фоне геометрии анти де Ситтера должен быть дискретным, и атом водорода должен быть стабильным с точки зрения квантовой механики

## **СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ**

ВЕКО Ольга Владимировна – студентка 5 курса физико-математического факультета УО «Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина».

247760, Беларусь, Гомельская обл., г. Мозырь, ул. Студенческая, д. 12, ком. 71

[vekoolga@mail.ru](mailto:vekoolga@mail.ru)

ОВСИЮК Елена Михайловна – доцент кафедры общей физики и методики преподавания физики УО «Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина», кандидат физико-математических наук.

247760, Беларусь, Гомельская обл., г. Мозырь, ул. Малинина, д. 48, кв. 39

(029)534-50-90

[e.ovsiyuk@mail.ru](mailto:e.ovsiyuk@mail.ru)

КАЗМЕРЧУК Кристина Валерьевна – студентка 4 курса физико-математического факультета УО «Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина»

247760, Беларусь, Гомельская обл., г. Мозырь, ул. Студенческая, д. 12

РЕДЬКОВ Виктор Михайлович – ведущий научный сотрудник лаборатории теоретической физики Института физики им. Б.И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук.

220019, Беларусь, Минск, ул. Акад. Федорова, д. 5, кв. 149

(029)250-84-03

[v.redkov@dragon.bas-net.by](mailto:v.redkov@dragon.bas-net.by)

## АТТРАКТОРЫ, ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА - ФИЗИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

**М.Е. Мазуров**

*Московский Государственный Университет Экономики, Статистики и Информатики (МЭСИ), Москва, Россия*

Аттракторы делят на: регулярные (притягивающая неподвижная точка, притягивающая периодическая траектория, многообразие) и странные (нерегулярные - зачастую фрактальные в каком-либо сечении устроенные как канторово множество). Странный аттрактор - притягивающее множество неустойчивых траекторий в фазовом пространстве диссипативной динамической системы. Странный аттрактор в отличие от регулярного аттрактора, не является многообразием (т.е. не является кривой или поверхностью); его геометрическое устройство сложно, а его структура зачастую фрактальна. Тот факт, что все траектории, расположенные в окрестности странного аттрактора, притягиваются к нему, принципиально связан с характером неустойчивостей составляющих его траекторий, которые неустойчивы по одним и устойчивы (притягивающие) по другим направлениям, т. е. являются седловыми [1,2]. Странный аттрактор описывают стационарные стохастические автоколебания, поддерживаемые в диссипативной системе за счёт энергии внешнего источника. Странные аттракторы характерны лишь для автоколебательных систем, размерность фазового пространства которых больше двух.

Введем определение фрактальной размерности  $DF$  произвольного аттрактора в  $n$ -мерном фазовом пространстве по Колмогорову - Хаусдорфу:

$$D_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [\ln M(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon)],$$

где  $M$  - минимальное число  $n$ -мерных кубиков с ребром  $-\varepsilon$ , необходимых для покрытия аттрактора.

Известны галереи странных аттракторов. Некоторые из них показаны на рис. 1.

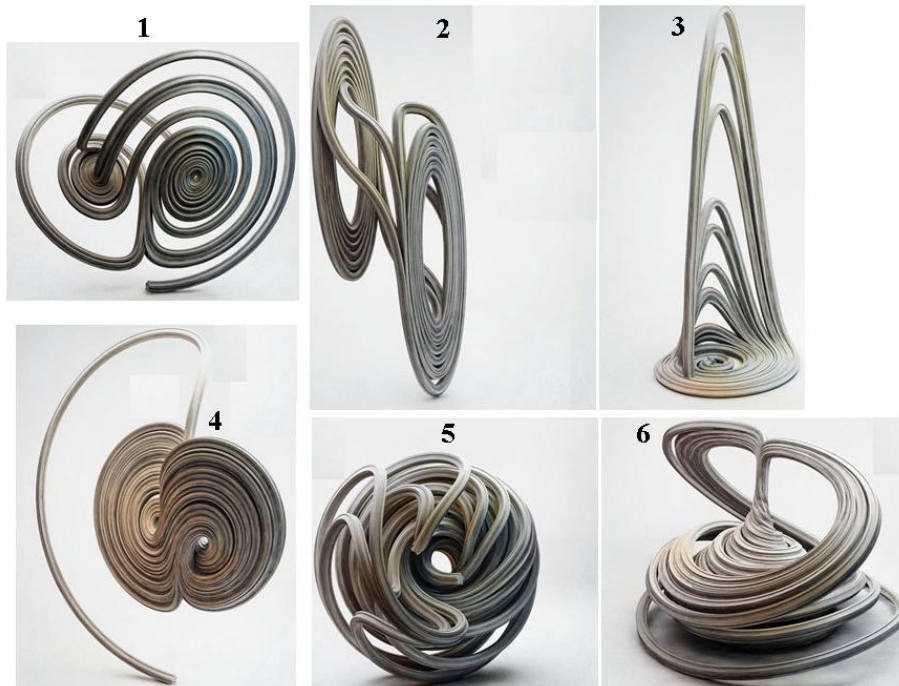


Рис. 1. Аттракторы: 1- Лоренца; 2 – Чуа; 3 – Ресслера; 4 – финансовый; 5 – Хедли; 6 – Чена-Ли



В настоящее время известны четыре подхода для исследования аттракторов: 1 – геометрический; 2 – статистический; 3 – геометрический с иллюстрациями из радиоэлектроники; 4 – подход, основанный на исследованиях фундаментальных свойств эволюционных решений динамических систем с хаотической динамикой. В данной работе будут рассмотрены подходы по пунктам 3,4.

### Исследование фундаментальных систем с хаотической динамикой и их аттракторов на основе анализа базовых решений их математических моделей

В качестве примера рассмотрим автогенератор с туннельным диодом. Системы с периодическими автоколебаниями удаётся исследовать достаточно полно с помощью методов качественной теории дифференциальных уравнений. Подобно тому, как генератор Ван дер Поля является простейшим и каноническим примером системы, демонстрирующей периодические автоколебания, схема, представленная на рис. 2а и определяющая несколько усложнённый генератор Ван дер Поля, может служить одним из простейших примеров генераторов стохастических автоколебаний. От генератора Ван дер Поля с контуром в цепи сетки эта схема отличается лишь включённым в контур последовательно с индуктивностью туннельным диодом или др. нелинейным элементом с вольтамперной характеристикой, представленной на рис. 2 б.

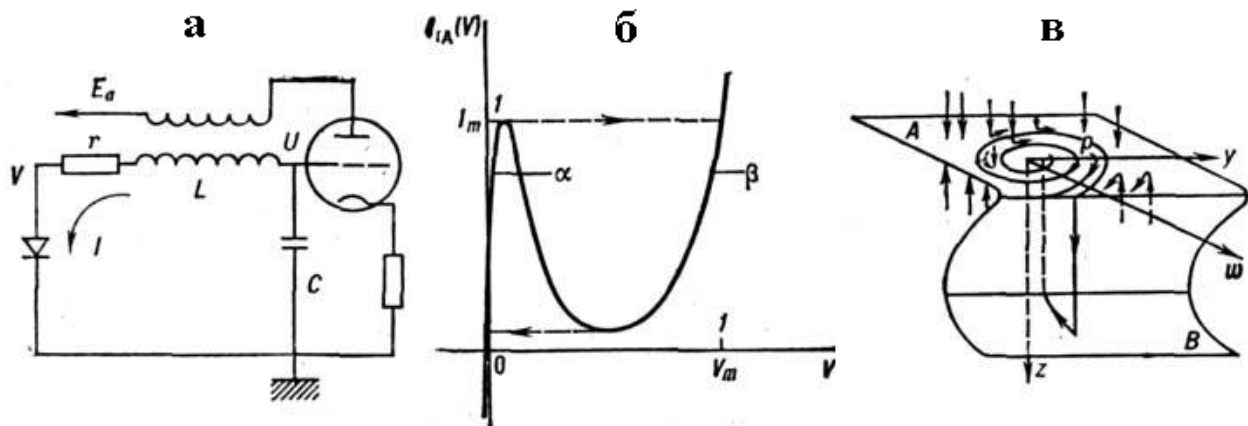


Рис. 2. а - принципиальная схема простого генератора шума - генератора Ван дер Поля, в сеточный контур которого добавлен туннельный диод; б - вольтамперная характеристика нелинейного элемента - туннельного диода; в - фазовый портрет системы

Исходные уравнения схемы преобразуют к безразмерному виду:

$$\dot{x} = 2hx \times y - gz, \quad \dot{y} = -x, \quad \mu \dot{z} = \dot{x} - f(z),$$

где  $x = I / I_m$ ,  $z = V / V_m$  - нормированная характеристика диода. Здесь  $\mu$  - малый параметр.

Поэтому все движения в фазовом пространстве (рис. 2в) можно разбить на быстрые переключения диода (прямые  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ ) и медленные, при которых напряжение на диоде «следит» за током; соответствующие траектории лежат на поверхностях А и В [ $x = f(z)$ ,  $f'(z) > 0$ ], отвечающих участкам и характеристики диода.

Система имеет одно неустойчивое состояние равновесия  $x = y = z = 0$  типа седло. Траектории, лежащие на поверхности А, раскручиваются вокруг неустойчивого фокуса и в конце концов достигают края поверхности А. Здесь происходит срыв точки, отображающей на фазовой траектории состояние системы (т. н. изображающей точки) по линии быстрых движений на поверхность В. Пройдя по В, изображающая точка срывается обратно на поверхность А и попадает в окрестность состояния равновесия - начинается новый цикл нарастающих колебаний. Все траектории внутри этой области неустойчивы, т. е. аттрактор является странным гиперболическим. При малых значениях свойства стохастичности движений сохраняются. Спектр мощности сигналов, генерируемых схемой, и осциллограммы этих сигналов показаны на рис. 3.

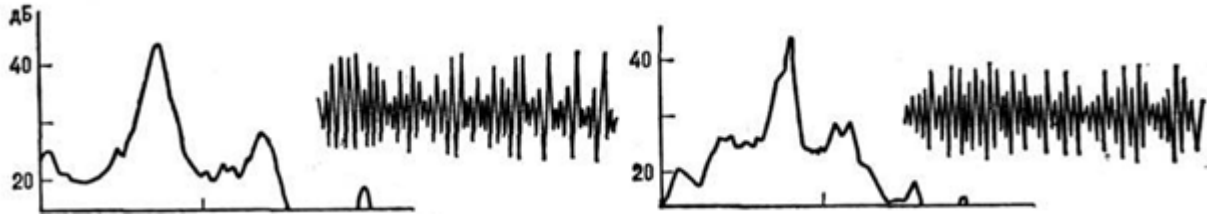


Рис. 3. Спектр мощности сигналов, генерируемых схемой, представленной на рис. 2а, и осциллограммы этих сигналов

А вот другой пример бифуркации в поведении системы: осциллятор Чуа, схема которого показана на рис. 4.

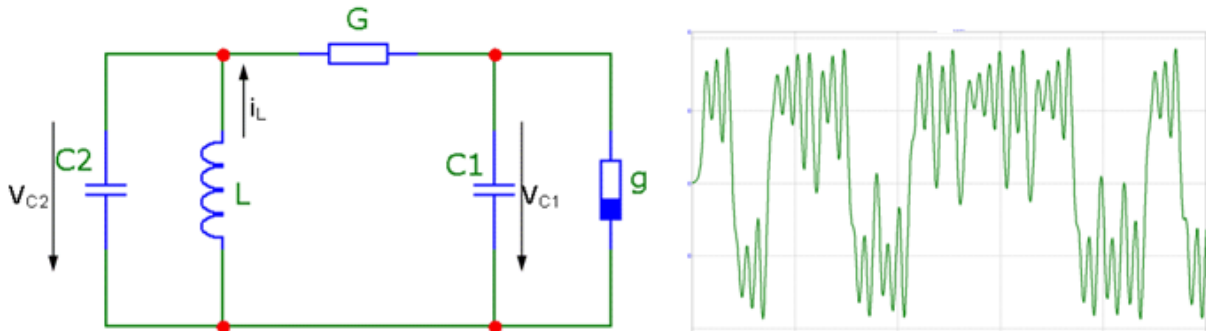


Рис. 4. Схема осциллятора Чуа при некоторых значениях параметров дает следующий график напряжения на ёмкости С1, обладающего свойствами переключения

Рассмотрим осциллятор Ресслера. Осциллятор имеет два устойчивых режима работы, переключение между которыми описывается системой трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b + (x - r)z,$$

где  $x$ ,  $y$ ,  $z$  - динамические переменные,  $a$ ,  $b$ ,  $r$  - параметры. Она предложена в 1976 г. как сконструированная искусственно система с хаотической динамикой, более простая, чем хорошо известная к тому времени модель Лоренца. Приводим карту динамических режимов осциллятора Ресслера на плоскости параметров  $a$ ,  $r$  при  $b=0.2$  на рис. 4. По периферии рисунка показаны фазовые портреты аттракторов в некоторых характерных точках плоскости параметров.

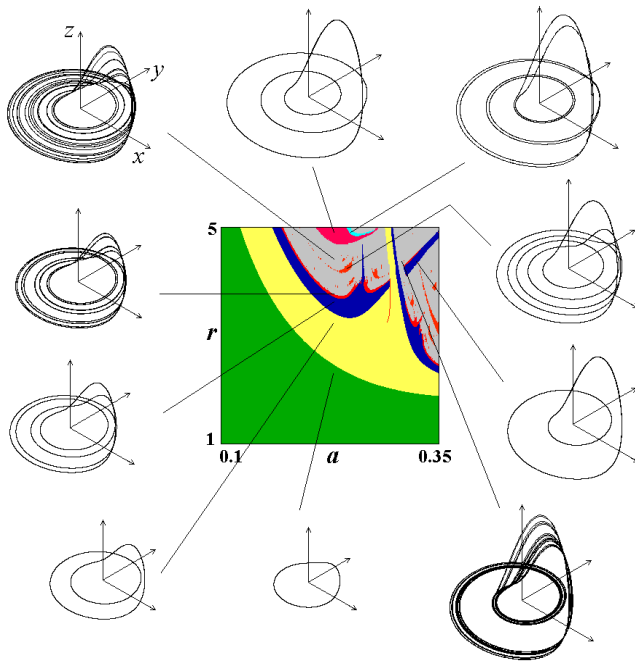


Рис. 4. Карта динамических режимов осциллятора Ресслера на плоскости параметров  $a$ ,  $r$  при  $b=0.2$ .

Одна из самых знаменитых динамических систем предложена в 1963 г. Лоренцем в качестве упрощенной модели конвективных турбулентных движений. Система состоит из трех ОДУ и имеет три параметра модели. Поскольку неизвестных функций три, то фазовый портрет системы должен определяться не на плоскости, а в трехмерном пространстве. Решением системы Лоренца при определенном сочетании параметров является странный аттрактор — притягивающее множество траекторий на фазовом пространстве, которое по виду идентично случайному процессу. В некотором смысле аттрактор Лоренца является стохастическими автоколебаниями, которые поддерживаются в динамической системе за счет внешнего источника, как показано на рис. 5.

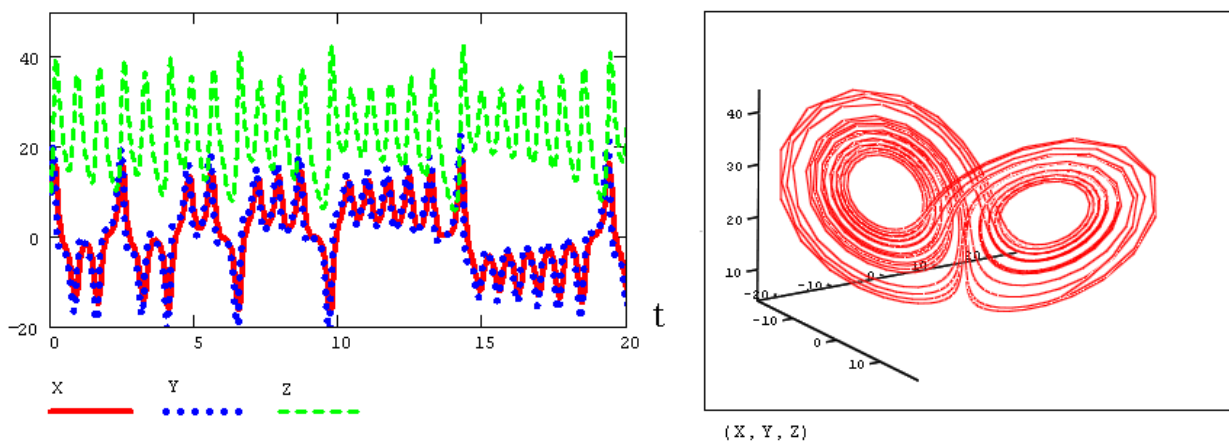


Рис. 5. Решение уравнения Лоренца при определенном сочетании параметров - странный аттрактор, которое по виду идентично случайному процессу.

Из рис. 5 видно, что переключателями процесса являются переменные  $x$  и  $y$ .

Рассмотрим материалы из статьи Лапоски о его экспериментах с осциллографом в 50-х годах по моделированию геометрических объектов типа аттракторов. На развертку он подавал периодические сигналы, а также модулировал интенсивность пучка. "Осциллоны" затем фотографировались с помощью чувствительной пленки для спортивной съемки. К настоящему времени сохранилось из черно-белых - около 20.

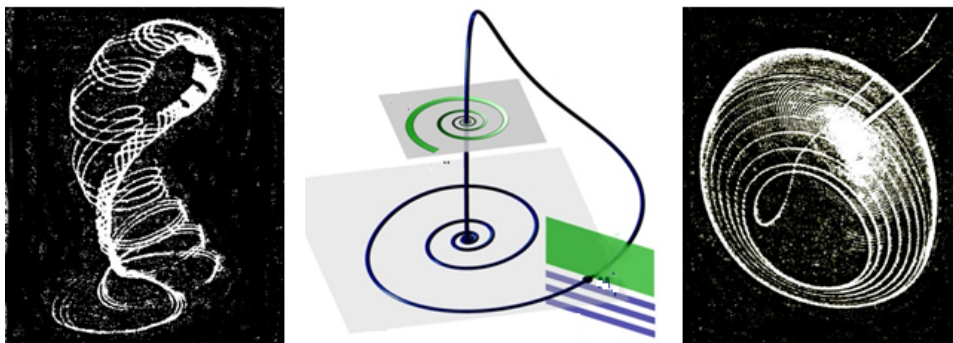


Рис. 6. Два аттрактора Лапоски

Интересный вопрос: был ли Лапоски первый, кто сотворил и наблюдал странные аттракторы?

### **Заключение**

Мы установили, что странный аттрактор описывают стационарные стохастические автоколебания с переключениями режимов, поддерживаемые в диссипативной системе за счёт энергии внешнего источника. Из рассмотренных методов исследования аттракторов и динамического хаоса следует, что для качественного и глубокого изучения механизмов возникновения хаотической динамики можно обойтись без исследования аттракторов систем с хаотической динамикой.

### **Литература**

1. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М.: УРСС, 2004. 318 с.
2. Мазуров М. Е. Идентификация математических моделей нелинейных динамических систем. М.: - Ижевск. РХД, 2008. 284 с.

## **ATTRACTORS, CHAOTIC DYNAMICS - PHYSICAL CONTENT**

### **M.E. Mazurov**

*Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics (MESI), Moscow, Russia*

Attractors are divided into: regular (attracting fixed point, attracting periodic trajectory, diversity) and odd (irregular - often fractal in any section is organized as a Cantor set).

Strange attractor attracts many unstable trajectories in the phase space of dissipative dynamical systems. Strange attractor unlike regular attractor is not diversity (i.e. not a curve or surface); its geometrical device is difficult, and its structure is often fractal. The fact that all paths that are located in the vicinity of a strange attractor, are attracted to it, fundamentally related to the nature of the instability of trajectories that are unstable for one and sustainable (attracts) in other areas, i.e. are saddle [1,2]. Strange attractor describe stationary stochastic self-oscillations supported in a dissipative system at the expense of external energy source. Strange attractors typical only for self-oscillating systems, the dimension of the phase space which is more than two.

## ГРАВИТАЦИОННОЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ

Д.С. Бондарев

Учебно-научный институт гравитации и космологии Российского университета дружбы народов, Москва, Россия

Поиск источников гравитационных волн. Гамма-всплески и их возможные механизмы.

Источниками гравитационных волн считаются двойные звезды, вращающиеся вокруг общего центра масс, и пульсары - вращающиеся нейтронные звезды. Гравитационное и электромагнитное излучение от систем, состоящих из двух пульсаров с сильными магнитными полями (большими магнитными моментами), достаточно велико. Но, к сожалению, эти источники находятся на громадных расстояниях от Земли (десятки световых лет), и к нам приходит ничтожная часть их гравитационного излучения.

Поток гравитационного излучения, возникающего при слиянии пульсаров, примерно в  $10^{15}$  раз больше, чем поток от ближайшей двойной звезды. Появляется реальная возможность зарегистрировать такое излучение, но трудность состоит в том, что заранее неизвестно, когда и откуда придет всплеск.

Движение пульсаров определяется гравитацией. За счет потери энергии на гравитационное излучение пульсары сближаются и на конечном этапе сливаются в одну черную дыру с угловым моментом, но без магнитного поля. Исчезновение магнитного поля приводит к гамма-всплеску. Гравитационное и электромагнитное излучения коррелированы и зависят от масс пульсаров и их начальных магнитных полей.

Это приводит к мысли, что источниками гравитационных волн и гамма-всплесков могут быть одни и те же объекты, и искать возможность зарегистрировать гравитационные волны нужно в одних и тех же местах.

### Литература

1. Бисноватый-Коган Г.С. Релятивистская астрофизика и физическая космология.

Издательство: Красанд, 2011 г.

2. К.В. Степаньянц. Классическая теория поля. М., ФИЗМАТЛИТ, 2009 г.

3. Богомазов А.И., Липунов В.М., Тутуков А.В. Эволюция тесных двойных систем и гамма-всплески // Астрон. журн. – 2007. С. 345-356.

4. Черепашук А. М. Черные дыры в двойных звездных системах // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 3. С. 87-93

## КАНОНИЧЕСКАЯ КАЛИБРОВКА ГРАВИТАЦИОННОГО ВАКУУМА И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ РИМАНА-КАРТАНА

**Р. Ф. Полищук**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Физический институт им. П. Н. Лебедева, Российская академия наук,  
Ленинский пр., 53, Москва 119991, Россия

Предлагается формулировка теории тяготения Эйнштейна-Картана на языке автоматически сохраняющихся тетрадных токов – в том числе и для канонического тетрадного поля, определяемого в общем случае однозначно при условии выполнения тождеств Бьянки для тензора кривизны с двумя координатными и двумя лоренцевыми индексами: в этом случае равенство нулю ковариантной дивергенции указанного тензора эквивалентно обращению в нуль его обычной дивергенции (с весовым множителем), что даёт при интегрировании по 4-объёму пространства-времени обычные локальные интегральные (то есть для интеграла от функции, а не для интеграла от интеграла) законы сохранения в гравитации. Тем самым ставится, видимо, точка в решении проблемы определения в общем случае (а не только для островной системы) гравитационной энергии и импульса произвольной гравитирующей физической системы.

В данной работе мы исходим из следующие положений.

1. Основой описания динамики физических полей является вариационный принцип. При этом классический (без учёта квантовых эффектов) гравитационный лагранжиан в духе Гиббонса и Хокинга содержит только квадратичные члены спинорной связности и кроме космологической постоянной содержит разность скаляра Риччи и удвоенной ковариантной дивергенции вектора отрицательного растяжения (фокусирования) тетрадного поля: иначе интеграл действия для гравитационного поля не аддитивен для 4-объёмов пространства-времени, взятых в виде суммы «толстых сэндвичей», а также гравитационный гамильтониан не даёт правильной величины полной массы-энергии островной физической системы с асимптотически плоским пространством в окрестности пространственной бесконечности.
2. Законы сохранения и законы динамики имеют равный онтологический статус. На интуитивном уровне это означает, что симметрия (законы сохранения) диктует взаимодействие: усиление симметрии требованием её сохранения при локализации (введением зависимости от мировой точки) приводит к появлению калибровочных (компенсирующих) полей, динамика которых нацелена на восстановление нарушенной симметрии.
3. Гипотеза А. М. Виноградова: всякая регулярная система уравнений в частных производных имеет полный набор нелокальных интегральных законов сохранения. Интегральным эквивалентом свёрнутых тождеств Бьянки является, например, именно нелокальный интегральный закон сохранения. Поскольку все сильные

физические поля гравитируют, в общем случае важное значение имеет нелокальное обобщение формулировки законов сохранения.

4. Решение проблемы гравитационной энергии требует перехода от метрики (симметричная  $4 \times 4$  матрица из 10-ти функций) к тетраде ( $4 \times 4$  матрица из 16-ти функций), учитывающей проекцию мировых геометрических объектов в пространстве Римана-Картана на измерительные приборы конкретных наблюдателей с их различными состояниями движения. Свёртка геометрического объекта с вектором тетрады заменяет соответствующий координатный мировой индекс на индекс лоренцев (это полутетрадный подход к гравитации: полностью тетрадный подход отвечает замене в уравнениях Эйнштейна-Картана на лоренцевы индексы обоих координатных индексов, что превращает тензорные уравнения поля в эквивалентный им набор уравнений скалярных). Это выключение координатного индекса и введение индексов двух типов (что дополняет зависимость геометрических объектов от мировой точки их зависимостью от лоренцевых вращений репера) изменяет действие на объект ковариантной производной, учитывает (через лагранжиан) взаимодействие объекта с тетрадным гравитационным полем и изменяет формулировку законов сохранения.
5. Плотность массы-энергии источников порождает риманову кривизну пространства-времени, а спин источников порождает кручение Картана. Поскольку изометрии мира постоянной однородной 4-кривизны (комплексной 4-сферы де Ситтера) перемешивают массу и спин, физический смысл в общем случае имеет комбинация массы и спина (спин-масса), отвечающая собственным значениям оператора Казимира.
6. Гравитационное поле есть 1-форма спинорной связности (то есть является неоднородно преобразующимся при лоренцевых преобразованиях калибровочным полем) с двумя антисимметричными лоренцевыми индексами в пространстве Римана-Картана. Она определяется введением тетрадного поля (поля реперов), задающего выбором эталонов длин и углов калибровку гравитационного вакуума (ведь по принципу эквивалентности Эйнштейна гравитация и инерция локально эквивалентны, что означает наличие различных ненулевых чисто калибровочных гравитационных вакуумов с различной плотностью гравитационной энергии даже в плоском мире). Различные гравитационные вакуумы на классическом уровне связаны лоренцевыми вращениями репера, а на квантовом уровне связаны преобразованиями Боголюбова. Сравним: вращение репера во внутреннем изотопическом пространстве переводит нуклоны друг в друга, а лоренцево вращение траекторий частиц во внешнем пространстве изменяет их относительные скорости и их суммарную массу как их общий гравитационный заряд.
7. Тетрадное поле есть дополнительная инвариантная структура на пространстве-времени, отождествляемая с физической системой отсчёта: физическая реализация изменения системы отсчёта осуществляется затратай массы-энергии на деформацию физического вакуума, который «чувствует» ускорения (ведь само понятие частицы и некоторых её характеристик зависит от выбора системы отсчёта и состояния движения измерительного прибора).

8. Поскольку собственным значением квантового оператора скорости является только плюс-минус скорость света, исходным расщеплением мира событий является  $2+2$  расщепление для исходных световых состояний элементарных частиц. Время и пространство - вторичные понятия, отвечающие обычному  $1+3$  расщеплению мира нульмерных событий (исходного  $4+0$  расщепления Минковского) возникают при суперпозиции исходных световых времён.
9. Общая теория относительности допускает произвольный выбор систем отсчёта и произвольную скорость изменения расстояния между наблюдателями. Наблюдателей со сверхсветовой скоростью изменения расстояния между ними разделяет горизонт событий в виде световой гиперповерхности. Для этих наблюдателей имеет место различная сигнатура их мировых линий и различное деление элементарных частиц на частицы реальные и виртуальные (например, при рассмотрении квантового испарения чёрных дыр). В частности, для внешнего наблюдателя внутренность чёрной дыры напрямую не видима и является для него в определённом смысле чисто виртуальной физической реальностью, доступной только умозрению - прямому наблюдению доступно только влияние чёрной дыры на окружающее её пространство.
10. Гравитационное поле общего положения допускает три преимущественные системы отсчёта. Риччи-каноническая система сопутствует прогибающей геометрию пространства-времени материальной среде и образована собственными векторами тензора Риччи (и Эйнштейна, 10 функций для симметричной связности, получаемой обращением в нуль кручения Картана). Вейль-каноническая система сопутствует свободной части гравитационного поля, отрывающегося от источников, и образована с помощью собственных спиноров Вейля (ещё 10 функций). Тождества Бьянки для тензора кривизны (20 функций для тензора кривизны как градиента римановой связности, однозначно получаемой из связности Картана) дают дифференциальную связь указанных двух систем отсчёта. Требование выполнения тождеств Бьянки после свёртки тензора кривизны с шестью 2-формами, образованными внешним произведением 1-форм тетрады, определяет единственную (риман-каноническую) систему отсчёта. В плоском мире преимущественна инерциальная система отсчёта, получаемая требованием обращения в нуль суммы произведений 12-ти комплексных спиновых коэффициентов связности (по Пенроузу) на комплексно сопряжённые им величины (эту сумму естественно назвать модулем связности). В общем случае переход (по Эйнштейну) от специальной теории относительности к общей теории относительности в некотором смысле сужает относительность (свободу выбора физически равноправных гравитационных вакуумов) до нуля.
11. В неоднородно искривлённом пространстве-времени существуют не только преимущественные гравитационные вакуумы, но и физически преимущественные дифференциальные операторы. Среди дифференциальных операторов второго порядка таковыми являются, например, операторы Казимира и топологически и метрически самосопряжённый оператор Лапласа (действующий на формы любой степени квадрат суммы дифференциала и кодифференциала, дающий сумму



- оператора Даламбера и комбинаций дифференцируемой величины с тензором кривизны, число которых равно степени формы, то есть числу её индексов).
12. Гипотеза: бесконечно малые и бесконечно большие интервалы времени и пространства являются неизбежными идеализациями, не реализующимися в природе (финитизм Гильберта). Ошибка математического предельного перехода «и так далее до бесконечности» содержится в утверждении «так»: реальность перехода к новым масштабам обычно требует обобщения физических понятий.
  13. Уравнения Максвелла имеют вид: лапласиан (кодифференциал дифференциала плюс дифференциал кодифференциала) вектор-потенциала (точнее, 1-формы) равен току. Лоренцева калибровка отвечает нулевому значению кодифференциала (ковариантной дивергенции) потенциала. Кодифференциал дифференциала потенциала есть автоматически сохраняющаяся величина, поскольку квадрат кодифференциала (и квадрат дифференциала, частной производной с альтернированием мировых индексов) тождественно равен нулю.
  14. Уравнения Эйнштейна-Картана имеют вид: кодифференциал дифференциала тетрады равен автоматически сохраняющемуся тетрадному току, равному сумме даламбертиана тетрады, члену с тензором материи (и его следом) и (со знаком минус) дифференциала кодифференциала тетрады (равного нулю при лоренцевой калибровке тетрадного потенциала). Для разности тетрадного тока и тензора материи (с лоренцевым и координатным индексами) получаем (для времени-подобного вектора тетрады, то есть для монады как системы отсчёта по Зельманову) монадный (хронометрически инвариантный) псевдотензор гравитационного поля, который много лет искал мой учитель А. Л. Зельманов.
  15. Для мира де Ситтера как образованного семейством (имеющих нулевые границы) 3-сфер однополостного гиперболоида полная масса-энергия равна нулю: отрицательная гравитационная масса-энергия вакуума де Ситтера (геометрия) полностью компенсирует массу-энергию материи (ведь взятый со знаком минус тензор Эйнштейна как свёртка дважды дуального тензора кривизны тоже полностью компенсирует тензор материи). Опасения Эйнштейна, что сохранение нуля не гарантирует физическую систему от исчезновения, напрасны: сохраняются по отдельности и тетрадные токи (они тождественно обращаются в нуль только для постоянного тетрадного поля), и тензор материи (с его нелокальным интегральным законом сохранения), и тензор Эйнштейна.
  16. Законы сохранения в гравитации выполняются только для совокупности источников и определяемого ими гравитационного вакуума (полные тождества Бьянки указывают на связь источников и кривизны). То, что вакуум (нетривиальная квантовая система, а не просто пустота) не зависит от постоянных скоростей, но зависит от ускорений физической системы отсчёта как дополнительной инвариантной структуры в мире событий (где событие – это пересечение линий или плёнок разной, вообще говоря, размерности), указывает на его световую природу (вспомним про первичную световую природу и самих частиц).

## Литература.

1. Р.Ф. Полищук. Конец общей теории относительности. Вестник РУДН, "Математика, информатика, физика", Вып. 1, 2013, 260-273.
2. Р.Ф. Полищук. Каноническая связность и законы сохранения в гравитации. Восьмая Международная школа "Наука и инновации - 2013", 7-12 июля 2013, Йошкар-Ола, 2013, 108-115.

## КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА В ОБОБЩЁННОЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ

Скугорева М. А.

*Учебно-Научный Институт Гравитации и Космологии,*

*Российский Университет Дружбы Народов*

*Москва 117198, Россия*

### Аннотация

В этой работе рассмотрена космологическая динамика в обобщённой модифицированной гравитации с членом  $R \square R$ , добавленным в плотность лагранжиана  $R + R^N$ . Описано влияние слагаемого с  $R \square R$  на известные решения модифицированной теории гравитации  $f(R)$ . Мы показываем, что в частном случае  $N=3$  обе поправки  $R^N$  и  $R \square R$  в лагранжиане одинаково важны для степенных решений. Эти решения и их характер устойчивости были изучены с помощью теории динамических систем. Некоторые результаты в случае  $N \neq 3$  (включая условие устойчивости решения де Ситтера в рассматриваемой модели) получены другими методами.

### COSMOLOGICAL DYNAMICS IN GENERAL MODIFIED GRAVITY

Skugoreva M. A.

*Institute of Gravitation and Cosmology,*

*Peoples Friendship University of Russia*

*Moscow 117198, Russia*

### Abstract

We consider cosmological dynamics in generalized modified gravity theory with the  $R \square R$  term added to the action of the form  $R + R^N$ . Influence of  $R \square R$  term to the known solutions of modified gravity  $f(R)$  is described. We show that in particular case of  $N = 3$  these two non-Einstein terms  $R^N$  and  $R \square R$  are equally important on power-law solutions. These solutions and their stability have been studied using dynamical system approach. Some results for the case of  $N \neq 3$  (including stability of de Sitter solution in the theory under investigation) have been found using other methods.

## О ВЛИЯНИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ИДЕАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ НА СВОЙСТВА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СКАЛЯРНОГО И СПИНОРНОГО ПОЛЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСУ-СИММЕТРИЧНОЙ МЕТРИКЕ

### ABOUT INFLUENCE OF THE GRAVITATIONAL FIELD OF THE IDEAL FLUIDS ON THE PROPERTIES OF THE INTERACTING SCALAR AND SPINOR FIELDS IN THE CYLINDRICAL SYMMETRIC METRIC

Н. А. Ковальчуков, Г. Н. Шикин, Л. П. Ющенко

Исследованы свойства статических цилиндрически-симметричных конфигураций взаимодействующих спинорного и скалярного полей с учетом идеальной жидкости с уравнением состояния  $p = w\rho$ , где  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность энергии,  $w$  – произвольный безразмерный параметр.

В настоящее время, для объяснения ускоренного расширения Вселенной, в качестве одного из возможных подходов, в космологии используются модели идеальных жидкостей с отрицательным давлением, когда параметр  $w$  принимает отрицательные значения. Представляет интерес исследование влияния гравитационного поля, порождаемого идеальной жидкостью с отрицательным давлением, на формирование у систем взаимодействующих скалярного и спинорного полей конфигураций с локализованной плотностью энергии.

Лагранжиан системы взаимодействующих полей и идеальной жидкости имеет вид

$$L = \frac{R}{2\chi} + \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi - F(s) + \frac{1}{2} \phi_{,\alpha} \phi'^{\alpha} - V(\phi) \Phi(s) + P = \frac{R}{2\chi} + L_{sp} + L_{se} + L_{int} + L_{pf}, \quad (1)$$

где  $F(s)$  и  $\Phi(s)$  произвольные функции инварианта спинорного поля  $s = \bar{\psi} \psi$ ,  $V(\phi)$  – произвольная функции скалярного поля,  $p$  – давление идеальной жидкости, связанное с плотностью энергии идеальной жидкости  $\rho$  уравнением состояния  $p = w\rho$ ,  $w = \text{const}$ .

Статическая цилиндрически-симметричная метрика записывается в виде:

$$ds^2 = e^{2\gamma} dt^2 - e^{2\alpha} dx^2 - e^{2\beta} d\phi^2 - e^{2\mu} dz^2 \quad (2)$$

с координатным условием, соответствующим гармонической координате  $x$ :

$$\alpha(x) = \gamma(x) + \beta(x) + \mu(x) \quad (3)$$

Из Лагранжиана (1) получаем уравнения Эйнштейна для метрики (2)

$$\begin{aligned} \beta'' + \mu'' - \mu' \beta' - \mu' \gamma' - \beta' \gamma' &= -\chi T_0^0 e^{2\alpha}, \\ \mu' \beta' + \mu' \gamma' + \beta' \gamma' &= -\chi T_1^1 e^{2\alpha}, \\ \mu'' + \gamma'' - \mu' \beta' - \mu' \gamma' - \beta' \gamma' &= -\chi T_2^2 e^{2\alpha}, \\ \gamma'' + \beta'' - \mu' \beta' - \mu' \gamma' - \beta' \gamma' &= -\chi T_3^3 e^{2\alpha}, \end{aligned} \quad (4)$$

скалярного

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} g^{\nu\mu} \varphi_{,\mu}) + \frac{dV}{d\varphi} \Phi(s) = 0, \quad (5)$$

и спинорного полей

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - m\psi - \frac{dF}{ds} \psi - V(\varphi) \frac{d\Phi}{ds} \psi &= 0, \\ i\nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} + \frac{dF}{ds} \bar{\psi} + V(\varphi) \frac{d\Phi}{ds} \bar{\psi} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Получены точные решения уравнения взаимодействующих скалярного и спинорного полей (5) – (6) и уравнений Эйнштейна (4) с учетом уравнения движения идеальной жидкости при произвольном  $w$ . Выписаны условия регулярности метрики (2) на оси симметрии системы и на пространственной бесконечности. Рассмотрено влияние различных типов идеальных жидкостей на формирование у системы взаимодействующих полей солитоноподобных и струноподобных конфигураций.

При этом установлено, что если  $w = 1$  (предельно жесткая материя), существует решение, описывающее полевую конфигурацию с локализованной плотностью энергии в окрестности оси симметрии. А энергия, приходящаяся на отрезок единичной длины по оси  $z$ :

$$E = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} T_0^0 \sqrt{-g} dx = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{1c^4}{4G} \approx 3 \cdot 10^{48} \frac{\text{эрг}}{\text{см}} \quad (7)$$

Интересно отметить, что величина  $3 \cdot 10^{48}$  дин есть планковская единица силы. Однако установлено, что в этом случае условия регулярности метрики на пространственной бесконечности не выполняются.

В случаях  $w = 1/3$  (ультрарелятивистская материя),  $w = -1/3$  (газ космических струн),  $w = -2/3$  (хаотическое распределение доменных стенок),  $w = -1$  (космический вакуум),  $w = -4/3$  (фантомная материя) регулярные конфигурации с локализованной плотностью энергии на единицу длины по оси  $z$  существуют при выполнении условия на константы интегрирования  $\lambda$ ,  $s_0$ ,  $c$ , получаемые при решении системы уравнений (4) – (6),  $c = \lambda s_0^2$ . В этом случае спинорное и скалярное поля компенсируют свой вклад в тензор энергии-импульса и при этом получают решения, которые подробно исследованы в [1].

В случае  $w = 0$  (пылевидная (темная) материя) статическое равновесие невозможно.

Список литературы:

- [1] Бронников К.А., Чудаева Е.Н., Абдель-Саттар Валид, Шикин Г.Н.. Статические цилиндрически-симметричные конфигурации идеальной жидкости // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика», - 2009, - №1, - С. 85-95. [Bronnikov K.A., Chudaeva E.N., Abdel-Sattar Walid, Shikin G.N.. Static, Cylindrically Symmetric Perfect Fluid Configuration // Bulletin of Peoples Friendship University of Russia, Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". – 2009. - №1. – P.85-95.]

## О КОНЦЕПТУАЛЬНЫХ ОСНОВАХ БАР-АНАПОЛЬНОЙ МОДЕЛИ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ

С.И. Кузнецов

### «ON CONCEPTUAL BASIS FOR BAR-ANAPOLE MODEL OF DARK MATTER»

S.I. Kuznetsov

*Электрогорск, Россия*

*Web-Институт исследований природы времени*

*[www.chronos.msu.ru](http://www.chronos.msu.ru)*

*e-mail: [KSI@chronos.msu.ru](mailto:KSI@chronos.msu.ru), [bitva@mail.ru](mailto:bitva@mail.ru)*

This paper presents a new hypothesis about the nature of dark matter. The proposed bar-anapole model of dark matter can refer to the so-called exotic baryon models. It solves some cosmological and astrophysical problems, but requires a radical revision of the current ideas about the birth and evolution of the Universe.

Решение проблемы темной энергии, которое было предложено на предыдущей конференции [1], приводит к заключению, что, возможно, темная материя составляет 95% полной массы Вселенной (остальные 5% приходятся на долю барионного вещества). Затянувшийся неуспех с прямой регистрацией суперсимметричных частиц (вимпов), рассматриваемых в качестве основных кандидатов на роль темной материи в Стандартной космологической модели, заставляет искать альтернативные варианты для объяснения природы этой загадочной субстанции.

Настоящий доклад посвящен новой гипотезе происхождения темной материи, которая получила рабочее название “бар-ананольной модели”.

Темной материей (ТМ) называют “невидимое” вещество, которое создает гравитационное поле, но не излучает (или почти не излучает) электромагнитные волны. Предположение о существовании этой субстанции дало возможность объяснить расхождение наблюдаемых динамических свойств галактик и скоплений галактик с теоретическими предсказаниями, основанными на модели, в которой все эти системы состоят только из светящегося вещества (Ф.Цвикки, 1933).

С физической точки зрения модели, призванные описать свойства “невидимой” материи, подразделяются на три большие группы [2]: 1) барионные, 2) небарионные и 3) модели, допускающие модификацию закона тяготения Ньютона. В первую группу входит и семейство так называемых “экзотических барионных моделей”, рассматривающих необычные фазовые состояния ядерной и субъядерной материи (см., напр., [3]). Предлагаемую модель бар-ананольной темной материи можно отнести к этому семейству. Ее следует отличать от известной ананольной модели [4], которая по сути является небарионной. Префикс “бар” призван обеспечить различие по названию этих двух

альтернативных моделей.

В настоящее время доминирует небарионная модель холодной темной материи (CDM), согласно которой эта невидимая гравитирующая субстанция представляет собой газ невзаимодействующих частиц-вимпов. “Вимпы” (WIMPs – Weakly Interacting Massive Particles) – это гипотетические частицы массой больше нескольких ГэВ/ $c^2$ , участвующие только в слабом взаимодействии. Предполагается, что диффузные облака “темного” газа заполняют области, где сосредоточена светящаяся барионная материя (галактики, скопления галактик). Несмотря на приемлемое описание формирования космических структур на сравнительно больших расстояниях ( $\sim 1$  Мпк), CDM-модель дает на меньшем масштабе заметные расхождения с наблюдениями [5]:

1) в расчетах получается слишком много карликовых галактик-спутников (в 10, а то и в 50 раз больше, чем в реальности);

2) график распределения плотности вещества по радиусу непременно имеет острый пик в центре галактики, в то время как из наблюдений следует, что распределение плотности должно быть более плоским.

Обе эти проблемы удастся решить, если приписать частицам темной материи способность упруго взаимодействовать друг с другом. Лучшие результаты получаются, если сечение упругого взаимодействия ТМ-частиц на единицу массы подобрать порядка  $\sigma = 0,1 \text{ см}^2/\text{г}$ . [6] Эта величина соответствует обычным сечениям упругого взаимодействия нейтронов, поскольку они имеют массу порядка  $m_n \approx 10^{-24}$  г и площадь поперечного сечения  $S_n \approx 10^{-25} \text{ см}^2$ .

Таким образом, по своим свойствам нейтроны отвечают требованиям к частицам темной материи: электрически нейтральные, обладающие массой покоя, они к тому же имеют подходящее поперечное сечение. Однако в свободном состоянии эти ядерные частицы нестабильны и за время  $\sim 10^3$  с распадаются на протон, электрон и электронное антинейтрино. Это обстоятельство вынуждает отказаться от свободных нейтронов в качестве частиц темной материи.

Тем не менее, известно, что нейтроны обретают стабильность в недрах нейтронной звезды и внутри атомного ядра. Есть основания полагать, что возникающая в этих условиях стабильность нейтрального нуклона не является следствием некоего запрета на его распад. Скорее всего, мы имеем дело с непрерывными осцилляциями: на самом деле нейтрон распадается на составные части, превращаясь в протон с сопутствующими электроном и антинейтрино, но затем, через определенный промежуток времени, снова переходит в первоначальное состояние. Такого рода  $\beta$ -осцилляции обусловлены наличием внешних сил: гравитационного поля в случае нейтронной звезды и сильного взаимодействия, доминирующего в ядерной материи. Надо полагать, эти силы обеспечивают своеобразный конфайнмент для продуктов распада нейтрона.

В ряде работ показано (см., напр., [7]), что нейтрон может обретать стабильность в плотной среде и при наличии достаточно сильного магнитного поля, при этом протон, наоборот, становится нестабильной частицей. Ранее автор рассматривал вопрос о возможности протекания так называемых “колебательных ядерных реакций” [8] в сверхсильных магнитных полях ( $\sim 10^{19}$  Гс); генерацию таких полей теоретическая астрофизика предсказывает в недрах нейтронных звезд.

В связи с вышеизложенным представляется возможным попытаться построить



“атом” темного вещества из продуктов распада нейтрона. Искомая элементарная структура “нейтронной” темной материи должна заключать в себе сильное стабилизирующее магнитное поле, практически не проникающее за ее пределы.

Подобная структура известна в электротехнике и ядерной физике: это так называемый “тороидный диполь”, или “ананоль”, как его назвал Я.Б.Зельдович [9]. Аналогом ананолья может служить соленоид с замкнутыми концами в форме тора, по обмотке которого течет ток. Что касается темного “атома”, то его можно представить в виде цепочки  $\beta$ -осциллирующих нейтронов, заключающей в себе сверхсильное магнитное поле.

В простейшей модели такого линейного “атома” заряженные частицы – электроны и протоны – совершают встречное движение с релятивистскими скоростями, перемещаясь друг за другом по спиральным траекториям вдоль силовых линий магнитного поля. Встречное движение противоположно заряженных частиц создает токовый слой, экранирующий магнитное поле внутри нейтронной структуры. Стабильность нейтронов имеет динамическую природу: они возникают и сразу же распадаются, чтобы через некоторое время появиться вновь практически в той же точке. Благодаря конфинменту сверхсильного магнитного поля, способного удерживать релятивистские заряженные частицы, образуются длинные и очень прочные нейтронные “полимерные цепочки”. В описанной простейшей модели траектории всех частиц должны быть замкнутыми, иначе такая система, в которой составляющие ее элементы движутся в противоположных направлениях, попросту распадется. Более сложная модель, вероятно, потребует введения магнитных монополей и античастиц.

К сожалению, бар-ананольную модель темной материи трудно, а скорее всего, невозможно согласовать со Стандартной моделью Большого взрыва. Прежде всего потому, что нейтронные ананольи не могут образоваться в условиях горячей ранней Вселенной: высокая температура исключает возможность самоорганизации релятивистских частиц в столь сложные структуры. Это обстоятельство вынуждает обратиться к альтернативной гипотезе “холодного” Большого взрыва [10], внося в нее некоторые существенные изменения.

В предлагаемом сценарии рождения и эволюции Вселенной все вещество изначально существовало в виде бар-ананольной темной материи. Сингулярное образование, из которого возникло наблюдаемое разнообразие астрофизических объектов, в условиях высокой плотности и нулевой температуры, по-видимому, обладало свойствами твердого тела, представляя собой упорядоченную (кристаллическую) структуру из плотноупакованных ананольных “атомов”. Надо полагать, такой Сингулярный Кристалл, благодаря высокой плотности силовых линий сосредоточенных в нем магнитных полей, обладал колоссальным внутренним напряжением.

По этой причине на некоторой стадии расширения пространства произошло растрескивание Кристалла. Это случилось, скорее всего, когда плотность среды, уменьшаясь в процессе расширения, достигла ядерной плотности. Внутри трещин в результате разрушения некоторого количества (~4-5%) ананольных “атомов” образовалось барионное вещество. Высвобожденная при разрушении ананольей энергия сверхсильного внутреннего магнитного поля привела к разогреву образованной барионной плазмы до значительных температур. Таким образом, распределение светящейся материи (галактик) повторяет рисунок первых крупномасштабных трещин.

Одно из важных отличий предлагаемого сценария формирования

крупномасштабной структуры Вселенной заключается в предсказании наличия материи в войдах, которые в современной космологии принято считать пустыми. Наблюдаемые в настоящее время войды соответствуют областям между трещинами Сингулярного Кристалла, образовавшимися в момент “холодного” Большого взрыва. Войды заполнены материей, которая сохранилась в “темном состоянии” – в виде уцелевших бар-анопольных структур. По этой причине общее распределение вещества во Вселенной в среднем более однородно, чем то, которое предсказано в Стандартной космологической модели. Это можно расценивать как физическое обоснование математически обусловленного закона Хаббла, что, безусловно, имеет значение при решении парадокса Хаббла-Сэндиджа [11].

Как известно, наряду с правдоподобным описанием формирования крупномасштабной структуры Вселенной общепризнанная теория “горячего” Большого взрыва имеет еще два достижения. Она предсказывает чернотельное реликтовое излучение и позволяет решить вопрос о химическом составе барионной материи. Есть основания полагать, что излагаемая здесь альтернативная модель способна дать такие же результаты, совпадающие с наблюдениями.

Бар-анопольную темную материю следует рассматривать как особую форму барионного вещества. Наблюдаемая светящаяся материя (галактики) своим появлением обязана разрушению бар-анопольных нитей. Другими словами, согласно предлагаемой гипотезе, обычное барионное вещество – это своего рода “осколки” бар-анопольной темной материи. С самого начала своего появления барионная компонента содержала некоторое количество тяжелых ядер (“металлов” на языке астрофизики). Такой химический состав имеет космологическое происхождение. Металлы должны присутствовать уже в ранней Вселенной – до эпохи звездообразования и взрывов первых сверхновых. Это противоречит представлениям Стандартной космологической модели, согласно которым первичный нуклеосинтез способен породить только легкие ядра.

Что касается микроволнового реликтового излучения, то его происхождение связано с высокотемпературной барионной плазмой, возникшей в процессе растрескивания Сингулярного темного кристалла. Образовавшаяся плазма заполнила многочисленные трещины Кристалла. Естественно, эта неоднородность распределения излучающего вещества должна проявляться в наблюдаемой в настоящее время анизотропии микроволнового фона. Стоит заметить, что в предлагаемом сценарии не возникает проблема термализации реликтового излучения, которая считается наиболее трудной при построении теории “холодного” Большого взрыва.

Жесткие и упругие бар-анопольные нити, образованные релятивистскими частицами, навитыми на силовые линии сверхсильного магнитного поля, стремятся распрямиться и обособиться. Не обладая выраженными электромагнитными свойствами, бар-анопольные нити взаимодействуют друг с другом и с окружающими объектами (в том числе и чисто барионными) в большей степени механически. Нити имеют тенденцию навиваться друг на друга с образованием жгутов. В случае зацепления множества нитей и жгутов формируется сложноорганизованный “клубок”, который можно назвать “бар-анопольным плазмоидом”. Процесс превращения первоначально твердых осколков темной материи в бар-анопольные плазменные образования начался сразу вскоре после первого акта растрескивания Сингулярного Кристалла.

В настоящее время темная материя распределена по пространству (включая войды) в виде плазмоидов различных размеров и плотности. Можно ожидать, что отдельные образования соединены своими периферийными жгутами и нитями и такой “составной” темный объект может иметь протяженность масштаба галактики. При столкновении

темных плазмоидов их отдельные бар-анупольные жгуты и нити рвутся. Этот процесс должен сопровождаться вспышкой коротковолнового излучения и выбросом энергичных ядер. Таким образом, темная материя является источником наблюдаемых гамма-всплесков и космических лучей сверхвысоких энергий, превышающих предел Грейзена-Зацепина-Кузьмина ( $5 \cdot 10^{19}$  эВ). Следует подчеркнуть, что эти явления происходят повсеместно, в том числе в пределах нашей Галактики.

Темная материя играет главную роль в образовании галактик, звезд и планет. По нашему мнению, без участия бар-анупольного плазмоида, находящегося на стадии уплотнения, барионное газо-пылевое облако не способно сконцентрироваться под действием собственных гравитационных сил и сжаться до такой степени, чтобы зажглась звезда. Само существование звезды и ее основные свойства, включая стабильность светимости, звездные циклы, пятна и т.п., связаны со сложноорганизованным объектом бар-анупольной темной материи, пребывающим в постоянном движении внутри барионного газо-плазменного шара.

Очевидно, гравитационное сжатие бар-анупольного вещества не может привести к образованию черной дыры, поскольку свернутые спирали, начиненные сверхсильным и неустранимым магнитным полем, эффективно противодействуют давлению и сжатию.

Следующий элементарный расчет может служить дополнительным свидетельством неслучайности выбора нейтрона в качестве краеугольного камня в бар-анупольной модели космологической темной материи и, в определенной степени, подтверждением обоснованности обращения к полузабытой теории “холодного” Большого взрыва.

Будем полагать, что во Вселенной существует порядка  $N \approx 10^{78}$  атомов [12]. В рамках бар-анупольной модели все эти “атомы” (в виде нейтронов) образуют вблизи Сингулярности плотноупакованный шар. Нетрудно оценить радиус Вселенной на стадии “нейтронного” шара (т.е. радиус Сингулярного Кристалла), полагая размер нейтрона  $d_n \approx 10^{-13}$  см:

$$R \approx \sqrt[3]{N} \cdot d_n \approx 10^{26} \cdot 10^{-13} = 10^{13} \text{ см}.$$

Выраженный во временных единицах этот размер принимает значение (скорость света  $c \approx 10^{10}$  см/с):

$$t_n \approx R/c \approx 10^3 \text{ сек}.$$

Можно видеть, что полученная величина удивительным образом совпадает со временем жизни свободного нейтрона. В этом совпадении обнаруживается связь темпоральной характеристики отдельной элементарной частицы (конкретно, нейтрона) со Вселенной в целом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов С.И. Проблема темной энергии: три модели – одно решение // XLVIII Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и

конденсированных сред, оптоэлектроники: Тезисы докладов. – М.: РУДН, 2012 – с. 205–209

2. *Baltz E A.* Dark Matter Candidates.– arXiv:astro-ph/0412170.

3. *Рябов В.А., Царев В.А., Цховребов А.М.* Поиски частиц темной материи // УФН.– 2008.– Т.178(11).– С.1129–1161.

4 *Chiu Man Ho, Scherrer R.J.* Anapole Dark Matter // Phys. Lett.– 2013.– B722 – P.341 – arXiv: hep-ph/1211.0503.

5. *Spergel D N, Steinhardt P J.* Observational evidence for self-interacting cold dark matter.– arXiv:astro-ph/9909386.

6. *Burkert A.* Self-Interacting Cold Dark Matter Halos.– arXiv:astro-ph/0012178.

7. *Nucciotti A.* Double beta Decay: Experiments and Theory Review – arXiv: nucl-ex/0707.2216

8. *Кузнецов С.И.* О колебательных ядерных реакциях в нейтронных звездах // XLVII Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники: Тезисы докладов. – М.: РУДН, 2011 – с.24

9. *Зельдович Я.Б.* Электромагнитное взаимодействие при нарушении четности // ЖЭТФ.– 1957.– Т.33.– С. 1531

10. *Aguirre A N.* The Cosmic Background Radiation in a Cold Big Bang // ApJ.– 2000.– V.533.– P.1–18.

11. *Караченцев И. Д.* Скрытая масса в местной вселенной // УФН.– 2001.– Т.171.– С.860.

12. *Dirac P.A.M.* A new basis for cosmology // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1938. – Т. 165. – P. 199-208.

**"О СВОЙСТВАХ НЕАССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР И ТОЖДЕСТВАХ НА НИХ"**

Александр Элиович

НИИ гиперкомплексных чисел в геометрии и физике,

Российский Университет дружбы народов

eliovich@mail.ru

Рассматриваются некоторые интересные свойства ассоциативных и неассоциативных алгебр и связанные с ними тождества (прежде всего квадратичные), которые могут иметь значение для геометрии и физики. Объясняется происхождение предложенных тождеств, их связь с сопряжениями, заданными на алгебрах.

**"ON PROPERTIES AND IDENTITIES OF NONASSOCIATIVE ALGEBRAS"**

Research Institute Hyper Complex Systems in Geometry and Physics,

Alexander Elovich

Peoples' Friendship University of Russia

eliovich@mail.ru

Some interesting properties of associative and nonassociative algebras and related quadratic identities are considered.

This identities may be relevant for the applying in geometry and physics.

The origin of this identities and their connection with conjugations, admitted on algebras, are described.

## ОБ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

С.В. Копылов

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ).

Москва, Россия

### Введение.

В уравнении Шрёдингера:  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$ , с Гамильтонианом  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U$ , при  $U = \text{const}(t)$  переменные разделяются. То есть  $\psi(\bar{x}, t)$  можно представить в виде  $\psi(\bar{x}, t) = \varphi(\bar{x}) \exp(-iEt/\hbar)$ . Здесь  $E$  – полная энергия, а  $\varphi(\bar{x})$  удовлетворяет стационарному уравнению Шрёдингера:  $\hat{H}\varphi = E\varphi$ . При этом  $U$  становится потенциальной энергией. Ниже мы строим дифференциальное уравнение для плотности вероятности:  $\varphi(\bar{x})^2$

### 1. Уравнение для $\varphi^2$ .

Волновая функция  $\psi(\bar{x}, t)$  – это новый объект, который вводится в физику квантовой теорией. Однако, интерпретацию получает не сам этот объект, а квадрат его модуля  $\psi(\bar{x}, t)\psi(\bar{x}, t)^* = |\psi(\bar{x}, t)|^2$ , который интерпретируется как плотность вероятности. В случае стационарного уравнения Шрёдингера имеем:  $|\psi(\bar{x}, t)|^2 = |\varphi(\bar{x})|^2 = \varphi(\bar{x})^2$ , поскольку  $\varphi(\bar{x})$  функция действительная.

Поскольку, как упоминалось выше, функция  $\varphi(\bar{x})$  удовлетворяет уравнению  $(\hat{H} - E)\varphi = 0$ , а интерпретацию получает  $\varphi^2$ , представляет интерес записать уравнение для  $\varphi^2$ .

Перепишем стационарное уравнение Шрёдингера в виде  $(\hbar^2/2m)\Delta + (E - U)\varphi = 0$ . Или, что тоже:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 + A)\varphi = 0, \quad (1)$$

здесь  $A = 2m/\hbar^2(E - U)$ .

Чтобы получить уравнение для  $\varphi^2$ , подействуем на  $\varphi^2$  оператором  $\Delta + A$ . Получаем:

$$(\Delta + A)\varphi^2 \equiv 2(\partial_x\varphi)^2 + 2(\partial_y\varphi)^2 + 2(\partial_z\varphi)^2 + 2\varphi(\Delta + A)\varphi - A\varphi^2. \quad (2)$$

Поскольку согласно (1)  $(\Delta + A)\varphi = 0$ , то  $(\Delta + A)\varphi^2 = 2(\partial_x\varphi)^2 + 2(\partial_y\varphi)^2 + 2(\partial_z\varphi)^2 - A\varphi^2$ . Учитывая, что  $\partial_x(\varphi^2) = 2\varphi\partial_x\varphi \rightarrow \partial_x\varphi = \partial_x(\varphi^2)/2\varphi$ , для предыдущего уравнения имеем,  $(\Delta + A)\varphi^2 = 1/2\varphi^2((\partial_x\varphi^2)^2 + (\partial_y\varphi^2)^2 + (\partial_z\varphi^2)^2) - A\varphi^2$ , или:

$$2W(\Delta + 2A)W - ((\partial_x W)^2 + (\partial_y W)^2 + (\partial_z W)^2) = 0, \quad (3)$$

где  $W = \varphi^2$ .

Таким образом, плотность вероятности  $W$  описывается нелинейным дифференциальным уравнением (3) в отличие от линейного уравнения (1) для  $\varphi$ .

## 2. О решениях уравнения для $W$ .

Рассмотрим уравнение (3) в простейшем, то есть одномерном случае, при  $A=0$ . Имеем  $\partial_x^2 W - (\partial_x W)^2 / 2W = 0$ . Согласно [1] уравнение вида  $y''_{xx} = (y'_x)^2 \xi(x)/y$  заменой  $w(x) = xy'_x / y$  приводится к уравнению Бернулли  $xw'_x = w + [\xi(x) - 1]w^2$ . В нашем случае  $\xi(x) = 1/2$ .

Уравнение Бернулли  $y'_x = f(x)y + g(x)y^\alpha$  [1,2] заменой  $u(x) = y^{1-\alpha}$  приводится к линейному уравнению вида  $u'_x = (1-\alpha)f(x)u + (1-\alpha)g(x)$ . Вводя  $F(x) = (1-\alpha)\int f(x)dx$  имеем  $y^{1-\alpha} = Ce^F + (1-\alpha)e^F \int e^{-F} g(x)dx$ . В нашем случае  $\alpha = 2$ ,  $f(x) = 1/x$ , а  $g(x) = -1/2x$ . В результате имеем  $W = (C_1x + C_2)^2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  некоторые константы.

К этому результату можно прийти и другим путём, если в условиях постановки задачи (одномерный случай,  $A=0$ ) решить уравнение (1). Получаем:  $\varphi = C_1x + C_2$ , а поскольку  $W = \varphi^2$ , то полученный выше результат становится очевидным.

Мы рассмотрели решение уравнения (3) в частном случае для иллюстрации. К вопросу о его решениях можно подойти с более общих позиций. В самом деле, выражение (2) это тождество верное при любой функции  $\varphi$ . Уравнение (1) своими решениями имеет вполне определённые функции  $\varphi$ . Поэтому, вычитая из тождества (2) уравнение (1) мы

превращаем его в уравнение. Полученное уравнение - (3), очевидно, имеет те же решения, что и уравнение (1). В самом деле, если  $\varphi$  решение уравнения (1), то тождество (2) верно, в частности, и при таком  $\varphi$ . Исключая из тождества с таким  $\varphi$  соотношение, соответствующее уравнению (1) мы получаем остаток тождества, с конкретным видом функции  $\varphi$ . Этот остаток и есть уравнение (3). При этом этот конкретный вид функции  $\varphi$  оказывается решением как уравнения (1) так и уравнения (2) и наоборот.

### **Заключение.**

Предпринятое построение имело своей целью в явной форме, на уровне дифференциальных соотношений, продемонстрировать принципиальное отличие волновой функции от квадрата её модуля – плотности вероятности.

С физической точки зрения представляет несомненный интерес рассмотрение в перспективе задачи не стационарной.

С математической же точки зрения предпринятое построение представляет интерес, как способ построения нелинейных дифференциальных уравнений, решения которых тем или иным образом соотносятся с решением линейной задачи.

### **Литература**

[1] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 1993. – 464 с.

[2] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука. Физматлит, 1976. – 576 с.



**ON A PROBABILITY DENSITY EQUATION**

S.V. Kopylov

MAMI Moscow State Technical University

Moscow, Russia

**Introduction**

In the Schrödinger equation:  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$ , with the Hamiltonian  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U$ , where  $U$  is independent of time, the variables are separable, i.e.  $\psi(\bar{x}, t)$ , can be represented as  $\psi(\bar{x}, t) = \varphi(\bar{x}) \exp(-iEt/\hbar)$ . Here  $E$  is the total energy, and  $\varphi(\bar{x})$  satisfies the stationary Schrödinger equation  $\hat{H}\varphi = E\varphi$ . Therewith  $U$  becomes a potential energy. Below we construct a differential equation for the probability density  $\varphi(\bar{x})^2$ .

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ В ОДНОМ РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

Маркеев А.П.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия,  
[markeev@mail.ru](mailto:markeev@mail.ru)

## STABILITY OF A PLANAR ROTATION OF A SATELLITE

Markeev A.P.

A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

*The stability results of a planar resonant rotation of a satellite in an elliptic orbit in a particular degeneracy case of the Hamiltonian of the perturbed motion are described.*  
Keywords: satellite, resonance, stability.

Приведены результаты исследования устойчивости плоского резонансного вращения спутника на эллиптической орбите в одном частном случае вырождения функции Гамильтона возмущенного движения.  
Ключевые слова: спутник, резонанс, устойчивость.

Рассмотрим плоское движение спутника относительно центра масс на эллиптической орбите. Через  $J_i$  обозначим момент инерции спутника относительно его главной центральной оси  $Ox_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Ось  $Ox_2$  во все время движения перпендикулярна плоскости орбиты, оси же  $Ox_1, Ox_3$  находятся в плоскости орбиты. Через  $\theta$  обозначим угол между осью  $Ox_3$  и радиус - вектором центра масс спутника относительно притягивающего центра. Пусть  $e$  — эксцентриситет орбиты, а  $\nu$  — истинная аномалия. Движение спутника относительно центра масс описывается дифференциальным уравнением второго порядка [1]

$$(1 + e \cos \nu) \frac{d^2 \theta}{d\nu^2} - 2e \sin \nu \frac{d\theta}{d\nu} + \frac{3(J_1 - J_3)}{J_2} \sin \theta \cos \theta = 2e \sin \nu$$

Если моменты инерции и эксцентриситет связаны соотношением  $(J_1 - J_3) = 2eJ_2$ , то это уравнение допускает [1] частное решение

$$\theta = \theta_* = \frac{\nu}{2} \quad (1)$$

Из неравенства треугольника для моментов инерции следует, что эксцентриситет орбиты должен при этом лежать в промежутке

$$0 < e \leq \frac{1}{2} \quad (2)$$

В соответствии с решением (1) спутник вращается в плоскости орбиты, совершая в абсолютном пространстве три оборота за время, равное двум периодам обращения центра масс по орбите.

Устойчивость вращения (1) исследовалась ранее [2,3]. Показана неустойчивость или устойчивость по Ляпунову для всех значений эксцентриситета из области (2), кроме одного значения  $e = e_0 = 0.054773$ . При  $e = e_0$  члены четвертой степени разложения функции Гамильтона в ряд в окрестности невозмущенного движения (1) вырождаются [3]. Поэтому строгое решение задачи об устойчивости требует учета членов выше четвертой степени в разложении функции Гамильтона в ряд. В докладе показано, что при  $e = e_0$  движение (1) будет устойчивым.

Как и в [3], введем возмущения  $q, p$  при помощи равенств

$$\theta = \theta_* + \frac{q}{1 + e_0 \cos v}, \quad \frac{dq}{dv} = p$$

Пусть  $u, v$  — начальные значения переменных  $q, p$ , а  $u_1, v_1$  — их значения при  $v = 2\pi$ . По теореме Лиувилля отображение  $u, v \rightarrow u_1, v_1$  сохраняет площадь. Это отображение имеет неподвижную точку  $u = v = 0$ , которая соответствует исследуемому движению спутника (1). Задача об устойчивости движения (1) эквивалентна задаче об устойчивости неподвижной точки  $u = v = 0$  отображения. Для исследования устойчивости неподвижной точки  $u = v = 0$  используем алгоритм из статьи [3].

Вычисления показывают, что линеаризованное в окрестности точки  $u = v = 0$  отображение  $u, v \rightarrow u_1, v_1$  представляет собой поворот на угол  $\alpha \approx 104^\circ 40'$ . Для такого значения  $\alpha$  корни  $\rho = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$  характеристического уравнения матрицы линеаризованного отображения удовлетворяют неравенствам  $\rho^m \neq 1$  ( $m = 1, 2, \dots, 6$ ), т.е. резонансы до шестого порядка отсутствуют. При помощи аналитического канонического преобразования  $u, v \rightarrow \xi, \eta$  приведем отображение  $u, v \rightarrow u_1, v_1$  к его нормальной форме [4-6] до членов пятой степени включительно. После некоторых вычислений найдем, что в новых переменных отображение не будет содержать члены второй, третьей и четвертой степеней и запишется в виде

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi + \frac{\gamma}{4} \eta (\xi^2 + \eta^2)^2 + \dots \\ \eta - \frac{\gamma}{4} \xi (\xi^2 + \eta^2)^2 + \dots \end{pmatrix}, \gamma = -698.956746$$

Многоточием обозначена совокупность членов не ниже шестой степени относительно  $\xi, \eta$ .

В симплектических полярных координатах  $R, \psi$ , вводимых равенствами

$$\xi = \sqrt{2R} \sin \psi, \quad \eta = \sqrt{2R} \cos \psi$$

нормализованное отображение запишется в виде

$$R_1 = R + O(R^{7/2}), \quad \psi_1 = \alpha + \psi + \gamma R^2 + O(R^{5/2}) \quad (3)$$

Так как  $\gamma \neq 0$ , то в любой достаточно малой окрестности начала координат существует [6] кривая инвариантная при отображении (3). Поэтому неподвижная точка отображения устойчива. Тем самым утверждение об устойчивости вращения спутника (2) при значении эксцентриситета, равном  $e_0$ , доказано.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда.

## Литература

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М. Наука, 1965. 416 с.
2. Хентов А.И. Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника Земли вокруг своего центра масс // Космические исследования. 1968. Т.6. Вып.5. С. 793 - 795.
3. Маркеев А.П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем. // Известия РАН. Механика твердого тела. 2004. №6. С. 3 - 12.
4. Birkhoff G.D. Surface transformations and their dynamical applications. // Acta Math. 1922. V.43. March. P.1 - 119.
5. Зигель К.Л. Лекции по небесной механике. М.: Изд - во иностр. лит. 1959. 300 с.
6. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОЛДИ-ВОУТХОУЗЕНА ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ  
ГРИНА ФОТОНОВ ЭЙНШТЕЙНА**

А.А. Бейлинсон, Н. Гоним

**«FOLDZBWOUTHUYSEN REPRESENTATION OF THE RETARDED GREEN  
FUNCTION OF EINSTEIN PHOTONS »**

A.A. Beilinson, N. Ghonim

**Российский университет дружбы народов, Москва, Россия**

*e-mail: alal@m9com.ru, d.chrno@mail.ru*

Мы будем изучать запаздывающую функцию Грина (фундаментальное решение) системы уравнений Максвелла

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_t(\mathbf{x}) = \text{rot } \mathbf{H}_t(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_t(\mathbf{x}) = -\text{rot } \mathbf{E}_t(\mathbf{x}) \quad (1)$$

интерпретируя её как характеристику эволюции состояния одного фотона,

используя систему единиц измерения, в которых  $h = c = 1$ . При этом мы покажем существование невырожденного преобразование переводящего эту функцию Грина в функцию Грина электрона Дирака.

Мы будем рассматривать функцию Грина системы уравнений (1) как обобщённую функцию на финитных основных функциях [2]. Будем строить эту функцию Грина уравнений Максвелла в переменных Майорана [1]

$$\mathbf{m}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_t(\mathbf{x}) + i\mathbf{H}_t(\mathbf{x}), \quad \bar{\mathbf{m}}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_t(\mathbf{x}) - i\mathbf{H}_t(\mathbf{x}).$$

Тогда эти уравнения становятся

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{m}_t(\mathbf{x}) = -\text{rot } \mathbf{m}_t(\mathbf{x}), \quad i \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{m}}_t(\mathbf{x}) = \text{rot } \bar{\mathbf{m}}_t(\mathbf{x}).$$

Запишем эти уравнения в импульсном представлении; при этом время  $t$  мы понимаем как параметр.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{m}}_t(\mathbf{p}) = -(\mathbf{S}, \mathbf{p}) \tilde{\mathbf{m}}_t(\mathbf{p}), \quad i \frac{\partial}{\partial t} \bar{\tilde{\mathbf{m}}}_t(\mathbf{p}) = (\mathbf{S}, \mathbf{p}) \bar{\tilde{\mathbf{m}}}_t(\mathbf{p}), \quad (2)$$

где

$$(\mathbf{S}, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0, & -ip_3, & ip_2 \\ ip_3, & 0, & -ip_1 \\ -ip_2, & ip_1, & 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{s}_j p_j = |\mathbf{p}| (\mathbf{S} \mathbf{p}_e), \quad (3)$$

$$\mathbf{p}_e = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -i \\ 0, & i, & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0, & 0, & i \\ 0, & 0, & 0 \\ -i, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} 0, & -i, & 0 \\ i, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$  — операторы спина фотона, равного 1 (см. [1], [3]).

Матрица (3) - эрмитова, поэтому её можно привести к диагональному виду некоторым унитарным преобразованием  $\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{p})$ . В результате получается диагональная матрица с элементами  $\pm \rho$  ( $\rho = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$ ) и 0. Отсюда следует вырожденность системы уравнений Максвелла, то есть последние представляют собой не шесть, а только четыре независимых уравнения. Поэтому решение первой тройки уравнений (2) есть

$$\tilde{\mathbf{M}}_i(\mathbf{p}) = e^{i(\mathbf{S}, \mathbf{p})} = \tilde{\mathbf{Q}}^\dagger(\mathbf{p}) e^{i\tilde{\mathbf{h}}^F(\mathbf{p})} \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{Q}}^\dagger(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{M}}_i^F(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}) \quad (4)$$

где

$$\tilde{\mathbf{h}}^F(\mathbf{p}) = \rho \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \rho \mathbf{h}_3 \quad (5)$$

— приведённая к диагональному виду матрица (3), а  $\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{p})$  — унитарный оператор и  $\tilde{\mathbf{Q}}^\dagger(\mathbf{p})$  — его сопряжённый.

Естественно  $\tilde{\mathbf{M}}_i^F(\mathbf{p})$  называть представлением Фолди-Воутхоузена, по аналогии с известным представлением решений уравнений Дирака для свободного электрона [4].

Отметим, что  $\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{p})$  не зависит от времени. Таким образом, возникает

$$\tilde{\mathbf{M}}_i^F(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} e^{i\rho}, & 0, & 0 \\ 0, & e^{-i\rho}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

решение задачи в представлении Фолди-Воутхоузена в переменных Майорана, которое определяется скалярной обобщённой функцией Грина  $\tilde{C}_{ii}(\mathbf{p}) = e^{i\rho}$  [2]. Очевидно прообраза Фурье  $C_{ii}(\mathbf{x})$  в обычном смысле не существует. Поэтому для построения этого прообраза мы должны понимать его как обобщённую функцию на аналитических

основных функциях. Можно показать, что эту обобщённую функцию можно понимать и как функционал на финитных основных функциях

$$C_{it}(x) = \frac{\delta^{S_t}}{4\pi t^2} + \frac{i}{\pi^2} \cdot \frac{t}{(t^2 - r^2)^2}, \quad (7)$$

где  $\delta^{S_t}$  — дельта-функция, у которой носитель есть сфера радиуса  $t$  с центром в начале координат [2].

Нашей задачей является построение  $\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{p})$ . Заметим что в матрице (5)  $h_3$  представляет собой инфинитезимальный оператор поворота вокруг оси  $z$  в каноническом базисе (то есть в базисе, состоящему из собственных векторов оператора  $H_3$ ) [3]. Поэтому геометрический смысл искомого преобразования заключается в повороте, переводящего инфинитезимальный оператор  $(\mathbf{S}, \mathbf{p}_e)$  поворота вокруг оси  $p$  в инфинитезимальный оператор поворота вокруг оси  $z$  в евклидовом базисе. Используя углы Эйлера, легко видеть, что этот оператор есть

$$\begin{pmatrix} \square & \cos \phi & \sin \phi & 0 & \square \\ \square & -\cos \theta \sin \phi & \cos \phi \cos \theta & \sin \theta & \square \\ \square & \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta & \cos \theta & \square \end{pmatrix}$$

Затем нужно выполнить переход от евклидового базиса к каноническому, что и осуществляет приведение оператора  $(\mathbf{S}, \mathbf{p}_e)$  к диагональному виду.

Таким образом, окончательно искомым унитарный оператор есть

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}(1-p_3^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} -p_2 + ip_1 p_3, & p_1 + ip_2 p_3, & -i(1-p_3^2) \\ p_2 + ip_1 p_3, & -p_1 + ip_2 p_3, & -i(1-p_3^2) \\ p_1 \sqrt{2}(1-p_3^2)^{\frac{1}{2}}, & p_2 \sqrt{2}(1-p_3^2)^{\frac{1}{2}}, & p_3 \sqrt{2}(1-p_3^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (8)$$

где  $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$ .

Как показано в [5], запаздывающая функция Грина электрона Дирака в представлении Фолди-Воутхоузена имеет вид

$$\begin{pmatrix} \square C_{it}(x), 0, 0, 0 \square \\ \square 0, C_{it}(x), 0, 0 \square \\ \square 0, 0, \bar{C}_{it}(x), 0 \square \\ \square 0, 0, 0, \bar{C}_{it}(x) \square \end{pmatrix}$$

Так как операторы, переводящие функции Грина уравнений Дирака и уравнений Максвелла в их представления Фолди-Воутхоузена не вырождены (см (8), [5]),

действительно существует не вырожденное преобразование, связывающее фундаментальные решения уравнений Максвелла для фотона и уравнений Дирака для электрона, не смотря на то что это бозоны и фермионы.

#### Литература

- [1]. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б., Квантовая электродинамика, Москва, Наука 1981.
- [2]. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщённые функции, вып. 1, Москва, Физматгиз 1958.
- [3]. Гельфанд И.М, Минлос Р.А., Шапиро З.Я., Представление группы вращений и группы Лоренца, их применения, Москва, Физматгиз 1953.
- [4]. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б., Квантовая теория поля, т. 1, Москва, <Мир> 1984
- [5]. Бейлинсон А.А., Материалы XLVII Всероссийской конференции по проблемам физики частиц, плазмы, конденсированных сред и оптоэлектроники, стр. 69-71, Москва, РУДН, 2012.



## СВЯЗЬ КУРСОВ ОБЩЕЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ВОЗМОЖНОСТЬ ЕЕ РЕАЛИЗАЦИИ В ПРЕПОДАВАНИИ ФИЗИКИ (НА ПРИМЕРЕ ТЕРМОДИНАМИКИ)

Ю. Г. Рудой, О.С. Овсянникова

Российский университет дружбы народов, кафедра теоретической физики, Москва,  
Российская Федерация

**1. Параллельное развитие КОФ и КТФ.** Хорошо известно, что развитие физики как науки неизменно опережает ее развитие как учебной дисциплины, что вполне закономерно и объяснимо. Однако в российском научно-педагогическом сообществе вызывает беспокойство нарастающий темп этого опережения: это может привести – и фактически уже приводит – к опасному для успеха преподавания физики (в том числе – и прежде всего – в педагогическом вузе) разрыву между курсами общей и теоретической физики (далее – КОФ и КТФ).

На ранних этапах развития физики этот разрыв, вообще говоря, отсутствовал – достаточно вспомнить в этой связи о «Диалогах» и «Беседах» Галилея, а также о трактатах Ньютона по механике и оптике. То же во многом справедливо и для последующих трудов Фарадея и Максвелла по электромагнетизму, а также Бернулли и Клаузиуса по молекулярно-кинетической теории (МКТ) теплоты – содержание этих теорий было весьма наглядно и легко воспроизводимо в простых опытах.

Однако уже в конце 19-го – начале 20-го веков указанный разрыв начал неуклонно и стремительно нарастать. Теоретические достижения Больцмана, Гиббса, Планка, Эйнштейна с большим запозданием входили в «общефизическую» культуру, оставаясь (даже по сию пору!) в основном уделом физиков-теоретиков. В еще большей степени это относится к краткой, но бурной эпохе 20-ых годов 20-го века, когда усилиями Бора, Шредингера, Гейзенберга и Дирака была создана квантовая механика, долгое время вообще не представленная в КОФ.

В дальнейшем неоднократно предпринимались попытки если не устранить – что, разумеется, в полном объеме вообще невозможно – то хотя бы несколько сгладить указанный разрыв. Одной из первых удачных попыток такого рода следует считать пятитомное «Введение в теоретическую физику» М. Планка, изданное в течение 1925-1930 гг. и недавно (2005-2006) переизданное издательством URSS, в целом вполне доступное современному читателю с общефизической подготовкой.

Полезно обратить внимание на построение этого курса: сначала излагается механика (сначала твердых, а затем деформируемых тел), далее электромагнетизм и оптика, и лишь в качестве завершения курса – учение о теплоте и строении вещества. Именно эта логическая схема легла в основу всех последующих курсов КТФ, однако во многих курсах КОФ, к сожалению, до сих пор сохранилась иная – а именно, историческая – последовательность изложения, согласно которой теплота и строение вещества излагается сразу после механики.

Четверть века спустя после курса М. Планка, а именно в конце 40-ых – начале 50-ых годов 20-го века, был издан и также полностью переведен курс КТФ А. Зоммерфельда. Этот курс в точности следует логической схеме М. Планка, однако в отличие от

последнего требует достаточно свободного владения методами математической физики: об этом свидетельствует наличие в курсе специального (заключительного) тома, посвященного дифференциальным уравнениям математической физики.

Особое место в этом смысле занимает замечательный курс КТФ Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, созданный в течение четверти века (1937-1972) и продолжающий регулярно совершенствоваться и переиздаваться последователями этой научной школы. Несмотря на свое название, этот курс (по крайней мере, его ключевые тома) по замыслу авторов должен был быть в определенной мере доступен не только для физиков-теоретиков, но и для более широкого контингента читателей – именно об этом свидетельствует аннотация и авторское предисловие к первому изданию первого тома (1937 год).

В дальнейшем создание курса Ландау и Лифшица пошло все же по более «теоретическому пути», однако приверженность авторов к единому изложению физики с акцентом на ее общефизические основы нашла выражение в издании в 1965 году (совместно с А.И. Ахиезером) замечательной и вполне доступной студенту (и даже школьнику) книги «Механика и молекулярная физика»; еще ранее (в 1948 году) Л.Д. Ландау прочитал курс лекций по общей физике в МФТИ – к сожалению, так и не изданный широким тиражом.

В результате длительного периода «параллельного» развития КОФ и КТФ возник целый ряд положительных «подвижек» – например, некоторые сведения из релятивистской и квантовой физики вошли сегодня даже в школьные учебники. Однако изложение, например, основ молекулярно-кинетической теории (МКТ) вещества даже в хорошо известных курсах КОФ (Д.В. Сивухин, В.И. Савельев, А.Н. Матвеев) по-прежнему остается на уровне в лучшем случае конца 19-го века с небольшими вкраплениями элементов квантовой теории.

Принято считать, что для КОФ этого вполне достаточно, однако продвижение современных технологий в мезо- и наноразмерный диапазоны может уже в ближайшем будущем потребовать более детальных представлений о тепловых и квантовых свойствах вещества. Это возможно, например, в связи с проблемой создания и применения квантовых компьютеров, новых источников энергии и т.п.; соответственно, ряд новых понятий должен быть отражен уже в курсе КОФ – а в дальнейшем, возможно, и в школьном курсе физики.

Основная цель данного сообщения состоит в попытке показать (на примере термодинамики), что такое «взаимопроникновение» КОФ и КТФ вполне возможно и не нуждается в привлечении *методов* КТФ, но опирается лишь на возможности, предоставляемые КОФ, дополненные новыми *понятиями* (которые, конечно, как всегда, вводятся *ad hoc*).

По нашему мнению, основанному на более чем 40-летнем опыте преподавания физики на всех уровнях от КОФ до КТФ, иногда достаточно лишь слегка сместить акценты и ввести некоторые более «прозрачные» обозначения, как «до боли знакомые» простые формулы «заиграют» совершенно иначе и дадут простор для широких физических обобщений. Разумеется, все это не может заменить строгих выводов, но порой в преподавании КОФ достаточно лишь «наметить тенденцию», используя для этого весьма популярный в физике метод *эффективных параметров* (ЭП).

В методологическом смысле этот метод основан на известном принципе, называемом «бритвой Оккама» и требующем по возможности не умножать числа «сущностей» (в данном случае – физических понятий), а максимально полно использовать уже имеющиеся, наполняя их новым, более общим содержанием. Разумеется, такой подход с самого начала является полуфеноменологическим, но следует ли требовать большего для достижения поставленной *образовательной* цели? Подобный подход вообще весьма широко используется в КОФ – например, при изложении элементов СТО или ОТО; здесь

мы лишь попытаемся его несколько расширить применительно к области МКТ и вообще тепловых явлений, которая в англоязычной литературе обычно именуется «thermal physics».

**2. Возможное обобщение МКТ в рамках КОФ.** Как известно из КТФ, для адекватного изложения указанной темы необходим метод вторичного квантования, понятия химического потенциала и большого канонического ансамбля, а также умение свободно обращаться с весьма сложными интегралами. Ничего этого, разумеется, нельзя ожидать от студентов в рамках КОФ, однако и полностью игнорировать все обобщения модели Бернулли – Максвелла спустя 150-200 лет после ее создания было бы, наверное, не вполне разумно.

Во всех существующих учебниках по КОФ весьма подробно рассматривается только два таких обобщения, а именно учет неидеальности газа в рамках модели Ван-дер-Ваальса, а также учет многоатомности молекул газа в рамках т.н. «квантовой теории теплоемкости». Однако после изучения КОФ студент должен, на наш взгляд, уметь хотя бы качественно ответить и на другие – порой даже более простые – вопросы, почему-то остающиеся обычно вне поля зрения как студента, так и преподавателя. Разве не интересно узнать, например, каким образом повлияет на вид *термического* уравнения состояния (УС) Клапейрона – Менделеева учет релятивистского, а также квантового характера движения частиц *одноатомного* (а не сразу почему-то двухатомного) идеального газа; в противном случае знания студента вряд ли можно назвать последовательными и систематическими.

К сожалению, даже лучшие из существующих учебных пособий по КОФ такой возможности студенту не предоставляют: квантовые идеи вводятся лишь в связи с *калорическим* УС для описания внутренних (колебательных и вращательных) степеней свободы двухатомных газов, а релятивистские идеи в контексте МКТ не рассматриваются вовсе.

Между тем в рамках КОФ в контексте свойств теплового излучения широко обсуждаются термодинамические свойства идеального газа как раз ультрарелятивистских частиц (фотонов), однако эта тема излагается обычно вне всякой связи с МКТ. Это весьма непоследовательно, так как модель Бернулли–Максвелла, а также понятие упругого соударения со стенкой сохраняют применимость, ввиду того что у фотонов имеется как энергия, так и импульс (вспомним опыты Лебедева по давлению света).

Аналогично, в других разделах КОФ находит свое место понятие квантового вырождения – прежде всего по отношению к трансляционным степеням свободы частиц газа с учетом их статистики, однако при изложении свойств идеальных квантовых газов обычно ограничиваются областью низких температур вблизи основного состояния при  $T=0$ .

В результате даже добросовестный и любознательный студент остается в неведении по поводу того, изменяются ли – и если да, то как именно – УС, описывающие идеальный газ, в области *промежуточных* температур (или концентраций). Такой вопрос естественно возникает при подходе к области квантового вырождения, образующей линию на фазовой плоскости  $(T, n)$  не снизу, а сверху по  $T$  (или, соответственно, не сверху, а снизу по  $n$ ). Аналогично, остается «за кадром» и модификация УС в случае, когда частицы идеального газа обладают очень малой (или даже нулевой) массой покоя, а их закон дисперсии существенно отличен от квадратичного.

Цель данного доклада состоит именно в том, чтобы показать, каким образом можно, избегая введения чуждых КОФ понятий и методов, не только сообщить студентам дополнительные знания, но, главное, значительно полнее показать им широкие возможности, заложенные даже в простых физических моделях – ведь, в конечном итоге, одна из основных целей КОФ как раз и состоит в развитии физического мышления и

интуиции студентов. Предлагаемый нами подход ЭП подробно описан в статьях [I, II], где в I дано релятивистское обобщение, а в II – квантовое обобщение, использует простую и естественную мотивировку, основанную на знакомых студентам (и даже школьникам) формулах, справедливых МКТ классического идеального газа.

[I, II] Рудой Ю.Г., Кейта И. *Термодинамические уравнения состояния классического идеального газа и их обобщение посредством «эффективных» параметров*. Физическое образование в вузах. 2007. том 13, вып.1 (часть I), вып. 3 (часть II).

**ТОПОЛОГИЯ, ЧАСТИЦЫ И ГРАВИТАЦИЯ**  
**TOPOLOGY, PARTICLES AND GRAVITAION**

Журавлев В.М.,  
 (Zhuravlev V.M.)

Ульяновский государственный университет,  
 Ульяновск, Россия

[zhvictorm@gmail.com](mailto:zhvictorm@gmail.com)

В работе рассматриваются проблемы и задачи построения теории элементарных частиц и полей на основе топологического подхода к описанию структуры физического пространства, как 3-х мерной гиперповерхности в евклидовом пространстве размерности  $D=4$ . В рамках данного подхода рассматриваются вопросы описания гравитационного поля и вычисления массы частиц.

In work the problems of constructing a theory of elementary particles and fields based on the topological approach are represented. Theory realize of the description of the structure of physical space as a 3-dimensional hypersurface in Euclidean space of dimension  $D = 4$ . This approach allow to represent the description of the gravitational field and calculate the mass of the particles.

Основные идеи данной теории были изложены в работах [1,2] и представлялись на предыдущей конференции [3]. В настоящей работе идеи, изложенные в этих работах, развиваются и уточняются. Основным элементом данной теории является топологическая интерпретация целочисленного электрического заряда как топологического инварианта областей физического пространства, выделенных геометрическим способом с помощью функции высоты  $F$ , которая задает с помощью уравнения:

$$u = F(x, t),$$

физическую трехмерную гиперповерхность  $V^3$  в четырехмерном евклидовом пространстве  $W^4$ . Здесь  $x = \{x^1, x^2, x^3\}$  и  $u = x^4$  - декартовы координаты на  $W^4$ ,  $t$  - время (абсолютное в  $W^4$ ). Координаты  $x = \{x^1, x^2, x^3\}$  соответствуют токам трехмерной евклидовой гиперплоскости  $P^3 \in W^4$ . Все пространство  $P^3$  разбивается однозначно на отдельные области особыми изоповерхностями функции  $F$ , называемой фундаментальным потенциалом. Под особой изоповерхностью функции  $F$  понимается изоповерхность (или ее замкнутая компонента), на которой лежит хотя бы одна седловая точка данной функции. При этом вводится понятие топологической ячейки, которая определяется как область пространства, ограниченная любой изоповерхностью функции  $F$ . Простой топологической ячейкой называется топологическая ячейка, которая содержит один и только один экстремум функции  $F$ . Особые топологические ячейки,

ограниченные особыми изоповерхностями, состоят из объединения нескольких простых ячеек и рассматриваются как отдельные элементарные частицы материи.

Электрический заряд частицы, как топологической ячейки  $V$ , определяется с помощью соотношения:

$$Q = \pm \chi(\mathcal{V}),$$

где  $\chi(\mathcal{V})$  - эйлерова характеристика [4,5] топологической ячейки  $\mathcal{V}$ . Это соотношение вытекает из общего способа установления связи электрического поля с фундаментальным потенциалом с помощью введения геометрических маркеров. Геометрические маркеры определяются как координаты на вспомогательном, вообще говоря, римановом пространстве, связанные с координатами  $x$  на каждой простой топологической ячейке соотношениями:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} = e^a,$$

следствием которых является соотношение:

$$F = F_0 + \varepsilon \frac{1}{2} |e|^2,$$

где  $e^2 = (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2$ , а  $F_0$  - значение функции  $F$  в экстремуме  $F$ , лежащем в данной топологической ячейке. Введение геометрических маркеров  $e$  приводит к первому уравнению Максвелла для совокупности точечных зарядов в форме:

$$\operatorname{div} D = 4\pi \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \delta(x - x_k),$$

где сумма берется по всем критическим точкам функции  $F$  (т.е. экстремумам и седловым точкам этой функции),  $\varepsilon_k = \pm 1$  - знаки точечных зарядов, совпадающих с критическими точками. При этом поле индукции можно записать в следующем виде:

$$D^a = \frac{|J|}{|e|^3} e^a \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a}.$$

В это соотношение входит функция  $|J|$ :

$$|J| = \det \left| \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} \right|,$$

представляющая собой якобиан преобразования  $x \rightarrow e$ .

В [1] показано, что величина  $|J|$  позволяет ввести понятие геометрического усреднения функций на топологических ячейках:

$$\bar{f} = \frac{1}{|\mathcal{V}|} \int_{\mathcal{V}} f(x, t) |J| dV, \quad |\mathcal{V}| = \int_{\mathcal{V}} |J| dV.$$

Это сразу приводит к уравнениям Ньютона для средних координат ячеек, средних скоростей и ускорений, которые содержат в стандартном виде силу Лоренца и Кулона, а так же некоторую дополнительную силу, которую следует интерпретировать как силу тяготения. Показано так же, что  $|J|$  представляет собой квадрат модуля волновой функции, которая удовлетворяет по смыслу своего построения уравнению Шредингера для частицы в электромагнитном поле и дополнительном поле "тяготения". Таким образом, в данной теории воспроизводятся все основные уравнения современной динамики частиц, а топологическая классификация ячеек позволяет объяснить строение элементарных частиц, как минимум, по двум квантовым числам - электрическому заряду и барионному заряду, а так же предположительно по спину.

В представленном докладе решается задача проведения вычислений динамических характеристик частиц, в том числе массы, с помощью сведения вычисления усредненных характеристик частицы к дискретным суммам локальных значений в критических точках функции  $F$ . Общая формула, позволяющая проводить такие вычисления, основывается на общем тождестве:

$$\bar{f} = \int_{\mathcal{V}} |J| I(e) f(x, t) dV = -4\pi \sum F_k + \int_{\partial\mathcal{V}} P^\alpha d\sigma_\alpha, \quad (1)$$

где  $P^\alpha = S(x, t) I(e) |J| \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} e^a$  - вспомогательное векторное поле, связанное с  $f(x, t)$ ,

$$F_k = 4\pi \lim_{x \rightarrow x_k} \left[ C_k + \int_0^R I(e) f(x, t) R^2 dR \right] \varepsilon_k, \quad (2)$$

а постоянные  $C_k$  вычисляются из условий согласования значений  $F_k$  в седловых точках. В этих соотношениях:  $R = \sqrt{2|F_0 - F|}$  - радиальная координата в пространстве маркеров на листе, соответствующем данной простой топологической ячейке. На основе полученных общих соотношений рассматриваются общие аспекты динамики частиц и общие интегралы движения динамики частиц. В том числе, в данной работе обсуждаются вопросы вычисления масс частиц.

Еще одной задачей, решение которой обсуждается в данном докладе, является проблема описания поля тяготения в рамках данной теории и вычисления массы. Как показано, масса в данной теории, с точностью до множителя, совпадает с полной энергией фундаментального электромагнитного поля, что эквивалентно релятивистской формуле Эйнштейна связи массы и энергии, но без необходимости введения пространства-времени Минковского. В рамках данной теории естественным образом появляется аналог Ньютоновского поля тяготения, но с гравитационной постоянной, меняющейся в зависимости от радиальной координаты  $R$  на данной топологической ячейке. Показано, что это может быть сопоставлено эффекту скрытой массы или "темной материи". Показано, как можно из условий связи массы и энергии вычислить вид распределения "темной материи" в каждой топологической ячейке.

- [1] Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленным зарядом и топология. Изв. вузов. Серия физика.-2000.- N2.- с. 134-140
- [2] Zhuravlev V.M. A topological interpretation of quantum theory and elementary particle structure. Gravitation and Cosmology, 2011, Vol. 17, No. 3,pp. 201–217.
- [3] Журавлев В.М. Гравитация и геометрия. новый подход. Тезисы докладов XLIX Всероссийской конференции по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники, Россия, г. Москва, РУДН, 15-18 Мая 2013 г, с. 138-140
- [4] И.С.Шапиро, М.А.Ольшанецкий, Лекции по топологии для физиков. Ижевск. 2000 г.
- [5]. Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко, *Современная геометрия. Методы теории гомологий*, Наука, Москва (1984), 343с



**ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОРГАНИЧЕСКИХ  
ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ**И.М. Каширский<sup>(1)</sup>, Ю.С. Булышев<sup>(2)</sup>**<< PHOTOELECTRIC PROPERTIES OF ORGANIC SEMICONDUCTOR  
MATERIALS >>**I.M. Kashirskiy<sup>(1)</sup>, Yu.S. Bulyshev<sup>(2)</sup><sup>(1)</sup>*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия**e-mail: [ikachirski@yahoo.com](mailto:ikachirski@yahoo.com)*<sup>(2)</sup>*Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия***Abstract**

The work is devoted to the study of the mechanism of charge photogeneration in low dimensional and polymer organic materials by the photoinduced discharge method. It is shown that in the investigated materials the process of the charge photogeneration is the multistep process, the final step, thermal dissociation of light generated electron-hole pairs, can be well described by the Onsager model. It is found that the photogeneration quantum yield in all investigated materials is the function of temperature and the electric field.

Работа посвящена исследованию механизма фотогенерации носителей заряда в низкомолекулярных и полимерных органических материалах. Полимерные полупроводниковые материалы, сочетающие фотоэлектрическую чувствительность с характерными свойствами полимеров: пленкообразуемостью, эластичностью, термопластичностью, получают все более широкое практическое применение при создании новых приемников оптического излучения, работающих в различных спектральных диапазонах. Данные материалы используются в качестве люминесцирующих сред, проводящих пленок и волокон, а также в качестве регистрирующих сред в электрофотографическом и термопластическом процессах записи оптической информации [1]. Вследствии этого, исследования фотоэлектрических свойств органических полупроводниковых материалов ведутся чрезвычайно интенсивно. Эти исследования имеют и важное научное значение поскольку позволяют получать информацию о возбужденных состояниях, механизмах переноса заряда и энергии, и таким образом, углубляют физические представления о природе электронных явлений в

органических полупроводниках. К недостаткам органических полупроводников можно отнести их низкую собственную фоточувствительность в видимой области спектра. Для расширения спектральной области фоточувствительности таких материалов используются различные фотосенсибилизирующие примеси. Например, для расширения области фотоэлектрической чувствительности полимеров с сопряженными связями используются низкомолекулярные органические примеси акцепторного типа ТНФ, тетрацианэтилен и другие соединения. Легирование связано с образованием комплексов с переносом заряда (КПЗ) между звеном полимера и примесью, при этом в спектрах поглощения таких систем появляется длинноволновая полоса, отсутствующая у исходных компонентов [2].

В работе изучалась зависимость квантового выхода фотогенерации как в чистых, так и в легированных тонкопленочных образцах. Квантовый выход определялся по изменению поверхностного потенциала при определенной световой экспозиции в квазипостоянном поле. Прямой расчет сдвига носителей заряда и исследование зависимости квантового выхода фотогенерации показали, что условия эксперимента обеспечивают возможность полного сбора генерированных светом неравновесных носителей заряда. Установлено, что в изученных образцах квантовый выход фотоэффекта активационно растет с ростом температуры и является нелинейной функцией приложенного электрического поля [3]. Конечная стадия фотогенерации является многоступенчатым процессом и протекает по механизму Онзагера [4].

## Литература

- [1]. Богусловский Л.И., Ванников А.В. Органические полупроводники и биополимеры.-М.: Наука, 1968, с.180.
- [2]. Акимов И.А., Черкасов Ю.А., Черкашин М.И. Сенсибилизированный фотоэффект.-М.: Наука, 1980, с.384.
- [3]. Kashirskiy I.M.. Charge Carriers Transport Mechanism in a-TNF Thin Layers. Вестник РУДН. Серия << Математика. Информатика. Физика>>. – 2013. № 4. С. 165-169.
- [4]. Onsager L. Initial recombination of ions. Phys. Rev., 1938, vol. 54, p. 554-557.

## ЧАСТИЦЫ В МОДЕЛЯХ ПРИЧИННОСТНОГО МНОЖЕСТВА В КВАНТОВОЙ ГРАВИТАЦИИ

А.Л. Круглый

*Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Россия, 117218,  
Москва, Нахимовский пр-т, 36, к. 1, E-mail: [akrugly@mail.ru](mailto:akrugly@mail.ru)*

В квантовой гравитации имеются разные подходы, одним из которых является гипотеза причинностного множества (causal set hypothesis) (например, см. обзор [1]). Причинностное множество – это локально конечное частично упорядоченное множество событий. Частичный порядок идентифицируется как причинность аналогично пространству Минковского. Предполагается, что пространство-время в микромире конечно делимо, что описывается как локальная конечность. Множество Александра пары точек – это множество точек, следующих за первой и предшествующих второй. Локальная конечность означает, что множество Александра любой пары точек конечно.

Причинно-следственные связи являются единственными связями между событиями. Поэтому, множество одновременных событий представляет собой множество несвязанных событий. Любая структура, состоящая из связанных событий, является не объектом в момент времени, а процессом конечной длительности.

Причинностное множество может быть представлено ациклическим ориентированным графом, то есть ориентированным графом, не имеющим ориентированных циклов. Это представление удобно при построении моделей, и ниже будут рассматриваться только такие графы.

Вершины и ребра графа являются элементарными неделимыми объектами. Они не имеют внутренней структуры и, следовательно, внутренних свойств. Все их свойства определяются их положением в графе. Соответственно, свойства любого объекта, являющегося некоторым подграфом, определяются связями вершин и ребер, его составляющих, и их связями с другими вершинами и ребрами.

Предполагается, что причинностное множество является единственной реальностью. Континуальное пространство-время должно возникать, как некоторая аппроксимация большого причинностного множества. Таким образом, микрообъекты являются подграфами и должны описываться без использования континуального пространства-времени. Простейшими материальными объектами являются элементарные частицы. Их моделями должны являться некоторые простейшие подграфы. Поскольку любой подграф, кроме множества неупорядоченных вершин, является моделью процесса, то любая частица есть процесс. Стабильная частица есть повторяющийся или квазиповторяющийся процесс. Таким образом, индивидуальность частицы определяется некоторой минимальной структурой, которая многократно повторяется, возможно, с некоторыми

вариациями. При этом повторы линейно упорядочены. Их последовательность является прообразом мировой линии. В квантовой теории цикличность и свойства частиц постулируются. Рассматриваемая модель естественным образом описывает частицу, как повторяющийся процесс, и наделяет ее индивидуальной структурой. Все свойства частицы должны быть идентифицированы с топологическими свойствами ее структуры.

В работе [2] предпринята попытка идентифицировать частицы с конкретными структурами и постулирована формула для вычисления масс частиц. Частицы идентифицированы с периодическими графами, вершины которых однозначно разбиваются на подмножества неупорядоченных вершин. Простота структур заключается в том, что число вершин в каждом таком подмножестве невелико. Например, один период электрона идентифицирован с последовательностью из трех множеств вершин, содержащих 1, 2 и 1 вершину соответственно. Масса частицы выражается через число таких подмножеств в одном периоде, порядок их следования и число вершин в каждом подмножестве. Массы частиц получаются выраженными в новых топологических единицах. С экспериментом должны совпадать их отношения. Предлагаемая модель дает погрешность во втором – четвертом знаке, что не плохо для такой простой модели. Недостатком модели является ее подгоночный характер. Структура частиц и формула для массы постулируются, но не выглядят очевидными. Однако интересно, что простая модель дает удовлетворительный спектр частиц и их масс.

Выше структура частиц постулировалась. В последовательной модели она должна следовать из динамики. Любая динамика есть способ предсказывать будущие состояния системы или реконструировать прошлые. Это означает, что у нас есть некоторый конечный граф, и мы должны его достроить. Минимальной частью графа является одна вершина, и мы можем любую достройку выполнить как последовательность добавления новых вершин по одной [3]. Такой процесс получил название «динамика последовательного роста» [4].

Алгоритм, по которому выбирается конкретный вариант добавления новой вершины, играет роль уравнения движения. Алгоритм может быть детерминистическим или вероятностным. В первом случае выбор новой вершины однозначно определяется структурой имеющегося графа. Во втором случае эта структура задает только вероятности различных вариантов добавления новой вершины. В динамике последовательного роста структуры частиц должны возникать как некоторые самоорганизующиеся структуры. Таким образом, интерес представляет поиск и изучение алгоритмов, порождающих самоорганизацию. Одним из основных методов исследования является численное моделирование. Первыми такими алгоритмами были детерминистические алгоритмы [5]. В этой работе приведен ряд примеров. Однако не было попытки идентифицировать получаемые структуры с какими-либо объектами реального мира. Вероятностные алгоритмы представлены в работах [6, 7, 8].

В работе [6] модель не является причинностным множеством в чистом виде. Рассмотрено двумерное пространство Минковского, а в нем частицы, движущиеся по светоподобным мировым линиям. Они иногда взаимодействуют (непосредственно

сталкиваются). Эти столкновения образуют причинностное множество или граф, вершины которого инцидентны двум входящим и двум выходящим ребрам (мировым линиям частиц). Динамика заключается в последовательном добавлении новых столкновений. Имеется алгоритм, который вероятностно определяет, какое столкновение добавляется. Численно моделировалось  $10^4 - 10^5$  столкновений 80-ти частиц и наблюдался процесс самоорганизации. Вначале координаты столкновений были хаотичными. Постепенно столкновения выстраиваются в прямые линии.

В работах [3, 7, 8] также рассматривался граф, вершины которого инцидентны двум входящим и двум выходящим ребрам (x-граф). Однако он рассматривался чисто топологически без вложения в пространство-время или добавления каких-либо свойств вершин или ребер, что соответствует исходной гипотезе причинностного множества. Рассматривались вероятностные алгоритмы последовательного роста, основанные на случайных блужданиях на x-графе. В работе [7] для одного из алгоритмов доказано, что для любого начального x-графа имеется конечная вероятность, что последовательный рост, начиная с некоторого шага, будет представлять собой независимый рост нескольких последовательностей вершин, связанных двойными ребрами.

В работах [3, 7] алгоритмы порождают очень простые самоорганизующиеся структуры. В работе [8] рассмотрена более сложная модификация алгоритма из работы [7]. Его аналитическое исследование проблематично. Численное моделирование показывает образование самоорганизующихся структур. На рисунке 1 приведен пример последовательного добавления к одной вершине 141 вершины. Начальная вершина указана большой стрелкой. Ориентация всех ребер направлена вверх. Маленькими стрелками изображены свободные валентности вершин, к которым могут ребрами прикрепляться новые вершины. Видно 7 образовавшихся структур. Основными субструктурами являются цепочки двойных ребер. Некоторые простейшие структуры (4, 6) состоят только из одной такой цепочки. Самыми большими и сложными являются структуры 1 и 2. Каждая структура интерпретируется как процесс эволюции частицы. Они связаны между собой ребрами. Эти ребра интерпретируются как взаимодействия частиц. Модель не претендует на описание реальных частиц. Поэтому не имеет смысла пытаться идентифицировать какие-либо частицы с этими структурами. Однако интересен факт моделирования динамики эволюции и взаимодействия нетривиальных структур на основе чисто топологического простого вероятностного алгоритма.

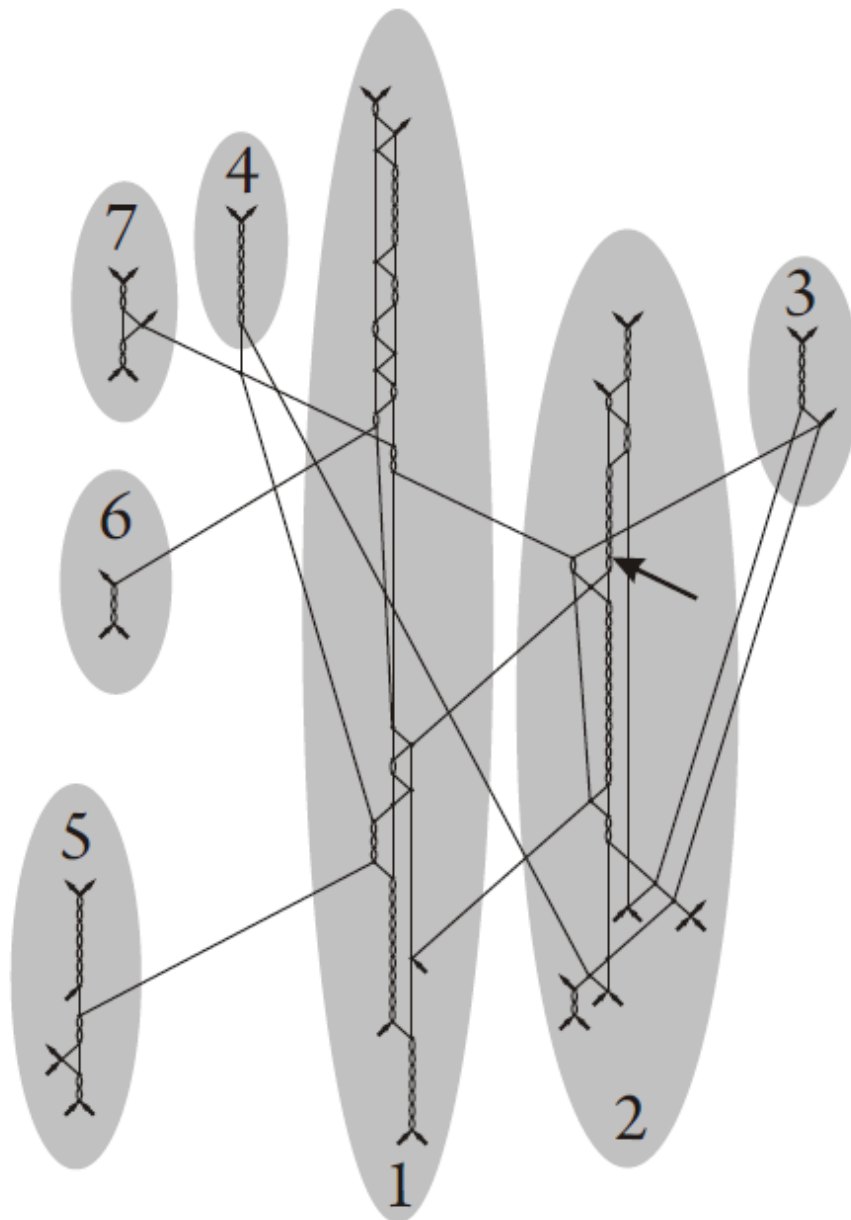


Рис. 1. Пример результата численного моделирования динамики последовательного роста х-графа.

Отмеченные работы показывают, что в последнее время достигнут некоторый прогресс в моделировании частиц в рамках гипотезы причинностного множества. Однако не решен ряд фундаментальных проблем. Алгоритм, описывающий реальный мир, должен следовать из некоторых первичных принципов. Такие принципы и алгоритмы предлагались [3, 4], но они не приводят к самоорганизации. Самоорганизация наблюдается на основе алгоритмов, специально для этого сконструированных. Отсутствует обоснованная идентификация топологических свойств структур с

характеристиками частиц (квантовыми числами), а самих структур с реальными частицами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. D. Sorkin, Causal sets: Discrete gravity, (notes for the Valdivia summer school), in Lectures on Quantum Gravity, Proceedings of the Valdivia Summer School, Valdivia, Chile, January 2002, edited by A. Gomberoff and D. Marolf, New York: Springer, 2005, pp. 305-327, (arXiv:gr-qc/0309009).
2. Gudder S. Elementary Particles and the Causet Approach to Discrete Quantum Gravity// ArXiv: 1403.7275.
3. Krugly A. L. A sequential growth dynamics for a directed acyclic dyadic graph// Вестник РУДН, Серия "Математика. Информатика. Физика". – 2014, № 1, с. 124-138 (ArXiv: 1112.1064).
4. Rideout, D. P. and Sorkin, R. D. A classical sequential growth dynamics for causal sets// Physical Review. - 2000. - D61. - pp. 024002-1 - 024002-16. (ArXiv: gr-qc/9904062).
5. T. Bolognesi, Causal Sets from simple models of computation, International Journal of Unconventional Computing, 6(6), 489 – 524, OCP Science (2010), (arXiv: 1004.3128 [physics.comp-ph]).
6. Cortês M. and Smolin L. The universe as a process of unique events// ArXiv: 1307.6167.
7. Krugly A. L. A Simple Self-organized Structure in the Example of a Sequential Growth Dynamics of a Causal Set// Third International Conference on Theoretical Physics "Theoretical Physics and its Applications", Moscow, June 24-28, 2013 (в печати).
8. Krugly A. L. The action in a causal set approach to quantum gravity// Physical interpretation of relativity theory: Proceedings of international meeting. Moscow, 1-4 July 2013. Ed. by M. C. Duffy, V. O. Gladyshev, A. N. Morozov, V. Pustovoit, P. Rowlands. – Moscow: BMSTU - 2013, pp. 170-178.

## PARTICLES IN CAUSAL SET MODELS IN QUANTUM GRAVITY

### Alexey L. Krugly

Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Science, 117218, Nahimovskiy pr., 36, k. 1, Moscow, Russia, *E-mail*: [akrugly@mail.ru](mailto:akrugly@mail.ru)

A causal set is locally finite partially ordered set. This is a model of a discrete pregeometry on a microscopic scale. Particles in this model must be repetitive structures. Their properties must have a topological nature. A review of particular models is considered. One example is a model of particles and a mass formula. The dynamics is an addition of new elements one by one (a sequential growth). An equation of motion is an algorithm of sequential growth. Particles must be emergent self-organized structures. An equation of motion is an algorithm of sequential growth. There are algorithms that generate self-organized structures. Some algorithms are deterministic and some are probabilistic.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССАСЫВАНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КВАНТОВО-ТЕПЛОВОЙ ДИФФУЗИИ

Голубева О.Н.<sup>1)</sup>, Сидоров С.В.<sup>1)</sup>

## NUMERICAL SIMULATION OF FLUCTUATIONS RELAXATION IN THE HYDRODYNAMIC MODEL OF QUANTUM-THERMAL DIFFUSION

Golubjeva O.N.<sup>1)</sup>, Sidorov S.V.<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия.*

<sup>2)</sup> *Московская государственная академия водного транспорта, Москва, Россия*

*e-mail: sidorovsv@mail.ru*

### **Abstract**

*A system of two-speed equations obtained on the basis of Quantum mechanics in the hydrodynamic form is studied. It can be interpreted as a generalization of Nelson's stochastic mechanics. It is shown that the numerical analysis of the system solutions allows to make a decision of its suitability for describing of the relaxation process of quantum-thermal fluctuations at the temperature  $T > 0$ .*

Традиционно уравнения гидродинамики выводятся либо из статистической механики, либо из кинетики, где используются конкретные представления о структуре среды и взаимодействиях составляющих ее частей. Соответственно, учет гидродинамических флуктуаций производится путем включения в уравнения гидродинамики случайного тензора напряжений, для которого на основе флуктуационно-диссипативной теоремы задается только коррелятор.

В работах [1,2] было предложено рассматривать теорию процесса рассасывания квантово-тепловых флуктуаций плотности и дрейфовой скорости при равновесии по температуре как стохастическую гидродинамику. Это позволило распространить гидродинамическую форму квантовой механики на конечные температуры и учесть не



только самодиффузию, но и диффузионное давление теплого вакуума. В результате для одномерной модели была получена система уравнений стохастической гидродинамики, справедливая при любых температурах. Ее отличие состоит в том, что в ней неаддитивно учитываются квантовые и тепловые флуктуации. Более того, этим уравнениям удалось придать форму уравнений двухскоростной гидродинамики

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial q}(uv) - \frac{\partial u^2}{\partial q} \\ \frac{dv}{\partial t} &= -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{u^2}{2} \right)\end{aligned}\quad (1)$$

представляющей собой обобщение стохастической механики Нельсона [3]

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial q}(uv), \\ \frac{dv}{\partial t} &= -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{u^2}{2} \right),\end{aligned}\quad (2)$$

где  $u$  – диффузионная скорость,  $v$  – дрейфовая скорость,  $\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial q}$  – градиент внешнего потенциала. Несмотря на то, что нижние уравнения систем (1) и (2) полностью идентичны, между ними имеется существенное отличие. Оно связано с тем, что в теории, предложенной в [2], принимается во внимание самодиффузия в холодном вакууме, вследствие чего в уравнение для диффузионной скорости входит градиент плотности энергии диффузионного давления. Более того, есть основание полагать, что в общем случае уравнения (1) в отличие от уравнений Нельсона (2) справедливы при любой температуре.

Уравнения (1) и (2) представляют собой квазилинейные системы дифференциальных уравнений первого порядка относительно двух неизвестных функций  $u(t, q)$  и  $v(t, q)$  от двух переменных. Важнейшим обстоятельством, определяющим решение таких уравнений, является установление типа – эллиптического, гиперболического или параболического, к которому относится уравнение. Для решения гиперболических уравнений, как известно, используется понятие характеристики – интегралы некоторого характеристического уравнения. Эллиптический оператор не имеет характеристик в вещественной области и эллиптическим дифференциальным уравнениям в физике, вообще говоря, соответствуют стационарные равновесные состояния.

Для исследования решений уравнений (1) и (2) последние были приведены к однородным системам

$$\begin{aligned} u_t + (2u + v)u_q + uv_q &= 0, \\ v_t - uu_q + vv_q &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u_t + vu_q + uv_q &= 0, \\ v_t - uu_q + vv_q &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

представленным уравнениями исключительно в частных производных. В работе показано, что гидродинамическая система уравнений Нельсона (2) является эллиптической и непригодна для исследования эволюции флуктуаций при квантово-механическом описании системы. Напротив, система (1) является параболической, то есть системой эволюционного типа и, следовательно, может использоваться для описания эволюции возмущений, возникающих при флуктуациях. В контексте использования данной системы имеется в виду следующее обстоятельство. Флуктуации макропараметров, например, температуры, плотности, давления, непременно вызывают возмущения переменных  $u$  и  $v$  в уравнениях гидродинамики. Эволюцию этих возмущений можно описывать и исследовать с помощью системы уравнений (1).

Приведенные соображения нами проиллюстрированы с помощью численного моделирования решений систем (1) и (2). Модельным уравнением для этих систем является записанное в векторной форме уравнение переноса

$$\frac{\partial y}{\partial t} + A(y) \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

где  $y = (u, v)^T$ ,  $A \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$  – матрица системы. Для систем (1) и (2) нами рассмотрена задача Коши

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$

на вещественной прямой. Для решения задачи на плоскости  $(t, q)$  использовалась сетка

$$\begin{aligned}\omega_{h\tau} &= \omega_h \times \omega_\tau, \\ \omega_h &= \{q_i = ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N\}, \\ \omega_\tau &= \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots\},\end{aligned}$$

с шагом  $h$  по переменной  $q$  и с шагом  $\tau$  по переменной  $t$ . Решение задачи исследовалось с использованием неявной схемы

$$\frac{3y_i^{j+1} - 4y_i^j + y_i^{j-1}}{2\tau} = -A(y_i^j) \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}}{2h},$$

имеющей порядок аппроксимации  $O(\tau^2, h^2)$ .

При численном моделировании исследовалось решение при некотором возмущении одной из переменных, задаваемом в начальный момент в окрестности точки  $q = 0$ . Это возмущение в начальном условии моделирует результат флуктуации макропараметра физической системы. Численные вычисления показали следующий результат. Любое, даже сколь угодно малое возмущение в системе уравнений Нельсона приводит к неограниченному росту переменных  $u$  и  $v$ . Это есть следствие того, что уравнения Нельсона имеют эллиптический тип. Таким образом, они пригодны для описания стационарных процессов, таких как обтекание тел потоком, задач электростатики, стационарных задач теории гравитации и др.

При решении системы уравнений (1) получено решение вида бегущей волны возмущения по пространственной координате. При этом наряду с перемещением в пространстве наблюдается эволюция самого возмущения – его амплитуда уменьшается, и оно расплывается по пространственной координате.

Таким образом, мы считаем, что гидродинамический подход к квантовой теории принципиально позволяет исследовать квантово-тепловые флуктуации на основе полученных гидродинамических уравнений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-99423-У-а).

### Литература

1. Суханов А.Д. ТМФ, 2008. Т. 154, 1. С. 185.
2. Суханов А.Д., Голубева О.Н. ТМФ, 2009. Т. 160, 2. С. 369.
3. Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion. Princeton: Princ. Univ. Press, 1967.

## KERR-NEWMAN ELECTRON AS SPINNING SOLITON: EMERGENCE OF THE DIRAC EQUATION

Alexander Burinskii,

Theor. Phys. Lab., NSI, Russian Academy of Sciences: bur@ibrae.ac.ru

It has been discussed for long time that black holes (BH) have to be related with elementary particles. The Kerr-Newman rotating BH solution has gyromagnetic ratio  $g = 2$  as that of the Dirac electron, and the four measurable parameters of the electron: spin, mass, charge and magnetic moment shows unambiguously that gravitational and electromagnetic field of the electron should correspond to over-rotating Kerr-Newman (KN) solution without horizon. However, remarkable properties of this soliton cannot draw us away from the question:

*Where is the Dirac equation hidden inside this soliton?*

Here we try to answer this question.

Metric of the Kerr-Schild solutions has the form  $g_{ik} = g_{ik}^{(mink)} + H k_i k_k$  where  $g^{(mink)}$  is an auxiliary Minkowskian background, and  $k_i$  is a null vector field ( $k_i k^i = 0$ ) which defines a shear-free geodesic null congruence on the Minkowskian background (Kerr congruence) which is determined by Kerr theorem. The naked Kerr singular ring forms a branch line of space into the sheet of advanced and sheet of the retarded fields with different null congruences  $K^{(in)}$  and  $K^{(out)}$  creating two different metrics

$$g^{(in)} = g^{(mink)} + 2H k^{(in)} k^{(in)} \text{ and}$$

$$g^{(out)} = g^{(mink)} + 2H k^{(out)} k^{(out)}$$

on the same Minkowski background  $M_4$ .

The Kerr singular ring conflicts with flat spacetime of quantum theory, which requires "regularization" of space. The consistent regular source of the KN solution is formed by a regular soliton model in the form of a bag which covers the Kerr singular ring, closing the "door" to negative sheet of the Kerr geometry. The bag has a disk-like form and confines the Higgs field in a superconducting false-vacuum state, which regularizes the KN electromagnetic (EM) field. The EM field acquires inside the bag a mass, which pushes it out from the interior of the bag towards the sharp string-like boundary of the disk. Simultaneously, as it was shown in [1], interplay of the time-like component of the EM field with phase of the Higgs field induces oscillations of the Higgs field with the frequency  $\omega = 2m$ , which is typical for oscillating electroweak solitons (oscillons) [1,2].

It seemed that the disk-like soliton covers the "door" to negative sheet of the Kerr geometry and removed two-sheeted space. However, the second sheet emerges from another side. This time the second sheet emerges from advanced field, analogous to the old Dirac model of radiation reaction. According to Dirac, the retarded potential  $A_{ret}$  may be split into a half-sum and half-difference with advanced fields  $A_{adv}$  as follows

$$A_{ret} = 1/2 [A_{ret} + A_{adv}] + 1/2 [A_{ret} - A_{adv}].$$

The half-difference is responsible for radiation reaction, while the half-sum is responsible for self-interaction of the source and corresponds to an *orientifold* structure of the source. Orientifolding the soliton source, one has to add to the sheet of retarded fields an additional sheet of advanced fields, which should be related with self-interaction of the soliton, which determines its mass. However, in accord with the properties of the Kerr-Schild solutions, the fields  $A_{ret}$  and  $A_{adv}$  could not reside on the same physical sheet, because each of them should be aligned with the corresponding Kerr congruence.

Considering the retarded sheet as a basic physical sheet, one should fix the congruence  $Kret$  and corresponding metric

$$g^{(ret)} = g^{(mink)} + 2Hk^{(ret)} k^{(ret)},$$

which are not suit for the advanced field  $Aadv$ ; which is consistent with another congruence  $Kadv$  and should be positioned on a separate sheet with metric

$$g^{(adv)} = g^{(mink)} + 2Hk^{(adv)} k^{(adv)}.$$

However, this problem disappears inside the bag, where the space is flat, and the both null congruences  $Kret$  and  $Kadv$  are null not only with respect to the corresponding Kerr-Schild metrics, but also with respect to the flat Minkowski background  $g^{(mink)}$ .

Two external spinor fields associated with two Kerr null congruences  $Kret$  and  $Kadv$  are generated by two conjugate solutions of the Kerr theorem  $Y^+$  and  $Y^-$ , which reside on the different sheets and are connected by antipodal relation [3]

$$Y^+ = -1 / (Y^-)^*.$$

It is known, that the projective spinor coordinate,  $Y$  is equivalent to the Weyl two-component spinor  $\varphi$  [4]. The antipodal left and right Weyl spinor fields  $\varphi$  and  $\chi$  generated by two conjugate solutions of the Kerr theorem,  $Y^+$  and  $Y^-$ , may be joined into one Dirac spinor which obeys the massless Dirac equation. On the other hand, the Dirac spinor field in the Weyl basis it splits into two Weyl equations of opposite chirality. From these two Weyl fields one can form two null vectors  $k^{(ret)}$  and  $k^{(adv)}$  corresponding to two principal null congruences given by conjugate antipodal solutions of the Kerr theorem.

Outside the bag these null fields should reside on different sheets of the KN solution, but penetrating in the bag they may meet without conflict on the same internal sheet due to flatness of internal space  $g^{(mink)}$  and they may be joined without conflict into a four-component Dirac spinor  $(\varphi, \psi)^*$  satisfying the massless Dirac equation. The confined in the bag Higgs field  $\Phi$  provides the left and right spinor fields of the Kerr congruence by the Yukawa interaction

$$LYukawa(\varphi, \psi, \Phi) = -g (\varphi^* |\Phi| \psi),$$

and gives them the mass term  $m=g |\Phi|$  creating the massive Dirac equation.

## References

- [1] A. Burinskii, Regularized Kerr-Newman Solution as a Gravitating Soliton, *J. Phys. A: Math. Theor.* 43 (2010) 392001 [arXiv: 1003.2928].
- [2] A. Burinskii, Kerr-Newman electron as spinning soliton, In: *Proceedings of the 'Advanced school on quantum foundations and open quantum systems' will be published in the Int. J. of Mod. Phys. A.*
- [3] A. Burinskii, *Theor. Math. Phys.*, 177(2), 1492 - 1504, (2013).
- [4] G. C. Debney, R. P. Kerr and A. Schild, *J. Math. Phys.* 10, 1842 (1969).

## ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЛЕПТОННОГО СЕКТОРА В МОДЕЛИ СКИРМА-ФАДДЕЕВА

В.И.Молотков

Кафедра теоретической физики, molotvi@gmail.com

Российский университет дружбы народов

### Введение

Известно несколько моделей для описания элементарных частиц с помощью топологических солитонов: теория магнитных монополей, модель Т. Х. Р. Скирма (1954г.) и модель Л. Д. Фаддеева (1972г.). В модели Скирма, описывающей внутреннюю структуру барионов и легких ядер, в качестве топологического заряда  $Q = \text{deg}(S^3 \rightarrow S^3)$  используется барионное число  $B$ . Оно служит генератором гомотопической группы  $\pi^3(S^3) = \mathbb{Z}$ . Аналогично в модели Фаддеева для описания лептонов используется индекс Хопфа  $Q_H$ , который служит генератором гомотопической группы  $\pi^3(S^2) = \mathbb{Z}$ .

Для объединения моделей Скирма и Фаддеева рассматривается обобщение электродинамики Ми в рамках эффективной спинорной полевой модели. Для классификации всех возможных моделей кирального типа используется специальное 8-спинорное тождество Бриоски [1]

$$j_\mu j^\mu - \tilde{j}_\mu \tilde{j}^\mu = s^2 + p^2 + v^2 + \alpha^2.$$

В этом тождестве используются следующие величины:

$$s = \bar{\psi}\psi, p = i\bar{\psi}\gamma_5\psi, v = \bar{\psi}\lambda\psi, \alpha = i\bar{\psi}\gamma_5\lambda\psi, j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \tilde{j}_\mu = \psi\gamma_\mu\gamma_5\psi$$

### Полевая модель шестнадцати-компонентных спиноров

Предварительно введем обозначение  $I_n$  для  $n$ -мерной единичной матрицы,  $n$  – натуральное число.

По аналогии с восьмимерным случаем рассмотрим 16-спинорное пространство, определяемое спинором:

$$\Psi = \text{col}(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4), \psi_i = \text{col}(\varphi_i, \chi_i), i = 1, \dots, 4,$$

где  $\varphi_i, \chi_i$  – 2-спиноры.

Введем ток для 16-спинора:

$$J_\mu = \bar{\Psi} G_\mu \Psi$$

где  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger G_0$  – сопряженный спинор и  $G_\mu = \gamma_\mu \otimes I_2 \otimes I_2$  – расширение матриц Дирака на 16-мерное пространство.

Отсюда получается ток на 16-спинорном поле имеет следующий вид:

$$J_0 = \sum_i (\varphi_i^\dagger \varphi_i + \chi_i^\dagger \chi_i) \quad J = \sum_i (\varphi_i^\dagger \sigma \varphi_i - \chi_i^\dagger \sigma \chi_i).$$

Введем квадратичную спинорную величину аксиального тока  $j$ , которая определяется формулой

$$\tilde{J}_\mu = \bar{\Psi} G_\mu G_5 \Psi,$$

которую можно переписать в явном виде

$$\tilde{J}_0 = \sum_i (\varphi_i^\dagger \varphi_i - \chi_i^\dagger \chi_i) \quad \mathbf{J} = \sum_i (\varphi_i^\dagger \boldsymbol{\sigma} \varphi_i + \chi_i^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_i).$$

Введем восьмиспинор вакуума  $\Psi_0$ , который зависит только от внутренних координат  $\xi$ , если же внутреннее пространство не учитывается, вакуум можно считать постоянным спинором.

Рассматривается группа симметрии, включающая в себя группу Пуанкаре и группу, описывающую внутреннее пространство.

$$G = \mathcal{P} \otimes G_{int}$$

Действие генератора  $\Gamma_{int}$  этой внутренней группы  $G_{int}$  на вакуум дает ноль

$$\Gamma_{int} \Psi_0 = 0$$

Для выполнения условия вводятся матрицы  $G^A$ , которые действуют на четыре компоненты данного спинора, матрица  $\vec{A}$ , которая действует на изотоп, и матрица  $\vec{\Lambda}$ , которая действует уже между восьмиспинорами.

Тогда вакуум можно определить из уравнения  $\Lambda \Psi_0 = 0$ , где матрица  $\Lambda$  определяется следующим образом:

$$\Lambda = \frac{1}{2} (\Lambda_3 - \mathbf{1}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ 0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

В результате получается, что 16-спинорный ток складывается из двух восьмикомпонентных токов, каждый из которых времениподобный. Это удается с помощью тождества Бриоски. Поэтому для 16-компонентного спинора вакуум определяется той же самой формулой Бриоски, так как вакуум есть восьмиспинор. Отсюда следует, что структура квадрата тока в вакууме получается в точности такой же, что у Бриоски – суммой восьми квадратов, каждый из которых можно интерпретировать либо как скаляр в квадрате, либо как псевдоскаляр в квадрате, либо как вектор в квадрате, либо как псевдовектор в квадрате. Этот важный результат позволяет произвести классификацию состояний по топологическому заряду, на лептонный и барионный сектора.

Аналогичным способом введем другие квадратичные спинорные величины S,P,V,A, аналогичные величинам для 8-спиноров:

$$S = \bar{\Psi} \Psi = \sum_i (\varphi_i^\dagger \chi_i + \chi_i^\dagger \varphi_i) \quad P = i \bar{\Psi} G_5 \Psi = i \sum_i (\chi_i^\dagger \varphi_i - \varphi_i^\dagger \chi_i)$$

$$V = \bar{\Psi} \Lambda \Psi = \sum_i (\varphi_i^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_i + \chi_i^\dagger \boldsymbol{\sigma} \varphi_i) \quad A = i \bar{\Psi} G_5 \Lambda \Psi = \sum_i (\chi_i^\dagger \boldsymbol{\sigma} \varphi_i - \varphi_i^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_i)$$

где  $\vec{\Lambda} = I_4 \otimes I_2 \otimes \vec{\sigma}$ .

**Лептонный сектор в 16-спинорном пространстве**

Введем матрицу

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

где  $a, b, c, d$  - комплексные числа.

Чтобы преобразование этой матрицы образовывало группу  $SU(2)$ , подчиним эти комплексные числа требованиям, что матрица  $U$  унитарная и что ее детерминант равен единице:

$$y = \begin{cases} ad - cb = 1 \\ aa^* + bb^* = 1 \\ cc^* + dd^* = 1 \\ ac^* + bd^* = 0 \\ ca^* + db^* = 0 \end{cases}$$

Ищем группу симметрий в следующем виде:

$$\begin{cases} \varphi_1 = a\chi_1^* + b\chi_2^* \\ \varphi_2 = c\chi_1^* + d\chi_2^* \end{cases}$$

Здесь и далее, чтобы облегчить выкладки будем рассматривать вычисления только для верхнего восьмикомпонентного изоспина  $\text{col}(\psi_1, \psi_2)$ . Подставляем в выражение для  $P$ :

$$P = \chi_1^* \varphi_1 + \chi_2^* \varphi_2 \quad \varphi_1^* \chi_1 \quad \varphi_2^* \chi_2$$

Подставим преобразования группы симметрий

$$P = \chi_1^* (a\chi_1^* + b\chi_2^*) + \chi_2^* (c\chi_1^* + d\chi_2^*) - (a^* \chi_1 + b^* \chi_2) \chi_1 - (c^* \chi_1 + d^* \chi_2) \chi_2$$

Приведя подобные члены, получим, что для выполнения условия  $P \equiv 0$ , матрица  $U$  должна принимать следующие значения

$$U = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

Накладывая условия  $\det U = 1$  и требования унитарности, получаем лишь два возможных значения матрицы  $U$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверим действие матрицы  $U_1$  на спинорные величины  $S, P, V, A$ . Рассуждения для случая  $U_2$  аналогичны:

$$P = \chi_1^* \chi_2^* - \chi_1^* \chi_2^* + \chi_2 \chi_1 - \chi_2 \chi_1 = 0$$

$$V_1 = \chi_2^* \chi_2^* - \chi_1^* \chi_1^* + \chi_2 \chi_2 - \chi_1 \chi_1 \neq 0$$

$$V_2 = i(-\chi_2^* \chi_2 - \chi_1^* \chi_1 + \chi_2^* \chi_2 + \chi_1^* \chi_1) = 0$$

$$V_3 = \chi_2 \chi_1 + \chi_1 \chi_2 + \chi_1^* \chi_2^* + \chi_1^* \chi_2^* \neq 0$$



$$\begin{aligned}
S &= \chi_1 \chi_2 - \chi_1 \chi_2 + \chi_1^* \chi_2^* - \chi_2^* \chi_1^* = 0 \\
A_1 &= i(-\chi_2 \chi_2 + \chi_1 \chi_1 - \chi_2^* \chi_2^* + \chi_1^* \chi_1^*) \neq 0 \\
A_2 &= \chi_2^* \chi_2 + \chi_1^* \chi_1 + \chi_2^* \chi_2^* + \chi_1^* \chi_1^* \neq 0 \\
A_3 &= i(-\chi_2 \chi_1 - \chi_1 \chi_2 + \chi_1^* \chi_2^* + \chi_2^* \chi_1^*) \neq 0
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что при выбранной группе симметрий  $U_1$  сохраняется всего лишь псевдовектор  $A^2 \neq 0$ . В итоге получаем гомотопическую группу  $\pi^3(S^2)$ , что сохраняет топологический заряд типа индекса Хопфа.

Произведем нормировку вектора  $A$ . Используем замену  $\chi_1 = y + iz$  и  $\chi_2 = u + iv$ . В результате получаем компоненты нормированного вектора:

$$\begin{aligned}
\bar{A}_1 &= 2 \frac{yz - vu}{\sqrt{[zu - vy]^2 + 4[u^2 + v^2 + y^2 + z^2]^2 + 16[yz - vu]^2}} \\
\bar{A}_2 &= 2 \frac{u^2 + v^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{[zu - vy]^2 + 4[u^2 + v^2 + y^2 + z^2]^2 + 16[yz - vu]^2}} \\
\bar{A}_3 &= 2 \frac{zu - vy}{\sqrt{[zu - vy]^2 + 4[u^2 + v^2 + y^2 + z^2]^2 + 16[yz - vu]^2}}
\end{aligned}$$

Для вектора  $\bar{A}$  реализуется один вид киральных топологических солитонов в виде замкнутых "закрученных" струн с нетривиальным индексом Хопфа в модели Фаддеева в (3+1) измерении. В силу нормированности его можно представить как отображение  $\bar{A}: S^3 \rightarrow S^2$ . Соответственно,  $A$ -полевые конфигурации классифицируются элементами группы  $\pi^3(S^2) = \mathbb{Z}$ . Плотность лагранжиана модели имеет вид

$$\mathcal{L} = \lambda^2 (\partial_\mu \bar{A}^i)^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} f_{\mu\nu}^2 - m^2 (1 - \bar{A}_3), \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

где  $\varepsilon, \lambda, m$  - постоянные параметры.

$$f_{\mu\nu} = 2\varepsilon_{ijk} \partial_\mu \bar{A}^i \partial_\nu \bar{A}^j \bar{A}^k \equiv \partial_\mu N_\nu - \partial_\nu N_\mu$$

Массовый член  $m^2(1 - \bar{A}_3)$  добавляется для обеспечения требуемого асимптотического поведения полей на бесконечности.

Топологический инвариант модели - индекс Хопфа  $Q_H$ , вычисляется по формуле

$$Q_H = -\frac{1}{(8\pi)^2} \int \mathbf{N} \operatorname{rot} \mathbf{N} d^3x$$

и для энергии имеет место оценка

$$E > \varepsilon \lambda (4\pi)^2 \sqrt{23}^{3/8} |Q_H|^{3/4}$$

обеспечивающая стабильность неособых вихрей в рамках модели Фаддеева.

## Заключение

Подводя итог, приведём краткую формулировку полученных результатов:

- Исследована полевая модель шестнадцати-компонентных спиноров.
- Выделен лептонный сектор

В будущем возможно несколько направлений развития работы:

- Формализация барионного сектора.
- Нахождение общего вакуума для лептонного и барионного сектора.
- Получение явный вида лагранжиана для объединенной модели.

Автор благодарен научному руководителю профессору Ю. П. Рыбакову за постановку задачи и постоянную помощь при ее решении.

## Литература.

1. Rybakov Yu.P. Soliton configurations in generalized Mie electrodynamics. *Phys. of Nuclei* 74, №. 7, 1102-1105, 2011.
2. Molotkov V.I. The effective 8-spinor model of elementary particles. Conference abstracts of International Student Conference "Science and Progress". Petergof, 2011.
3. Молотков В.И. Эффективная восьмиспинорная модель элементарных частиц. Тезисы в программе 54-й научной конференции МФТИ. Долгопрудный, 2011.
4. Молотков В.И. Структура нелинейной спинорной модели элементарных частиц. // Физическое образование в вузах. Труды конференции-конкурса молодых физиков. - 2014.

## ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ: ОГРАНИЧЕНИЯ НА ЗАКОН ДАРСИ, УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ.

Рыбаков Ю.П., Свиридова О.Д., Шикин Г.Н.

Российский университет дружбы народов

Рассмотрено потенциальное течение несжимаемой жидкости в пористой среде с учетом закона Дарси. Течение предполагается стационарным и аксиально симметричным. Предполагается так же, что сила Дарси имеет вид  $\vec{f}_D = -\alpha \vec{v}$ , где  $\alpha$  – обратный коэффициент проницаемости Дарси, в общем виде зависящей от  $\vec{v}, \vec{\nabla}P, P$ , где  $\vec{v}$  – скорость течения жидкости, а  $P$  – давление. Т.к. течение считается потенциальным, то скорость  $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$ , где  $\varphi(r, z)$  – потенциал скорости.

При аксиально-симметричном течении скорость имеет только две компоненты:  $\vec{v} = (v_r, 0, v_z)$ , где  $v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ . Необходимым и достаточным условием совместности уравнений Эйлера

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - \alpha(\vec{v}, \vec{\nabla}P, P) v_r,$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \alpha(\vec{v}, \vec{\nabla}P, P) v_z$$

является тождество  $\frac{\partial^2 P}{\partial r \partial z} \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial r}$ , где  $\frac{\partial P}{\partial r}$  и  $\frac{\partial P}{\partial z}$  определяются из уравнений Эйлера. Если это равенство не является тождеством, а уравнением, то оно определяет функцию  $\varphi(r, z)$ , которая должна удовлетворять уравнению непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r D(r, z) \frac{\partial v_z}{\partial r} \right).$$

Коэффициент Дарси  $\alpha$  является скаляром, зависящим от двух векторных аргументов и одного скалярного. Следовательно, его можно представить в виде

$$\alpha(\vec{v}, \vec{\nabla}P, P) = f(\xi, \chi, \sigma, P),$$

где

$$\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}, \chi = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2}, \sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z}.$$

При подстановке  $\alpha$  в уравнение Эйлера установлено, что равенство  $\frac{\partial^2 P}{\partial r \partial z} \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial r}$  не удовлетворяется тождественно, а определяет функцию  $\varphi(r, z)$ , которая не удовлетворяет уравнению непрерывности. Отсюда следует, что  $\alpha = \text{const}$ , и сила Дарси является линейной функцией скорости  $\vec{v}$ .

Исследована также устойчивость потенциального течения жидкости в пористой среде. При этом возмущенный потенциал скорости представляется в виде:

$$\tilde{\varphi}(r, z) = \varphi(r, z) + \varphi_0(r, z),$$

где  $\varphi_0(r, z)$  – малое возмущение потенциала:  $|\varphi_0(r, z)| \ll |\varphi(r, z)|$ . Исследована устойчивость решений уравнения непрерывности для продольной компоненты скорости  $v_z(r, z)$  при трех возможных видах коэффициента диффузии  $D(z)$ :

$$D(z) = D_0 = \text{const}, D(z) = \frac{D_0}{1 + \xi z}, D(z) = D_0 e^{-\xi z}, \xi = \text{const}.$$

Показано, что решения неустойчивы относительно малых возмущений скорости.

## НЕПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ, УЧИТЫВАЮЩЕЕ ЗАКОН ДАРСИ И ДИФФУЗИЮ.

Рыбаков Ю.П., Свиридова О.Д., Шикин Г.Н.

Российский университет дружбы народов

Рассматривается течение жидкости в трубе радиуса  $r_0$  в предположении, что плотность жидкости постоянна,  $\rho = const$ , а давление и скорость жидкости зависят от радиальной  $r$  и продольной  $z$  цилиндрических координат:  $P = P(r, z)$ ,  $\vec{v} = (v_r, 0, v_z)$ . При этом система уравнений гидродинамики для стационарного течения жидкости в пористой среде с учетом закона Дарси и переменного коэффициента диффузии имеет вид:

$$\rho(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\nabla P + \rho g - [\alpha_0 - \varepsilon_0(\vec{v}\vec{\nabla}P)]\vec{v} \quad (1)$$

$$div \vec{j} = 0, j_r = \rho(v_r - D(z)\partial_r v_z), j_z = \rho v_z \quad (2)$$

В (1)  $\alpha_0$  и  $\varepsilon_0$  – постоянные, входящие в закон Дарси,  $D(z)$  в (2) – коэффициент диффузии.

Рассматривается течение жидкости, при котором компоненты скорости  $v_r$  и  $v_z$  можно представить в виде:

$$v_0 + \xi(r, z), |\xi| \ll v_0, v_r \ll v_0, v_0 = const$$

$$\vec{v}^2 = v_r^2 + (v_0 + \xi)^2 \approx v_0^2 + 2v_0\xi.$$

С точностью до величин первого порядка по  $v_r$  и по  $\xi$  уравнение Эйлера и непрерывности запишутся таким образом:

$$A \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + B \frac{\partial v_r}{\partial z} = C \frac{\partial^2 \xi}{\partial z \partial r} + \Gamma \frac{\partial \xi}{\partial r}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( v_r - D(z) \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

где  $A = \rho v_0$ ,  $B = \frac{\alpha_0 - \varepsilon_0 v_0 \rho g}{1 - \varepsilon_0 v_0^2}$ ,  $C = \frac{\rho v_0}{1 - \varepsilon_0 v_0^2}$ ,  $\Gamma = \frac{\alpha_0(1 + \varepsilon_0 v_0^2) - 2\varepsilon_0 v_0 \rho g}{1 - \varepsilon_0 v_0^2}$ ,  $1 - \varepsilon_0 v_0^2 \neq 0$ .

Уравнение (3) и (4) являются линейными дифференциальными уравнениями, допускающими решение в разделенных переменных в виде  $v_r = P(r)Q(z)$ ,  $\xi = M(r)N(z)$ . В разделенных переменных из (3) и (4) получаем следующую систему уравнений:

$$r^2 M''(r) + rM'(r) + \lambda r^2 M(r) = 0, \quad (5)$$

$$Q(r) = \sigma D(z)N(z) + \frac{\sigma}{\lambda} N'(z), \quad (6)$$

$$Q''(z) + \frac{A}{B} Q'(z) = \frac{\sigma C}{A} N'(z) + \frac{\sigma \Gamma}{A} N(z), \quad \lambda, \sigma = \text{const}. \quad (7)$$

Уравнение (5) является уравнением Бесселя нулевого порядка и имеет убывающее решение вида:

$$M(r) = -J_0(\sqrt{\lambda}r). \quad (8)$$

Из связи  $P(r)$  и  $M(r)$  находим  $P(r)$ :

$$P(r) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sigma} J_1(\sqrt{\lambda}r). \quad (9)$$

Уравнения (6) и (7) сводятся к одному уравнению третьего прядка для функции  $N(z)$ :

$$N''' + \left(\lambda D + \frac{B}{A}\right) N'' + \left(2\lambda D' + \frac{\lambda B}{A} D - \frac{\lambda C}{A}\right) N' + \left(\lambda D'' - \frac{\lambda \Gamma}{A}\right) N = 0. \quad (10)$$

При  $D(z) = D_0 = \text{const}$  из (10) следует уравнение с постоянными коэффициентами, имеющее убывающее с ростом  $z$  решение:

$$N(z) = N_0 e^{-\frac{1}{2}(\lambda D_0 + \frac{B}{A})z}. \quad (11)$$

При выборе  $D(z)$  в виде

$$D(z) = \frac{1}{\gamma(\gamma - \frac{A}{B})} \left( \Phi_0 e^{\gamma z} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{B\gamma}{A}} z + \frac{\gamma^2}{\lambda} - \frac{\gamma^2 B}{\lambda A} - \frac{\gamma C}{A} + \frac{\Gamma}{A} \right), \quad (12)$$

где  $\gamma$  – произвольная постоянная, удовлетворяющая условию  $\gamma > B/A$ . В этом случае

уравнение (10) имеет решение

$$N(z) = N_0 e^{-\gamma z}, N_0 = \text{const}.$$

Далее рассмотрен особый случай, когда в (7)  $\Gamma = 0$ , что приводит к следующей связи между постоянными, входящими в систему уравнений:

$$\alpha_0 = \frac{2\varepsilon_0 v_0 \rho g}{1 + \varepsilon_0 v_0^2}.$$

При этом уравнения (6) и (7) сводятся к одному уравнению второго порядка для  $N(z)$ :

$$N'' + (\lambda D(z) + a)N' + (\lambda D'(z) + a\lambda D(z) - b)N = 0, \quad (13)$$

где  $a = \frac{\varepsilon_0 g}{1 + \varepsilon_0 v_0^2}$ ,  $b = \frac{\lambda}{1 - \varepsilon_0 v_0^2}$ .

Получены точные решения уравнения (13) при трех выборах  $D(z)$ .

1.  $D(z) = 0$ , диффузия отсутствует

$$N(z) = N_0 e^{-\gamma z}, \gamma = \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + 4b}). \quad (14)$$

2.  $D(z) = D_0 = const.$

$$N(z) = N_0 e^{-\gamma z}, \gamma = \frac{1}{2} (R_1 + \sqrt{R_1^2 - 4R_2}) \quad (15)$$

$$R_1 = \lambda D_0 + a, R_2 = a D_0 \lambda - b.$$

3.  $D(z) = D_0 e^{-\gamma z}, \gamma = const, D_0 = const.$  (16)

Соответствующее уравнение имеет вид

$$N'' + (\lambda D_0 e^{-\gamma z} + a)N' + [(a\lambda D_0 - \lambda\gamma D_0)e^{-\gamma z} - b]N = 0. \quad (17)$$

В уравнении (17) переход к новой функции от нового аргумента

$$N(z) = \Psi(\xi), \xi = e^{-\gamma z}$$

приводит к уравнению

$$\Psi'' + \frac{1}{\xi} \left( \frac{\gamma - a}{\gamma} - \frac{\lambda D_0}{\gamma} \xi \right) \Psi' + \frac{1}{\xi^2} \left( \frac{\lambda D_0 (a - \gamma)}{\gamma^2} \xi - \frac{b}{\gamma^2} \right) \Psi = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) является уравнением вырожденного гипергеометрического типа и с помощью подстановки  $\Psi(\xi) = \varphi(\xi)y(\xi)$  сводится к канонической форме для функции  $y(\xi)$ :

$$\xi y''(\xi) + \tau(\xi)y'(\xi) - \alpha y(\xi) = 0, \quad (19)$$

где  $\tau(\xi)$  – полином первой степени,  $\alpha = const.$

Существует четыре типа уравнений (19), соответствующих различным видам  $\varphi(\xi), \tau(\xi)$  и  $\alpha$ .

Для всех уравнений (19) получены общие решения в виде линейной комбинации вырожденных гипергеометрических функций, а также частные решения в виде полиномов Лягерра.

Литература:

1. Шейдеггер А.Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. М – Ижевск, 2008, 250 с.

**THE EXISTENCE OF THE DIRAC SCALAR FIELD IN NATURE  
AND DARK ENERGY AND DARK MATTER PROBLEMS**

O.V. Babourova, K.N. Lipkin, E.V. Febres, B.N. Frolov

Moscow Pedagogical State University,  
Faculty of Physics and Informational Technologies,  
Moscow, Russian Federation

E-mails: [babourova@orc.ru](mailto:babourova@orc.ru), [lipan86@mail.ru](mailto:lipan86@mail.ru), [solntce\\_07@mail.ru](mailto:solntce_07@mail.ru), [frolovbn@orc.ru](mailto:frolovbn@orc.ru)

The Poincaré–Weyl gauge theory of gravitation (PWTG) has been developed in [1]. This theory is invariant both concerning the Poincaré subgroup and the Weyl subgroup – extensions and compressions (dilatations) of spacetime. Dilatations are equivalent in the mathematical sense to the transformations of the group of length gauge changes, which is the gauge group of the H. Weyl theory developed in 1918. The gauge field introduced by the subgroup of dilatations is named as dilatation field, its vector-potential is the Weyl’s 1-form. The dilatation gauge field does not coincide with electromagnetic field. In particular, quanta of this field can have nonzero rest masses.

As it has been shown in [1], an additional scalar field  $\beta$  is introduced in PWTG as an essential geometrical addendum to the metric tensor:  $g_{ij} = \beta^2(x)g_{ij}^M$ . The properties of this field coincide with those of the scalar field introduced by Dirac [2] in his well-known article and earlier by S. Deser [3] (on the history of the subject see [4, 5]). The Dirac scalar field plays an important role in construction of the gravitation Lagrangian, some members of which have structure of the Higgs Lagrangian and can cause an appearance of nonzero rest masses of particles.

Spacetime in PWTG has the geometrical structure of a Cartan–Weyl space with a curvature 2-form  $R^a{}_b$ , a torsion 2-form  $T^a$  and a nonmetricity 1-form of the Weyl type:  $Q_{ab} = (1/4)g_{ab}Q$ , where  $Q$  is a Weyl 1-form. On the basis of PWTG, a conformal theory of gravitation in Cartan–Weyl spacetime with the Dirac scalar field has been developed in [6–8]. The Lagrangian density 4-form of this theory is invariant under transformations,

$$\begin{aligned} \delta\beta &= \varepsilon(x)\beta, & \delta g_{ab} &= 0, & \delta\theta^a &= -\varepsilon\theta^a, & \delta\Gamma^a{}_b &= \delta^a_b d\varepsilon, \\ \delta R^a{}_b &= 0, & \delta T^a &= -\varepsilon T^a, & \delta Q^{ab} &= 2g^{ab}d\varepsilon, & \delta Q &= 8d\varepsilon. \end{aligned}$$

The Lagrangian density 4-form reads in the formalism of external forms,



$$\begin{aligned}
L = 2f_0 & \left[ (1/2)\beta^2 R^a{}_b \wedge \eta^b{}_a - \beta^4 \Lambda \eta + (1/4)\lambda R^a{}_a \wedge *R^b{}_b + \tau_1 R^{[a}{}_{b]} \wedge *R^b{}_a \right. \\
& + \tau_2 (R^{[ab]} \wedge \theta_a) \wedge *(R^{[c}{}_{b]} \wedge \theta_c) + \tau_3 (R^{[ab]} \wedge \theta_c) \wedge *(R^{[c}{}_{b]} \wedge \theta_a) \\
& + \tau_4 (R^{[a}{}_{b]} \wedge \theta_a \wedge \theta^b) \wedge \wedge *(R^{[c}{}_{d]} \wedge \theta_c \wedge \theta^d) \\
& + \tau_5 (R^{[a}{}_{b]} \wedge \theta_a \wedge \theta^d) \wedge *(R^{[c}{}_{d]} \wedge \theta_c \wedge \theta^b) \\
& + \tau_6 (R^a{}_b \wedge \theta_c \wedge \theta^d) \wedge *(R^c{}_d \wedge \theta_a \wedge \theta^b) + \rho_1 \beta^2 T^a \wedge *T_a \\
& + \rho_2 \beta^2 (T^a \wedge \theta_b) \wedge *(T^b \wedge \theta_a) + \rho_3 \beta^2 (T^a \wedge \theta_a) \wedge *(T^b \wedge \theta_b) \\
& + \xi \beta^2 Q \wedge *Q + \zeta \beta^2 Q \wedge \theta^a \wedge *T_a + l_1 d\beta \wedge *d\beta + l_2 \beta d\beta \wedge \theta^a \wedge *T_a \\
& \left. + l_3 \beta d\beta \wedge *Q \right] + \beta^4 \Lambda^{ab} \wedge (Q_{ab} - (1/4)g_{ab}Q).
\end{aligned} \tag{1}$$

Here  $\wedge$  is the exterior product sign,  $d$  is the exterior derivative operator,  $*$  is the Hodge dual conjugation. The second term in (1) is interpreted as the effective dark energy density ( $\Lambda$  is the Einstein cosmological constant). The last term in (1) contains Lagrange multipliers  $\Lambda^{ab}$ .

Variational field equations in the Cartan–Weyl spacetime have been derived from (1) by the exterior form variational formalism [9]. Independent variables are basis 1-forms  $\theta^a$ , a nonholonomic connection 1-form  $\Gamma^a{}_b$ , the Dirac scalar field  $\beta$  and the Lagrange multipliers  $\Lambda^{ab}$ .

As a result we have  $\theta$ -,  $\Gamma$ - and  $\beta$ -equations. We solve the field equations for the scale factor  $a(t)$  and the scalar Deser–Dirac field  $\beta(t)$  at the very early stage of evolution of universe, when a matter density has been very small,  $L_m \approx 0$ .

In homogeneous and isotropic spacetime the condition,  $T^a = (1/3)T \wedge \theta^a$ , is valid, and from the field equations we can obtain,  $T = \chi_T d \ln \beta$ ,  $Q = \chi_Q d \ln \beta$ . Here the coefficients  $\chi_T$ ,  $\chi_Q$  are expressed by the couple constants of the Lagrangian density (1).

Now we consider the spatially flat Friedman–Robertson–Walker (FRW) metric

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Taking into account that  $L_m \approx 0$ , we obtain from the  $\theta$ -equation together with the  $\beta$ -equation the following system of equations, where we put  $u = \ln a(t)$ ,  $v = \ln \beta(t)$ ,

$$(\dot{u})^2 + 2i\dot{u}\dot{v} + (\dot{v})^2 = (\Lambda/3)\exp(2v), \tag{2}$$

$$\ddot{u} + \ddot{v} - i\dot{u}\dot{v} - (\dot{v})^2 = 0, \tag{3}$$

$$\ddot{v} + 3i\dot{u}\dot{v} + (B/A)(\dot{v})^2 = 0. \tag{4}$$

The constants  $A$ ,  $B$  are expressed through the parameters of the Lagrangian density (1).

Eq. (2) is equivalent to the equation,

$$\dot{u} + \dot{v} = \pm \frac{\lambda}{3} \exp(v), \quad \lambda = \sqrt{3\Lambda}. \tag{5}$$

It is easy to check that Eq. (3) is fulfilled identically as a consequence of Eq. (5). Therefore we have only 2 equations (4) and (5) for 2 unknown functions  $a(t)$ ,  $\beta(t)$ , and this system of equations is consistent. In what follows we choose the sign "+" in Eq. (5).

Let us find  $\dot{v}$  from Eq. (5) and put it in Eq.(4). We obtain the equation,

$$\ddot{v} + \lambda \dot{v} \exp(v) + \omega(\dot{v})^2 = 0, \quad \omega = (B/A) - 3. \quad (6)$$

The first integral of this equation is the following ( $\lambda_0$  is a constant of integration),

$$\dot{v} = \lambda_0 \beta^{-\omega v} - \frac{3\lambda}{1 + \omega} \beta^v, \quad (7)$$

The system of equation (5), (7) have a large variety of integrable solutions parametrized by  $\omega$  and  $\lambda_0$ . Let us obtain the solution for the primary case  $\omega = 0$ .

If we put  $\lambda_0 = \lambda$  in Eq. (7), then this equation reads,  $\dot{v} = \lambda(1 - \exp(v))$ , and we have a solution,  $\beta(t) = \exp(v(t))$ ,

$$\beta(t) = \frac{1}{1 - \exp(-\lambda(t+t_0))}, \quad a(t) = a_1 \exp((\lambda/3)(t+t_0))(1 - \exp(-\lambda(t+t_0)))^{4/3}. \quad (8)$$

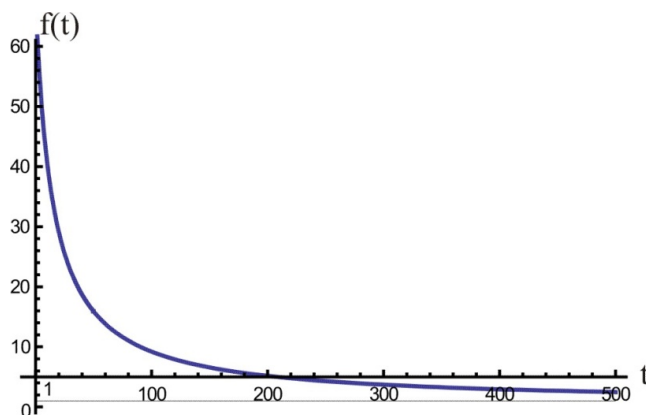
If we put  $\omega = 1$ , another solution is found:

$$\beta(t) = \frac{1 + \exp(-\lambda(t+t_0))}{1 - \exp(-\lambda(t+t_0))}, \quad a(t) = a_2 \exp((\lambda/3)(t+t_0)) \frac{(1 - \exp(-\lambda(t+t_0)))^{5/3}}{1 + \exp(-\lambda(t+t_0))}. \quad (9)$$

These solutions realize exponential diminution of a field  $\beta$ , and thus sharp exponential decrease of physical vacuum energy (dark energy) by many orders. We have

$$\beta \rightarrow 1, \quad \Lambda_{eff} = \beta^2 \Lambda \rightarrow \Lambda \quad \text{in a limit at } t \rightarrow \infty.$$

Thus the effective cosmological constant can slightly differ already by the end of inflation from the limiting value equal to its modern size  $\Lambda$  that provides the subsequent transition from the Friedman epoch to the epoch of the accelerated expansion in accordance with the modern observant cosmological data.



The function  
 $f(t) = 1 / (1 - \exp(-\lambda(t+t_0)))$   
 when  $t \rightarrow \infty$

These solutions could be realized at the very beginning of the Universe evolution, when the cosmological constant  $\Lambda_0$  estimated by quantum field theory was equal

$\Lambda_0 / \Lambda = \beta^2(0) \approx 10^{120}$ , and the number  $\beta(0) \approx 10^{60}$  was very large. Thus our result can explain the exponential decrease in time at very early Universe of the dark energy (the energy of physical vacuum), describing by the effective cosmological constant. This can give a way to solving the problem of cosmological constant as a consequence of fields dynamics at the early Universe. It is well-known that this problem is one of the fundamental problem of the modern theoretical physics [10–13].

We find a static spherically symmetric solution for a central mass  $m$  in the case  $\Lambda = 0$  [14].

In this case the torsion satisfies to the condition,  $T^a = (1/3)T \wedge \theta^a$ , and we obtain that  $T = s d \ln \beta^z$ ,  $Q = q d \ln \beta^z$ , where  $s$  and  $q$  are constants. Then the solution reads,

$$ds^2 = e^{-\frac{r_0}{r}} dt^2 - e^{\frac{r_0}{r}} (dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad (10)$$

$$u = \ln \beta = \frac{kr_0}{r} + \ln \beta_\infty, \quad \beta(r) = \beta_\infty e^{\frac{kr_0}{r}}, \quad (11)$$

where  $\beta_\infty$  is the value of the Dirac scalar field at infinity and the constant  $k$  is a function of the couple constants of the Lagrangian density (1). The metric (10) at large values of  $r$  will give the same results as the Schwarzschild metric, if  $r_0 = r_g = 2Gm / c^2$ .

The metric (10) of this solution is known as the Yilmaz–Rosen metric [15]. The interest to this metric [16–18] has emerged from the fact that this metric has no singularity, characteristic for the Schwarzschild metric, and therefore does not describe a black hole type solution. We can conclude that the presence of the Dirac scalar field, which always exists, because it has an equally fundamental status as a metric, eliminates the existence of the black hole solution. The solution (10), (11) can become apparent, for instance, on the final stage of the collapse of massive stars.

As a consequence of the solution (11), the Dirac scalar field intensive concentrates near massive objects. In [8] the hypothesis has been formulated that *the Dirac scalar field is realized itself not only as the 'dark energy', but also as one of the components of the 'dark matter'*. Maybe, the Higgs particle, which has been recently found at *Large Hadron Collider* (CERN), is a quantum of the Dirac scalar field in a reality.

## References

1. Babourova O.V., Frolov B.N., Zhukovsky V.Ch. //Phys. Rev. D .–2006.–V. 74.–P. 064012–1–12 (gr-qc/0508088); Бабурова О.В., Жуковский В.Ч., Фролов Б.Н. //Теоретич. матем. физ.–2008.–Т. 157.–№ 1. С. 64–8; Babourova O.V., Frolov B.N., Zhukovsky V.Ch. //Gravit. Cosmol. (Гравит. космол.).–2009.–V. 15.–No. 1.–P. 13–15.

2. Dirac P.A.M. //Nature.–1937.–V. 139.–P. 323; Proc. R. Soc.–1938.–V. A165.–P. 199–208.
3. Deser S. //Ann. Phys. (USA). 1970. V. 59. No 1. P. 248–253.
4. Jordan P. //Nature.–1949.–V. 164.–P. 637–640; *Schwerkraft und Weltall* (Braunschwig: Vieweg, 1955); *The Expanding Earth* (New York: Wiley, 1971).
5. Brans C., Dicke R.H. //Phys. Rev.–1961.–V. 124.–P. 925–935; ( $\varphi = 1/G$ ).
6. Babourova O.V., Frolov B.N. Dark energy, Dirac's scalar field and the cosmological constant problem //ArXive: 1112.4449 [gr-qc]; Baburova O.V., Kostkin R.S., Frolov B.N. //Russ. Phys. J.– 2011.–V. 54.–N 1.–P. 121–123 (gr-qc/1102.2901).
7. Babourova O.V., Frolov B.N., Lipkin K.N. //Gravit. Cosm.–2012.–V. 18.–P. 225–231.
8. Babourova O.V., Frolov B.N. *Mathematical foundations of the modern theory of gravitation* (Moscow: MPGU, 2012).–128 p. (in Russian).
9. Babourova O.V., Frolov B.N., Klimova E.A. //Class. Quantum Grav.–1999.–V. 16.–P. 1149–1162 (gr-qc/9805005).
10. Weinberg S. //Rev. Mod. Phys. 1989. V. 61. No 1. P. 1–23.
11. Peebles P. J. E., Ratra B. //Rev. Mod. Phys. 2003. V. 75. P. 559–606 (astroph/0207347v2).
12. Padmanabhan T. //Phys. Rep. 2003. V. 380. P. 235–320.
13. Gorbunov D.S., Rubakov V.A. *Introduction to the Theory of the Early Univers: Hot Big Bang Theory* (Singapore, London, Hackensack, N.J.: World Scientific Pub. Co., 2011).–473 p.
14. Febres E.V., Frolov B.N. In: “Proceedings III Russian summer school on gravitation and cosmology (GRACOS-2012)”: Kazan–Jal’chik.–2012.–P. 92–93.
15. Yilmaz H. //Phys. Rev.–1958.–V. 111.–P. 1417–1426; Ann. Phys. (N.Y.).–1976.– V. 101.– P. 413–432; Rosen N. //Ann. Phys. (N.Y.).–1974.–V. 84.–P. 455–473.
16. Wyman M. //Phys. Rev. D.–1981.–V. 24.–P. 839–841.
17. Kaniel S., Itin Y. Gravity on a parallelizable manifold //ArXive: qr-qc/9707008.–1997.
18. Muench U., Gronwald F., Hehl F.W. //Gen. Rel. Grav.–1998.–V. 30.–P. 933–961 (gr-qc/9801036).

УДК 532.526

**ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА ТУРБУЛЕНТНОГО СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ***Я.А.Суслов, С.Г.Черкасов*

ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша»

Среди инструментов исследования турбулентных пограничных слоев своей простотой выделяются интегральные методы. Применительно к естественной конвекции, наиболее известным интегральным методом является метод Эккерта-Джексона [1,2]. В данной работе предложен новый интегральный метод решения уравнений турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя. Метод основан на использовании эмпирической формулы Влита – Росса [3] при расчете теплового потока на стенке, элементов теории Джорджа – Кэппа [4] и обобщении известных экспериментальных данных [5]. Проведены сравнения результатов расчета по методу Эккерта – Джексона и новому интегральному методу с экспериментальными данными [5,6]. Показано, что, по сравнению с методом Эккерта-Джексона, предложенный метод дает значительно лучшее согласование с известными экспериментальными данными по распределениям температуры и скорости поперек пограничного слоя, а так же по толщине пограничного слоя.

1. **Б . Гебхарт, Й . Джалурия, Р . Махаджан, Б . Саммакия** . Свободноконвективные течения и теплообмен . // М. Мир 1991. Книга 2. 528 с.
2. **Э . Р . Эккерт, Р . М . Дрейк**. Теория теплообмена. // Госэнергоиздат 1961. 679 с.
3. **Й . Джалурия**. Естественная конвекция. // М. Мир 1983. 399 с
4. **William K. George, Steven P. Capp**. A theory for natural convection turbulent boundary layers next to heated vertical surfaces // Int. J. Heat Mass Transform Vol. 22 pp. 813-826
5. **Влит, Лайю**, Экспериментальное исследование турбулентных пограничных слоев в условиях естественной конвекции.// Теплопередача №4, серия С, часть 91, ноябрь 1969. С. 73-95.
6. **Ю . С . Чумаков**. Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика (к 70-летию кафедры «Гидродинамика») // Научно-технические ведомости №2, 2004 С.1-27.

*Y.A. Suslov, S.G. Cherkasov*Federal State Unitary Enterprise «Keldysh Research Center»,  
Russia 125438 Moscow, Onegskaya, 8**THE SEMIEMPIRICAL INTEGRAL METHOD OF CALCULATION OF TURBULENT NATURAL-CONVECTIVE BOUNDARY LAYER**

## FIDELITY OF THE ONE-PHOTON STATE REFLECTIVITY FROM THE 1D ABSORBING BRAGG MIRROR

D. Čevizović <sup>1</sup>, A. V. Chizhov <sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Vinča Institute of Nuclear Sciences, Belgrade, Serbia*

<sup>2</sup> *Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia*

The Bragg mirrors have a wide use in many optical devices, such as resonant cavities and interferometers, since they act as high-quality reflectors. Their structure might be formed from multiple layers of different materials with varying refractive index. Due to constructive interference of the reflected waves from the mirror layers there appears a certain range of wavelengths, within which light propagation in the mirror structure is strongly suppressed. Such a wavelength range is called the photonic stopband.

In the case of the quantized electromagnetic field such a characteristic of the mirror as reflectivity, which is related to the intensity of the field (i.e., the mean photon number), seems to be obviously insufficient for description of the reflection process. It is because the interaction of the incident electromagnetic field with the fields of the mirror might cause a significant change in the quantum state of reflected light.

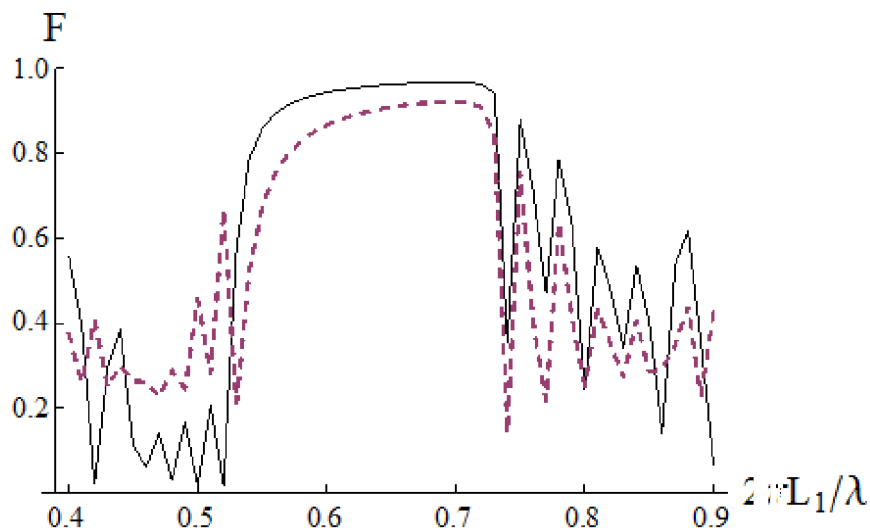
The aim of the present report is to investigate the influence of the 1D absorbing Bragg mirror on the quantum state of reflected light taking as an example an incident one-photon state. As the measure of the degree of reflection we use the fidelity of the incident and reflected states  $F = \langle \psi_{in} | \hat{\rho}_{out} | \psi_{in} \rangle$  that shows their quantum closeness.

Our theoretical description is based on the quantum-state transformation for dispersive and absorbing four-port devices [1]. The transformation characteristics of the Bragg mirror formed as a sequence of different semiconductor and dielectric plates of the certain refractive indices we calculate analytically based on the quantum-optical input-output relations for multilayer plates [2].

We compare the fidelity of the one-photon state reflectivity for the cases when the mirror is in the ground and one-particle excited states. As follows from our analysis, the fidelity for the mirror being in the ground state  $F_0 = |T_{11}|^2$  is determined only by the coefficient of reflectivity  $T_{11}$  of the transformation matrix (like for the classical state), whereas for the one-particle excited mirror state the fidelity  $F_1 = |T_{11}|^2 + |A_{11}|^2 - 4|T_{11}|^2|A_{11}|^2$  turns out to depend on the absorption matrix coefficient  $A_{11}$  as well.

For the numerical analysis we consider the Bragg mirror of the titanium dioxide (with the refractive index  $n_1 = 2.5 + i2 \cdot 10^{-2}$ ) and silica ( $n_2 = 1.5$ ) type with  $N = 12$  of repeated pairs. The widths of the pair slabs  $L_1$  and  $L_2$  are chosen to fulfill the Bragg condition for the center wavelength of the stopband as  $L_1/L_2 = \text{Re}(n_2/n_1) = 1.5/2.5$ .

The results of calculation for the fidelities are shown in Fig. 1. It is seen the substantial decrease of the stopband for the excited reflector as compared with the mirror in the ground state because of effects of absorption on the light quantum state.



**Fig. 1.** Fidelities of the one-photon state reflectivity from the Bragg mirror being in the ground (solid line) and one-particle excited (dashed line) states as functions of the wave vector (of the wavelength  $\lambda$ ) scaled by the first material (titanium dioxide) slab width  $L_1$ .

Thus, we conclude that in the case of the quantized electromagnetic field the reflection properties of the Bragg mirror with absorption based on the fidelity of incident and reflected states are rather sensitive to the quantum state of the mirror and it might lead to the significant narrowing of the stopband.

#### REFERENCES

1. L. Knöll, S. Scheel, E. Schmidt, D.-G. Welsch, A.V. Chizhov. *Phys. Rev. A* **59**, p.4716. (1999).
2. T. Grunar, D.-G. Welsch. *Phys. Rev. A* **54**, p.1661 (1996).

## ВАРИАНТЫ КВАЗИКОНСТРУКТИВНОГО ОПИСАНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ

А. В. Коганов.

Научно-исследовательский институт Системных исследований

Российской Академии Наук (НИИСИ РАН),

Нахимовский проспект, 33, корпус 1, Москва, Россия.

Ранее было показано [2,8,9,10], что согласование формализма коррелированных квантовых частиц с теорией относительности возможно при введении оператора индивидуального состояния для каждой частицы из квантового ансамбля, который сопоставляет каждому эрмитовому оператору измерения, действующему на гильбертовом пространстве квантовых состояний, ровно один его собственный вектор. Суть возникающих противоречий заключается в наблюдении корреляции (иногда даже детерминированной) между результатами измерений для удаленных и не связанных между собой приборов, если измеряются потоки частиц в запутанном состоянии [1,5,6]. Для частного случая измерений спина и заряда частиц модель индивидуального состояния была рассмотрена в работе [11]. Вопрос о принципиальном существовании таких операторов в общем случае измеримых квантовых параметров решается положительно с помощью теории множеств Цермело-Френкеля. Отличие излагаемого подхода состоит в привязке конструкции индивидуального состояния к формализму измерений в стандартной модели квантовой механики. Если сопоставить частице ординальное упорядочение всех обобщенных функций над пространством Гильберта, то для каждого оператора измерения оператор индивидуального состояния будет выбирать элемент его собственного базиса с минимальным номером. В этом случае состояние описывается упорядочиванием. Однако, практически, только счетные множества можно конструктивно ординально упорядочить. Будем говорить о *квазиконструктивном* описании оператора индивидуального состояния, если аксиома выбора в этом описании будет использована только для счетных множеств.

**1. Квазиконструктивная модель индивидуального состояния.** Гильбертово пространство сепарабельное. Частице можно сопоставить бесконечную счетную последовательность векторов гильбертова пространства  $\{u_i\}$ , которая всюду плотна. Для эрмитова оператора измерения с дискретным спектром выбирается первый вектор последовательности, у которого окажется единственный ближайший собственный вектор измерения, который и будет сопоставлен измерению. Собственный базис Эрмитова оператора ортонормирован, и поэтому расстояние между двумя собственными векторами  $f$  и  $g$  равно  $\|f - g\| = \sqrt{2}$ . Следовательно, первый член последовательности  $u_i$ , который будет на расстоянии меньше  $\delta = \sqrt{2}/2$  от одного из векторов базиса будет от любого



другого вектора базиса дальше чем на  $\delta$ . Поскольку последовательность всюду плотная, то такой индекс  $i$  существует, а поскольку последовательность по определению ординально упорядочена, то можно найти наименьший из таких индексов.

Для операторов с непрерывным спектром такого вектора может не быть. В этом случае для получения квазиконструктивного описания выбора собственного вектора оператора измерения надо ограничить точность измерения. Это означает, что надо построить счетную  $\varepsilon$ -сеть на непрерывном множестве собственных значений. Потом нужно сопоставить каждому собственному значению  $\lambda_i$  из этой сети его собственный вектор. Можно это сделать так, что векторы образуют ортонормированную счетную совокупность  $\{Q_i\}$  обобщенных функций. Каждая обобщенная функция  $Q_i$  в пространстве Гильберта может быть представлена как предел сверток с некоторой последовательностью  $\{q_{i,j}\}$  элементов этого пространства. Если  $r$  — гладкая финитная функция, то  $Q_i(r) = \lim_{j \rightarrow \infty} (q_{i,j} * r)$ . При этом для любого индекса  $i$  выполнено условие асимптотической нормированности  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|q_{i,j}\| = 1$ , и для любых двух различных индексов  $i, i'$  выполнено условие асимптотической ортонормальности  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|q_{i,j} - q_{i',j}\| = \sqrt{2}$ . Выберем значение  $\varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{6}$ . Определим значение (по признаку сходимости Коши)  $j(i) = \arg \min(j) \{j' > j \Rightarrow \|q_{i,j} - q_{i,j'}\| < \varepsilon\}$ . Обозначим  $q_i = q_{i,j(i)}$ . Эти функции образуют на собственном базисе оператора  $2\varepsilon$ -сеть. Далее, по вышеизложенной схеме, можно провести выбор одного из собственных обобщенных векторов, соответствующих этой сети. Если некоторый вектор  $u_k$  из последовательности индивидуального состояния для некоторой функции  $q_i$  удовлетворяет условию  $\|u_k - q_i\| < \varepsilon$ , то для любой другой функции  $q_{i'}$  выполнено  $\|u_k - q_{i'}\| > \sqrt{2} - 3\varepsilon > \varepsilon$ . Можно осуществить однозначный выбор ближайшего обобщенного вектора  $Q_i$  по первому такому индексу  $k$ .

В такой идеологии измерение определяется не только эрмитовым оператором, но и заданием параметра погрешности  $\varepsilon$ , а также набором собственных векторов, соответствующих  $\varepsilon$ -сети. Для операторов с дискретным спектром параметр точности не влияет на выбор.

Всюду плотная последовательность  $\{u_i\}$  определяет индивидуальное состояние частицы. Её можно представить как процесс изменения мгновенного состояния частицы, которое имитирует волновую функцию, и когда сравнение обнаруживает достаточно близкое чистое состояние, то акт взаимодействия осуществляется именно в этом чистом состоянии. Если это взаимодействие не является специально проводимым измерением, то собственное значение характеризует некоторый параметр взаимодействия, который может проявиться в макроскопических свойствах квантового ансамбля. Например, так

проявляются энергетические уровни электронов в атомах при генерации фотонного излучения, хотя непосредственно измерения на каждом электроне не производятся.

## 2. Квазиконструктивная модель выбора собственного значения.

Идея процесса изменения внутреннего состояния частицы как всюду плотной последовательности может быть использована не в функциональном пространстве, а в числовом пространстве спектра оператора. Тогда выбирается только собственное значение, и возможны два случая. Если это собственное значение не кратно в спектре, то для него имеется только одно чистое состояние измерения, и его можно выбрать как реализацию индивидуального состояния. Если же собственному значению соответствует подпространство размерности больше единицы, то однозначно выбрать собственный вектор нельзя. Но любой, например вероятностный, выбор однозначно определит результат измерения. Поэтому, статистика выбора собственных значений не зависит от способа выбора на собственном подпространстве данного элемента спектра. Этого достаточно для порождения любой квантовой статистики, поскольку она относится не к собственным функциям, а к собственным значениям. Модель индивидуального состояния, построенную с точностью до выбора собственного значения, назовем *спектральным индивидуальным состоянием*. Эти модели удобнее для анализа, поскольку выбор осуществляется не на пространстве функций или обобщенных функций, а на действительной числовой оси. Спектральное индивидуальное состояние  $\Phi\langle a \rangle$  соответствует всюду плотной («опорной») последовательности  $a = (a_i \mid i = \overline{1, \infty})$ ,  $a \subset \mathbf{R}$ , на действительной числовой прямой. **Определение 1.** Если задано подмножество  $M \subset \mathbf{R}$ , то индуцированным элементом последовательности  $a$  назовем элемент  $a_i$ , который имеет наименьший номер  $i = i(M)$  среди тех элементов последовательности, для которых определен ближайший элемент множества  $M$ .  $i(M) = \min\{i : \exists \min_{m \in M} |m - a_i|\}$ . Если существует индуцированный элемент последовательности  $a$  для подмножества  $M$ , то выбранным элементом  $M(a)$  назовем наименьший из элементов  $M$ , на котором достигается минимум расстояния от индуцированного элемента последовательности.  $M(a) = \min\{\arg \min_{m \in M} |m - a_{i(M)}|\}$ . Спектральное индивидуальное состояние определяет выбранный элемент  $M(a)$  для спектра  $M$ .

### Описание области определения $\Phi\langle a \rangle$ на множестве операторов.

**Утверждение 1.** Элемент  $M(a)$  определен если и только если имеется элемент последовательности  $a_i$ , который принадлежит либо подмножеству  $M$ , либо интервалу из дополнения  $\mathbf{R} \setminus M$ , у которого ближайший к  $a_i$  конец принадлежит  $M$ . **Следствие 1.** Если у множества  $M$  имеется хотя бы один интервал в дополнении с концом, принадлежащим множеству  $M$ , то оно входит в область определения всех спектральных моделей индивидуального состояния со всюду плотной опорной последовательностью.

**Определение 2.** Оператору измерения  $H$  соответствует измерение  $H_{\varepsilon, \delta}$  с конечной погрешностью. На числовой прямой  $\mathbf{R}$  задается некоторая счетная  $\varepsilon * \delta$  – сеть для некоторых  $0 < \delta < \varepsilon$ : это  $\varepsilon$  – сеть, в которой расстояния между любыми членами больше  $\delta$ . Для любого собственного вектора исходного оператора  $H$  с некоторым собственным значением  $\lambda$  зададим новое собственное значение  $\eta$  из сети, наименьшее из ближайших к значению  $\lambda$ . Этим новым оператор измерения определен. **Теорема 1.** Оператор  $H_{\varepsilon, \delta}$  входит в область определения всех спектральных моделей индивидуального состояния с опорной последовательностью. **Утверждение 2.** Если  $a$  и  $a'$  две всюду плотные числовые последовательности,  $[a]$  и  $[a']$  — множества их элементов, и  $[a] \subsetneq [a']$ , то для областей определения индивидуальных состояний выполнено  $\text{dom } \Phi \langle a \rangle \subsetneq \text{dom } \Phi \langle a' \rangle$ . **Определение 2.** Назовем свободным соединением двух последовательностей любую последовательность, множество членов которой равно объединению их множеств членов:  $[a''] = [a] \cup [a']$ . **Утверждение 3.** Среди спектральных индивидуальных состояний с опорной последовательностью нет оператора с максимальной областью определения. **Утверждение 4.** если первый член  $u_1$  (соответственно  $a_1$ ) последовательности  $\{u_i\}$  ( $\{a_i\}$ ) совпадает с некоторой собственной функцией  $\varphi_s$  (собственным значением  $\lambda_s$ ) оператора измерения  $H$ , то  $\Phi_\theta(H) = \varphi_s$ . Это позволяет строить явно последовательности индивидуальных состояний с заданной статистикой.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 13-01-00190а.

### Список литературы.

1. Reid M. D. et al. [Colloquium: the Einstein-Podolsky-Rosen paradox: From concepts to applications](#) // Reviews of Modern Physics, 2009, Т. 81, № 4, С. 1727–1751. DOI:10.1103/RevModPhys.81.1727
2. А. В. Коганов. Введение индивидуального состояния квантовой частицы для согласования эффекта ЭПР с квантовой и релятивистской механиками. // Восьмые Курдюмовские чтения «Синергетика в естественных науках». Материалы конференции. Тверь, ТвГУ, 2012, с. 105-108.
3. Бом Д. [Квантовая теория](#) = Quantum Theory // New York: Prentice Hall. 1989 reprint, New York: Dover, ISBN 0-486-65969-0. — 1951.
4. [Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. \(3-е изд.\) М.: Высшая школа, 1961.](#)
5. Bell J. S., On the Einstein Podolsky Rosen paradox, "Physics", 1964, v. 1, p. 195

6. Гриб А. А., Неравенства Белла и экспериментальная проверка квантовых корреляций на макроскопических расстояниях. // УФН", 1984, т. 142, с. 619.

7. Энрико Ферми. Квантовая механика. М., «Мир», 1968, 367 с.

8. Коганов А. В. Оператор индивидуального состояния квантовой частицы согласует эффект ЭПР и теорию относительности. // Симметрии: теоретический и методический аспекты. Сборник трудов 4-го Международного симпозиума, Астрахань, 2012, с. 51-56, (ISBN 978-5-8087-0315-5)

9. А. В. Коганов. Введение индивидуального состояния кванта, совместимого с неравенствами Белла. // 20-я международная конференция “Математика. Компьютер. Образование”, Пушкино МО, 2013, Тезисы докладов, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва, Ижевск, с. 104. (ISBN 978-5-93972-950-5)

10. A. V. Koganov. The Formalism of quantum particle Individual State which is compatible with Bell inequalities. // Physical Interpretations of Relativity Theory. Proceedings of International Scientific Meeting PIRT-2013, Moscow, 1-4 July 2013, BMSTU, Moscow, 2013 s. 150-157. (ISSN 2309-7604)

11. Yu.P. Rybakov, T.F. Kamalov, Entangled solitons and stochastic q-bits //Physics of Particles and Nuclei Letters, V. 4, N. 2, 2007, p. 208-213,

## ВОЗМОЖНОСТЬ ПРЕОДОЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА ГРЕЙЗЕНА-ЗАЦЕПИНА-ЗА СЧЕТ ПРИБЛИЖЕННОГО РАСШИРЕНИЯ ЛОРЕНЦЕВОЙ СИММЕТРИИ ДО КОНФОРМНОЙ В ПРЕДЕЛЕ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ.

Ю.Г.Рудой<sup>1</sup>, И.А. Вернигора<sup>2</sup>

Российский университет дружбы народов, кафедра теоретической физики  
117198, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6  
e-mail: <sup>1</sup>[rudikar@mail.ru](mailto:rudikar@mail.ru), <sup>2</sup>[wenera-83@mail.ru](mailto:wenera-83@mail.ru)

## APPROACHED EXPANSION OF LORENZ SYMMETRY TO CONFORM SYMMETRY ON HIGH - ENERGY LIMIT. GREISEN - ZATSEPIN – KUZMIN PROBLEM COMMUNICATION.

I.A. Vernigora, Yu.G. Rudoy

People's Friendship University of Russia, Department of Theoretical Physics

Вот уже более полувека в астрофизике космических лучей (КЛ) в области сверхвысоких энергий (порядка  $10^{18}$ – $10^{20}$  эВ) остается открытой проблема существования предела Грейзена – Зацепина – Кузьмина (ГЗК), предположенного практически одновременно и независимо в работах [1] и [2]. Согласно этим работам, распределение по энергиям протонной компоненты первичных КЛ должно резко обрываться в области энергий порядка  $E_{ГЗК} \approx 5 \cdot 10^{19}$  эВ за счет потерь энергии протонов на фоторождение пионов в реакциях вида  $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$  или  $p + \gamma \rightarrow n + \pi^+$  (с последующим  $\beta$ -распадом  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ), где  $\gamma$  – фотоны реликтового излучения.

Несмотря на длительное время, прошедшее с момента предсказания предела ГЗК, его экспериментальный статус все еще остается не вполне определенным (см., например, [3]). Поэтому, начиная с работы Киржница и Чечина [4] (см. также Коулмен и Глэшоу [5] и более поздние работы [6,7]) – рассматривалась возможность, оставаясь в рамках «обычной» физики, найти ресурсы ее «деформации», допускающие (по крайней мере, в принципе) преодоление предела ГЗК. Согласно [4], подобную роль могло бы сыграть отклонение от лоренцевской кинематики при очень высоких значениях лоренц-фактора  $\gamma = E/E_0 \approx 10^{10} \div 10^{11}$ .

Однако в [4] этот подход был сформулирован на полуфеноменологическом уровне и, на наш взгляд, нуждается в более надежном математическом обосновании, что и является целью данной работы. Наша исходная идея состоит в том, что при сверхвысоких значениях энергии и лоренц-фактора  $\gamma$  в кинематике любых массивных частиц с необходимостью появляются «конформные» поправки по степеням  $1/\gamma$  (отсутствующие для безмассовых частиц в пределе  $1/\gamma = 0$ ). Здесь имеет место аналогия с хорошо известными релятивистскими (лоренцевскими) поправками по степеням малой величины  $\gamma - 1$  (точнее, по степеням  $\beta = v/c \sim (\gamma - 1)^{1/2} \ll 1$ ,  $c$  – скорость света) к обычной галилеевской кинематике.

Теоретической основой подобного подхода служит постепенное расширение группы допустимых преобразований с ростом значений  $\gamma$ : от группы Галилея  $G_{10}$  к группе Лоренца – Пуанкаре  $P_{10}$  и далее к конформной группе Вейля – Фока  $C_{15}$ , причем число точных инвариантов в этом процессе сокращается. Тем не менее, предполагается возможность не только точного, но и приближенного нарушения той или иной симметрии, а также применимость теории возмущений по соответствующим малым параметрам  $\gamma - 1$  и  $\xi \equiv 1/\gamma$ .

В частности, при малых  $\xi = E_0/E$  следует заменить лоренцев скаляр  $I_L(p; E_0) = E^2 - p^2 = E_0^2$ , инвариантный при любых значениях  $E_0$  и  $\xi$ , на конформный скаляр  $I_C(p; E_0) = C(\xi) I_L(p; E_0)$ , который является точным инвариантом только в безмассовом случае  $E_0 = 0$ ,  $\xi = 0$ . Именно последнее обстоятельство и указывает естественный путь построения теории возмущений для  $C(\xi)$  по малому параметру  $\xi$  при переходе от группы  $P_{10}$  к группе  $C_{15}$ .

Группа  $P_{10}$  определяется 10 параметрами и является тензорным произведением группы лоренцевых вращений  $L_6$  и группы трансляций  $T_4(c)$ , определяемой произвольным постоянным 4-вектором  $c$ . Группа  $S_{15}$  включает дополнительно к  $P_{10}$  одномерную подгруппу  $D_1$  дилатаций с одним скалярным параметром  $\lambda > 0$ , а также подгруппу «специальных» конформных преобразований, или преобразований Мёбиуса-Вейля-Фока,  $S_4(c) = RT_4(c)R$ , где  $R$  – нелинейное (зависящее от  $P$ ) преобразование инверсии  $RP = -P/P^2$ , вообще не содержащее каких-либо параметров и обладающее инволютивным свойством  $R^2 = R$ .

Под действием преобразований  $S_4(c)$  любой 4-вектор  $P$  переходит в

$$P_C = C(P; c)P + \Delta P(P; c), \quad \Delta P(P; c) = C(P; c)cP^2; \quad P_C^2 = C(P; c)P^2, \quad (1)$$

причем конформный множитель  $C(P; c)$  дается выражением

$$C(P; c) = [\sigma(P; c)]^{-1}, \quad \sigma(P; c) = 1 - 2cP + c^2P^2 = c^2(P - c/c^2)^2. \quad (2)$$

Для поставленных в данной работе целей достаточно ограничиться физически выделенным выбором  $c = -aP$  ( $a \geq 0$ ) с последующим переходом к однородным координатам: от вектора 4-импульса  $P$  к вектору 4-скорости  $V = P/E = (1, v = p/E)$  (это удобно, поскольку  $V^2 = \xi^2$ ). Показано, что за счет выбора конформного параметра в виде  $a = \alpha\gamma^*$ , где  $\gamma^* = E_{\text{Планка}}/E_{\text{протона}} \approx 10^{18}$ ,  $\alpha = O(1)$ , действительно удается преодолеть предел ГЗК для протонов, причем несмотря на различие подходов, полученные результаты в целом согласуются с [4-8].

## Список литературы

- [1] Greisen K. End to the cosmic-ray spectrum? // Physical Review Letters. 1966. V. 16, № 17. P. 748-750.
- [2] Зацепин Г.Т., Кузьмин В.А. О верхней границе спектра космических лучей // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 4. С. 114-116.
- [3] Stecker F.W. Effect of photomeson production by the universal radiation field on the high-energy cosmic rays // Physical Review Letters. 1968. V. 21, № 14. P. 1016-1018.
- [4] Панасюк М.И. Странники Вселенной, или эхо Большого взрыва // Век 2, Фрязино, 2005.
- [5] Засов А.В., Постнов К.А. Общая астрофизика // Век 2, Фрязино, 2006.
- [6] Птускин В.С. О происхождении галактических космических лучей // Успехи физических наук. 2007. Т. 177, № 5. С. 558-565.
- [7] Иванов А.А., Кнуренко С.П., Правдин И.М., Красильников А.Д., Слепцов И.Е. Поиск внегалактических источников космических лучей в области предельных энергий (ВККЛ-30, СПб, июль 2008) // Известия РАН, сер.физическая. 2009. Т. 73. № 5. С. 581-583.
- [8] Olinto A.V., Adams H.J., Dermer C.D. et al. White paper on ultra-high energy cosmic rays // <http://uhec.uchicago.edu/2009>.
- [9] Березинский В.С. Эффект Грейзена – Зацепина – Кузьмина // Доклад на ВККЛ-31, Москва, июль 2010 (данное издание).
- [10] Berezhinsky V.S. Ultra-high energy cosmic rays // Nuclear Physics B.: Proc. Suppl. 2000. V. 81. P. 311-324.
- [11] Куржниц Д.А., Чечин В.А. Космические лучи сверхвысоких энергий и возможное обобщение релятивистской теории // Ядерная физика. 1972. Т. 15, вып. 5. С. 1051-1058.
- [12] Coleman S., Glashow S.L. High-energy tests of Lorentz invariance // Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 116008.
- [13] Gonzalez –Mestres L. Deformed Lorentz symmetry and high-energy astrophysics // 2000. Proc. 26<sup>th</sup> ICRC, 1999. arXiv: physics/0003080v1.

- 
- [14] *Scully S.T., Stecker F.W.* Lorentz invariance violation and the observed spectrum of ultrahigh energy cosmic rays // arXiv: astro-ph/0811.2230v4.
- [15] *Jacobson T., Liberati S., Mattingly D.* Astrophysical bounds on Planck suppressed Lorentz violation //arXiv:hep-ph/0407370v1.

**НУКЛЕОХИМИЯ ХОЛОДНОЙ ТРАНСМУТАЦИИ АТОМНЫХ ЯДЕР**

Ю. С. Копысов

**NUCLEOCHEMISTRY OF COLD TRANSMUTATION OF ATOMIC**

NUCLEI

Yu. S. Kopysov

Институт ядерных исследований Российской академии наук, Москва, Россия

e-mail: kop@akado.ru

**Аннотация**

Намечена теоретическая схема обоснования возможности получения кумулятивного процесса преодоления кулоновского барьера заряженными нуклидами. Дальнейшая разработка этой теоретической возможности фактически означает формирование новой концепции ядерных превращений в лабораторных и астрофизических условиях. Это новое направление исследований естественно назвать нуклеохимией атомных ядер и «активированных ядерных комплексов».

Теоретической основой этих исследований является обобщение понятия самосогласованного поля для активированных ядерных комплексов и для процессов гибридизации нуклонных орбиталей.

Основные теоретические идеи формирования кумулятивного процесса преодоления кулоновского барьера обсуждаются на примере эксперимента с металлическим бериллием, погружённым в атмосферу водорода, обогащённого дейтерием [1]. В этом эксперименте наблюдались медленные (тепловые) нейтроны с помощью счётчика СНМ-18. Именно появление таких нейтронов ожидается в обсуждаемой теоретической модели холодной трансмутации ядер.

**Литература**

[1] Ю. Н. Бажутов, В. П. Корецкий, А. Г. Пархомов. Экспериментальная проверка эффекта Росси

с гидридами металлов // Изобретательство, т. VIII, №5, 2013 г., стр. 51-59



## ВЛИЯНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ СТРУКТУР И ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ГРОЗОВОЙ ОБЛАЧНОСТИ

Царькова К.В.<sup>1)</sup>, Ерохин Н.С.<sup>1,2)</sup>

## THE INFLUENCE OF COHERENT STRUCTURES AND INTERMITTENCY ON THE ELECTRIC TURBULENCE IN THUNDERCLOUDS

Tsarkova K.V.<sup>1)</sup>, Erokhin N.S.<sup>1,2)</sup>

<sup>1)</sup> *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

<sup>2)</sup> *Институт космических исследований РАН, Москва, Россия*  
*e-mail: kris\_kris@list.ru*

### Abstract

*By usage of analytical model it is considered the possible influence of intermittency and coherent structures on the behaviour of structure functions for the electric turbulence in thunderclouds. The coherent structures (CS) and intermittency (IM) are modeled by some spatially localized functions with parameters determining the amplitudes of CS and IM dynamics, their spatial sizes and distributions inside turbulence. Numerical calculations of turbulence structure functions (SF) have shown that the influence of CS and IM may be essential enough under the suitable choice their parameters? For example, some variations from power law dependence are observed and at the middle-scale range the autocorrelation function is increasing. The CS-contribution and IM-one are the most essential at the scales of the order of their typical width. More obvious their influence on SF-behaviour is seen on the plotts of so-called relative structure functions.*

### Введение

Изучение структурных характеристик хаотизированных полей представляет интерес для многих практических приложений, например, для анализа механизмов возбуждения и поддержания неоднородных крупномасштабных течений в околоземном пространстве, физики МГД-турбулентности в плазме солнечного ветра, исследований процессов формирования интенсивных крупномасштабных вихревых структур типа тайфунов и роли заряженных подсистем этих вихрей в их динамике, для мониторинга геофизических полей космическими средствами, для современных методов обработки данных дистанционного зондирования геофизической среды и корректной физической интерпретации ее результатов (см. например, работы [1-10]). Это важно и для поиска возможностей воздействия на развитие и пространственную динамику интенсивных вихревых структур. При исследовании структурных свойств хаотизированных геофизических полей в настоящее время широко используется анализ структурных функций (СФ) с определением таких характеристик как, статистическая стационарность, перемежаемость, спектральные индексы, обобщенные размерности, скейлинговые экспоненты и др. на массиве данных измерений [5-9]. Кроме получения статистических параметров при обработке данных важно выявить наличие когерентных структур, перемежаемости, которые могут существенно влиять на динамику процессов, в частности,

транспортные явления, генерацию крупных вихрей, гидродинамическое сопротивление и пр. В настоящей работе представлены результаты анализа аналитической модели электрической турбулентности в грозовой облачности с учетом возможного влияния когерентных структур, перемежаемости на параметры структурных функций.

### Постановка задачи и результаты расчетов

Наличие спиральности  $\mathbf{H} = \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v}$  в атмосферных вихрях и плазме повышает их устойчивость к возмущениям и увеличивает время существования (см., например, [2,3,4,10]). Кроме того, спиральность  $\mathbf{H}$  способствует возникновению обратного каскада энергии от малых масштабов в крупные т.е. возможно усиление слабых синоптических возмущений до уровня мощных циклонов (ТЦ). Для корректного описания этого механизма нужно учитывать вклад заряженных подсистем грозовых облаков в формирование самосогласованной, существенно неоднородной структуры ветровых потоков и в их последующую нелинейную динамику (см., в частности, [11]). Имеющиеся экспериментальные данные о вертикальных профилях электрического поля  $E_z(z)$  в грозовой облачности (см., например, [12-14]) указывают на присутствие достаточно сильных электрических флуктуаций с типичными размерами (10÷500) м и напряженностями поля порядка  $10^5$  В/м и более. Поэтому для оценок вклада заряженных подсистем в генерацию спиральных движений атмосферы необходимо изучать параметры электрических флуктуаций, в частности, исследовать свойства структурных функций  $S_m(L)$ , где  $L = z_1 - z_2$  разность высот двух атмосферных слоев. Используя стандартные методы анализа гидродинамической турбулентности [3-9] рассмотрим характеристики структурных функций  $S_m(L)$  для электрического поля  $E_z(z)$  в грозовой облачности с учетом когерентных структур и перемежаемости. Основой для анализа являются аналитические модели для электрического поля  $E_z(z)$ , содержащего два инерционных интервала, в которые добавляются когерентные структуры (КС) типа пространственно локализованных функций и перемежаемость. Для описания профилей КС используются выражения вида  $b_n(z) = a_n / [1 + k_n^2 (z - z_n)^2]$  с параметрами  $a_n$ ,  $k_n$  и  $z_n$ . Для исследования турбулентности с инерционными интервалами геофизический ряд данных для турбулентности моделировался рядом следующего вида

$$E(i) = \sum_k b_k \sin [(2\pi i k / M) + \Psi_k], \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь для фаз гармоник  $\Psi_k$  использовались случайная выборка из интервала  $(-\pi, \pi)$ ,  $b_k$  имеет степенные спектры по  $k$  в инерционных интервалах. Степень перемежаемости турбулентности учитываем величиной относительного понижения электрического поля  $E(z)$  в определенных интервалах высоты введением дополнительного множителя, имеющего в них провалы, а учет КС – добавлением некоторого числа функций  $b_n(z)$ .

Структурные функции  $S_m(L)$  порядка  $m$  вычисляются согласно формуле  $S_m(L) = \langle |E(z_i + L) - E(z_i)|^m \rangle$ , где  $z_i = \ell i$ ,  $\ell$  пространственное разрешение, например, оно может быть несколько метров для интервала высот  $0 < z < h$ ,  $1 \leq i \leq N$ ,  $N = h / \ell$ , а пространственное усреднение проводится в области  $0 < z < h - L$ . Обычно полагается, что  $\ell < L < h / 3$ .

Зависимость  $S_m(L)$  от масштаба  $L$  для различных значений порядка  $m$  представляется на графиках в  $\lg$ - $\lg$  координатах. В отсутствие КС и перемежаемости графики  $S_m(L)$  показывают наличие в электрической турбулентности двух инерционных интервалов, в которых имеется линейная

зависимость между  $\lg S_m(L)$  и  $\lg L$  т.е. в инерционных интервалах наблюдаются степенные скейлинги типа  $S_m(L) \sim L^{g(m)}$ , где  $g(m)$  скейлинговая экспонента. Отметим, что для  $m = 1$  получается индекс Херста  $H = g(1)$ , а индекс спектра мощности турбулентных флуктуаций  $\alpha$  выражается через  $g(2)$  и равен  $\alpha = 1 + g(2)$ . Удобно приводить графики структурных функций  $S_m(L)$  в зависимости от безразмерного сдвига по высоте  $n = L / \ell$ , а для лучшего сравнения графиков использовать нормированные СФ:  $W_m(n) = S_m(n) / S_m(1)$  т.е.  $W_m(1) = 1$ . При учете КС и перемежаемости электрической турбулентности на графиках появляются отклонения от степенных скейлингов структурных функций  $S_m(L)$ , обусловленные этими факторами.

Анализ показал, что отклонения структурных функций от степенных скейлингов за счет КС и перемежаемости происходят на масштабах, которые соответствуют типичным размерам рассмотренных КС и подинтервалов, в которых введена перемежаемость турбулентности.

## Литература

- [1]. Ю.С. Барышникова, Г.М. Заславский, Е.А. Лупян Е. А. и др. *Исследование Земли из космоса*, 1989, № 1, 17.
- [2]. А.А. Lazarev, S.S. Moiseev. *Geophysical Precursors of Early Stages of Cyclogenesis*, Preprint IKI RAS, Pr-1844, ИКИ РАН, Москва 1990, - 13 с.
- [3]. Н.С. Ерохин, С.С. Моисеев. *Проблемы геофизики XXI века*, М.: Наука, 2003, т. 1, 160.
- [4]. Н. Branover, А. Eidelman, Е. Golbraikh and S.S. Moiseev. *Turbulence and Structures. Chaos, Fluctuations and Self-organization in Nature and in the Laboratory*, San-Diego, Academic Press, 1998, - 270 p.
- [5]. Е.Т. Marsh, С.У. Tu. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 1997, 4, No 1, 101.
- [6]. Т.С. Horbury, А. Balogh. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 1997, 4, No 3, 185.
- [7]. D. Schertzer, S. Lovejoy, F. Schmitt et al. *Fractals*, 1997, 5, No 3, 427.
- [8]. А.Р. Osborne, А. Provenzale. *Physica D*, 1989, 35, No 2, 357.
- [9]. L.N. Litvinenko, V.B. Ryabov, P.V. Usik et al. *Correlation dimension: The New Tool in astrophysics*. Institute of Radio Astronomy, Academy of Sciences of Ukraine, Preprint No 64, Kharkov, 1992, - 53 p.
- [10]. С.С. Моисеев, О.Г. Чхетиани. *ЖЭТФ*, 1996, 110, вып. 1(7), 357.
- [11]. S.N. Artea, Е. Golbraikh, N.S. Erokhin. *Problems of Atomic Science and Technique*, 2003, № 4, 94.
- [12]. А. Marshak, А. Davies, W. Wiscombe et al. *Journal of Atmospheric Sciences*, 1997, 54, No 11, 1423.
- [13]. G.J. Byrne, А.А. Few and M.F. Stewart. *Journal of Geophysical Research*, 1989, 94, No D5, 6297.
- [14]. Т.С. Marshall and W.D. Rust. *Journal of Geophysical Research*, 1995, 100, No 9, 1001.

## ДИНАМИКА ТРАЕКТОРИЙ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ СЕРФОТРОННОМ УСКОРЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ С БОЛЬШИМ ПРОДОЛЬНОМ ИМПУЛЬСОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Мкртчян Г.С.<sup>1)</sup>, Ерохин Н.С.<sup>1,2)</sup>

### "THE TRAJECTORIES DYNAMICS AT PHASE PLANE DURING THE SURFATRON ACCELERATION OF ELECTRONS WITH LARGE LONGITUDINAL IMPULSE BY ELECTROMAGNETIC WAVES"

Mkrtichyan G.S., Erokhin N.S.

<sup>1)</sup>Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

<sup>2)</sup>Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

e-mail: hay-13@mail.ru

#### Abstract

*It is investigated the trajectories dynamics on phase plane during surfatron acceleration of charged particles with large longitudinal impulse by electromagnetic wave propagating in space plasma across external magnetic field. For large longitudinal impulse the electrons are trapped by the immediately if the initial wave phase at the particle trajectory  $\Psi(0)$  is positive. For the negative values of  $\Psi(0)$  the electrons trapping by wave isn't observed. According to numerical calculations on the phase plane the trajectory for trapped particles has the stable focus and the trajectory behaviour corresponds to motion in complicated nonstationary effective potential.*

#### Формулировка задачи и результаты расчетов

Серфинг зарядов на электромагнитных волнах, которые могут иметь черенковский резонанс с частицами, является одним из наиболее вероятных механизмов генерации потоков ультррелятивистских частиц в космической плазме (см., например, [1-9]). Для корректных оценок условий генерации потока быстрых частиц, их параметров необходим детальный анализ механизма захвата заряженных частиц в режим серфотронного ускорения электромагнитной волной, эффективности этого ускорения и оптимальных условий его реализации. Часть этих вопросов ранее рассматривалась, например, в работах [1-6]. Поскольку задача имеет набор свободных параметров полный объем требующихся вычислений оказывается весьма большим и исследовать эту задачу необходимо поэтапно.

В данной работе выполнен анализ структуры фазовой плоскости для захватываемых в режим серфинга заряженных частиц при их ультрреля-

тивистском ускорении электромагнитной волной в случае больших значений продольного импульса электрона. Ранее показано ранее ( см., например, работы [6, 7]), что в наиболее простой модели серфотронного ускорения зарядов задача сводится к исследованию решения нелинейного, нестационарного дифференциального уравнения второго порядка диссипативного типа для фазы волны  $\Psi(\tau)$  на траектории заряженной частицы, колеблющейся в эффективной потенциальной яме в области ускоряющих полей. Согласно численным расчетам, при достаточно сильном ускорении период этих колебаний возрастает значительно, а амплитуда колебаний уменьшается. Такое поведение соответствует наличию на фазовой плоскости  $(\Psi(\tau), d\Psi/d\tau)$  особой точки типа устойчивого фокуса. Эта возможность была указана ранее, в частности, в работах [7, 9].

Для выявления асимптотик в движении ускоряемой частицы в данной работе рассмотрено серфотронное ускорение зарядов при большой начальной энергии частиц, когда релятивистский фактор заряда  $\gamma(0)$  порядка сотен. В области оптимальных для реализации серфинга начальных фаз  $\Psi(0)$  и при выполнении условия черенковского резонанса численные расчеты показали, что происходит захват заряда в эффективную потенциальную яму с последующим ультрарелятивистским ускорением при амплитуде волны выше некоторого порогового значения и оптимальном знаке компоненты импульса заряда вдоль волнового фронта. При этом темп ускорения заряда  $d\gamma/dt$  не зависит от амплитуды волны и определяется величиной безразмерной фазовой скорости волны  $\beta_p = \omega/k$ , где  $\omega$ ,  $k$  частота и волновой вектор. Амплитуда волны определяет положение равновесия по фазе  $\Psi$ , около которого происходят колебания  $\Psi(\tau)$  т.е. дно эффективной потенциальной ямы. Для начальных фаз  $\Psi(0)$  в интервале  $|\Psi(0)| < \pi$  Благоприятными для реализации серфинга оказываются положительные значения  $\Psi(0)$ , когда захват частиц волной происходит сразу. Для случая  $-\pi < \Psi(0) \leq 0$  на доступных временах счета захват не наблюдается.

В случае неблагоприятного знака компоненты импульса заряда вдоль волнового фронта вначале частица оставаясь захваченной тормозится и меняет знак этого импульса, а затем имеют место ее захват и ускорение. Соответственно этому на первом этапе движение изображающей точки на фазовой плоскости соответствует траектории около неустойчивого фокуса с увеличением расстояния от него по мере торможения заряда. На втором этапе, когда имеет место ускорение частицы электромагнитной волной траектория изображающей точки отвечает движению около другой фазы – устойчивого фокуса с постепенным уменьшением амплитуды осцилляций по мере роста энергии заряда. Отметим, что четкое выявление указанных характеристик движения частиц при серфинге на электромагнитной волне требует достаточно больших времен для численных расчетов поскольку при ультрарелятивистских энергиях зарядов характерные времена существенного изменения параметров орбит частиц весьма велики.

Приведем некоторые результаты выполненных численных расчетов для случая :  $u = 0.23$ ,  $\beta_p = 0.37$ ,  $h = 80$ ,  $g(0) = 9$ ,  $a \equiv d\Psi/d\tau = 0$  при  $\tau = 0$ . Здесь  $h$ ,  $g(0)$  компоненты импульса частицы вдоль магнитного поля и волнового фронта соответственно. Интересный случай при начальной фазе  $\Psi(0) = 3$  и отклонении от черенковского резонанса. Согласно численным расчетам при большом продольном импульсе хотя и есть малые отклонения от черенковского резонанса, но заряд захватывается сразу.

Для значений  $\Psi(0) = 3; 2.6; 2.2; 1.8; 1.4; 1; 0.6; 0.4; 0.2$  заряд захватывается волной в режим серфотронного ускорения при  $\tau = 0$ . В случаях  $\Psi(0) = -3; -2.6; -2.2; -1.8; -1.4; -1; -0.6; -0.4; -0.2; 0$  на интервале  $\tau < 40000$  захват не наблюдается.

Для случая  $h = 25.1$ ,  $u = 0.2$ ,  $\beta_p = 0.9$ ,  $\sigma = 1.6 \cdot \sigma_c$ ,  $g = 1$ ,  $a = 0$ ,  $\Psi(0) = -2$  график релятивистского фактора  $\gamma(\tau)$  и его аналитической аппроксимации  $M(\tau)$  представлены на рис. 1. Согласно рис.1 после захвата волной частица ускоряется с постоянным темпом набора энергии. Малые вариации  $\gamma(\tau)$  имеются до момента захвата заряда волной, но они не заметны на графике.

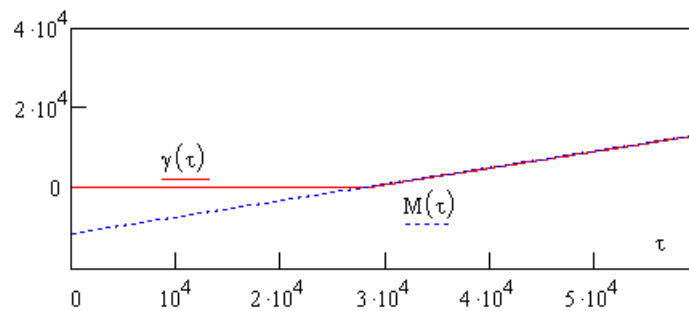


Рис. 1. Графики релятивистского фактора  $\gamma(\tau)$  и его аналитической аппроксимации  $M(\tau) = 9.281 + 0.413 (\tau - 27500)$ .

При захвате через достаточно большое время типичная структура фазовой плоскости ( $\Psi$ ,  $\Phi$ ), где  $\Phi = d\Psi/d\tau$ , на интервале времен  $(5.3 - 6) \cdot 10^4$ , включающем момент захвата заряда электромагнитной волной в режим серфинга представлена на рис.2 на интервале времени, включающем момент захвата заряда электромагнитной волной в режим серфинга.

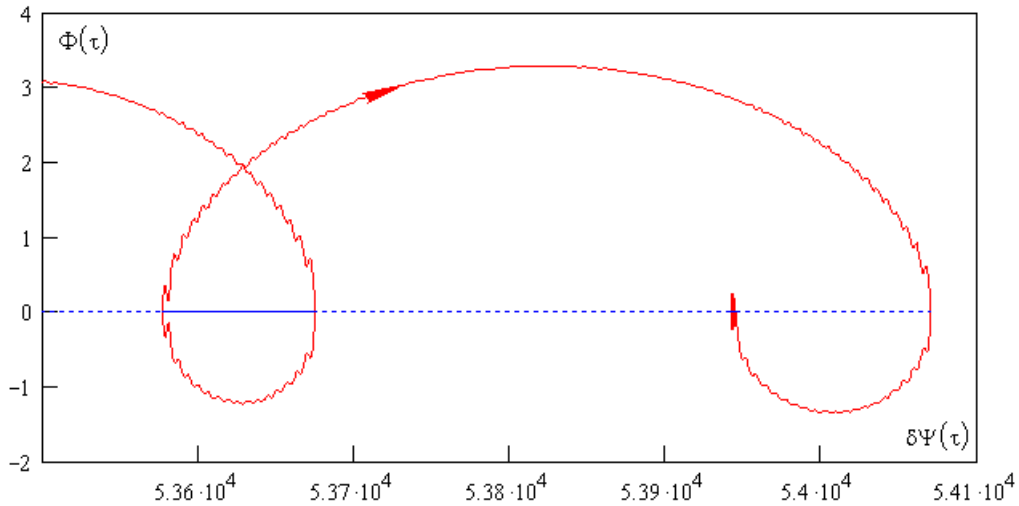


Рис. 2. Фазовая плоскость частицы для интервала времени  $(5.3 - 6) \cdot 10^4$ .

До захвата волной траектория изображающей точки на фазовой плоскости  $(\Psi, \Phi)$  соответствует циклотронному вращению. Отметим малые вариации кривой, обусловленные нестационарностью эффективного потенциала  $U$ . Расчеты показывают, что при циклотронном вращении заряда фактор нестационарности  $U$  может приводить в некоторые моменты времени к возрастанию  $\gamma$  примерно на порядок от начального значения для умеренных значений  $\gamma(0)$ . В конце данного временного интервала динамика определяется колебаниями частицы с уменьшающейся амплитудой и возрастающим периодом в области дна эффективной потенциальной ямы. Ввиду малого разрешения рис. 2 на нем осцилляции в эффективной потенциальной яме незаметны. После захвата частицы волной траектория изображающей точки по спирали медленно приближается к особой точке типа устойчивый фокус. Этот процесс наглядно виден на кривой рис. 3, где показана фазовая плоскость системы для интервала времени  $(5.44 - 5.8) \cdot 10^4$ .

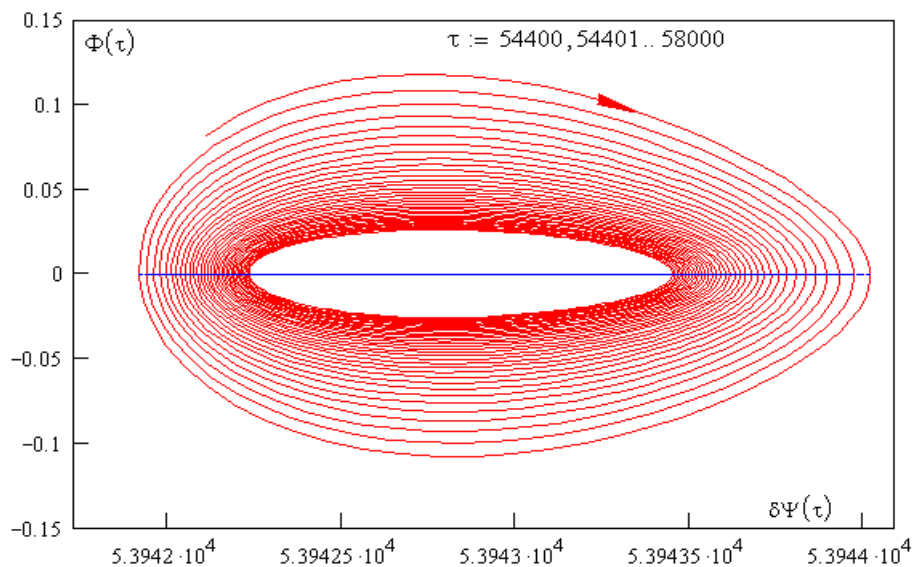


Рис. 3. Траектория изображающей точки в окрестности устойчивого фокуса.

Расчеты для других значений параметров задачи дают аналогичные результаты. Рассмотрены динамика данной системы при наличии в начальный момент времени отстройки от черенковского резонанса частицы с волной. Согласно расчетам после серии циклотронных оборотов заряда возникают черенковский резонанс, благоприятная для захвата фаза волны на траектории частицы и реализуется серфотронное ускорение. Однако заметим, что при больших продольных импульсах электрона захват происходит на очень больших временах.

Проведенное исследование представляет интерес для корректной интерпретации экспериментальных данных по регистрации потоков релятивистских частиц в космических условиях включая околоземное пространство, а также для объяснения регистрируемых экспериментально особенностей в спектрах космических лучей.

## Литература

- [1]. N. Katsouleas, J. Dawson, *Physical Review Letters*, **1983**, 51, 392.
- [2]. Б.Э. Грибов, Р.З. Сагдеев, В.Д. Шапиро, В.И. Шевченко, *Письма в ЖЭТФ*, **1985**, 42, 54.
- [3]. Н.С. Ерохин, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев, *Письма в Астрономический журнал*, **1989**, 15, 3.
- [4]. Г.Н. Кичигин, *ЖЭТФ*, **2001**, 119, 1038.
- [5]. M.E. Dieckmann, B. Eliasson, M. Parviainen, P.K. Shukla, A. Ynnerman. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **2005**, 367, 865.
- [6]. N.Erokhin, N.Zolnikova, R.Shkevov, L.A.Mikhailovskaya, P.Trenchev, *Доклады на Българската академия на науките*, **2007**, 60, 967.
- [7]. Н.С. Ерохин, Н.Н. Зольникова, Л.А. Михайловская, *Вопросы атомной науки и техники*, **2008**, 4, 114.
- [8]. De-Yu Wang, Quan-Ming Lu. *Advances in Space Research*, **2007**, 39, 1471.
- [9]. A.A. Chernikov, G. Schmidt, A.I. Neishtadt, *Physical Review Letters*, **1992**, 68, 1507.



## ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Е.А. Сорокина, Н.А. Марусов  
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия  
НИЦ “Курчатовский институт”  
[sorokina.ekaterina@gmail.com](mailto:sorokina.ekaterina@gmail.com)  
[nn.marusov@gmail.com](mailto:nn.marusov@gmail.com)

Для исследования движения заряженных частиц в электромагнитном поле применяется *дрейфовая теория*. Данная работа посвящена альтернативному подходу к задаче о движении частиц, который позволит расширить класс полей, а также рассчитать поправки к классической дрейфовой теории.

Уравнение движения ведущего центра в дрейфовом приближении имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{r}_d}{dt} = v_{\parallel} \mathbf{b} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] - \frac{mc}{ZeB^2} [\dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{B}] + \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[ \mathbf{b} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{b}], \quad (1)$$

где  $\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}_{\perp}$ ,  $\mathbf{v}_{\perp} = (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}_L)$ ,  $\boldsymbol{\Omega} = -(Ze/mc)\mathbf{B}$ ,  $\boldsymbol{\rho}_L = [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}]/\Omega^2$ ,  
 $\mathbf{w} = (c/B^2)[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ ;  $v_{\parallel}$ ,  $v_{\perp}$  – скорости вдоль и поперек силовых линий магнитного поля соответственно,  $\Omega$  – циклотронная частота,  $\rho_L$  – ларморовский радиус. Первый член в правой части отвечает за движение ведущего центра вдоль силовой линии магнитного поля, второй – за движение в скрещенных электромагнитных полях (*электрический дрейф*), третий – движение под действием силы инерции, четвёртый и пятый – движение в неоднородном магнитном поле (*градиентный* и *центробежный дрейф* соответственно).

Условия применимости:

1. Малое изменение полей на ларморовском радиусе

$$|\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla B| \ll B, |\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla E| \ll E.$$

2. Слабое электрическое поле

$$cE/B \ll v.$$

В ходе работы было получено точное уравнение движения ведущего центра посредством разделения движения частицы (Рис.1):  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_d + \boldsymbol{\rho}_L$ .

Дифференцируя данное выражение по времени, полагая что:

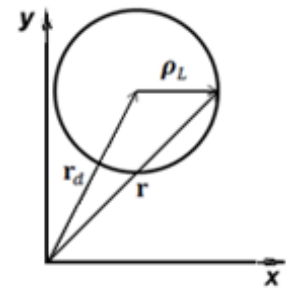


Рис.1

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}] + \frac{Ze}{m} \mathbf{E}, \quad \dot{\rho}_L = [\boldsymbol{\Omega} \times \rho_L],$$

где  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_d}{dt} = & \mathbf{b}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}) + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] - \frac{mc}{Ze} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{b}}{B} \right) \times \mathbf{v} \right] + \frac{mc}{Ze} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{b}}{B} \right) \times \dot{\mathbf{r}}_d \right] \\ & + \frac{mc}{Ze} \left[ \frac{\mathbf{b}}{B} \times \ddot{\mathbf{r}}_d \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Выражение (2) является точным уравнением движения ведущего центра, правая часть которого, имеет схожую структуру с уравнением (1), однако включает в себя дополнительные два члена.

В работе рассмотрен частный случай однородного стационарного магнитного поля и однородного нестационарного электрического поля:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t)$ ,  $\mathbf{B} = \text{const}$ ,  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ . Тогда уравнение (2) записывается в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{r}_d}{dt} = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] + \frac{mc}{Ze} \left[ \frac{\mathbf{b}}{B} \times \ddot{\mathbf{r}}_d \right]. \quad (3)$$

В качестве решения уравнения (3) можно записать функциональный ряд, полученный при помощи итерационной процедуры:

$$\frac{d\mathbf{r}_d}{dt} = \frac{mc^2}{Ze} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Omega^{2n}} \left\{ \frac{d^{2n+1}}{dt^{2n+1}} \mathbf{E} + \frac{Ze}{mc} \left[ \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right] \right\}. \quad (4)$$

Особый интерес для исследования представляют поля, периодически меняющиеся со временем. Если поле  $\mathbf{E}$  зависит от времени по закону синуса или косинуса, то ряд (4) имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{r}_d}{dt} = \frac{mc^2}{Ze} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{2n}}{\Omega^{2n}} \left\{ \frac{d\mathbf{E}}{dt} + \frac{Ze}{mc} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \right\}, \quad (5)$$

где  $\omega$  – частота поля. Если  $\omega/\Omega < 1$ , тогда ряд (5) сходится, и его сумма равна:

$$\frac{d\mathbf{r}_d}{dt} = \frac{mc^2}{Ze} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left\{ \frac{d\mathbf{E}}{dt} + \frac{Ze}{mc} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \right\}. \quad (6)$$

В выражении (6) появляется поправочный коэффициент  $1/(\Omega^2 - \omega^2)$ , который позволяет использовать поля с неоднородностью порядка циклотронной частоты, значительно расширяя класс полей, не предусмотренных классической дрейфовой теорией.

Заключение: Рассмотренный пример наглядно иллюстрирует результаты применения данного метода, который можно использовать как для расчета поправок к классической теории, так и в качестве альтернативного подхода к исследованию движения ведущего центра.

#### Список литературы

1. Сивухин Д.В. Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях. В кн.: Вопросы теории плазмы, вып. 1, под ред. М.А. Леонтовича. - М.: Госатом-издат, 1963, с. 7 - 97.
2. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях. В кн.: Вопросы теории плазмы, вып.2, под ред. М.А. Леонтовича. - М.: Госатом-издат, 1963, с. 177 - 261

## О ПРИЧИНЕ ИЗЛОМА В СПЕКТРАХ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ ПРОТОНОВ И ЯДЕР ГЕЛИЯ ОКОЛО ~230 ГВ

Лозников В.М.<sup>1)</sup>, Ерохин Н.С.<sup>1,2)</sup>, Зольникова Н. Н.<sup>1)</sup>, Михайловская Л.А.<sup>1)</sup>

### "ON THE REASON OF BREAKING IN COSMIC RAYS SPECTRA OF PROTONS AND HELIUM NUCLEI NEARBY ~230 GV"

Loznikov V.M.<sup>1)</sup>, Erokhin N.S.<sup>1,2)</sup>, Zolnikova N.N.<sup>1)</sup>, Mikhailovskaya L.A.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

<sup>2)</sup>Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

e-mail: [vloznikov@yandex.ru](mailto:vloznikov@yandex.ru)

#### Abstract

*For the description of cosmic rays spectra of protons and helium ( $p$  and  $He$ ) (in the range of  $\sim 30 \div 2 \cdot 10^5$  GV) suggested the ternary phenomenological model. The first component correspond to constant background, the second component correspond to variable heliospheric source (existing at the periphery of the heliosphere beyond of TS), the third component correspond to nearby variable Galactic source (hypothetically located near the border of the local interstellar cloud (LIC) at the distance  $\sim 0.01$  pc from the Sun). For existence and variability of both sources fits corresponding surfatron accelerators, for operation of which it takes existing the region with almost uniform and constant in magnitude and direction magnetic field, orthogonally (or under some angle) to which propagates plasma waves. Existing and location of the breaking in the energetic spectra of  $p$  and  $He$  (nearby  $\sim 230$  GV) depends on the relationship between the values and indexes of the background, "soft" heliospheric source and "hard" nearby Galactic source. Formation harder spectrum of  $He$  comparatively to spectrum of  $p$  explained by that surfatron mechanism more effectively accelerates particles with major charge and capture of charged particles by plasma wave is more effective for particles with minor mass.*

#### ВВЕДЕНИЕ

Эта работа посвящена исследованию переменности спектров космических лучей КЛ протонов ( $p$ ) и ядер гелия ( $He$ ) в диапазоне  $\sim 30 \div 2 \cdot 10^5$  ГВ. Из большого количества экспериментов были отобраны три наиболее сильно различающиеся спектра КЛ ( $p$  и  $He$ ) в ТэВ-ной области энергий. Поскольку исследованию переменности в ГэВ-ной области

энергий была посвящена наша предыдущая работа [1], то в этой области энергий мы ограничились выбором только двух близких спектров.

Спектрометр заряженных частиц *PAMELA* [2], установленный на спутнике Ресурс-ДК1, и работающий в широком диапазоне энергий  $\sim 1 \div 1000$  ГэВ, обнаружил особенность (резкий V-образный излом) в спектрах протонов (*p*) и гелия (*He*) космических лучей (КЛ), измеренных в течение 2006 – 2008 гг., в области около  $\sim 230$  ГВ (рис.1). Спектр потока протонов КЛ, измеренный на 3.5 года раньше (в диапазоне 50 ГэВ  $\div$  30 ТэВ) в баллонном эксперименте *ATIC-2* [3] в течение месяца (в период 12.2002 – 01.2003 гг.) частично перекрывающийся со спектром *PAMELA*, также хорошо описывает эту особенность, и согласуется также со спектром баллонного эксперимента *BESS-TeV* [4], проведенного 08.2002 г.

Однако, в спектре *ATIC-2* ядер *He* эта особенность не видна. Спектры *ATIC-2* и *PAMELA* совпадают лишь в области  $>300$  ГэВ, а наклон спектра *ATIC-2* увеличивается плавно (без излома) в области  $>200$  ГэВ (рис.1).

Спектры *ATIC-2* ядер *He* в области  $<300$  ГэВ лучше согласуются (для глаз) со спектром баллонного эксперимента *BESS-TeV* (08.2002 г.), что вполне объяснимо, т.к. разница во времени проведения этих экспериментов наименьшая ( $\sim 4$  месяцев). Тем не менее, как будет показано ниже, согласие между спектрами ядер *He* и в экспериментах *ATIC-2* и *PAMELA* также вполне удовлетворительное. Энергетические спектры *p* и *He*, измеренные (в диапазоне 2.5  $\div$  250 ТэВ) в баллонном эксперименте *CREAM* [5, 6] в течение месяца (в период 12.2004 – 01.2005 гг., на 1.5 года раньше эксперимента *PAMELA*), к сожалению, не перекрываются со спектрами *PAMELA*, но хорошо ложатся на продолжение спектров *PAMELA* и *BESS-TeV*.

Для иллюстрации существования переменности в энергетическом диапазоне  $> 1$  ТэВ и указания на возможность значения степенного индекса фона  $\sim 2.75$  на рис.1 приведены также (в шкале  $Flux \cdot R^{2.75}$ ) данные баллонного эксперимента *RUNJOB* [7, 6] измеренные (в диапазоне 10  $\div$  1000 ТэВ) в течение 10 полетов в период 1995 – 1999 гг.

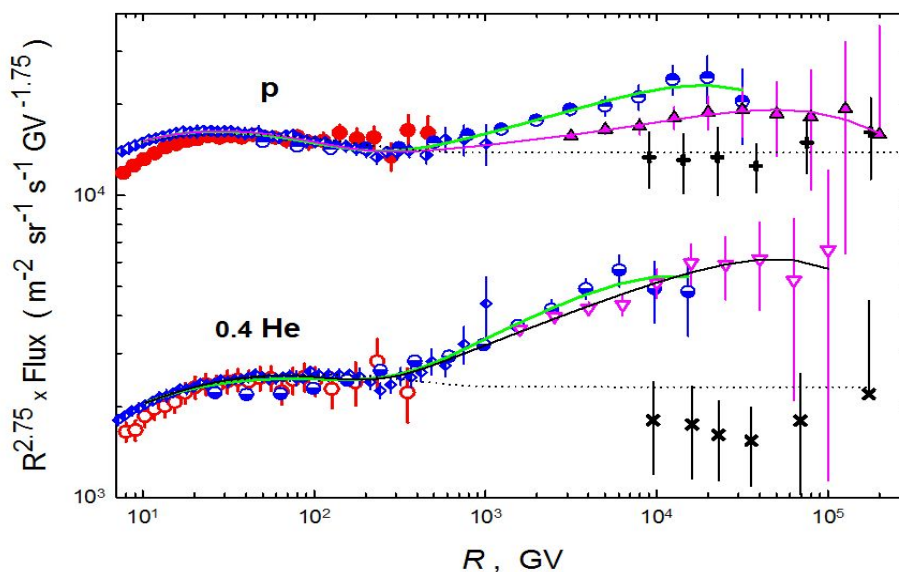


Рис. 1.

Спектры потоков КЛ ( $p$  и  $He$ ). По оси абсцисс – жесткость  $R$  в гигавольтах [ $R \equiv p \cdot c / Z = (T_{kin}/Z) \cdot (1 + 2 \cdot Mc^2 / T_{kin})^{1/2}$ ]; по оси ординат – спектр умноженный на жесткость в степени 2.75. Спектры  $He$  умножены на коэффициент 0.4.

*PAMELA*: ромбики, заполненные справа – ( $p$ ), слева – ( $He$ );

*BESS-TeV*: кружочки, заполненные – ( $p$ ), незаполненные – ( $He$ );

*ATIC-2*: кружочки, заполненные сверху – ( $p$ ), снизу – ( $He$ );

*CREAM*: треугольники, вершиной вверх – ( $p$ ), вниз – ( $He$ );

*RUNJOB*: плюсики – ( $p$ ), кресты – ( $He$ ).

### МОДЕЛЬ

Для описания наблюдаемых спектров КЛ  $p$  и  $He$  предлагается трехкомпонентная феноменологическая модель, в соответствии с которой поток КЛ для компоненты ( $j = p, He$ ) равен  $F_{(j)} = F_{B(j)} + F_{SH(j)} + F_{SG(j)}$ . Первая компонента  $F_{B(j)}$  соответствует постоянному степенному фону  $F_{B(j)} = B_{(j)} \cdot E^{-\beta_{(j)}}$  с величиной спектрального индекса  $\beta_{(j)}$ . Вторая компонента соответствует “мягкому” степенному источнику  $F_{SH(j)}$  на периферии гелиосферы  $F_{SH(j)} = S_{H(j)} \cdot E^{-\alpha_{H(j)}} \cdot \exp(-E/E_{CH(j)})$  с обрезанием на энергии  $E_{CH(j)} \sim 1$  ТэВ. Третья компонента соответствует “жесткому” близкому галактическому источнику  $F_{SG(j)} = S_{G(j)} \cdot E^{-\alpha_{G(j)}} \cdot \exp(-E/E_{CG(j)})$  с обрезанием на энергии  $E_{CG(j)} \sim 1000$  ТэВ, предположительно находящемуся вблизи границы местного межзвездного облака ММО (LIC).

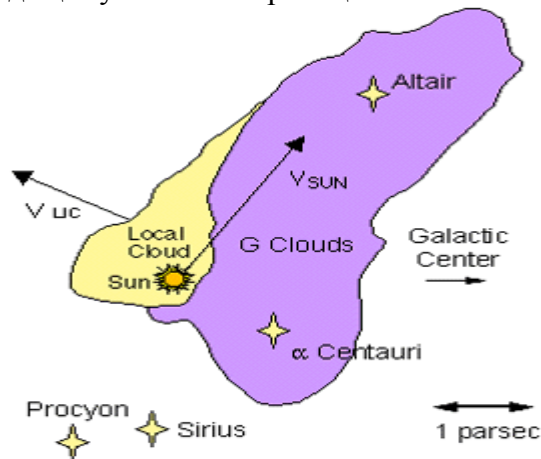


Рис. 2.

[http://en.wikipedia.org/wiki/File:The\\_Local\\_Interstellar\\_Cloud\\_and\\_neighboring\\_G-cloud\\_complex.gif](http://en.wikipedia.org/wiki/File:The_Local_Interstellar_Cloud_and_neighboring_G-cloud_complex.gif)

Карта, показывающая расположение Солнца вблизи края ММО.

### ОБСУЖДЕНИЕ

Предложена трехкомпонентная феноменологическая модель  $F_{(j)} = F_{B(j)} + F_{SH(j)} + F_{SG(j)}$ . Сумма постоянного фона  $F_{B(j)}$  и двух степенных кривых ( $F_{SH(j)} = S_{H(j)} \cdot E^{-\alpha_{H(j)}} \cdot \exp(-E/E_{CH(j)})$  и  $F_{SG(j)} = S_{G(j)} \cdot E^{-\alpha_{G(j)}} \cdot \exp(-E/E_{CG(j)})$ ) с разными высокоэнергичными обрезаниями ( $E_{CH(j)}$  и

$E_{CG(j)}$  с разными индексами наклона ( $\alpha_H(j)$  и  $\alpha_G(j)$ ) и с разными амплитудами ( $S_{H(j)}$  и  $S_{G(j)}$ ), соответственно, (для каждой компоненты ( $j = p, He$ ) КЛ) может описать и объяснить как возможность появления резкого излома в спектрах ( $p$  и  $He$ ), так и возможность появления плавного перегиба.

Величины параметров обрезания ( $E_{CH(j)}$  и  $E_{CG(j)}$ ) сильно различаются:  $E_{CH(j)} \approx 100$  ГВ, а  $E_{CG(j)} \approx 100$  ТВ. Это связано с разными размерами областей, в которых работают “серфотронные ускорители”, отвечающие за генерацию переменных компонент КЛ. Гелиосферный “серфотронный ускоритель”  $F_{SH(j)}$  находится в области между  $TS$  и  $HP$  с радиусом  $\sim 100-200 AU$ . Близкий галактический “серфотронный ускоритель”  $F_{SG(j)}$  с радиусом  $\sim 2 \cdot 10^4 AU$  ( $\sim 0.1$  пк), вблизи границы ММО, которая находится на расстоянии  $\sim 2 \cdot 10^3 AU$  ( $\sim 0.01$  пк) от Солнца.

Из экспериментальных данных следует, что характерное время переменности “мягкого” источника порядка нескольких месяцев, а “жесткого” источника, – порядка нескольких лет. Такие характерные времена вполне могут соответствовать “мягкому” гелиосферному источнику, который находится за ударной волной солнечного ветра ( $TS$ ), и “жесткому” близкому галактическому источнику, предположительно находящемуся вблизи границы ММО на расстоянии от Солнца  $\sim 0.01$  пк.

Мы даем только качественное объяснение различия в степенных индексах спектров  $p$  и  $He$  КЛ, а количественные оценки – предмет будущих статей. Причина более жесткой величины индекса для  $He$  в том, что одна и та же ЭДС (в системе отсчета волны) более эффективно ускоряет ядра  $He$ , электрический заряд которых в 2 раза больше заряда протона.

## Литература

- [1]. В.М. Лозников, Н.С. Ерохин, Н.Н. Зольникова, Л.А. Михайловская, *Физика Плазмы*, **2013**, 39, №10, 927.
- [2]. O. Adriani et al., *Science*, **2011**, 332, №6025, 69.
- [3]. A.D. Panov et al., *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.*, **2009**, 73, 564.
- [4]. S. Haino et al., *Physics Letters B*, **2004**, 594, 35.
- [5]. H.S. Ahn et al., *Astrophys. Journal Letters*, **2010**, 714, 89.
- [6]. Y.S. Yoon et al., *Astrophys. Journal*, **2011**, 728, 122.
- [7]. V.A. Derbina et al., *Astrophys. Journal Letters*, **2005**, 628, 41.

## ОБ ОПИСАНИИ МОЩНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ON THE DESCRIPTION OF INTENSE LASER RADIATION

В.П. Милантьев, Я.Н. Шаар  
V.P. Milant'ev and Ya.N. Shaar

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия  
Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

В квазиоптическом приближении непосредственно с помощью параболического уравнения получены выражения для векторов поля мощного лазерного импульса.

In the quasioptical approximation the expressions for the vectors of the field of intense laser pulse are obtained with the help of parabolic equation.

В исследованиях движения заряженных частиц в поле лазерного излучения важную роль играет адекватное задание векторов поля. Эта проблема рассматривалась, например, в работах [1, 2]. Поскольку мощное лазерное излучение является импульсным, то его описание должно определяться размером фокального пятна и длительностью импульса. Если размер фокального пятна  $a$ , называемый сужением лазерного пучка, намного превосходит длину волны  $\lambda$ , то лазерное излучение достаточно хорошо описывается в параксиальном квазиоптическом приближении. В этом случае характерный дифракционный угол  $\vartheta$  считается достаточно малым [3]:  $\vartheta = \lambda_0/\pi a = a/z_R \ll 1$ . Здесь  $z_R = k_0 a^2/2$  – рэлеевская длина, определяющая дифракционное расплывание волнового пучка,  $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega_0/c$  – волновое число. Таким образом, в параксиальном приближении существует малый параметр:

$$\mu = 2/k_0 a \ll 1, \quad (1)$$

при этом  $a/z_R = \mu$ . С использованием подобного параметра возможно описание фемтосекундных импульсов с интенсивностью около  $10^{18}$  Вт/см<sup>2</sup> [1].

В случае остро сфокусированного лазерного излучения с огромной интенсивностью порядка  $10^{22}$  Вт/см<sup>2</sup> и выше размер фокального пятна может быть меньше длины волны [2]. В этом случае параметр (1) не мал, так что параксиальное приближение неприменимо, и описание лазерного излучения требует особого подхода.

В данной работе рассматривается поле мощного лазерного излучения в рамках параксиального приближения. В отличие от [1] обсуждаются различные случаи малости длины волны по сравнению с длительностью импульса и рассматриваются гауссовы пучки произвольной моды круговой поляризации. Кроме того, векторы поля находятся непосредственно с помощью параболического уравнения в квазиоптическом приближении.

Будем описывать лазерное излучение в вакууме с помощью векторов напряженностей поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Электрическое поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет волновому уравнению:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$



при условии

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (2a)$$

Будем считать, что излучение распространяется в направлении оси  $z$ , и вектор напряженности электрического поля зависит от «быстрого» времени  $\tau = t - z/c$  и безразмерного параметра  $\sigma = (t - z/c)/\Delta t$ , определяющего импульсный характер излучения:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau, \sigma)$ . Здесь  $\Delta t$  — длительность импульса. Представим вектор  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau, \sigma)$  в виде разложения Фурье по «быстрому» времени:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau, \sigma) = (2\pi)^{-1} \int d\omega \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, \sigma) \exp(-i\omega\tau). \quad (3)$$

Подставляя (3) в волновое уравнение (2), получаем уравнение для Фурье-амплитуд

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, \sigma): \\ & \Delta_\perp \mathbf{E}_\omega + 2ik \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\omega}{\partial z^2} - \frac{2}{c\Delta t} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\omega}{\partial \sigma \partial z} = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta_\perp$  — оператор Лапласа по поперечным координатам  $(x, y)$ . Чтобы определить относительный порядок членов этого уравнения, введем безразмерные пространственные координаты  $(X, Y, Z) = (x/a, y/a, z/z_R)$ . Тогда уравнение для Фурье-амплитуд вектора напряженностей принимает вид:

$$\Delta_\perp \mathbf{E}_\omega + 4i \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial Z} + \mu^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\omega}{\partial Z^2} - \frac{2\lambda_0}{\pi c \Delta t} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\omega}{\partial \sigma \partial Z} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\omega_0$  — несущая частота лазерного импульса,  $\Delta_\perp$  — оператор Лапласа по поперечным координатам  $(X, Y)$ . Видно, что третий член в уравнении (4) является малым второго порядка и в нулевом приближении может быть опущен. Роль последнего члена существенно зависит от длительности рассматриваемого импульса. Обычно предполагается [1], что длина импульса превосходит длину волны  $\lambda_0/c\Delta t \ll 1$ , или, эквивалентно, что длительность импульса превышает период быстрых колебаний  $\Delta t \gg T$ . При этом порядок малости не конкретизируется. Если этот член порядка  $\mu^2$  или меньше, то это соответствует достаточно длинным импульсам с протяженностью  $c\Delta t \geq 2z_R$ . Например, при длине волны  $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$  и сужении  $a = 10 \mu\text{m}$  длительность импульса  $\Delta t \geq 2 \text{ps}$ . В этом случае последний член в уравнении (4) не влияет на эволюцию Фурье-амплитуд нулевого приближения. Тогда векторы поля можно найти в виде разложений по четным степеням параметра  $\mu$ :  $\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_\omega^0 + \mu^2 \mathbf{E}_\omega^2 + \dots$ .

Если последний член в уравнении (4) является малым порядка  $\mu$ , то в нулевом приближении он также может быть опущен. В этом случае импульсы могут быть более короткими:  $c\Delta t \approx 2a$ . Например, при  $a = 10 \mu\text{m}$  длительность импульса  $\Delta t \approx 60 \text{fs}$ . Импульсы такой длительности легко генерируются современными мощными лазерами. Тогда векторы поля представляются в виде последовательных разложений:  $\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_\omega^0 + \mu \mathbf{E}_\omega^1 + \mu^2 \mathbf{E}_\omega^2 + \dots$ .

В случае ультракоротких импульсов, когда их длина  $c\Delta t \approx 2\lambda_0/\pi$ , последний член в уравнении (4) становится сравнимым с основными членами и уравнение нулевого приближения существенно усложняется. Однако, в этом случае само параксиальное приближение становится неприменимым.

Таким образом, опуская в нулевом приближении последний член в уравнении (4), можно описывать мощное лазерное излучение в виде достаточно коротких импульсов.

В нулевом приближении поле лазерного излучения  $\mathbf{E}_\omega^0$  можно рассматривать в виде поперечных электромагнитных волн. Поэтому вектор  $\mathbf{E}_\omega^0$  имеет только поперечные

компоненты  $\mathbf{E}_{\omega}^0 \equiv \mathbf{E}_{\omega\perp}^0$ , а продольная составляющая в нулевом приближении отсутствует:  $E_{\omega z}^0 = 0$ . В общем, уравнение (4) описывает лишь поперечные составляющие вектора  $\mathbf{E}_{\omega}$  не только в нулевом, но и в последующих приближениях. Это связано с тем, что должно выполняться уравнение (2а). Из этого уравнения при заданных поперечных компонентах последовательными приближениями можно определить продольные компоненты вектора  $\mathbf{E}_{\omega}(r, \sigma)$ .

Таким образом, согласно (4) вектор  $\mathbf{E}_{\omega\perp}^0$  в нулевом приближении описывается параболическим уравнением:

$$\Delta_{\perp} \mathbf{E}_{\omega\perp}^0 + 4i \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\partial \mathbf{E}_{\omega\perp}^0}{\partial Z} = 0.$$

Отсюда видно, что координаты и импульсный параметр разделяются, так что вектор  $\mathbf{E}_{\omega\perp}^0(r, \sigma)$  можно представить в виде  $\mathbf{E}_{\omega\perp}^0(r, \sigma) = \mathbf{E}_{\omega}(r) f(\sigma)$ , где функция  $f(\sigma)$  определяет форму импульса [1, 2]. Функция  $f(\sigma)$  может задаваться по-разному. Например, в работе [1] принимается, что:  $f(\sigma) = \cos^2 \pi(t - z/c)/2\Delta t$ .

В аксиально-симметричном случае выписанное уравнение имеет решение в виде гауссова пучка  $m$ -ой моды [3]:

$$\mathbf{E}_{\omega\perp}^0 \rightarrow \mathbf{E}_{\omega\perp m}^0(r, z, \sigma) = \frac{E_{\omega m}^0(0) f(\sigma)}{(1 + iZ\omega_0/\omega)^{m+1}} L_m(\zeta) \exp(-\zeta).$$

Здесь  $E_{\omega m}^0(0)$  – амплитуда поля в фокусе на оси пучка (оси  $z$ ), параметр  $\zeta = \rho^2/(1 + iZ\omega_0/\omega)$ ,  $\rho \equiv r/a$ ,  $r$  – расстояние от оси пучка,  $L_m(\zeta)$  – полином Лагерра порядка  $m$ . Полиномы  $L_m(\zeta)$  образуют ортонормированную систему функций с весом  $\exp(-\zeta)$  [3].

Если частотный спектр импульса  $\Delta\omega$  является достаточно узким ( $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ ), то Фурье-амплитуды  $\mathbf{E}_{\omega\perp}^0$  имеют острый максимум вблизи несущей частоты  $\omega_0$ . Тогда поперечные компоненты поля излучения (3) можно представить в виде:

$$\mathbf{E}(r, \tau, \sigma) \rightarrow \mathbf{E}_{\omega_0\perp m}^0(r, z) f(\sigma) \exp(-i\omega_0\tau) + c. c.$$

Здесь  $c. c.$  обозначает комплексное сопряжение.

Запишем выражение для поперечных компонентов электрического поля излучения в эквивалентной форме (опуская все индексы):

$$\mathbf{E}(r, \tau, \sigma) = f(\sigma) \{ \mathbf{E}_m(r, z)/2 \} \exp(i\psi_m) + c. c. \quad (5)$$

где комплексная амплитуда  $m$ -ой моды

$$\mathbf{E}_m(r, z) = \frac{E_{\omega m}^0(0)}{(1 + Z^2)^{m+1/2}} L_m(\zeta) \exp\{-\rho^2/(1 + Z^2)\}, \quad (5a)$$

фаза

$$\psi_m = \theta + \rho^2 Z/(1 + Z^2) - (m + 1)\chi, \quad (5b)$$

$$\theta = \omega_0(z/c - t), \quad \chi = \arctg Z.$$

Полином Лагерра порядка  $m$ , в общем, определяется формулой [4]:

$$L_m(\zeta) = \sum_{s=0}^m \frac{(-1)^s \Gamma^2(m+1)}{\Gamma^2(s+1) \Gamma(m-s+1)} \zeta^s,$$

где  $\Gamma(m)$  – гамма-функция.

Поскольку аргумент  $\zeta = \frac{\rho^2}{(1+Z^2)^{3/2}} \exp(-i\chi)$  является комплексным, то в каждом члене полинома Лагерра содержится фазовый множитель. Поэтому формулу (5) необходимо уточнить:

$$E(r, z, \tau, \sigma) = f(\sigma) \sum_{s=0}^m \{E_{ms}(r, z)/2\} \exp(i\psi_{ms}) + c. c. \quad (6)$$

Здесь введены действительные амплитуды:

$$E_{ms}(r, z) = \frac{E_m(0)}{(1+Z^2)^{(m+1)/2}} \frac{(-1)^s \Gamma^2(m+1)}{\Gamma^2(s+1) \Gamma(m-s+1)} \frac{\rho^{2s}}{(1+Z^2)^{s/2}} \exp\{-\rho^2/(1+Z^2)\}, \quad (6a)$$

фазы:

$$\psi_{ms} = \psi_m - s\chi. \quad (6b)$$

Рассмотрим теперь уравнение (2a), предполагая, что продольная составляющая вектора напряженности поля имеет вид, аналогичный (6):

$$\nabla_{\perp} \cdot E_{\perp ms} + iE_{\perp ms} \cdot \nabla_{\perp} \psi_{ms} + \frac{\partial E_{zms}}{\partial z} + ik\{1 + o(\mu^2)\}E_{zms} = 0. \quad (7)$$

Отсюда следует, что продольная составляющая вектора является величиной первого порядка и представляется в виде:

$$E_{zm}^1(r, z, t) = \sum_{s=0}^m \{E_{ms}^z(r, z, \sigma)/2\} \exp(i\psi_{ms}) + c. c., \quad (8)$$

где комплексные амплитуды

$$E_{ms}^z = \frac{i}{k} \{\nabla_{\perp} \cdot E_{ms} + iE_{ms} \cdot \nabla_{\perp} \psi_m\}.$$

Будем далее рассматривать излучение круговой поляризации. В этом случае согласно (6) можно положить:

$$E_{mx}^0(r, z, t) = f(\sigma) \sum_{s=0}^m E_{ms}(r, z) \sin \psi_{ms},$$

$$E_{my}^0(r, z, t) = f(\sigma) \sum_{s=0}^m E_{ms}(r, z) \cos \psi_{ms}. \quad (9)$$

Действительные амплитуды  $E_{ms}(r, z)$  определяются формулой (6a).

Выражение для продольной составляющей вектора в первом приближении следует из (7) с учетом (8):

$$E_{zm}^1(r, z, t) = f(\sigma) \sum_{s=0}^m \{E_{1ms}^z(r, z) \cos \psi_{ms} + E_{2ms}^z(r, z) \sin \psi_{ms}\}, \quad (10)$$

где

$$E_{1ms}^z = \frac{1}{k} \left( \frac{\partial E_{ms}}{\partial x} + E_{ms} \frac{\partial \psi_m}{\partial y} \right), \quad E_{2ms}^z = -\frac{1}{k} \left( \frac{\partial E_{ms}}{\partial y} - E_{ms} \frac{\partial \psi_m}{\partial x} \right). \quad (10a)$$

В случае фемтосекундных импульсов из уравнения (4) следует, что в первом приближении возникают поправки также к поперечным компонентам вектора напряженности электрического поля. Эти поправки определяются уравнением:

$$\Delta_{\perp} E_{\omega}^1 + 4i \frac{\partial E_{\omega}^1}{\partial z} - \frac{2\lambda_0}{\pi c \Delta t} \frac{\partial \ln f(\sigma)}{\partial \sigma} \frac{\partial E_{\omega}^0}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

Если вектор  $E_{L\omega}^0$  описывает гауссов пучок основной моды, то отсюда можно найти:

$$E_{L\omega}^1(r, z, t) = -\frac{\lambda_0}{2\pi c \Delta t} Z \frac{E_{\omega}^0(0) f'(\sigma)}{(1+iZ)^2} (1-\zeta) \exp(-\zeta + i\theta).$$

В эквивалентной форме:

$$E_{L\omega}^1(r, z, t) = -\frac{\lambda_0}{2\pi c \Delta t} Z \frac{E_{\omega}^0(0) f'(\sigma)}{(1+Z^2)^{3/2}} \sqrt{(1-\rho^2)^2 + Z^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{1+Z^2}\right) \exp i\psi,$$

(12)

где фаза

$$\psi = \theta - 3\chi + \rho^2/(1 + Z^2) + \arctg Z/(1 - \rho^2) + \pi \eta (1 - \rho^2),$$

$\eta(x)$  – ступенчатая функция Хевисайда,  $f'(\sigma) = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$ , параметр  $\zeta = \rho^2/(1 + iZ)$ . В частном случае импульса, задаваемого в виде  $f(\sigma) = \cos^2[\pi(t - z/c)/2\Delta t]$ , формула (12) совпадает с результатом [1]. Если вектор  $\mathbf{E}_{1\omega}^0$  описывает гауссов пучок произвольной моды  $m$ , то поправка  $\mathbf{E}_{1\omega}^1$  несколько усложняется:

$$\mathbf{E}_{1\omega}^1(r, z, t) = -\frac{\lambda_0}{2\pi c \Delta t} Z \frac{E_m^0(\sigma) f'(\sigma)}{(1+iZ)^2} L_{m+1}(\zeta) \exp(-\zeta + i\theta). \quad (12a)$$

Здесь  $L_{m+1}(\zeta)$  – полином Лагерра порядка  $m + 1$ .

Компоненты вектора индукции магнитного поля  $\mathbf{B}(r, t)$  можно найти с помощью уравнения Максвелла:  $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ . Представляя вектор  $\mathbf{B}(r, t)$  в виде (3), легко показать, что в нулевом приближении:  $B_{mx}^0(r, z, t) = -E_{my}^0(r, z, t)$ ,  $B_{my}^0(r, z, t) = E_{mx}^0(r, z, t)$ . Такие же соотношения между поперечными составляющими векторов электрического и магнитного полей, характерные для поперечной волны, сохраняются и в следующем приближении. При этом продольная составляющая магнитного поля возникает лишь в первом приближении:  $B_{zm}^1 = -\frac{1}{ik} \left( \frac{\partial E_{my}^0}{\partial x} - \frac{\partial E_{mx}^0}{\partial y} \right)$ . Это, естественно, согласуется с уравнением  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ . В случае излучения круговой поляризации (9) продольная составляющая магнитного поля волны определяется формулой:

$$B_{zm}^1 = f(\sigma) \sum_{s=0}^m \{ B_{1ms}^z(r, z) \cos \psi_{ms} + B_{2ms}^z(r, z) \sin \psi_{ms} \}, \quad (13)$$

где

$$B_{1ms}^z = -\frac{1}{k} \left( \frac{\partial E_{ms}}{\partial x} + E_{ms} \frac{\partial \psi_m}{\partial y} \right), \quad B_{2ms}^z = -\frac{1}{k} \left( \frac{\partial E_{ms}}{\partial y} - E_{ms} \frac{\partial \psi_m}{\partial x} \right). \quad (13a)$$

Зная векторы поля излучения, можно далее исследовать особенности движения частицы в поле фемтосекундных лазерных импульсов.

### Литература

- [1]. Quesnel V., Mora P. // Phys. Rev. E. 1998. Vol.58 (3). P.3719-3732.
- [2]. Бочкарев С.Г., Быченков В.Ю. // Квантовая электроника. 2007. Т.37 (3). С.273-284.
- [3]. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука. 1990. 432 с.
- [4]. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высшая школа. 1965. С.239.

**ОПТИМАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ЗАХВАТА И СЕРФОТРОННОГО УСКОРЕНИЯ  
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ В  
КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ**

Ерохин А.Н.<sup>1)</sup>, Зольникова Н.Н.<sup>2)</sup>, Ерохин Н.С.<sup>1,2)</sup>

**OPTIMAL CONDITIONS OF THE RELATIVISTIC ELECTRONS CAPTURE AND  
SURFATRON ACCELERATION OF ELECTRONS BY ELECTROMAGNETIC WAVE  
IN SPACE PLASMA**

Erokhin A.N.<sup>1)</sup>, Zolnikova N.N.<sup>2)</sup>, Erokhin N.S.<sup>1,2)</sup>

<sup>1)</sup> *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

<sup>2)</sup> *Институт космических исследований РАН, Москва, Россия*

*e-mail: benkatz2x2@gmail.com*

**Abstract**

*It is considered the dynamics of relativistic electrons capture with following surfatron acceleration in space plasmas by electromagnetic wave. By usage of nonlinear, nonstationary equation for the wave phase at the electron path the numerical calculations have been performed under different values of wave phase at the particle trajectory ( $-\pi < \Psi(0) < \pi$ ). It has been shown that for the large initial electron energy ( $\gamma \sim 1000$ ) its interaction with wave results to the following. For the positive values of wave phase  $\Psi(0)$  the electron is trapped by wave immediately but for negative values of wave phase  $\Psi(0)$  the electron capture isn't observed for large enough times. The charge energy growth rate does not depend on wave electric field amplitude. The analytical approximation for charge energy dependence on time during particle acceleration is given.*

**Введение**

Исследование процессов генерации потоков релятивистских частиц относится к числу актуальных задач физики космической плазмы, например, оно представляет большой интерес для понимания наблюдаемых характеристик космических лучей в астрофизике. Ранее [1-7] рассматривался серфинг зарядов на электромагнитных волнах, который является одним из механизмов генерации потоков ультрарелятивистских частиц. При этом для корректных оценок количества и максимальной энергии ускоренных частиц, их энергетических спектров и т.д. требуется детальный анализ условий захвата заряженных частиц в

режим серфотронного ускорения, определение благоприятных для захвата заряженных частиц фаз волны и скоростей зарядов, эффективности ускорения частиц при взаимодействии зарядов с пространственно локализованными волновыми пакетами, возможности многократного ускорения зарядов с учетом циклотронного вращения частиц во внешнем магнитном поле. В целом для выявления закономерностей серфинга зарядов на электромагнитных волнах требуется большой объем расчетов.

В настоящей работе на основе численных расчетов рассмотрены захват электронов и их сильное серфотронное ускорение электромагнитной волной, распространяющейся в космической плазме поперек слабого внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ , для сильно релятивистских начальных энергий частицы.

Анализ показал, что для амплитуд волны выше порогового значения, при выполнении условия черенковского резонанса в диапазоне фаз волны на траектории электрона ( $-\pi < \Psi(0) < \pi$ ) благоприятными для захвата частицы волной в режим серфинга с последующим ультрарелятивистским ускорением являются фазы  $0 < \Psi(0) < \pi$ . Для начальных значений фазы  $-\pi < \Psi(0) \leq 0$  захвата электрона волной на доступных временах численного счета не наблюдался. Проведенные ранее расчеты при слабо и умеренно релятивистских начальных энергиях частиц дали другой результат: благоприятные для реализации серфинга начальные фазы представляют набор узких полос в интервале ( $-\pi < \Psi(0) < \pi$ ). Получены асимптотики компонент импульса, скорости и энергии ускоряемой частицы при большом (на три-четыре порядка) росте ее энергии. Темп ускорения частицы волной быстро выходит на практически постоянное значение, траектория электрона на плоскости, перпендикулярной внешнему магнитному полю весьма близка к прямой.

### Постановка задачи и результаты численных расчетов.

Рассмотрим ускорение электронов электромагнитной волной р-поляризации с частотой верхнего гибридного резонанса, распространяющейся в магнитоактивной плазме поперек внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ . Как показали расчеты, в данной задаче для поля волны с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  можно использовать электростатическое приближение. Соответственно, электрическое поле волны берем в виде  $E_x = E_0 \cos \Psi$ , где  $\Psi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ , а показатель преломления  $N = c k / \omega$  определяется компонентами тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы на частоте верхнего гибридного резонанса. Для сравнительно малых значений параметра  $u = \omega_{He} / \omega \leq 0.3$ , где  $\omega_{He}$  циклотронная частота нерелятивистских электронов плазмы, можно пренебречь нелинейностью взаимодействия волны с плазмой. Рассмотрим релятивистские уравнения движения для ускоряемого волной электрона  $\mathbf{p}$

$$dp_x / dt = -e E_x - e v_y H_0 / c, dp_z / dt = 0, p_z = \text{const}, dp_y / dt = e v_x H_0 / c. \quad (1)$$

Для анализа системы уравнений (1) удобно ввести безразмерные переменные  $\tau = \omega t$ ,  $\xi = k x$ , а также безразмерные скорость  $\beta = v / c$  и амплитуду волны  $\sigma = e E_0 / m c \omega$ . Отметим, что  $\beta_x = \beta_p [1 - (d\Psi / d\tau)]$ , а импульс электрона равен  $\mathbf{p} = m c \gamma \beta$ , где  $\gamma = 1 / (1 - \beta^2)^{1/2}$  - релятивистский фактор частицы. В итоге в безразмерных переменных уравнения движения электронов (1) принимают вид:

$$d(\gamma \beta_x) / d\tau = -\sigma \cos \Psi - u \beta_y, d(\gamma \beta_z) / d\tau = 0,$$

$$d(\gamma \beta_y) / d\tau = u \beta_x, d\gamma / d\tau = -\sigma \beta_x \cos \Psi. \quad (2)$$

Используя (2) находим интегралы движения для ускоряемого электрона

$$J = \gamma \beta_y + u \beta_p (\Psi - \tau) = \text{const}, h = \gamma \beta_z = \text{const}. \quad (3)$$

Величина  $J$  определяется значениями  $g = \gamma(0) \beta_y(0)$  и  $\Psi(0)$ . С учетом (3) получаем релятивистский фактор  $\gamma$  и компоненту скорости заряда вдоль волнового фронта  $\beta_y$

$$\gamma = \{ 1 + h^2 + [J + u \beta_p (\tau - \Psi)]^2 \}^{1/2} / (1 - \beta_x^2)^{1/2}, \quad (4)$$

$$\beta_y = [J + u \beta_p (\tau - \Psi)] / \gamma, \quad \beta_p = \omega / c k.$$

Анализ ускорения зарядов проводится на основе вытекающего из (2)-(4) нелинейного нестационарного уравнения для фазы волны на траектории электрона

$$d^2 \Psi / d\tau^2 - [\sigma (1 - \beta_x^2) / \gamma \beta_p] \cos \Psi - (u \beta_y / \gamma \beta_p) = 0. \quad (5)$$

Для решения уравнения (5) начальные данные берем в виде  $\Psi(0) = \Psi_0$ ,  $\Psi_\tau(0) = a$ . Соответственно имеем  $\beta_x(0) = \beta_p (1 - a)$ . Введем поперечные к магнитному полю компоненты безразмерного импульса частицы  $g_x = \gamma \beta_x$ ,  $g_y = \gamma \beta_y$ . Пороговое для возникновения серфотронного ускорения значение безразмерной амплитуды волны равно  $\sigma_c = u \gamma_p$ , где  $\gamma_p = 1 / (1 - \beta_p^2)^{1/2}$  релятивистский фактор ускоряющей волны. Захват заряженной частицы в режим ускорения происходит при амплитудах волны  $\sigma > \sigma_c$ . Нелинейное уравнение (5) решалось численно. Для достаточно больших времен ускорения электрона численное решение должно выходить на следующие асимптотики для компонент скорости и релятивистского фактора частицы  $\gamma(\tau) \approx u \beta_p \gamma_p \tau$ ,  $\beta_x \approx \beta_p$ ,  $\beta_y \approx 1 / \gamma_p$ . Таким образом темп ускорения постоянен и не зависит от амплитуды волны  $\sigma$ , определяющей асимптотику характеристики резонансного взаимодействия  $\sigma < \beta_x \cos \Psi >$  т.е. дно эффективной потенциальной ямы для захваченных частиц.

Для нахождения благоприятных начальных фаз из области  $|\Psi_0| < \pi$ , при которых происходит захват заряда в режим неограниченного ускорения волной, фиксировалась фазовая скорость волны  $\beta_p \approx \beta_p$ . Амплитуда волны  $\sigma$  выбиралась выше порогового

значения  $\sigma_c$  :  $\sigma = 1.6 \sigma_c$ . Затем численными расчетами на относительно малых временах  $\tau \leq \tau_m = 25000$  определялся диапазон начальных фаз, в котором имел место захват заряда в режим неограниченного ускорения волной. Приведем результаты расчетов для следующего варианта параметров задачи:  $h = 300$ ,  $g = 1$ ,  $\beta_p = 0.9$ ,  $u = 0.2$ ,  $\sigma = 1.6 \sigma_c$ ,  $\sigma_c = u \gamma_p$ ,  $a = 0$ , когда  $\gamma_0 = 688.255$ . Рассматривались значения начальной фазы с шагом  $\delta\Psi(0) = 0.2$  в интервале  $(-3 \div 3)$ . Расчеты показали, что для  $\Psi(0)$  в диапазоне  $(0.2 \div 3)$  частица захватывается волной в режим серфинга сразу, имеет место сильное ускорение, в частности, ее релятивистский фактор в момент времени  $\tau_m$  достигает величины  $\gamma(\tau_m) = 10410$  т.е. для электрона это соответствует энергии  $\approx 5.73$  ГэВ. График фазы волны на траектории частицы при серфинге представлен на рис.1.

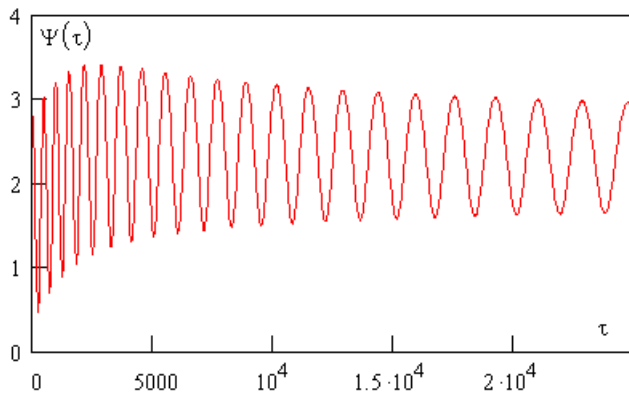


Рис.1. Динамика фазы волны на траектории захваченного электрона. Фаза медленно стремится к асимптотическому значению, период ее осцилляций постепенно возрастает.

Согласно расчетам смещение захваченного электрона вдоль направления распространения волны возрастает в среднем пропорционально времени  $\xi(\tau) \approx \beta_p \tau$ . Динамика релятивистского фактора заряда  $\gamma(\tau)$  и его аналитической аппроксимации  $M(\tau) = \gamma(0) + 0.413 \cdot \tau - 500$  для интервала времени  $\tau < 2.5 \cdot 10^4$  показана на рис.2. Как видим,  $\gamma(\tau)$  монотонно возрастает согласно асимптотике  $\gamma(\tau) \approx 0.413 \tau$ , а его вариации весьма малы. Поскольку продольный импульс электрона является интегралом движения по мере ускорения  $\beta_z \rightarrow 0$ . Рост поперечных компонент импульса электрона  $g_x = \gamma(\tau) \beta_x(\tau)$ ,  $g_y = \gamma(\tau) \beta_y(\tau)$  происходит практически с постоянным темпом.



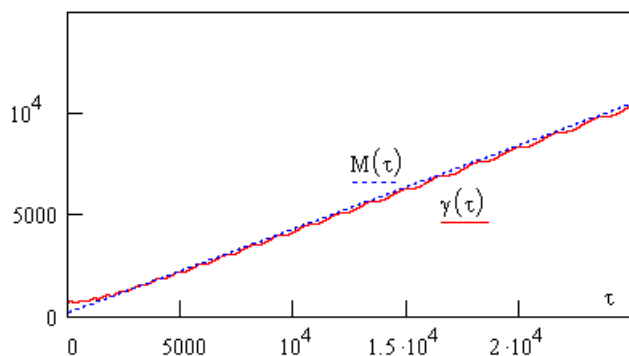


Рис.2. Графики релятивистского фактора захваченного электрона и его аналитической аппроксимации  $M(\tau)$ .

## Заключение

На основе численных расчетов нелинейного, нестационарного уравнения для фазы волны на траектории частицы изучена динамика ультрарелятивистского серфотронного ускорения электронов электромагнитной волной, распространяющейся в космической плазме поперек внешнего магнитного поля при больших  $\gamma_0 = 688.255$  начальных энергиях частицы.

Показано, что при выполнении условия черенковского резонанса захват частиц в режим серфинга происходит для диапазона положительных значений начальной фазы волны на траектории электронов  $\Psi(0)$ . В интервале начальных фаз  $-\pi < \Psi(0) \leq 0$  на доступных временах численного счета  $\tau < 10^6$  захват частиц волной не наблюдался. Следовательно, структура области начальных фаз, благоприятных для реализации серфинга, сильно упрощается.

## Литература

- [1]. N.S. Erokhin, N.N. Zolnikova, P.P. Grinevich, L.A. Mikhailovskaya. *Problems of Atomic Science and Technology, серия "Плазменная электроника"*, **2006**, No 5, 152.
- [2]. А.Н. Ерохин, Н.С. Ерохин, В.П. Милантьев. *Физика плазмы*, **2012**, 38, № 5, 435.
- [3]. N. Katsouleas, J. Dawson, *Physical Review Letters*, **1983**, 51, 392.
- [4]. Н.С. Ерохин, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев, *Письма в Астрономический журнал*, **1989**, 15, 3.
- [5]. Г.Н. Кичигин, *ЖЭТФ*, **2001**, 119, 1038.
- [8]. N.Erokhin, N.Zolnikova, R.Shkevov, L.A.Mikhailovskaya, P.Trenchev. *Доклады на Българската академия на науките*, **2007**, 60, 967.
- [6]. Н.С. Ерохин, Н.Н. Зольникова, Л.А. Михайловская, *Вопросы атомной науки и техники, сер.Плазменная электроника*, **2008**, 4, 114.
- [7]. В.М. Лозников, Н.С. Ерохин. *Вопросы атомной науки и техники, сер.Плазменная электроника*, **2010**, 4, 121.

## ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА СТРУКТУР В УРАВНЕНИИ БЮРГЕРСА

Суслов А.И.<sup>1)</sup>, Ерохин Н.С.<sup>1,2)</sup>

## SPATIO-TEMPORAL DYNAMICS OF STRUCTURES IN BURGERS EQUATION

Suslov A.I.<sup>1)</sup>, Erokhin N.S.<sup>1,2)</sup>

<sup>1)</sup> *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

<sup>2)</sup> *Институт космических исследований РАН, Москва, Россия*

*e-mail:* [chench0@yandex.ru](mailto:chench0@yandex.ru)

### Abstract

*It is considered the dynamics of spatial structures described by the one-dimensional Burgers equation. The structure parameters like the amplitude, width and velocities are different ones. So after some time of perturbations evolution it may transform into the saw-like form. The analysis performed is based on the exact solution of Burgers equation under usage of Cole-Hopf transformation which reduces nonlinear Burgers equation to the linear diffusion one. For large amplitudes of structures in the perturbation after some time the narrow jumps are appear in the perturbation spatial profile.*

### Введение

Волновые процессы являются эффективным средством передачи энергии и информации. Исследование распространения волн различной природы является важной и актуальной задачей. Ударные волны – это поверхности, которые движутся относительно газа; при их распространении плотность, давление скорость могут испытывать произвольный скачок. Уравнение Бюргерса используется при моделировании ударных волн, распространяющихся в сплошных средах. С помощью преобразования Коула-Хопфа одномерное нелинейное уравнение Бюргерса сводится к решению линейного уравнения диффузии, что значительно упрощает анализ динамики его решений [1-5]. Ранее было показано, что решение уравнения Бюргерса вида  $v(x, t) = f(x - ut)$  описывает эволюцию нелинейной волны, движущейся слева направо при  $u > 0$ . На переднем фронте волны имеется скачок скорости и других параметров газа или жидкости, причем для малой вязкости толщина скачка будет весьма малой. Вязкость не дает ударной волне

опрокинуться. В общем случае, когда начальный профиль нелинейной волны представляет набор пространственно локализованных структур, имеющих разные скорости и толщины, временная динамика такого возмущения может быть достаточно сложной. В частности, будет возникать ряд фронтов, причем при переходе через фронт ударной волны в направлении движения, плотность испытывает скачок. В работе на основе точного решения, записанного в интегральной форме, были рассмотрены модели, описывающие пространственный профиль решения уравнения Бюргерса для разных времен.

### Пространственно-временная нелинейная динамика структур

На основе численных расчетов рассмотрена эволюция пространственно-временного профиля возмущения в уравнении Бюргерса с начальным профилем вида набора разделенных структур достаточно большой амплитуды, когда быстро проявляется эффект укручения профилей на фронте каждой структуры. Проведенный анализ решения уравнения Бюргерса на основе точного решения, записанного в интегральной форме, показывает следующее.

При возрастании времени в системе происходит расширение профиля каждой структуры с формированием переднего фронта, а ее амплитуда уменьшается за счет расплывания. Кроме того энергия каждой структуры убывает более медленно за счет действия вязкости.

Причем при достаточном разделении структур в пространстве их эволюция на некотором интервале времени происходит независимо друг от друга, а профили каждой структуры близки к пилообразной форме.

Как показали численные расчеты, полуширина начального распределения скорости в каждой структуре существенно влияет на ее поведение. В свою очередь, максимальное значение скорости в начальный момент времени влияет только на амплитуду. Согласно проведенному анализу можно ожидать, что при более сложном начальном профиле с несколькими минимумами, а также и при различных направлениях скоростей в них, на достаточно больших временных интервалах в структурированном возмущении будет наблюдаться слияние горбов и возникновение единого размытого перехода (фронта волны) в пространственном профиле.

Таким образом в системе, описываемой нелинейным уравнением Бюргерса, может реализовываться слияние пространственно разделенных структур достаточных амплитуд с образованием в системе одного фронта пилообразной формы.

Данный анализ представляет интерес для корректной интерпретации данных экспериментальных измерений, касающихся нелинейной динамики возмущений в атмосфере и океане, в том числе турбулентности и квазипериодических сложных

сигналов, а также при исследовании ионосферно-атмосферных связей, при дистанционном зондировании сплошных сред и др.

### Литература

- [1]. J.D. Cole. *Quart. Appl. Math.*, 1951, v.9, 223.
- [2]. E. Hopf. *Comm. Pure Appl. Mech.*, 1950, v.3, 201.
- [3]. С.Н. Гурбатов, О.В. Руденко, А.И. Саичев. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии, М.: Физматлит, 2006, - 496 с.
- [4]. S. Kida. *J. Fluid Mechanics*, 1979, v.93, 337.
- [5]. A. Moullez, S.N. Gurbatov, E. Aurell, S.I. Simdyankin. *Phys. Rev. E*, 2005, v.71, 056305-1.

## УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЕ УСКОРЕНИЕ ПРОТОНОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

Ерохин Н.С.<sup>1,2)</sup>, Зольникова Н.Н.<sup>1)</sup>, Михайловская Л.А.<sup>1)</sup>, Лозников В.М.<sup>1)</sup>

## THE HIGHLY RELATIVISTIC ACCELERATION OF PROTONS BY ELECTROMAGNETIC WAVE IN SPACE PLASMA

Erokhin N.S.<sup>1,2)</sup>, Zolnikova N.N.<sup>1)</sup>, Mikhailovskaya L.A.<sup>1)</sup>, Loznikov V.M.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

<sup>2)</sup>Российский университет дружбы народов, Москва, Россия  
e-mail: nerokhin@iki.rssi.ru

### Abstract

*On the basis of numerical calculations it is considered ultrarelativistic proton acceleration in space plasma by the electromagnetic wave propagating across the external magnetic field. The conditions for proton capture by wave, the dynamics of velocity components and the particle momentum are considered in the dependence on problem incoming parameters. The structure of phase plane of the accelerated proton is considered also. The optimal conditions for the realization of ultra-relativistic p and He surfatron acceleration by wave are formulated. It is noted that for heavy charged particles at the initial stage for some initial values of the wave phase on the particle trajectory the charge may be trapped by wave but very soon particle may go out from the effective potential wall and its cyclotron rotation occurs. It is discussed the possibility of appearance of differences in the accelerated protons spectra from the standard power dependences.*

### Введение

Исследование процессов генерации потоков ультрарелятивистских частиц относится к числу актуальных задач физики космической плазмы и представляет большой интерес, в частности, для проблемы происхождения космических лучей, понимания механизмов формирования спектров КЛ, возникновения их изменчивости и зависимости от космической погоды. Серфинг зарядов на электромагнитных волнах рассматривался ранее, например, в работах [1-14] применительно к электронам. Это эффективный механизм генерации потоков ультрарелятивистских частиц в космической плазме. Его исследование необходимо, например, для оценки числа уско-ренных частиц, размеров областей ускорения, энергетических спектров, что требует детального анализа условий захвата заряженных частиц в режим серфотронного ускорения, выявления благоприятных для захвата заряженных частиц параметров, эффективности ускорения частиц при воздействии пространственно локализованных волновых пакетов и т.д. При поперечном распространении электромагнитной волны р-поляризации для квадрата показателя преломления плазмы  $N^2 = (c k / \omega)^2$  на частоте верхнего гибридного резонанса  $\omega$  имеем:  $N^2 = 1 - [v(1-v)] / (1 - u^2 - v)$ ,  $u = \omega_{He} / \omega$ ,  $v = (\omega_{pe} / \omega)^2$ , где  $\omega_{He} = eH_0 / m_e c$  - гирочастота нереляти-вистских электронов плазмы,  $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_0 / m_e)^{1/2}$  - электронная ленгмю-ровская частота,  $n_0$  плотность плазмы.

Ниже рассматривается случай  $u^2 \ll 1$ . Тогда фазовая скорость электромагнитной волны меньше скорости света в вакууме для следующей области параметра  $v$ :  $1 - u^2 < v < 1$ . Захват в режим серфинга происходит при поле волны выше критического значения т.е. для  $\sigma \equiv e E_0 / m_e c \omega > \sigma_c = u \gamma_p = u / (1 - \beta_p^2)^{1/2}$ ,  $\beta_p = \omega / c k$ . Ниже при численных расчетах серфинга протонов задачу упростим пренебрегая вихревыми компонентами волновых полей  $E_y$ ,  $H_z$ . Согласно расчетам их учет не существен. Нелинейные эффекты взаимодействия ускоряющей волны с плазмой малы, если амплитуда волны  $E_0$  существенно ниже характерного поля релятивистской нелинейности т.е. при выполнении условия  $\sigma^2 \ll 1$ .

### Основное уравнение и результаты численных расчетов

Рассмотрим релятивистские уравнения движения протона массы  $M$  в поле электромагнитной волны  $E_x = E_0 \cos \Psi$ ,  $\Psi = \omega t - kx$ . Пусть  $\beta = v/c$ ,  $\tau = \omega t$  безразмерное время,  $\xi = \omega x / c$ . Тогда имеем  $\beta = v/c$ ,  $\beta_x = \beta_p (1 - d\Psi / d\tau)$ ,  $\Psi = \tau - (\xi / \beta_p)$ . Удобно ввести малый параметр  $\varepsilon = (m_e / M)^{1/2}$  и нормированное безразмерное время  $s = \varepsilon \tau$ . Уравнения движения протона имеют интеграл  $J = \gamma \beta_y + u \varepsilon^{1/2} 2 \beta_p (\tau - \Psi) = \text{const}$  т.е.  $\gamma \beta_y = J + u \varepsilon^2 \beta_p (\Psi - \tau)$ . Введем обозначение  $G = 1 + h^2 + [J + u \varepsilon^2 \beta_p (\Psi - \tau)]^2$ , тогда  $\gamma^2 = G / (1 - \beta_x^2)$ ,  $\gamma$  - релятивистский фактор протона. Теперь получаем нелинейное, нестационарное уравнение для фазы волны на траектории протона

$$d^2\Psi/ds^2 + [\sigma(1 - \beta_x^2)^{3/2} / G^{1/2} \beta_p] \cos \Psi + (u/G \beta_p) \cdot (1 - \beta_p^2) \cdot [J + u\varepsilon\beta_p(\varepsilon\Psi - s)] = 0.$$

Данное нелинейное уравнение решается численно, начальные данные берем в виде  $\Psi(0) = \Psi_0$ ,  $\Psi_\tau(0) = a$ . При этом  $\beta_x(0) = \beta_p (1 - a)$ , где параметр  $a$  должен удовлетворять условию  $1 - (1 / \beta_p) < a < 1 + 1 / \beta_p$ . Захват протона в режим серфинга происходит при условии  $\sigma > \sigma_c$ ,  $\sigma_c = u \gamma_p$ , где  $\gamma_p$  релятивистский фактор ускоряющей волны. На достаточно больших временах ускорения численное решение должно выходить на асимптотики  $\beta_x \approx \beta_p$ ,  $\beta_y \approx 1 / \gamma_p$ . Важно отметить, что темп изменения энергии ускоряемого протона не зависит от амплитуды поля волны  $E_0$ , определяющей параметр среднего темпа ускорения  $\langle \cos \Psi(\tau) \rangle \approx \sigma_c / \sigma$  т.е. асимптотику положения дна эффективной потенциальной ямы, которое на фазовой плоскости является особой точкой типа устойчивый фокус.

Для нахождения диапазона начальных фаз  $\Psi(0)$ , при которых происходит захват протона в режим сильного ускорения волной, фиксировалась фазовая скорость волны  $\beta_p$ , полагалось  $|\Psi(0)| < \pi$ . Амплитуда волны  $\sigma$  выбиралась несколько выше порогового значения  $\sigma_c$ , а именно  $\sigma = 1.5 \sigma_c$ . Затем численными расчетами на сравнительно малых временах  $s \leq 7000$  определялся диапазон начальных фаз, в котором имел место захват протона в режим ультрарелятивистского ускорения волной. Если для некоторых фаз  $\Psi(0)$  захвата протона не было, счет выполнялся до  $s \leq 7 \times 10^4$ .

Приведем результаты расчетов для следующего варианта выбора параметров задачи  $h = 0.35$ ,  $\gamma(0)\beta_y(0) = -0.47$ ,  $\beta_p = 0.52$ ,  $u = 0.31$ ,  $a = 0$ , соответствующего слаборелятивистскому протону  $\gamma(0) \approx 1.357$  при  $s = 0$ . Начальная фаза  $\Psi(0)$  выбиралась в следующем интервале  $(-3.1, 3.1)$ . Результаты расчетов захвата протона волной в режим серфинга показали, что для начальных фаз из интервала  $(-2.6, 0.2)$  с шагом  $\delta\Psi(0) = 0.1$  захват частицы в эффективную потенциальную яму с последующим ультрарелятивистским ускорением

происходит сразу т.е. время захвата  $s_{\Gamma} = 0$ . Однако для диапазонов  $\Psi(0)$ :  $(-3, -2.7)$ ,  $(0.3, 3)$  в расчетах с шагом  $\delta\Psi(0) = 0.1$  на интервале времени  $s < 10^4$  захват протона волной в режим серфотронного ускорения отсутствует. Таким образом для протонов ситуация совершенно иная по сравнению с электронами или позитронами, где диапазон начальных фаз  $\Psi(0) \in \pi$  делится на целый ряд узких подинтервалов с захватом заряда волной и его отсутствием !! Следовательно, для протонов реализуется гораздо более простая структура эффективной потенциальной ямы. Видимо, этот эффект обусловлен существенно большей массой протона в сравнении с электроном. Согласно расчетам для захваченного протона амплитуда осцилляций фазы волны на траектории частицы весьма медленно уменьшается с ростом времени, а период осцилляций медленно возрастает. На фазовой плоскости  $(d\Psi/ds, \Psi)$  траектория частицы имеет особую точку типа устойчивый фокус, что вполне аналогично ранее рассмотренному ускорению электронов. График релятивистского фактора протона  $\gamma(s)$  хорошо согласуется с линейной аппроксимацией т.е. темп ускорения протона практически постоянен в соответствии с асимптотиками при сильном ускорении частицы. Для поперечных к внешнему магнитному полю компонент импульса протона темпы роста величины тоже практически постоянны и соответствуют асимптотикам  $\gamma\beta_x \approx \gamma\beta_p$ ,  $\gamma\beta_y \approx -\gamma / \gamma_p$ . Поперечные компоненты скорости ускоряемого протона довольно быстро выходят на указанные выше асимптотические значения. Компонента скорости протона вдоль внешнего магнитного поля по мере ускорения частицы убывает обратно пропорционально релятивистскому фактору  $\gamma$ . В отличие от электронов при серфотронном ускорении протонов для некоторых значений начальной фазы обнаружена возможность захвата и ускорения частицы на сравнительно малом начальном интервале времени  $s$  порядка десятков-сотен, но потом протон вылетает из эффективной потенциальной ямы. После вылета частицы из ямы происходит ее циклотронное вращение.

Приведем скейлинг для релятивистского фактора ускоряемого протона  $\gamma$  применительно к гелиосфере  $\gamma = 621 \gamma_p \cdot (\beta_p / 0.9) \cdot (u / 0.3) \cdot (s / 10^5)$ , где  $f$  – частота ускоряющей волны в Гц, а также для смещения частицы в направлении распространения волны  $\delta x = (\beta_p / 0.9) \cdot (10^2 \text{ Гц} / f) \cdot (s / 10^5) \cdot 12.46 \cdot \text{AU}$ . Напомним, что одна астрономическая единица составляет  $\text{AU} = 1.5 \cdot 10^8$  км, радиус солнечной гелиосферы порядка 200 AU. Таким образом захваченные электромагнитной волной протоны будут доускоряться в гелиосфере (в зависимости места захвата и от величины фазовой скорости волны  $\beta_p$ ) до энергий порядка десятков-сотен ГэВ на расстояниях  $(10 \div 100)$  AU.

Следовательно, серфотронный механизм ускорения является локальным источником дополнительной генерации космических лучей в указанном выше интервале энергий. Вполне очевидно, что эффективность этого источника будет зависеть от гелиосферной погоды, что означает переменность спектра КЛ, которая наблюдалась экспериментально. Расчеты для других значений исходных параметров задачи приводят к аналогичным результатам. Из проведенного анализа следует, что аналогичный характер динамики взаимодействия волна-частица будет реализовываться и для ядер гелия.

## Литература

- [1]. N. Katsouleas, J.M. Dawson. *Physical Review Letters*. 1983, 51, 392.
- [2]. C. Joshi. *Radiation in plasmas*. 1984, 1, Issue 4, 514.
- [3]. Б.Э. Грибов, Р.З. Сагдеев, В.Д. Шапиро, В.И. Шевченко. *Письма в ЖЭТФ*. 1985, 42, № 2, 54.
- [4]. С.В. Буланов, А.С. Сахаров. *Письма в ЖЭТФ*. 1986, 44, Вып. 9, 421.

- [5]. Н.С. Ерохин, А.А. Лазарев, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев Р.З. *Доклады Академии наук*. 1987, 295, № 4, 849.
- [6]. М.И. Ситнов. *Письма в ЖТФ*. 1988, 14, Вып. 1, 89.
- [7]. Н.С. Ерохин, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев. *Письма в Астрономический журнал*. 1989, 15, № 1, 3.
- [8]. Г.Н. Кичигин. *ЖЭТФ*. 2001, 119, Вып. 6, 1038.
- [9]. М.Е. Dieckmann and P.K. Shukla. *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2006, 48, Issue 10, 1515.
- [10]. De-Yu Wang, Lu Quan-Ming. *Advances in Space Research*. 2007, 39, Issue 9, 1471.
- [11]. А.И. Нейштадт, А.В. Артемьев, Л.М. Зеленый, Д.Л. Вайнштейн. *Письма в ЖЭТФ*. 2009, 89, Вып. 9, 528.
- [12]. В.М. Лозников, Н.С. Ерохин. *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Плазменная электроника*. 2010. № 4 (68), с.121.
- [13]. Н.С. Ерохин, Н.Н. Зольникова, Е.А. Кузнецов, Л.А. Михайловская. *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Плазменная электроника*. 2010, № 4 (68), 116.
- [14]. А.Н. Ерохин, Н.С. Ерохин, В.П. Милантьев. *Физика плазмы*. 2012, 38, № 5, 435.



## МАГНИТНАЯ КОНФИГУРАЦИЯ ТОКАМАКА С ЭРГОДИЗИРОВАННЫМ ЦЕНТРОМ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА

О.И. Подтурова<sup>1,2</sup>, Е.А. Сорокина<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

<sup>2</sup>НИЦ «Курчатовский институт», Москва, Россия

### Аннотация

В терминах функции Гамильтона построена тороидальная магнитная конфигурация токамака с областью стохастичности магнитных силовых линий в центре и вложенными магнитными поверхностями на периферии плазменного шнура. Топология магнитных силовых линий задана с использованием универсального подхода в терминах функции Гамильтона, обобщающего традиционное потоковое представление. Такой подход применим для единообразного описания, как вложенных магнитных поверхностей, так и стохастического магнитного поля.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Очень важную роль в удержании плазмы магнитными полями играет их конфигурация. Традиционно в установках магнитного термоядерного синтеза используются тороидальные конфигурации, магнитные силовые линии которых образуют систему вложенных друг в друга торов – магнитных поверхностей. Такая структура магнитного поля обеспечивает уменьшение до нуля равновесного давления плазмы к границе плазмы, поскольку в равновесии давление  $p$  постоянно вдоль силовой линии магнитного поля  $\mathbf{B}$  и, следовательно, на каждой магнитной поверхности ( $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$ ).

Однако наиболее общей топологией магнитного поля обладает конфигурация, в которой силовые линии магнитного поля эргодически, т.е. всюду плотно, заполняют некоторый объём во внутренней области удерживаемой плазмы. Поскольку силовая линия заполняет всю ограниченную область, то из того же условия  $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$ , следует, что давление постоянно во всём объёме эргодической области. Чтобы обеспечить  $p = 0$  на границе плазмы, используется слой вложенных магнитных поверхностей. Целью настоящей работы является исследование возможности эргодизации магнитных силовых линий в тороидальном объёме, ограниченном замкнутыми магнитными поверхностями.

## 2. ОБЩЕЕ И ГАМИЛЬТОНОВО ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Введем криволинейную систему координат  $\{\alpha^i(\mathbf{r})\}, i=1,2,3$  с базисом  $\mathbf{e}_1 = \frac{[\nabla\alpha^2 \times \nabla\alpha^3]}{J}, \mathbf{e}_2 = \frac{[\nabla\alpha^3 \times \nabla\alpha^1]}{J}, \mathbf{e}_3 = \frac{[\nabla\alpha^1 \times \nabla\alpha^2]}{J}$ , где  $J = [\nabla\alpha^1 \times \nabla\alpha^2] \cdot \nabla\alpha^3$  – якобиан. Как всякий вектор, магнитное поле можно представить в ковариантном базисе:

$$B = \sum_{i=1}^3 A^i J e_i = A^1 [\nabla\alpha^2 \times \nabla\alpha^3] + A^2 [\nabla\alpha^3 \times \nabla\alpha^1] + A^3 [\nabla\alpha^1 \times \nabla\alpha^2]. \quad (1)$$

Тогда компоненты удовлетворяют условию соленоидальности  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , когда

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A^i}{\partial \alpha^i} = \frac{\partial A^1}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial A^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial A^3}{\partial \alpha^3} = 0.$$

Для токамака с вложенными магнитными поверхностями индукция магнитного поля представляется в виде

$$2\pi\mathbf{B} = [\nabla\theta \times \nabla\Phi] + [\nabla\varphi \times \nabla\Psi], \quad (2)$$

где  $\theta$  – полоидальный угол,  $\varphi$  – тороидальный угол,  $\Phi$  – функция тороидального магнитного потока,  $\Psi$  – функция полоидального магнитного потока [1]. Здесь тороидальный поток является функцией полоидального, т.е.  $\Phi = \Phi(\Psi)$ , и  $\frac{d\Phi}{d\Psi} = q(\Psi)$ .

Тогда магнитная поверхность задается следующим образом:  $\mathbf{B} \cdot \nabla f(\Psi) = 0$ . Уравнения магнитных силовых линий в гамильтоновой форме имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{1}{q} = - \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\Phi} \right)_{\theta=const} \\ \frac{d\Phi}{d\varphi} &= \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \right)_{\Phi=const} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для любой другой топологии магнитного поля индукция магнитного поля также может быть представлена в виде (1), с той разницей, что  $\Phi \neq \Phi(\Psi)$  и может зависеть угловых переменных  $\theta$  и  $\varphi$ . Тем не менее, уравнения силовых линий выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla\theta}{\mathbf{B} \cdot \nabla\varphi} = - \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\Phi} \right)_{\theta,\varphi=const} \\ \frac{d\Phi}{d\varphi} &= \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla\Phi}{\mathbf{B} \cdot \nabla\varphi} = \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \right)_{\Phi,\varphi=const}. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, гамильтоново представление описывает поле любой топологии. При переходе от общего представления (1) к гамильтонову представлению (2) никаких приближений не сделано. То есть любую конфигурацию, которую можно разложить по ковариантному базису, можно свести к представлению (2) [1].

### 3. ПРИМЕР ТОРОИДАЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ КОНФИГУРАЦИИ С ЭРГОДИЧЕСКОЙ ОБЛАСТЬЮ

Гамильтоново описание позволяет перенести на магнитную конфигурацию все результаты теории динамических систем. Приведем пример, моделирующий магнитную конфигурацию токамака с запасом устойчивости  $q = (1 + s\Phi)^2$ , где  $s$  – варьируемый коэффициент, определяющий профиль коэффициента запаса устойчивости в невозмущенной магнитной конфигурации, и с резонансными винтовыми возмущениями с  $m/n = 1/1$  с амплитудой  $A_{1/1}$ ,  $m/n = 3/2$  с амплитудой  $A_{3/2}$  и с  $m/n = 5/3$  с амплитудой  $A_{5/3}$ :

$$\Psi = -\frac{\Phi}{1 + s\Phi} + (1 - 2\Phi)(A_{1/1} \cos(\varphi - \theta) + A_{3/2} \cos(2\varphi - 3\theta) + A_{5/3} \cos(3\varphi - 5\theta)). \quad (5)$$

Здесь  $m$  и  $n$  – номера полоидальной и тороидальной гармоник винтовых возмущений соответственно, измеряемых вдоль полоидального и тороидального направлений, характеризуемых углами  $\square$  и  $\varphi$ . Множитель перед скобкой в (5) обеспечивает зануление возмущения на половине магнитного потока плазменного шнура (в (5) все величины заданы в безразмерной форме).

Впервые пример подобной конфигурации был представлен в докладе [2]. Особенность настоящей работы, помимо всего прочего, заключается в осознании важности высокопрецизионных вычислений при выполнении расчётов блуждания силовой линии в эргодической области. В частности, в написанном на языке FORTRAN численном коде необходимо не просто использовать двойную точность в значениях переменных, определяющих положение точек силовой линии в пространстве, но и применять процедуры `double precision function` в определениях подпрограмм-функций, используемых в промежуточных вычислениях – обстоятельство совершенно излишнее при расчётах конфигурации с вложенными магнитными поверхностями, обладающими интегралом в смысле уравнений (3).

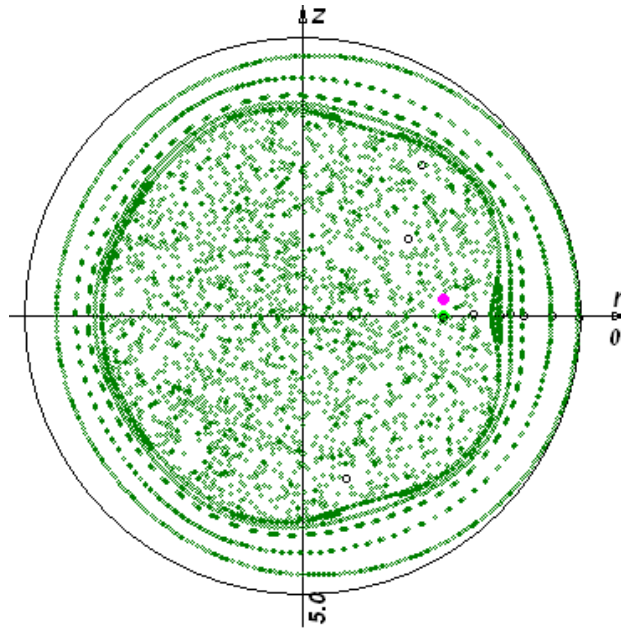


Рис. 1. Сечение Пуанкаре исследуемой магнитной конфигурации.

В компьютерном коде, рассчитывающем и визуализирующем сечение Пуанкаре силовых линий магнитного поля, используется цилиндрическая система координат. Тогда компоненты поля имеют следующий вид:

$$B_r = -\frac{(r-R)}{r\rho^2} \frac{d\Psi}{d\theta} - \frac{z}{r\rho} \frac{d\Psi}{d\rho}$$

$$B_z = -\frac{z}{r\rho^2} \frac{d\Psi}{d\theta} + \frac{(r-R)}{r\rho} \frac{d\Psi}{d\rho}$$

$$B_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{d\Phi}{d\rho},$$

где  $r = R + \rho \cos\theta$ ,  $z = \rho \sin\theta$ .

Сечение Пуанкаре исследуемой магнитной конфигурации представлено на рисунке 1. Фактически, на данном рисунке представлены следы точек, образующихся от пересечения силовых линий магнитного поля рассматриваемой конфигурации некоторой плоскости, секущей наш токамак в полоидальном направлении. В центральной области указаны следы лишь одной силовой линии, выпущенной из некоторой точки в указанной области.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе продемонстрированы возможность и преимущества использования потокового представления для единообразного задания магнитного поля наиболее общей конфигурации, включающей магнитные острова и силовые линии, эргодически заполняющие объем. Показано, что эргодическая область разрушенных магнитных поверхностей может существовать внутри замкнутого тороидального объема, ограниченного вложенными магнитными поверхностями; данное утверждение подкреплено результатами прямого численного моделирования.

Данная работа частично поддержана грантом РФФИ №13-02-00645 и грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ России НШ- 3328-2014-2.

## Литература

- [1] V.I. Ilgisonis, A.A. Skovoroda, JETP 110, 890 (2010)  
[2] V.I. Ilgisonis, A.A. Skovoroda, E.A. Sorokina, 25th IAEA Fusion Energy Conference 2014

## MAGNETIC CONFIGURATION OF A TOKAMAK WITH ERGODIC CENTER OF PLASMA COLUMN

O.I. Podturova<sup>1,2</sup>, E.A. Sorokina<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

<sup>2</sup>National Research Centre "Kurchatov Institute", Moscow, Russia

## Abstract

In terms of the Hamiltonian function, toroidal magnetic configuration of a tokamak with an area of stochastic magnetic field lines in the center and with nested magnetic surfaces on the periphery of the plasma column is designed. The topology of magnetic field lines is given by using a universal Hamiltonian approach generalizing the traditional flux representation. This approach is applicable for both nested magnetic surface configuration and stochastic field as well.

## Literature

- [1] V.I. Ilgisonis, A.A. Skovoroda, JETP 110, 890 (2010)  
[2] V.I. Ilgisonis, A.A. Skovoroda, E.A. Sorokina, 25th IAEA Fusion Energy Conference 2014

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЛАЗМЫ МИКРОВОЛНОВОГО ЭЦР РАЗРЯДА МЕТОДАМИ ОЭС

*Российский университет дружбы народов, г. Москва, РФ*

И. Василеска, М.А. Корнеева

## OES-INVESTIGATION OF PLASMA PARAMETERS IN MICROWAVE ECR DISCHARGE

### Introduction

Plasma, created in a condition of microwave electron cyclotron resonance (ECR), is a typical example of microwave plasma in a magnetic field with a wide range of practical use. [1] Heating of the discharge plasma by ECR was extensively studied in a connection with the problems of fusion, physics of ion sources, and plasma technologies [1, 2]. The technological benefits of that kind of plasma are: high purity vacuum processes, high degree of ionization, easy handling plasma parameters. The main task in this work is carrying out absolute measurements of the radiation characteristics in the visible region of the spectrum by emission optical spectrometry (EOS).

### Введение

Плазма, создаваемая в условиях микроволнового электронного циклотронного резонанса (ЭЦР), является типичным примером микроволновой плазмы в магнитном поле с широким спектром практического применения в плазменных технологиях и термоядерных исследованиях [1, 2]. К преимуществам ее широкого технологического применения относятся: высокая вакуумная чистота процессов, высокая степень ионизации, легкая управляемость плазменными параметрами. В данной работе поставлена задача проведение абсолютных измерений температуры ( $T_e$ ) и концентрации электронов ( $n_e$ ) плазмы ЭЦР-разряда в области умеренных давлений методами эмиссионной оптической спектроскопии (ЭОС).

### Экспериментальная установка и средства диагностики

Генерация плазмы микроволнового ЭЦР-разряда осуществляется на экспериментальном стенде, состоящем из микроволнового цилиндрического резонатора (Рис. 1, а) с газоразрядной камерой внутри него (кварцевое стекло – КУ), помещенного в аксиально-симметричную магнитную ловушку пробочного типа, создаваемую постоянными магнитами с системой магнитного замыкания (Рис. 1, б).

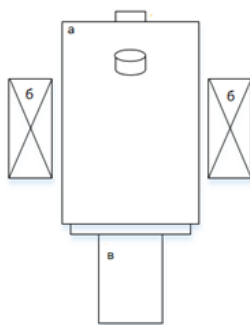


Рис. 1 Схема установки

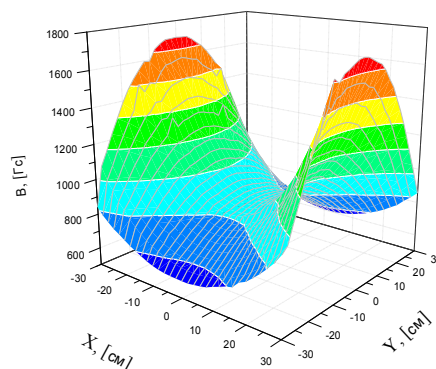


Рис. 2 Магнитное поле

Рабочая частота резонатора 2,44 ГГц, мода колебаний  $TE_{111}$ , измеренная добротность  $Q = 700$ . Для генерации и нагрева плазмы используется магнетронный СВЧ-генератор (СМВ-150-1) с техническими характеристиками: рабочая частота – 2,44 ГГц, максимальная выходная мощность до 170 Вт. СВЧ генератор подключен коаксиальным кабелем к коаксиально-волноводному переходу, запитывающему настраиваемый волноводный тракт, соединенный с резонаторным блоком посредством дроссельного волноводного фланца (Рис. 1, в). Весь СВЧ тракт с четвертьволновым поршнем и резонатором был согласован и настроен на резонансную частоту магнетронного генератора. Измеренный коэффициент стоячей волны (КСВ) СВЧ тракта (генератор – волновод- резонатор) составлял не более 2,3.

Магнитное поле установки имеет пробочную конфигурацию (Рис. 2), создаваемую с помощью дисковых постоянных магнитов  $SmCo_5$  и магнитного замыкания, изготовленного из магнитомягкого материала. Микрометрическая подача постоянных магнитов позволила изменять величину и профиль напряженности магнитного поля (Рис. 2) в ловушке. Вакуумная система установки обеспечивала фоновое давление не меньше  $1 \cdot 10^{-5}$  Торр. В качестве плазмообразующего газа использовался аргон. Диапазон рабочих давлений составлял  $1 \cdot 10^{-2} - 1 \cdot 10^{-4}$  Торр.

Оптическая диагностика плазмы производилась при помощи монохроматора-спектрографа MS3540I с решеткой 1200 штр/мм и шириной щели 30 мкм.

Для измерений абсолютных значений интенсивности регистрируемых спектральных линий излучения была проведена калибровка всего спектрометрического тракта в диапазоне 300-800 нм при рабочих параметрах спектрометра. В качестве эталонных источников использовали вольфрамовые лампы СИРШ 252 (6.5 В, 6 А) и СИРШ 6-100 (6.5 В, 15А), имеющие при указанных параметрах цветовую температуру 2840 К. Калибровочные лампы запитывались от высоко стабилизированного источника питания (точность установки тока  $\pm 10$  мА, дрейф  $\pm 0,1$  мА/мин). Спектр регистрировался с помощью ФЭУ, при напряжении 1200 В и времени накопления 50 мс, в рабочую апертуру световода ( $22^\circ$ ) на расстояние 50 см.

Для того, чтобы привести измеряемые величины к абсолютным значениям необходимо перейти от плотности излучения абсолютно черного тела к плотности излучения калибровочной лампы [3]:

$$W_{\text{свр.}} = W_{\text{ч.}} \cdot \varepsilon_{\lambda,T} \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{\lambda,T}$  - коэффициент серости,  $W_{\text{ч.}}$  - плотность интенсивность излучения черного тела. Ее величина может быть определена из формулы Планка для каждого значения длины волны и температуры:

$$W_{\text{ч.}}(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \exp^{-1} \left( \frac{hc}{\lambda kT} - 1 \right) \quad (1)$$

где  $h$  – постоянная Планка;  $c$  – скорость света в вакууме;  $\lambda$  – длина волны излучения;  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  - заданная спектральная температура излучения. Плотность яркости самого тела вычисляется с учетом телесного угла из плотности интенсивности излучения. Сравнение калибровочных кривых лампы (ВНИИОФИ) и полученных экспериментальных зависимостей свидетельствует, что ошибка измерений не превышает 3 % (Рис. 3) в указанном спектральном диапазоне.

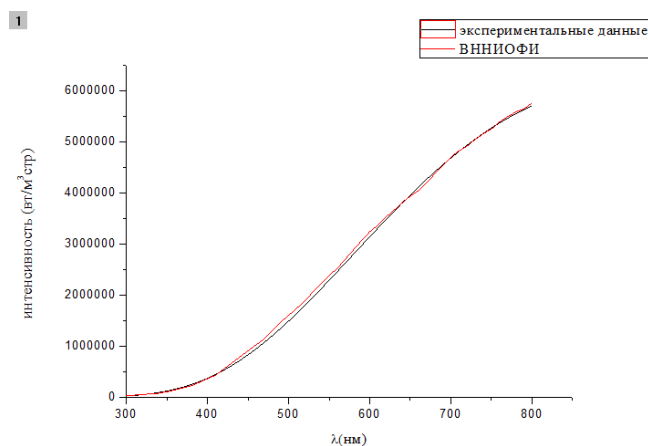


Рис. 3 Экспериментальные результаты и калибровка ВНИИОФИ

Полученные калибровочные коэффициенты используются для определения абсолютных значений интенсивности линий аргона

### Методика определения температуры и концентрации электронов

Как показано в [4], исследуемая плазма является неравновесной и не описывается такими хорошо изученными моделями как модель термодинамического равновесия или локального термодинамического равновесия. Для определения  $n_e$  и  $T_e$  воспользуемся приближением столкновительно-радиационной модели. В данном случае функция распределения атомных состояний будет иметь вид [5]:



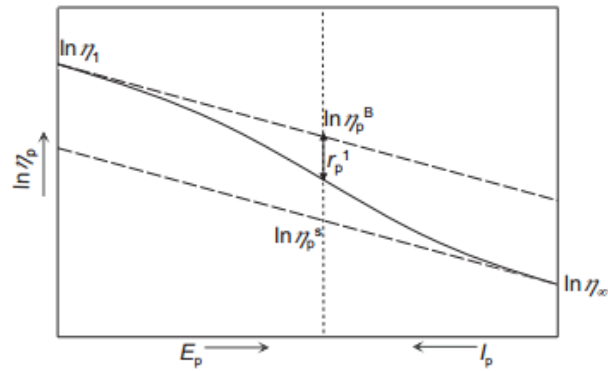


Рис. 4

Здесь  $\eta_p^B$  и  $\eta_p^S$  плотность заселенности уровня по Больцману и Саха соответственно, а  $r_p^1$  фактор относительной заселенности.

$\eta_1$ ,  $\eta_\infty$  и  $r_p^1$  определяются экспериментально, путем расчета  $\eta_p$  для различных уровней по формуле:

$$\eta_p = j_{pq} \frac{4\pi}{A_{pq} E_{pq}} g_p \quad (3)$$

где  $j_{pq}$  – абсолютная интенсивность линии,  $A_{pq}$  – коэффициенты Эйнштейна,  $E_{pq}$  – энергия перехода,  $g_p$  – статистический вес.

По полученным значениям строится график (Рис. 4), при этом для определения  $\eta_1$  используются линии группы  $4p$  с энергией менее 15.1 эВ, а для определения  $\eta_\infty$  – линии с энергией  $>15.1$  эВ. Полученные значения позволяют определить  $n_e$  и  $T_e$  [5].

Все линии, необходимые для применения данного метода хорошо регистрируются в спектре (Рис. 5). Экспериментально установлено, что интенсивность регистрируемых линий коррелирует с изменением параметров разряда: изменение мощности волны-накачки, давления плазмообразующего газа, напряженности магнитного поля и пробочного отношения.

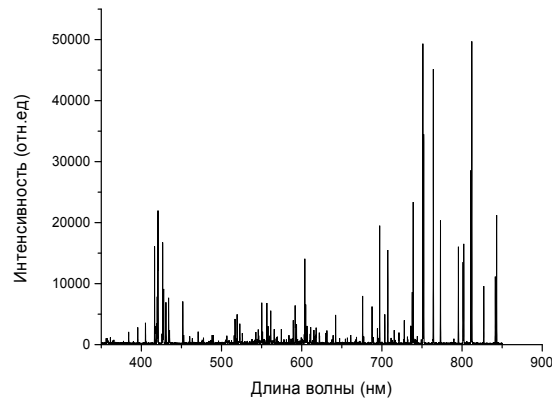


Рис. 5 Обзорный спектр

### Заключение

Проведенные исследования свидетельствуют, что в представленной экспериментальной конфигурации ЭЦР разряд отличается возможностью достаточно легкого зажигания в условиях предельных давлений с низким уровнем СВЧ мощности. Результаты калибровки свидетельствуют о применимости метода измерения абсолютных интенсивностей в рамках СР модели плазмы [5] для определения ее параметров. Полученные первичные обзорные измерения спектров в указанном диапазоне и измеряемая интенсивность характерных линий позволили определить состав спектральных линий, которые могут быть использованы для абсолютных измерений.

### Список литературы

- [1] I. P. Vinogradov, «Development and application of spectroscopic determinations of the electron distribution function in discharges,» *Plasma Sources Sci. Technol.*, т. 8, pp. 299-312, 1999.
- [2] V. V. Andreev и A. M. Umnov, «Relativistic plasma and electron bunches in plasma synchrotrons of GYRAC,» *Plasma Sources Sci. Technol.*, т. 8, pp. 479-487, 1999.
- [3] В. В. Лебедева, «Экспериментальная оптика», М: Физический факультет МГУ им М.В. Ломоносова, 2005.
- [4] В.В. Андреев, М.А. Корнеева, Е.Б. Ланеев, М.Н. Муратов, А.А. Новицкий, Д.В. Чупров, «Изучение характеристик плазмы ЭЦР-разряда низкого давления в диапазоне рабочих параметров плазменного ускорителя,» *ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез*, т. 36, № 2, pp. 72-82, 2012.
- [5] N. d. Vries, «Spectroscopic study of microwave induced plasmas exploration of active and passive methods,» Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, 2008.

**МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ В РАСШИРЕННОЙ МОДЕЛИ СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА С УЧЕТОМ ТУРБУЛЕНТНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ПЛАЗМЫ  
THE MAXIMUM ENTROPY METHOD IN THE CONSIDERING TURBULENT FLUCTUATIONS OF PLASMA THE EXPANDED SOLAR WIND MODEL**

Миронов П. П., Журавлев В. М.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Ульяновский государственный университет» г. Ульяновск, Российская Федерация

В докладе излагается подход к анализу расширенной случайно-возмущенной нелинейной динамической модели солнечного ветра [1, 2] с помощью метода максимальной энтропии [3-10]. В основе подхода лежит метод Рейнольдса для усреднения по ансамблю уравнений случайно-возмущенных систем.

The approach to analysis of expanded random-disturbed nonlinear dynamic solar wind model [1, 2] by means of the maximum entropy method [3-10] is stated. The Reynolds method for averaging of equations of random-disturbed systems on ensemble underlies approach.

В предыдущих работах [7, 8, 9] были описаны результаты применения метода максимальной энтропии к модели солнечного ветра Паркера [1, 2]. Однако, несмотря на неплохие полученные решения применительно к параметрам солнечного ветра, стоит отметить, что усредненная модель Паркера не учитывает зависимость скорости и плотности, а также их моментов распределения от времени, а также отсутствуют полярная и азимутальная составляющие скорости и давления потока частиц солнечной плазмы. Следовательно, для устранения этих недостатков стоит записать следующую систему уравнений в сферических координатах:

$$\begin{aligned} u_t + uu_r + \frac{1}{r}vu_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\omega u_\varphi - \frac{1}{r}(v^2 + \omega^2) &= -\frac{1}{\rho}P_r - \phi_r, \\ \omega_t + u\omega_r + \frac{1}{r}v\omega_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\omega v_\varphi + \frac{1}{r}u\omega - \frac{ctg\theta}{r}v^2 &= -\frac{1}{r\rho}P_\theta, \\ v_t + uv_r + \frac{1}{r}vv_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\omega v_\varphi + \frac{1}{r}uv + \frac{ctg\theta}{r}u\omega &= -\frac{1}{\rho r}P_\varphi, \\ \rho_t + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2\rho u] + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin\theta\rho\omega] + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}[\rho v] &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $u$  - радиальная скорость,  $v$  - азимутальная скорость,  $\omega$  - полярная скорость,  $\rho$  - плотность,  $P$  - давление,  $\phi_r$  - гравитационный потенциал. Стоит отметить, что система (1) описывает поток невязкой плазмы, и давление не зависит от температуры плазмы, так как рассматривается случай адиабатичности потока частиц плазмы. В приближении малых значений компонент скорости и давления солнечного ветра по азимутальному и полярному углу получаем усредненные по ансамблю уравнения Рейнольдса для системы (1):

$$\begin{aligned} \bar{u}_t + \overline{uu}_r + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\langle u'^2 \rangle - \frac{1}{r}(\langle v'^2 \rangle + \langle \omega'^2 \rangle) &= -\left\langle \frac{1}{\rho}P_r \right\rangle - \phi_r, \\ \bar{\rho}_t + \bar{\rho}_r\bar{u} + \bar{\rho}\bar{u}_r + \frac{2}{r}(\bar{\rho}\bar{u} + \langle \rho'u' \rangle) + \langle \rho'u' \rangle_r &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $\langle u'^2 \rangle$ ,  $\langle v'^2 \rangle$ ,  $\langle \omega'^2 \rangle$  - дисперсии компонент скорости солнечного ветра,  $\langle \rho'u' \rangle$  - ковариация флуктуаций. Применяя метод максимальной энтропии к уравнениям (2), получаем дополнительные усредненные уравнения для замыкания рассматриваемой системы:

$$\begin{aligned}
 -\dot{W}_1 - \bar{u}W_{1r} + \bar{\rho}_r W_2 - \bar{\rho}W_{2r} + \frac{2\bar{\rho}}{r}W_2 &= 0, \\
 \frac{\delta \left\langle \frac{1}{\rho} P_r \right\rangle}{\delta \bar{\rho}} W_1 - \dot{W}_2 - \bar{u}W_{2r} + \frac{2\bar{u}}{r}W_2 &= 0, \\
 \frac{1}{2} \frac{\delta \det C}{\delta \langle u'^2 \rangle} \frac{1}{\det C} - \frac{1}{2} W_{1r} &= 0, \\
 \frac{1}{2} \frac{\delta \det C}{\delta \langle \rho'^2 \rangle} \frac{1}{\det C} + \frac{\delta \left\langle \frac{1}{\rho} P_r \right\rangle}{\delta \langle \rho'^2 \rangle} W_1 &= 0, \\
 \frac{1}{2} \frac{\delta \det C}{\delta \langle \rho'u' \rangle} \frac{1}{\det C} + \frac{2}{r} W_2 - W_{2r} &= 0, \\
 \frac{1}{2} \frac{\delta \det C}{\delta \langle v'^2 \rangle} \frac{1}{\det C} - \frac{W_1}{r} = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\delta \det C}{\delta \langle \omega'^2 \rangle} \frac{1}{\det C} - \frac{W_1}{r} &= 0, \\
 \frac{\delta \det C}{\delta \langle u'v' \rangle} = \frac{\delta \det C}{\delta \langle u'\omega' \rangle} = \frac{\delta \det C}{\delta \langle v'\omega' \rangle} = 0, \quad \frac{\delta \det C}{\delta \langle \rho'v' \rangle} = \frac{\delta \det C}{\delta \langle \rho'\omega' \rangle} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь  $W_1, W_2$  - множители Лагранжа. С учетом решения  $\langle u'\omega' \rangle = \langle u'v' \rangle = \langle v'\omega' \rangle = 0$ ,  $\langle \rho'\omega' \rangle = \langle \rho'v' \rangle = 0$  матрица ковариаций для усредненной расширенной модели солнечного ветра в сферических координатах выглядит так:

$$\det C = \begin{pmatrix} \langle \rho'^2 \rangle & \langle \rho'u' \rangle & 0 & 0 \\ \langle \rho'u' \rangle & \langle u'^2 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle v'^2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle \omega'^2 \rangle \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Использование развитого метода максимальной энтропии позволяет построить замкнутую модель солнечного ветра с учетом турбулентных флуктуаций плазмы. В предлагаемой работе для системы уравнений (2)-(3) вычислены и проанализированы решения для скорости и плотности солнечного ветра, а также моментов исследуемых величин. Проанализирована роль дисперсий флуктуаций скорости по угловым переменным в усредненной расширенной модели солнечного ветра с учетом турбулентных флуктуаций плазмы.

## Литература

1. Акасофу С.И., Чапмен С. Солнечно-земная физика. М.: Мир, Т.1,2, 1974.
2. И.С. Веселовский. Солнечный ветер и гелиосферное магнитное поле. В Сб. Модель космоса. Т.1. Под ред. Ю.И. Логачева. Изд. М.: КДУ, 2007с.

3. Журавлев В.М., Миронов П.П. Динамика случайно-возмущенной системы Вольтерра-Лотки и метод максимальной энтропии // Нелинейный мир. 2011. Т. 9. No. 4. С. 201-212.
4. Журавлев В.М., Шляпин В.А. Принцип вторичного максимума энтропии и уравнения Рейнольдса в стохастической динамике одномерных нелинейных систем // Нелинейный мир. 2008. Т. 6. No. 7. С. 352-363.
5. Журавлев В.М. Турбулентность течений несжимаемой жидкости вблизи локального равновесия и принцип вторичного максимума энтропии // ЖТФ. 2009. No 1. С. 16-27.
6. Журавлев В.М., Шляпин В.А. Метод сопряженных функций в стохастической динамике одномерных нелинейных систем и принцип вторичного максимума энтропии // Прикладная математика и механика. Ульяновск: УлГТУ. 2009. С. 72-88.
7. Миронов П.П., Бызыкчи А.Н., Журавлев В.М. Модель солнечного ветра с учетом турбулентности плазмы и метод максимальной энтропии. II Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники. Тезисы докладов. Секция "Физика плазмы и взаимодействие электромагнитного излучения с веществом", 14-17 мая 2013 года, РУДН, г. Москва, С. 151-155.
8. Миронов П.П., Журавлев В.М., Метод максимальной энтропии и модель солнечного ветра с учетом турбулентных флуктуаций плазмы. Всероссийский журнал научных публикаций, - № 4 (19), С. 2-5, (2013).
9. П.П. Миронов, В.М. Журавлев. Метод максимальной энтропии и модели солнечного ветра с учетом турбулентных флуктуаций плазмы. Труды международного семинара "Нелинейные поля в теории гравитации и космологии" и Российской школы "Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений", 21-26 октября 2013 года, К(П)ФУ, г. Казань, С. 145-146.
10. П.П. Миронов, В.М. Журавлев. Модель солнечного ветра с учетом турбулентности плазмы и метод максимальной энтропии. Международная зимняя школа-семинар по гравитации, астрофизике и космологии "Петровские чтения-2014". Аннотации лекций. Тезисы докладов, 17-21 февраля 2014 года, К(П)ФУ, г. Казань, С. 21-23.

## ИЗУЧЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРОТИВОУДАРНОЙ ИЗОЛЯЦИИ ПРИ РЕЗКИХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### LIMITING PERFORMANCE ANALYSIS OF SHOCK ISOLATION FOR THE CASE OF SHARP EXTERNAL DISTURBANCES

В.А.Корнеев

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

*e-mail: korneev@ipmnet.ru*

**Введение.** Рассмотрена модель системы противоударной изоляции с одной степенью свободы с ограниченным управляющим воздействием и заданным интегралом от внешнего возмущения. Управляющее воздействие выбиралось для обеспечения минимума максимальной величины смещения защищаемого объекта относительно основания. Рассматриваемая задача была сведена к задаче линейного программирования. Для произвольных внешних неотрицательных воздействий, обладающих одинаковым интегралом и длительностью и выходящих за пределы максимального значения управления не более одного раза, получена оценка для критического значения длительности, ниже которой оптимальное управление задается простой кусочно-постоянной функцией. При дополнительном предположении об осевой симметричности возмущения получена более слабая оценка для критического значения длительности. Доказано, что значение функционала для докритических значений длительности в случае симметричного возмущения не зависит от его конкретного вида и решение задачи аналитическое. Для различных возмущений проведено сравнение полученных оценок с результатами полученными из точного решения. Данная работа базируется на результатах, изложенных в монографии [1] и дает дальнейшее их развитие.

**Introduction.** A single-degree-of-freedom model of an active shock isolation system is considered. The excitation function (shock disturbance) and the control force are subject to constraints. The aim of the control is to minimize the maximum absolute value of the displacement of the object to be isolated relative to the base. This problem under consideration is reduced to a linear programming problem. The excitation functions are assumed to be nonnegative and to have only one excursion beyond the maximum value allowed for the control function. The integral of the excitation function with respect to time over the duration interval is given. For such disturbances, an estimate is obtained for a critical value of the duration, below which the optimal control is defined by a simple piecewise constant function. If, in addition, the excitation function have an axial symmetry, a weaker estimate for the critical value of the duration is obtained. It is proved that for symmetric excitation functions characterized by subcritical durations, the optimal value of the performance index is independent of the shape of the excitation function. In this case, the control problem is solved analytically. The estimates are

compared with the results of the exact solution for various excitations. This work is based on the results presented in the monograph [1] and provides their further development.

**Постановка задачи** . Рассматривается механическая система, состоящая из жесткого основания и объекта, связанного с основанием посредством противоударного изолятора – устройства, которое создает управляющую силу  $f$  между основанием и объектом и служит для снижения нагрузки на объект в случае ударного воздействия на основание. Предполагается, что основание и объект движутся поступательно вдоль одной и той же прямой. Обозначим:  $z$  – смещение основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета,  $x$  – смещение объекта относительно основания,  $m$  – масса объекта. Ударное воздействие на основание моделируется его ускорением  $\ddot{z}$ , заданным как функция времени.

Движение объекта относительно основания задается уравнением

$$\ddot{x} + u = v(t), \quad u = f/m, \quad v = -\ddot{z}. \quad (1.1)$$

Полагаем, что в начальный момент времени объект покоится относительно основания т.е.

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (1.2)$$

и что возмущение  $v(t)$  имеет вид

$$v(t) = V(t - t_0), \quad t_0 \geq 0, \quad (1.3)$$

где функция  $V(\xi)$  определена для всех вещественных  $\xi$ , причем  $V(\xi) \equiv 0$  для  $\xi \leq 0$ , а  $t_0$  – некоторый момент времени  $t_0 \geq 0$ , который может быть задан или подлежать определению. Такое определение соответствует ситуации, когда возмущение  $V$  начинает действовать на основание спустя время  $t_0$  после включения системы противоударной изоляции, то есть допускается возможность упреждающего управления.

Обозначим через  $x_u(t; t_0)$  решение уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) при  $v(t)$  вида (1.3).

**Задача 1.** Для системы (1.1) с начальными условиями (1.2) и возмущением вида (1.3) найти управление  $u(t)$ , удовлетворяющее ограничению

$$|u(t)| \leq u_0, \quad t \in [0, \infty),$$

и время упреждения  $t_0$ , при которых максимум модуля смещения объекта относительно основания

$$J(u, t_0) = \max_{t \in [0, \infty)} |x_u(t; t_0)|$$

принимает минимальное значение.

В дальнейшем рассматривается частный случай задачи 1 при  $t_0 = 0$ .

**Внешние возмущения**. Ограничимся классом возмущений  $V(t)$ , обладающих свойствами:

1.  $V(t) \geq 0$ .
2. Возмущение имеет конечную длительность  $T$ :  $V(t) \equiv 0$ , если  $t < 0$  или  $t > T$ .
3.  $V(t) < u_0$  при  $0 \leq t < t_1$  и  $t_2 < t \leq T$ ;  $V(t) > u_0$  при  $t_1 < t < t_2$ .

Свойства 1-3 означают, что возмущение действует только в одну сторону, не меняя знак, и что на одном и только одном интервале  $t_1 < t < t_2$  абсолютное ускорение основания  $V(t)$  превышает значение  $u_0$ .

Случай, когда  $V(t) \leq u_0$  при  $0 \leq t \leq T$ , не рассматривается. В этом случае управление  $u(t) \equiv V(t)$  оптимально и  $J(u, t_0) = 0$ .

Совокупность всех кусочно-непрерывных возмущений  $V(t)$ , удовлетворяющих условиям 1-3, назовем  $W$ -классом.

**Возмущения «симметричной» формы.** Под возмущениями симметричной формы будем понимать воздействия, обладающие следующим свойством:

$$V(t) = V(T - t). \quad (1.4)$$

В этом случае график функции  $V(t)$  на координатной плоскости  $tV$  симметричен относительно оси, проходящей через точку  $(T/2, 0)$  параллельно координатной оси  $V$ .

**Достаточные условия оптимальности управления.** Численные и аналитические исследования показали, что при наложении ограничения на длительность возмущения следующее управление оптимально:

$$u = u_*(t) = \begin{cases} u_0, & 0 \leq t \leq T_c, \\ 0, & t > T_c, \end{cases} \quad T_c = \frac{v_0}{u_0}, \quad (1.5)$$

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** Если для возмущения из класса  $W$  справедливо свойство (1.4) и выполнено неравенство

$$T < 2(\sqrt{2} - 1) \frac{v_0}{u_0}, \quad v_0 = \int_0^T V(t) dt,$$



то в задаче оптимальной противоударной изоляции без упреждения ( $t_0 = 0$ ) оптимальным управлением является управление (1.5), а минимум максимальной величины смещения объекта относительно основания рассчитывается по формуле

$$J(u_*) = \frac{v_0}{2} \left[ \frac{v_0}{u_0} - T \right].$$

Величина  $J(u_*)$ , рассчитываемая по этой формуле, зависит только от продолжительности возмущения  $T$  и его интегральной характеристики  $v_0$  и не зависит от конкретной реализации возмущения  $V(t)$  с этими параметрами.

**Теорема 2.** Если для возмущения  $V$  из класса  $W$  выполнено неравенство

$$T < (\sqrt{2} - 1) v_0 / u_0,$$

то в задаче оптимальной противоударной изоляции без упреждения ( $t_0 = 0$ ) оптимальным управлением  $u_{opt}$  является управление (1.5), а минимум максимальной величины смещения объекта относительно основания рассчитывается по формуле

$$J(u_*) = x(T_c) = \int_0^{T_c} (T_c - \tau)(v(\tau) - u_*(\tau)) d\tau.$$

**Следствие 1.** В условиях Теоремы 2 выполнены равенства

$$J_{sup} = \sup_{|v(t)| \leq 1} J(u_*) = \frac{v_0^2}{2u_0}, \quad J_{inf} = \frac{v_0^2}{2u_0} - Tv_0.$$

**Следствие 2.** В условиях Теоремы 2 выполнены неравенства

$$3 - 2\sqrt{2} \leq \frac{J_{inf}}{J_{sup}} \leq 1, \quad 1 \leq \frac{J_{sup}}{J_{inf}} \leq 3 + 2\sqrt{2}.$$

Приведенные теоремы дают достаточные условия для применения управления (1.5).

**Результаты сравнения различных возмущений.** Для возмущений прямоугольной формы и треугольного возмущения с вершиной при  $t = t_0 = 0$  удалось получить аналитические выражения, которые послужили тестом при численном построении решения. Была создана программа на языке Matlab для расчета оптимального управления и соответствующего относительного смещения. Программа позволила провести точные расчеты задачи 1 для внешних воздействий синусоидальной формы и в форме остроугольных и прямоугольных треугольников с вершиной при  $t = T$ . Для каждого из рассмотренных возмущений были определены области параметров задачи, для которых управление (1.5) является оптимальным. При этом в этих областях параметров для

синусоидальных и прямоугольных внешних воздействий оптимальное управление (1.5) единственно. Оказалось, что для треугольных внешних воздействий область оптимальности управления (1.5) содержит подобласть неединственности оптимального управления В областях параметров, где управление (1.5) оптимально и единственно, получено аналитическое решение задачи 1 для всех рассмотренных возмущений.

Сравнение влияния возмущений на значение функционала проводилось в условиях теоремы 2, т.е. при  $T < (\sqrt{2} - 1) v_0/u_0$ , как при одинаковых амплитудах так и при одинаковых длительностях. При одинаковых амплитудах наихудшим оказалось воздействие в виде прямоугольника, а возмущением с наименьшим воздействием в этом классе функций является возмущение в виде прямоугольного треугольника с вершиной в  $t = T$ .

При одинаковых длительностях наихудшим оказалось воздействие в виде прямоугольного треугольника с вершиной в  $t = 0$ , а возмущением с наименьшим воздействием в этом классе функций является возмущение в виде прямоугольного треугольника с вершиной в  $t = T$ . Этот результат является ожидаемым, поскольку дельта-функция  $v_0\delta(t)$  является наихудшим возмущением в классе функций, одинаковых по длительности, не превышающей величины  $(\sqrt{2} - 1) v_0/u_0$ , а возмущением с наименьшим воздействием является возмущение  $v_0\delta(t - T)$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (14-01-00356 а, 13-01-00384 а).

### Литература

- [1]. Balandin D.V., Bolotnik N.N., and Pilkey W.D. Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science, 2001, 440 p.

## THE MODEL CONTAINING THREE COUPLED SUBSYSTEMS: EXISTENCE OF OSCILLATIONS IN THE MAIN MODE

Valentin N. Tkhai, Ivan N. Barabanov

Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The model containing coupled subsystems (MCCS) is introduced in [1] to describe systems encountered in nature, engineering, etc. The model is described by a system of ordinary differential equations (ODE), where subsystems are autonomous ODEs. The coupling between subsystems is characterized by a numeric parameter  $\varepsilon$ , the subsystems becoming independent as  $\varepsilon = 0$ . The N-planet problem serves as an example of the MCCS with single-leveled subsystems. In this paper we consider the MCCS that contains three subsystems at a single level. The subsystems are supposed to operate in the ordinary mode. The problem existence of oscillations is solved.

Consider the MCCS that consists of three subsystems of second order. Each subsystem is supposed to admit a family of oscillations with period depending on a single parameter [2]. In the point of interest each subsystem operates in the ordinary mode, i.e. the derivative of the period with respect to parameter is nonzero. The mode when all subsystems operate in the ordinary mode is called the main mode of oscillations of MCCS.

In order to determine necessary and sufficient conditions for oscillations to exist a special system of amplitude equations is constructed. Those conditions are formulated in terms of the existence of a simple solution.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Researches (13-01-00347a, 13-01-00376a) and by the Program 14 of the Branch of Power Engineering, Industrial Engineering, Mechanics, and Control Processes of Russian Academy of Sciences.

### References:

1. V.N. Tkhai. The Model Containing Coupled Subsystems // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 6. P. 919--931.
2. V.N. Tkhai. The Period on a Family of Nonlinear Oscillations and Periodic Motions of a Perturbed System at a Critical Point of the Family // J.Appl. Math. Mech. 2010. V. 74. No. 5. P. 579--586.

## STABILIZATION OF OSCILLATIONS IN THE MODEL CONTAINING THREE COUPLED SUBSYSTEMS

Valentin N. Tkhai, Ivan N. Barabanov

Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Consider the model containing three coupled subsystems of the second order [1]. We suppose that each of generating subsystems admit a family of periodic solutions. Each subsystem is assumed to operate in the ordinary mode [2] at the point of interest (the main oscillations mode of the M CCS)

In the frame of M CCS concept we can state two kinds of stabilization problems: 1) to stabilize oscillations of the set of generating subsystems by small periodic coupling controls; 2) to stabilize the oscillations of M CCS itself.

Both problems are solved on the base of stability conditions for M CCS. Those stability conditions for the M CCS containing three subsystems of the second order are found in explicit form and are based on the analysis of Lyapunov exponents of the M CCS.

The obtained results can be applied to stabilize various systems, such as chains of mechanical oscillators, wind turbine, coupled pendulums, etc.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Researches (13-01-00347a, 13-01-00376a) and by the Program 14 of the Branch of Power Engineering, Industrial Engineering, Mechanics, and Control Processes of Russian Academy of Sciences.

### References:

1. V.N. Tkhai. The Model Containing Coupled Subsystems // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 6. P. 919--931.
2. V.N. Tkhai. The Period on a Family of Nonlinear Oscillations and Periodic Motions of a Perturbed System at a Critical Point of the Family // J.Appl. Math. Mech. 2010. V. 74. No. 5. P. 579--586.

## ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМЫ ДВУЗВЕННЫХ МАЯТНИКОВ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

И.М. Ананьевский, Т. А. Ишханян

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт Проблем  
Механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук,

Московский физико-технический институт (государственный университет),

Москва, Россия

Рассматривается задача об управляемости системы двухзвенных маятников вблизи положения равновесия с помощью одного момента, приложенного в общей точке подвеса.

**Линеаризованные уравнения движения многозвенного маятника.** Рассмотрим многозвенный маятник как механическую систему, состоящую из  $n$  твердых невесомых стержней с длинами  $l_1, \dots, l_n$ , соединяющих материальные точки с массами  $m_1, \dots, m_n$  (рис. 1). Первый стержень одним концом шарнирно прикреплен к неподвижной опоре. Маятник находится в поле тяжести и может двигаться в вертикальной плоскости. Такой маятник имеет  $2^n$  различных положений равновесия, в каждом из которых некоторые из стержней ориентированы вниз, а остальные - вверх. Будем рассматривать маятник в некоторой окрестности одного из таких положений равновесия.

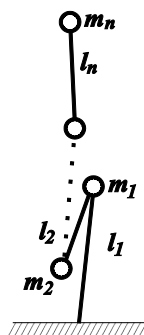


Рис. 1. Многозвенный маятник

Обозначим через  $\psi_k$  угол между  $k$ -м стержнем и вертикалью,  $k = 1, \dots, n$ . Введем вектор  $\theta$  размерности  $n$ , определяющий ориентацию звеньев маятника в рассматриваемом положении равновесия:

$$\theta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-е звено ориентировано вверх;} \\ 1, & \text{если } i\text{-е звено ориентировано вниз.} \end{cases}$$

Положим  $\varphi_k = \psi_k - \theta_k \pi$ . Тогда все  $\varphi_k$  равны нулю, если маятник находится в данном положении равновесия. Кинетическая и потенциальная энергии маятника принимают вид:

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \sum_{i,j=1}^k l_i l_j \cos(\varphi_i - \varphi_j + (\theta_i - \theta_j)\pi) \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j, \quad \Pi = g \sum_{i=1}^k l_i \cos(\varphi_i + \theta_i \pi) \sum_{k=i}^n m_k.$$

Предположим, что к первому звену маятника приложен управляющий момент  $u(\varphi, \dot{\varphi})$ . Линеаризованные в окрестности положения равновесия уравнения движения маятника могут быть записаны в форме

$$A\ddot{\varphi} + P\dot{\varphi} = bu, \quad (1)$$

где  $b$  - вектор вида  $b = (1, 0, \dots, 0)^T$ ,  $A$  и  $P$  - линеаризованные матрицы кинетической и потенциальной энергий:

$$A_{ij} = (-1)^{\theta_i + \theta_j} l_i l_j \sum_{k=\max(i,j)}^n m_k, \quad P = \text{diag} \left\{ (-1)^{\theta_i + 1} g l_i \sum_{k=i}^n m_k \right\}.$$

Пусть имеется система из нескольких многозвенных маятников с общей точкой подвеса, управляемая одним моментом, приложенным в этой точке. Предполагается, что каждый из маятников находится в окрестности какого-то, не обязательно нижнего, положения равновесия. Линеаризованные уравнения динамики каждого маятника имеют вид, аналогичный (1). Для исследования управляемости такой системы уравнения движения каждого маятника приводят к главным координатам. Необходимое и достаточное условие управляемости состоит в том, что частоты (корни векового уравнения) всех маятников должны быть различны, а проекции векторов  $b$  из правой части (1) на амплитудные векторы не должны равняться нулю.

**Управляемость системы двухзвенных маятников.** Рассмотрим систему двухзвенных маятников, управляемых моментом, приложенным в общей точке подвеса. Исследуем случай системы из четырех одинаковых двухзвенных маятников, каждый из которых движется в окрестности своего, отличного от других, положения равновесия. Всего таких положений равновесия четыре, они однозначно определяются векторами  $\theta$ , а соответствующие им конфигурации звеньев изображены на рис. 2.

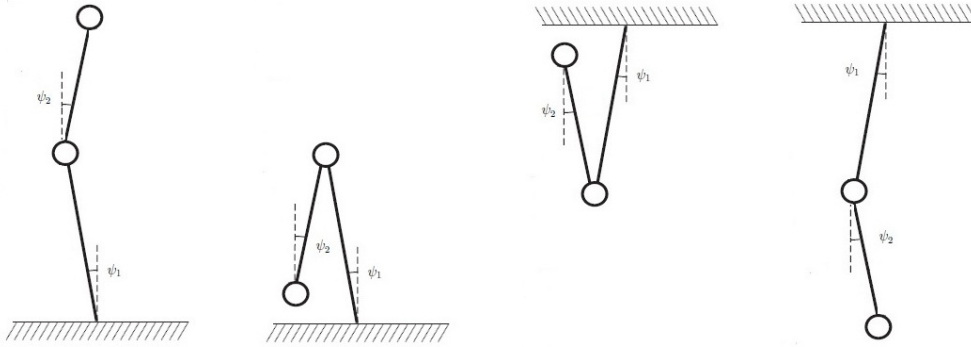


Рис 2. Положения равновесия двухзвенного маятника.

Матрицы кинетической и потенциальной энергий запишутся как

$$A = \begin{pmatrix} l_1^2(m_1 + m_2) & (-1)^{\theta_1 + \theta_2} l_1 l_2 m_2 \\ (-1)^{\theta_1 + \theta_2} l_1 l_2 m_2 & l_2^2 m_2 \end{pmatrix}, \quad P = g \begin{pmatrix} (-1)^{\theta_1 + 1} l_1 (m_1 + m_2) & 0 \\ 0 & (-1)^{\theta_2 + 1} l_2 m_2 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения собственных частот этих систем решается уравнение частот, или вековое уравнение [1]

$$\det(P - \lambda A) = 0. \quad (2)$$

Для двухзвенного маятника уравнение (2) есть квадратичное уравнение относительно  $\lambda$ . Каждому из корней  $\lambda_i$  соответствует амплитудный вектор  $u_i, i=1,2$ . Амплитудные векторы находятся из уравнения

$$(P - \lambda A)u = 0.$$

Так как по отдельности каждый плоский многозвенный маятник в окрестности произвольного положения равновесия в линейном приближении управляем с помощью момента, приложенного к первому звену [2], то проекции векторов  $b$  на амплитудные векторы не равны нулю. Выясним, при каком условии могут совпасть частоты в различных конфигурациях положения равновесия двухзвенного маятника. Выпишем для этого собственные частоты маятников в том порядке, в котором они расположены на рис. 2.

$$A: \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -g \frac{(l_1 + l_2)(m_1 + m_2) - \sqrt{m_1 + m_2} \sqrt{(l_1 - l_2)^2 m_1 + (l_1 + l_2)^2 m_2}}{2l_1 l_2 m_1}, \\ \lambda_2 &= -g \frac{(l_1 + l_2)(m_1 + m_2) + \sqrt{m_1 + m_2} \sqrt{(l_1 - l_2)^2 m_1 + (l_1 + l_2)^2 m_2}}{2l_1 l_2 m_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B: \quad \lambda_1 &= g \frac{(l_1 - l_2)(m_1 + m_2) - \sqrt{m_1 + m_2} \sqrt{(l_1 + l_2)^2 m_1 + (l_1 - l_2)^2 m_2}}{2l_1 l_2 m_1}, \\
 \lambda_2 &= g \frac{(l_1 - l_2)(m_1 + m_2) + \sqrt{m_1 + m_2} \sqrt{(l_1 + l_2)^2 m_1 + (l_1 - l_2)^2 m_2}}{2l_1 l_2 m_1}, \\
 C: \quad \lambda_1 &= \frac{2g \sqrt{m_1 + m_2}}{(l_1 - l_2) \sqrt{m_1 + m_2} - \sqrt{(l_1 + l_2)^2 m_1 + (l_1 - l_2)^2 m_2}}, \\
 \lambda_2 &= -g \frac{(l_1 - l_2)(m_1 + m_2) - \sqrt{m_1 + m_2} \sqrt{(l_1 + l_2)^2 m_1 + (l_1 - l_2)^2 m_2}}{2l_1 l_2 m_1}, \\
 D: \quad \lambda_1 &= g \frac{(l_1 + l_2)(m_1 + m_2) - \sqrt{m_1 + m_2} \sqrt{(l_1 - l_2)^2 m_1 + (l_1 + l_2)^2 m_2}}{2l_1 l_2 m_1}, \\
 \lambda_2 &= g \frac{(l_1 + l_2)(m_1 + m_2) + \sqrt{m_1 + m_2} \sqrt{(l_1 - l_2)^2 m_1 + (l_1 + l_2)^2 m_2}}{2l_1 l_2 m_1}.
 \end{aligned}$$

Анализ всевозможных комбинаций параметров систем  $m_1, m_2, l_1, l_2$  показывает, что совпадение частот возможно только в случае, когда длины звеньев маятника одинаковы, причем совпадение может быть только для второй и третьей конфигураций, изображенных на рис. 2. Во всех остальных случаях система, составленная из всевозможных комбинаций этих 4-х маятников, полностью управляема. Для маятников с одинаковыми длинами звеньями управляемость будет сохранена, если исключить конфигурацию В или С, оставив три остальных.

## Литература

1. А.П. Маркеев. Теоретическая механика: Учебник для университетов - 2-е издание, дополненное. М.-Ижевск: R&C Dynamics, 2007, 592 с.
2. Н.В. Анохин. Приведение многозвенного маятника в положение равновесия с помощью одного управляющего момента// Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. 5, С.44-53.

### About controllability of a set of two-link pendulums near equilibrium

The problem of controllability of a set of the two-link pendulums near equilibrium position with a single torque applied at a common point of suspension is considered.



**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЙ ТВЁРДОГО ТЕЛА С  
ВИБРИРУЮЩЕЙ ВДОЛЬ ГОРИЗОНТАЛИ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА  
STABILITY OF RELATIVE EQUILIBRIUMS OF A RIGID BODY WITH A  
SUSPENSION POINT VIBRATING ALONG THE HORIZONTAL**

Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет)  
г. Москва, Россия.

Беличенко М. В. (Belichenko M. V.)

В работе рассматривается движение тяжёлого твёрдого тела, одна из точек которого (точка подвеса  $O$ ) совершает горизонтальные гармонические колебания. Найдены положения равновесия системы приближенных уравнений, и рассмотрена их устойчивость в первом приближении. Исследованы два случая геометрии масс – тело с центром масс на главной оси и динамически симметричное тело.

Введём поступательно движущуюся систему координат  $OXYZ$ , ось  $OZ$  которой направлена вертикально вверх, а ось  $OY$  направлена вдоль направления колебаний, и связанную с телом систему координат  $Oxyz$  с осями, направленными вдоль главных осей инерции тела для точки  $O$ . Соответствующие главные моменты инерции обозначим через  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а проекции радиус-вектора центра масс  $OG$  на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  – через  $x_G$ ,  $y_G$  и  $z_G$ .

Будем предполагать, что амплитуда колебаний точки подвеса тела  $h$  мала по сравнению с расстоянием  $r_G = OG$ , а частота  $\Omega$  велика по сравнению с характерной частотой  $\omega = \sqrt{g/r_G}$ .

Введем малый параметр  $\varepsilon$  по формуле  $h = \varepsilon^2 r_G$ , ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) и будем считать, что  $h\Omega \sim 1$ ,  $g = \varepsilon^4 \Omega^2 r_G \tilde{\omega}$ , ( $\sqrt{g/r_G}/\Omega \sim \varepsilon^2$ )

С помощью методов теории возмущений систему дифференциальных неавтономных уравнений движения можно привести к автономному виду, отбрасывая слагаемые четвёртого порядка по  $\varepsilon$  и выше. Систему приближенных автономных дифференциальных уравнений движения запишем в виде модифицированных уравнений типа Эйлера – Пуассона [1]:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= mg(z_G\gamma_2 - y_G\gamma_3) + m_x, \\ B\dot{q} + (A - C)pq &= mg(x_G\gamma_3 - z_G\gamma_1) + m_y, \\ C\dot{r} + (B - A)rp &= mg(y_G\gamma_1 - x_G\gamma_2) + m_z, \\ \dot{\gamma}_1 &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \\ \dot{\alpha}_1 &= r\alpha_2 - q\alpha_3, \dot{\alpha}_2 = p\alpha_3 - r\alpha_1, \dot{\alpha}_3 = q\alpha_1 - p\alpha_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, m_x, m_y$  и  $m_z$  – проекции вектора абсолютной угловой скорости тела, орта оси  $OZ$ , орта оси  $OY$  и вибрационного момента [2] на оси системы координат  $Oxyz$  соответственно, причём

$$m_x = \sigma \left( \frac{x_G}{B} b\alpha_2 + \frac{x_G}{C} c\alpha_3 - \frac{y_G\alpha_2 + z_G\alpha_3}{A} a \right),$$

$$m_y = \sigma \left( \frac{y_G}{A} a \alpha_1 + \frac{y_G}{C} c \alpha_3 - \frac{x_G \alpha_1 + z_G \alpha_3}{B} b \right), \quad (2)$$

$$m_z = \sigma \left( \frac{z_G}{A} a \alpha_1 + \frac{z_G}{B} b \alpha_2 - \frac{x_G \alpha_1 + y_G \alpha_2}{C} c \right),$$

$$a = z_G \alpha_2 - y_G \alpha_3, b = x_G \alpha_3 - z_G \alpha_1, c = y_G \alpha_1 - x_G \alpha_2,$$

$$\sigma = \frac{1}{2} (mh\Omega)^2.$$

Рассматривается вопрос о существовании, бифуркациях и устойчивости положений относительного равновесия (в системе координат  $OXYZ$ ) механической системы, описываемой уравнениями (1). Рассмотрены два случая геометрии масс, когда центр масс тела лежит на одной из главных осей инерции для точки подвеса, и когда тело динамически симметрично. Устойчивость исследуется по линейному приближению, путём анализа корней характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений возмущённого движения. Были использованы методы компьютерной алгебры и системы аналитических вычислений MAPLE.

Существуют положения относительного равновесия, при которых центр масс тела лежит на одной вертикали с точкой подвеса выше или ниже её, причём имеется два типа верхних и два типа нижних равновесных конфигураций (рис. 1, 2).

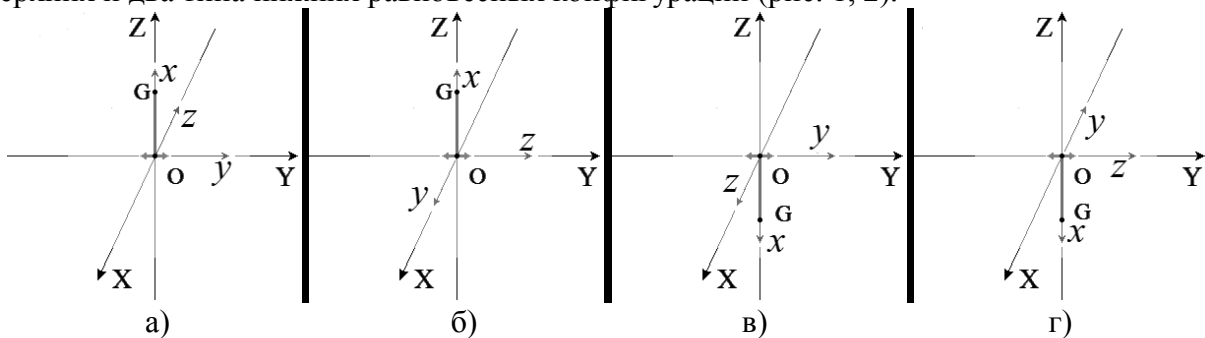


Рис. 1. Вертикальные положения относительного равновесия для тела с центром масс на главной оси.

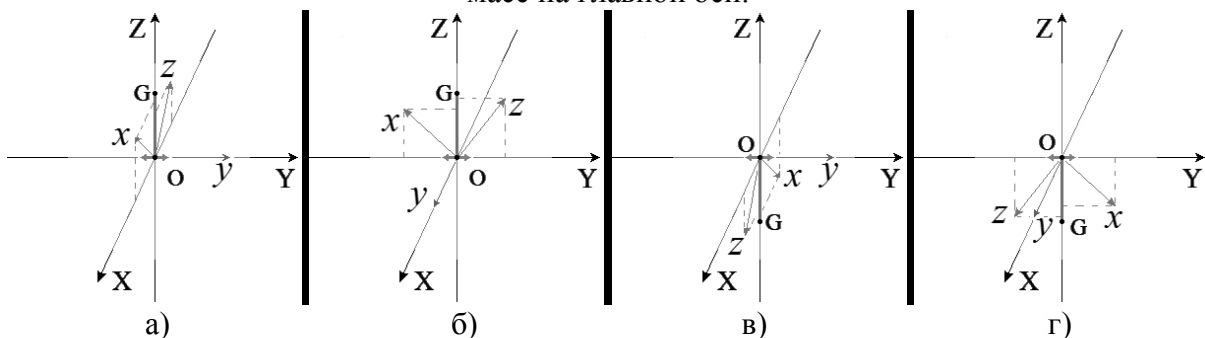


Рис. 2. Вертикальные положения относительного равновесия для динамически симметричного тела ( $A=B$ ).

Анализ устойчивости показал, что все верхние положения равновесия неустойчивы при любых значениях частоты вибраций точки подвеса. Для нижних положений равновесия найдены следующие условия устойчивости:

$$\sigma < \frac{mgC}{x_G}, C > B. \quad (\text{рис. 1. в})$$

$$\sigma < \frac{mgB}{x_G}, B > C. \quad (\text{рис. 1. г})$$

$$\sigma < \frac{ACmgr_G}{Ax_G^2 + Cz_G^2}, C > A. \text{ (рис. 2. в)} \quad \sigma < \frac{Amg}{r_G}, A > C. \text{ (рис. 2. г)}$$

Также найдены боковые положения равновесия (центр масс и точка подвеса не на одной вертикали). Для них центр масс тела расположен в плоскости, содержащей вертикаль и ось вибраций, причём радиус-вектор центра масс может составлять два различных угла с вертикалью. Для каждого из этих двух случаев есть два различных типа равновесных расположений тела (рис. 3, 4).

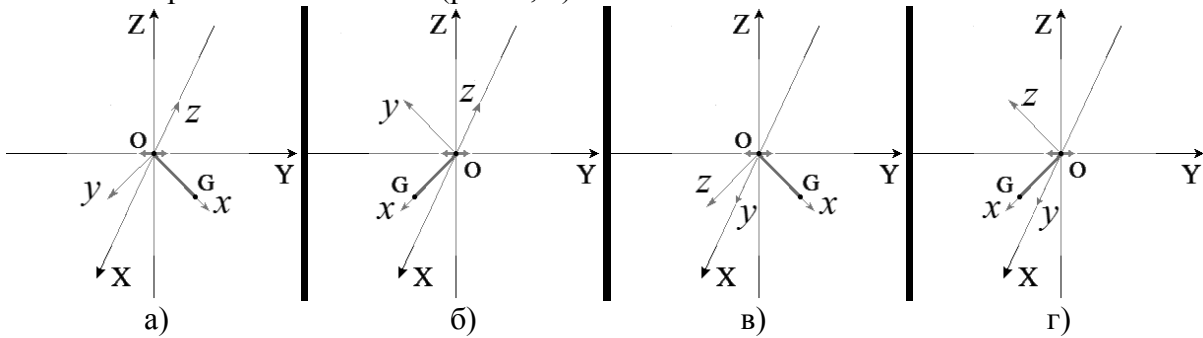


Рис. 3. Боковые положения относительного равновесия для тела с центром масс на главной оси.

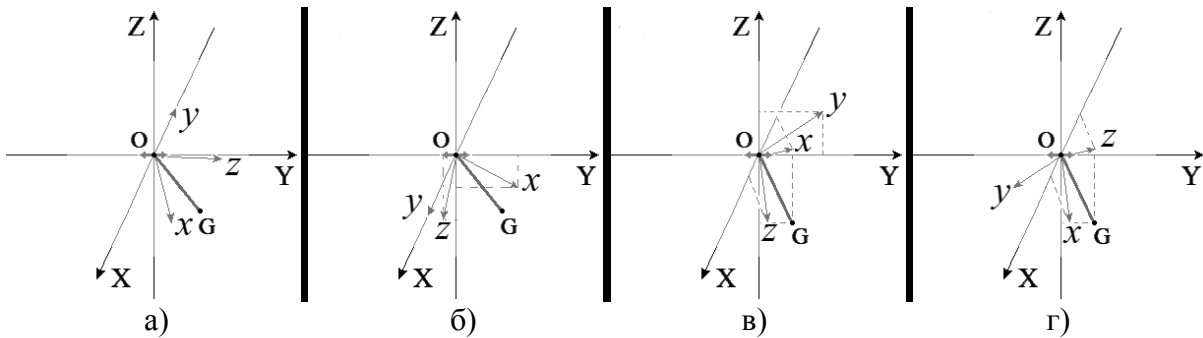


Рис. 4. Боковые положения относительного равновесия для динамически симметричного тела (A=B).

Указанные положения равновесия существуют при следующих условиях:

$$\sigma > mgC / x_G. \text{ (рис. 3. а, б)} \quad \sigma > mgB / x_G. \text{ (рис. 3. в, г)}$$

$$\sigma > mgA / r_G. \text{ (рис. 4. а, б)} \quad \sigma > CAmgr_G / (Ax_G^2 + Cz_G^2). \text{ (рис. 4. в, г)}$$

и устойчивы при выполнении неравенств:

$$\sigma > mgC / x_G, C > B. \text{ (рис. 3. а, б)} \quad \sigma > mgB / x_G, B > C. \text{ (рис. 3. в, г)}$$

$$\sigma > \frac{mgA}{r_G}, A > C. \text{ (рис. 4. а, б)} \quad \sigma > \frac{CAmgr_G}{Ax_G^2 + Cz_G^2}, C > A. \text{ (рис. 4. в, г)}$$

Для всех рассмотренных положений относительного равновесия тела вектор OG лежит в плоскости OYZ, но составляет с вертикалью разные углы. Условия существования и устойчивости для рассмотренных равновесий также различны. Покажем все результаты на рис. 5.

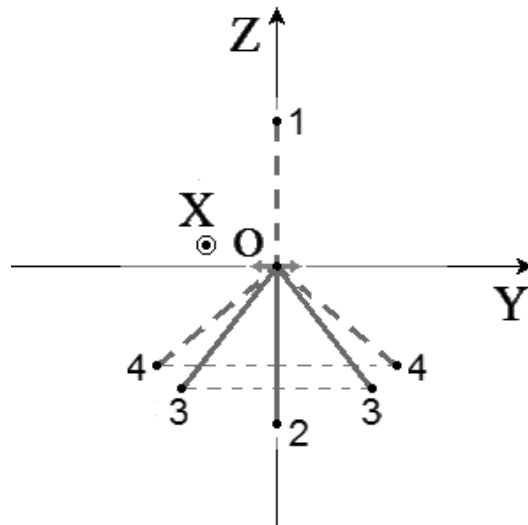


Рис. 5. Все положения относительного равновесия тела.

Верхнее положение равновесия 1 всегда неустойчиво. Нижнее положение равновесия возможно при двух различных группах ориентаций тела, одна из которых неустойчива, а другая устойчива при  $\sigma < \sigma_1$ . Если  $\sigma > \sigma_2$ , то возникает неустойчивое положение равновесия 4. При  $\sigma > \sigma_1 > \sigma_2$  появляется положение равновесия 3, которое устойчиво в области своего существования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ.

We study here a motion of a rigid body with a point committing specified fast horizontal harmonic oscillations of small amplitude. Equilibriums of an approximate autonomous system are found, and their stability in the first approximation is investigated. Two cases of the body mass geometry are considered when its center of mass is on one of the principal axes of inertia for the suspension point and when the body is dynamically symmetric.

Литература:

1. Маркеев А. П. К теории движения твёрдого тела с вибрирующим подвесом // ДАН. 2009. Т. 427. №6. С. 771-775.
2. Юдович В.И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. 2006. Т. 4. № 3. С. 26-158.

## О КОНФОРМНЫХ СИММЕТРИЯХ И ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ В МЕХАНИКЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ

Будочкина С.А.

ФГБОУ ВПО «Российский университет дружбы народов», Москва, Россия  
E-mail: [budochkina\\_sa@pfur.ru](mailto:budochkina_sa@pfur.ru)

## ON CONFORMAL SYMMETRIES AND FIRST INTEGRALS IN THE MECHANICS OF INFINITE-DIMENSIONAL SYSTEMS

Budochkina S.A.

The conformal invariance of the given operator equation of the Birkhoffian type is investigated. Formula for finding a first integral is given. Connection between symmetries of the equation and its conformal symmetries is established.

### 1. Введение

В настоящей работе теория групп преобразований применяется для установления конформной инвариантности уравнений движения бесконечномерных систем и для определения первых интегралов этих уравнений.

Исследованию конформной инвариантности уравнений движения систем с конечным числом степеней свободы посвящены, в частности, работы [1,2].

Первые интегралы эволюционных уравнений играют важную роль в математике, механике, физике в связи с тем, что они используются для доказательства единственности классических решений ДУЧП, для исследования устойчивости движения бесконечномерных систем и т.д.

Отметим, что применение групп преобразований к нахождению первых интегралов уравнений движения систем с бесконечным числом степеней свободы тесно связано со структурой самих уравнений.

Цель работы – исследовать конформную инвариантность операторного уравнения типа Биркгофа, установить зависимость конформных симметрий и первых интегралов заданного уравнения движения, а также взаимосвязь между симметриями уравнения и его конформными симметриями.

### 2. Основная часть

Пусть уравнения движения материальной системы представлены в форме уравнений Биркгофа

$$N(u) \equiv (R_u^{*} - R_u') u_t + \text{grad}_{\Phi_1} B[u] - \frac{\partial R(u)}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Предположим, что  $\exists (R_u^{*} - R_u')^{-1}$ . В этом случае уравнение (1) может быть записано в виде  $u_t = F(u)$ , где

$$F(u) = (R_u^{*} - R_u')^{-1} \left( \frac{\partial R(u)}{\partial t} - \text{grad}_{\Phi_1} B[u] \right).$$

Будем следовать обозначениям и терминологии [3-5].

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований вида

$$G: \begin{cases} \bar{t} = t + \varepsilon\varphi(t, u), \\ \bar{u} = u + \varepsilon\psi(t, u), \end{cases} \quad (2)$$

где  $\varphi, \psi$  - некоторые операторы.

С помощью преобразования (2) заданной функции  $u(t)$  можно поставить в соответствие функцию  $\bar{u}(t, \varepsilon)$  по правилу

$$\bar{u} = u + \varepsilon S(u), \quad (3)$$

где  $S(u) = \psi(t, u) - u_t \varphi(t, u)$ . При этом оператор  $S$  называется генератором преобразования (3).

**Определение 1.** Преобразование (3) называется конформной симметрией уравнения (1), если для любого достаточно малого  $\varepsilon$  любое решение этого уравнения является также решением уравнения

$$(\bar{R}_u^* - \bar{R}_u') u_t + \text{grad}_{\Phi_1} \bar{B}[u] - \frac{\partial \bar{R}(u)}{\partial t} = 0,$$

где  $\bar{R}(u) \equiv R(\bar{u})$ ,  $\bar{B}[u] \equiv B[\bar{u}]$ .

Отметим, что в этом случае уравнение (1) называется конформно инвариантным относительно преобразования (3).

**Теорема 1.** Преобразование (3) – конформная симметрия уравнения (1) тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & [S_u^* R_u^* + [R_u''(S(u); \cdot)]^* - R_u' S_u' - R_u''(S(u); \cdot)] F(u) + \\ & + S_u^* \text{grad}_{\Phi_1} B[u] + (\text{grad}_{\Phi_1} B[u])'_u S(u) - \frac{\partial}{\partial t} (R_u' S(u)) = 0. \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Если преобразование (3) – конформная симметрия уравнения (1) и существует функционал  $g$  такой, что

$$D_t g[u] = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \text{grad}_{\Phi_1} B[u], S(u) \right\rangle + \left\langle \text{grad}_{\Phi_1} B[u], \frac{\partial S(u)}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (R_u' S(u)), u_t \right\rangle,$$

то

$$I[t, u] = \left\langle \text{grad}_{\Phi_1} B[u], S(u) \right\rangle - g[u]$$

является первым интегралом этого уравнения.

**Определение 2.** Преобразование (3) называется симметрией уравнения (1), если для любого достаточно малого  $\varepsilon$  и любого решения  $u$  этого уравнения функция  $\bar{u}$  вида (3) также является решением этого уравнения.

**Теорема 3.** Для того чтобы симметрия уравнения (1) являлась также его конформной симметрией, необходимо и достаточно, чтобы

$$(R_u^* - R_u') \frac{\partial S(u)}{\partial t} + R_u^* S_u' F(u) - S_u^* R_u^* F(u) - S_u^* \text{grad}_{\Phi_1} B[u] = 0.$$

### 3. Заключение

В работе получено необходимое и достаточное условие конформной инвариантности уравнения движения типа Биркгофа, дан общий вид первого интеграла заданного уравнения в случае его конформной инвариантности, а также установлена взаимосвязь между симметриями уравнения движения и его конформными симметриями.

### Литература

1. Галиуллин А.С., Гафаров Г.Г., Малайшка Р.П., Хван А.М. Аналитическая динамика систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу. М.: Редакция журнала “Успехи физических наук”, 1997. – 324 с.
2. Mei F., Xu X., Zhang Y. A unified symmetry of Lagrangian systems // Acta Mechanica Sinica, 2004, vol. 20, No. 6, pp. 668-671.
3. Савчин В.М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. М.: Изд-во УДН, 1991. – 237 с.
4. Будочкина С.А., Савчин В.М. Вариационные симметрии эйлеровых и неэйлеровых функционалов // Дифференциальные уравнения, 2011, т. 47, №6, стр. 811-818.
5. Budochkina S.A. Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation // Eurasian Mathematical Journal, 2012, vol. 3, No. 1, pp. 18-28.

## ЗАДАЧА СУСЛОВА ДЛЯ НЕГОЛОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ЧАПЛЫГИНА

Р.Г. Мухарлямов, Москва, РУДН,

Ж.К. Киргизбаев, Казахстан, Шымкент, КИПУДН.

## SUSLOV PROBLEM FOR NONHOLONOMIC TCHAPLYGIN SYSTEM

R.G. Mukharlyamov,

G.K. Kirgizbayev

Предлагается метод решения задачи Суслова для неголономной системы Чаплыгина. Метод построения множества систем дифференциальных уравнений по известным интегралам используется для определения выражений позиционных и потенциальных управляющих сил, под действием которых изображающая точка совершает движения по заданной кривой.

The method of the decision of Suslov problem for nonholonomic Tchapygin's systems is offered. The method of construction of the differential equations systems on known integrals is used for definition of expressions of positional and potential control forces under which action the representing point makes motions on the set curve.

**1. Введение.** Обратная задача динамики, состоящая в определении силовой функции, соответствующей движению изображающей точки по заданной кривой в конфигурационном пространстве, была рассмотрена Г.К. Суловым [1]. Уравнения связей рассматриваются как первые интегралы дифференциальных уравнений динамики системы. Метод решения состоит в использовании  $n - l$  уравнений связей и интеграла энергии для выражения  $n$  обобщенных скоростей через обобщенные координаты системы. В [2] предлагается решение задачи Суслова в случае, когда число уравнений связей может быть меньше  $n - l$ .

В настоящей работе предлагается решение задачи Суслова для неголономной системы, динамика которой описывается уравнениями Чаплыгина. Решение задачи основано на построении множества систем дифференциальных уравнений и позволяет рассматривать уравнения связей как частные интегралы уравнений движения [3]. Определяются выражения позиционных и потенциальных управляющих сил, под действием которых изображающая точка совершает движения по заданной кривой.

**2. Управление движением по заданной кривой.** Рассматривается неголономная система, на которую наложены связи

$$v_h = \sum_{k=1}^p b_{hk}(q)v_k, \quad q = (q_1, \dots, q_p), \quad v_h = \dot{q}_h, \quad h = p+1, \dots, n, \quad (2.1)$$

и динамика которой описывается уравнениями Чаплыгина, содержащими в правой части функции управления  $u_k$ :



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial v_k} - \frac{\partial T^*}{\partial q_k} + \sum_{h=p+1}^n \frac{\partial T}{\partial v_h} \left( \sum_{l=1}^p \left( \frac{\partial b_{hl}}{\partial q_k} - \frac{\partial b_{hk}}{\partial q_l} \right) v_l \right) = f_k + u_k, \quad (2.2)$$

$$k=1, \dots, p, \quad 2T = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_i v_j, \quad 2T^* = \sum_{i,j=1}^p a_{ij}^* v_i v_j,$$

$$a_{ij}^* = a_{ij} + 2 \sum_{h=p+1}^n a_{ih} b_{hk} + \sum_{h,l=p+1}^n a_{hl} b_{hi} b_{lj}.$$

Уравнения движения (2.2) приводятся к виду, разрешенному относительно обобщенных скоростей и ускорений:

$$\dot{q}_i = v_i, \quad \dot{v}_i + \sum_{j,l=1}^p a_i^{jl} v_j v_k = \sum_{j=1}^p a_i^j (f_j + u_j), \quad i=1, \dots, p. \quad (2.3)$$

Через  $a_i^j$  обозначены элементы матрицы  $(A^*)^{-1}$ . Функции  $a_i^{jl}$  аналогичны символам Кристоффеля второго рода в уравнениях Лагранжа. Требуется определить управляющие позиционные силы  $u_k = u_k(q)$ , под действием которых изображающая точка движется в конфигурационном пространстве по заданной кривой:

$$g_\mu(q) = 0, \quad \mu = 1, \dots, p-1. \quad (2.4)$$

Уравнения связей (2.4) будем задавать соотношениями:

$$g_\mu(q) = \alpha_\mu, \quad \mu = 1, \dots, p-1, \quad (2.5)$$

правые части, которых удовлетворяют уравнениям возмущения связей

$$\ddot{\alpha}_\mu = \sum_{\nu=1}^{p-1} k_{\mu\nu} \dot{\alpha}_\nu + \sum_{\nu=1}^{p-1} c_{\mu\nu} \alpha_\nu, \quad (2.6)$$

$$k_{\mu\nu} = k_{\mu\nu}(q), \quad c_{\mu\nu} = c_{\mu\nu}(q), \quad \mu, \nu = 1, \dots, p-1.$$

Из (2.5) следуют равенства:

$$\dot{\alpha}_\mu = \sum_{i=1}^p g_{\mu i}(q) v_i, \quad g_{\mu i} = \frac{\partial g_\mu}{\partial q_i}, \quad \mu = 1, \dots, p-1. \quad (2.7)$$

Уравнения связей могут быть также заданы комбинацией голономных связей (2.5) и линейных неголономных связей вида (2.7). При этом, естественно, предполагается, что уравнения связей совместны, независимы, общее число уравнений связей равно  $p-1$ .

Продифференцируем дважды по  $t$  равенство (2.5) с учетом соотношений (2.6), (2.7):

$$\sum_{i=1}^p g_{\mu i} \dot{v}_i + \sum_{i,j=1}^p g_{\mu ij} v_i v_j = \sum_{\nu=1}^{p-1} k_{\mu\nu} \dot{\alpha}_\nu + \sum_{\nu=1}^{p-1} c_{\mu\nu} \alpha_\nu, \quad (2.8)$$

$$\mu = 1, \dots, p-1.$$

Заменяя в (2.8) обобщенные ускорения  $\dot{v}_i$  их выражениями через уравнения динамики (2.3), получим уравнения для определения обобщенных управляющих сил  $u_j$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p g_{\mu i} \left( \sum_{k=1}^p a_i^k (f_k + u_k) - \sum_{j,k=1}^p a_i^{jk} v_j v_k \right) + \sum_{j,k=1}^p g_{\mu, jk} v_j v_k = \\ = \sum_{\nu=1}^{p-1} k_{\mu\nu} \dot{\alpha}_\nu + \sum_{\nu=1}^{p-1} c_{\mu\nu} \alpha_\nu. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Будем предполагать, что активные силы  $f_i$ , действующие на механическую систему, содержат скорости в степени не выше второй:

$$f_i = f_{i,0}(q) + \sum_{j=1}^p f_{i,j}(q) v_j + \sum_{j,k=1}^p f_{i,jk}(q) v_j v_k. \quad (2.10)$$

Тогда уравнение (2.9) можно записать как систему линейных уравнений относительно  $u_j$ :

$$\sum_{j=1}^p s_{\mu}^j u_j = s_{\mu}, \quad (2.11)$$

Рассмотрим равенства (2.7) как систему линейных алгебраических уравнений относительно  $v_i$ :

$$G(q)v = \dot{\alpha}, \quad (2.12)$$

$$G = (g_{\mu i}), \quad \mu = 1, \dots, p-1, \quad i = 1, \dots, p.$$

Решение системы (2.12) определяется выражением

$$v = v_0 v^\tau(q) + G^+(q) \dot{\alpha}, \quad v_0 = v_0(q) \quad (2.13)$$

Из (2.13) следует, что обобщенные скорости  $v_i$  складываются из двух составляющих:

$$v_i = v_0 v_i^\tau(q) + \sum_{\mu=1}^{p-1} g_{i\mu}^+(q) \dot{\alpha}_\mu. \quad (2.14)$$

Используя (2.14), систему (2.11) можно представить уравнениями, правые части которых зависят только от  $q_i$  и  $\dot{\alpha}_\mu$ :

$$\sum_{j=1}^p s_\mu^j u_j = h_\mu^0 + \sum_{v=1}^{p-1} h_\mu^v \dot{\alpha}_v + \sum_{v,k=1}^{p-1} h_\mu^{vk} \dot{\alpha}_v \dot{\alpha}_k, \quad (2.15)$$

$$\mu = 1, \dots, p-1,$$

Запишем систему (2.15) в матричном виде

$$Su = h, \quad (2.16)$$

$$S = (s_\mu^j), \quad u = (u_j), \quad h = (h_\mu), \quad j = 1, \dots, p.$$

Общее решение системы (2.16) определяется выражением

$$u = g_0[S] + S^+ h, \quad (2.17)$$

$s_0 = s_0(q)$  - произвольная скалярная функция,  $[S]$ - векторное произведение векторов-строк матрицы  $S$ . Из (2.15), (2.17) видно, что если правые части уравнений (2.15) не содержат переменных  $\dot{\alpha}_\mu$ , то решение (2.17) будет зависеть только от координат механической системы  $q_1, \dots, q_p$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 13-08-00535.

### Список литературы

1. Сулов Г.К. О силовой функции, допускающей заданные интегралы. Киев, изд-во Киевского университета, 1890, 114 с
2. Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. М. Наука. 1986. 224 с.
3. Мухарлямов Р.Г., Киргизбаев Ж.К. Управление программным движением и обратные задачи динамики систем с переменной массой. Шымкент. Казахстан. Изд. «Нурлы Бейне». 2008. 180 с.

**ВЛИЯНИЕ ВИБРАЦИИ НА ИЗНОС ЩЕЛЕВОГО УПЛОТНЕНИЯ  
РАБОЧЕГО КОЛЕСА НЕФТЯНОГО НАСОСА**С.В. Сосновский<sup>1</sup>, В.П. Селькин<sup>2</sup>, С.В. Копылов<sup>3</sup>**THE EFFECT OF VIBRATION  
ON WEAR OF IMPELLER GROOVE SEAL OF OIL PUMP**

S.V. Sosnovskii, V.P. Selkin, S.V. Kopylov

<sup>1</sup> ОАО «Гомельтранснефть Дружба», ул. Артиллерийская, 8а, 246022, Гомель, Беларусь<sup>2</sup> ГНУ «Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси»,  
ул. Кирова, 32а, 246050, Гомель, Беларусь<sup>3</sup> Московский государственный машиностроительный университет,  
ул. П.Корчагина, 22, 107996, г. Москва, Россия  
e-mail: *selkin\_v@mail.ru*

Исследовано влияние вибрации ротора магистрального нефтяного насоса на износ щелевого уплотнения его рабочего колеса. Показано, что радиальное биение рабочего колеса может приводить к значительному увеличению интенсивности изнашивания деталей щелевого уплотнения.

The effect of vibration of a trunk oil pump rotor on wear of impeller groove seal is studied. The shift of a radial throb of the impeller was shown to result in significant increase of wear intensity of parts of the groove seal.

Как показывает практика, основной причиной снижения КПД магистральных нефтяных насосов в процессе эксплуатации является рост объемных потерь вследствие износа щелевых уплотнений их рабочих колес. В работе [1] рассмотрены факторы, влияющие на интенсивность изнашивания щелевых уплотнений центробежных насосов при перекачивании ими сырой нефти. Сделан вывод, что основным фактором, определяющим износ деталей щелевых уплотнений, является абразивное воздействие попадающих в щелевой зазор содержащихся в нефти твердых частиц (песок, кристаллы солей, продукты коррозии). Показано также, что протекающие в поверхностных слоях материалов деталей уплотнений физико-химические процессы также могут приводить к увеличению интенсивности их изнашивания [2]. В то же время обращено внимание на заметное усиление износа щелевых уплотнений при работе магистральных нефтяных насосов в режимах малых подач [3]. Это объясняется тем, что наличие дополнительных гидродинамических сил, связанных с движением жидкости в центробежном колесе в режиме малых подач приводит к росту нагрузок и усилению вибрации основных элементов насосной установки, в том числе его ротора. Важность вопроса учета влияния вибрации на величину утечек через щелевое уплотнение отмечена в работе [4]. Приведенные результаты расчетов показывают, что при зазоре 0,5 мм с увеличением относительного эксцентриситета ротора относительно корпуса насоса с 0 до 0,6 расход через уплотнение при ламинарном режиме истечения увеличивается более чем в 1,5 раза. В работе [5] при рассмотрении динамики ротора насоса НМ 3600-230 подчеркнута, что при значительных величинах технологических погрешностей в щелевом уплотнении реакция и момент в нем значительно возрастают и вибрация ротора может вызвать

раскрытие стыка и потерю герметичности насоса. Вместе с тем влияние радиального биения ротора магистрального нефтяного насоса на механический износ деталей щелевого уплотнения рабочего колеса изучено не достаточно.

Объектом исследования являлись сталь конструкционная углеродистая марки Ст3сп, закаленная при 850 °С конструкционная легированная хромистая сталь марки 40Х и используемая в качестве защитного покрытия рабочих колес в области щелевого уплотнения мартенситная нержавеющая сталь Chromescore 410-G. Защитное покрытие из материала Chromescore 410-G наносили на ролики из стали 45 в два слоя до толщины 2 мм методом электродуговой наплавки на аппарате Kuhlreiber KIT-384.

Линейную интенсивность изнашивания образцов определяли, используя известную формулу  $I_h = \Delta h / \Delta L$ , где  $I_h$  – линейная интенсивность изнашивания;  $\Delta h$  – убыль линейного размера образца, м;  $\Delta L$  – путь трения, м. Убыль линейных размеров образцов рассчитывали по изменению их массы. Массу образцов измеряли на весах Ohaus RV214.

Предварительно был проведен анализ характера и степени повреждения деталей щелевых уплотнений магистральных нефтяных насосов НМ 7000-210 после их эксплуатации на магистральном нефтепроводе «Дружба». Установлено, что кинетика изнашивания поверхности рабочих колес в зоне щелевого уплотнения имеет сложный характер. На начальном этапе эксплуатации на поверхности рабочего колеса со стороны области высокого давления образуется впадина, которая хорошо видна на рис. 1. С увеличением наработки износ начинает распространяться вдоль щели. Для насосов проработавших более 15 тысяч часов он уже на всем ее протяжении приобретает более равномерный характер, хотя углубление на начальном участке уплотнения сохраняется. Данные результаты согласуются с представлениями, что основным механизмом изнашивания в щелевых уплотнениях магистральных нефтяных насосов является абразивное воздействие попадающих в зазор механических частиц. Большие его значения со стороны области нагнетания насоса объясняются тем, что в этой зоне происходит наиболее интенсивное воздействие частиц на поверхность вращающегося рабочего колеса, до того как они разрушаются до меньших щелевого зазора размеров и вымываются в область всасывания.

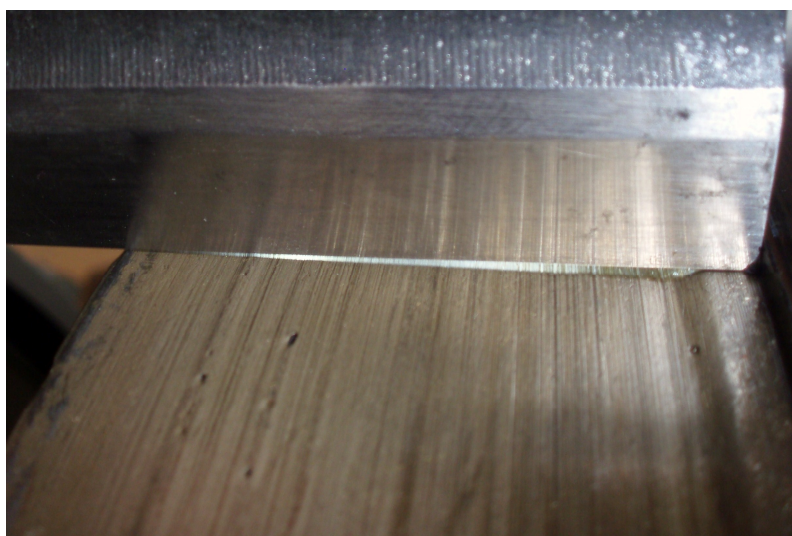


Рисунок 1 – Профиль вдоль щелевого уплотнения поверхностей износа рабочего колеса насоса НМ 7000-210, проработавшего 8 тысяч часов

В то же время нами отмечено, что на поверхности ряда рабочих колес повреждения в форме кольцевых углублений, значительно превышающих по ширине номинальную величину щелевого зазора, наблюдались и на значительном расстоянии от входа в щелевое уплотнение. При рассмотрении противоположных поверхностей уплотнительных колец этих колес были отмечены следы, которые могли быть оставлены перекачиваемыми по поверхности колец крупными механическими частицами или их осколками.

Появление таких дефектов можно объяснить наличием биения ротора насоса, вызывающего значительные колебания величины щелевого зазора. При значительном эксцентриситете радиального биения в момент наибольшего удаления поверхности рабочего колеса от поверхности уплотнительного кольца в щель могут проникать относительно крупные частицы абразива. Тогда при повороте ротора с уменьшением зазора будет происходить механическое изнашивание поверхности колеса. Причем при наличии осевого биения процесс резания будет происходить уже не только в радиальном, но и в продольном направлении.

Для оценки степени влияния на интенсивность изнашивания щелевых уплотнений нефтяных магистральных насосов величины не совпадения оси вращения рабочего колеса (ротора) с его геометрической осью мы провели лабораторный эксперимент, в ходе которого сравнивали износ образцов при колебании щелевого зазора вследствие биения в диапазонах 150 – 250 и 100 – 300 мкм. Методика проведения испытаний была основана на использовании следующей схемы трения – вращающийся испытываемый образец в виде ролика, находящегося от поверхности неподвижного контртела на некотором расстоянии. Образцам задавали радиальное биение путем насаживания роликов на вал привода с заданным эксцентриситетом (50 и 100 мкм). Таким образом, величина зазора в установке постоянно изменялась, имитируя колебания размера реального щелевого уплотнения рабочего колеса центробежного насоса. Конструкция установки сделанной на базе машины трения 2070 СМТ-1 приведена в работе [1]. Схема узла трения показана на рис. 2.

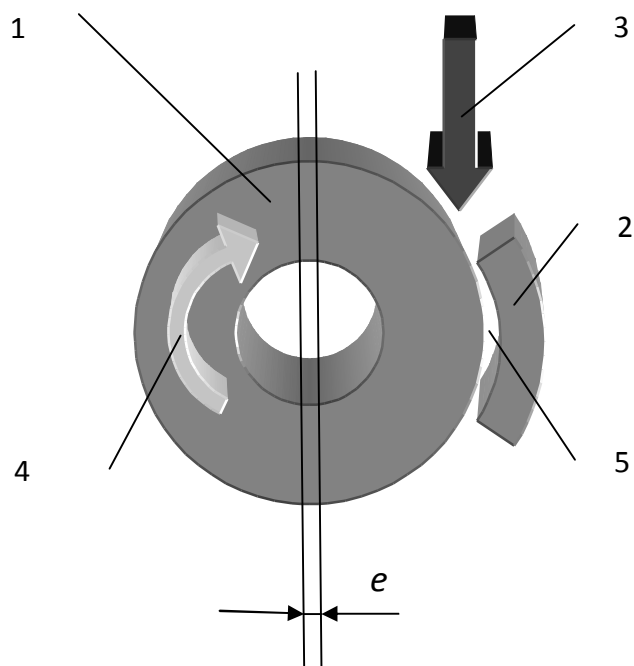


Рисунок 2 – Схема узла трения установки для проведения испытаний на влияние биения ротора на износ деталей щелевых уплотнений: 1 – вращающийся ролик; 2 – контртело; 3 – направление подачи смеси нефти с абразивом; 4 – направление вращения ролика; 5 – зазор, моделирующий щелевое уплотнение; е – эксцентриситет

Параметры испытаний: контртело – пластина из твердого сплава марки ВК8; щелевой зазор –  $200\pm 50$  и  $200\pm 100$  мкм в зависимости от заданного эксцентриситета; абразив – карьерный песок дисперсностью 100 – 315 мкм; среда – нефть марки Urals; расход абразива – 100 г/мин, расход жидкости – 1 л/мин; скорость вращения ролика – 500 об/мин, линейная скорость изнашиваемой поверхности ролика – 1 м/с; исходная шероховатость рабочей поверхности образцов (роликов) –  $Ra = 0,5$  мкм.

Результаты испытаний представлены на рис. 3. Видно, что при увеличении эксцентриситета с 50 до 100 мкм интенсивность изнашивания в зависимости от марки стали увеличивалась на 60 – 120%. Причем отмечено, что материал, изначально имевший более высокую износостойкость, в меньшей степени зависел от величины эксцентриситета. Такое значительное увеличение интенсивности изнашивания можно объяснить тем, что с увеличением величины биения не только большее количество частиц абразива стало проникать в щелевой зазор, но фактически и большее их количество стало участвовать в процессе резания. Таким образом, экспериментально показано, что смещение оси вращения от геометрической оси рабочего колеса может приводить к значительному увеличению интенсивности изнашивания деталей щелевого уплотнения.

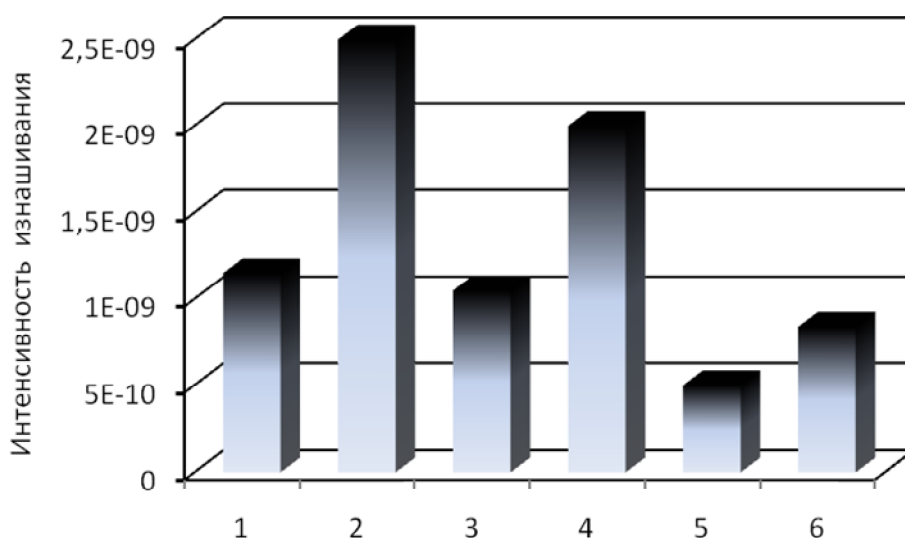


Рисунок 3 – Интенсивность изнашивания образцов испытываемых материалов смесью нефти Urals с песком при щелевом зазоре  $200\pm 50$  мкм (1,3,5) и  $200\pm 100$  мкм (2,4,6): 1 и 2 – сталь СтЗсп; 3 и 4 – закаленная сталь 40X; 5 и 6 – покрытие из стали Chromecore 410

Анализ характера и степени повреждения деталей щелевых уплотнений

магистральных нефтяных насосов и проведенная экспериментальная оценка позволяют сделать вывод, что одним из основных факторов определяющих интенсивность изнашивания данных деталей в процессе эксплуатации является биение ротора (рабочего колеса), вызванное технологическими погрешностями при его изготовлении и монтаже в насос. Из первоочередных задач направленных на снижение данного негативного эффекта надо отметить необходимость проведения технологических мероприятий направленных на более тщательный контроль величины биения ротора, как при его монтаже, так и в процессе эксплуатации. Необходимо также введение определенных конструкционных изменений в насосы типа НМ. Путей решения проблемы может быть много, но все они требуют тщательной проработки и изучения.

#### Литература

- 1 Сосновский С.В., Селькин В.П. Исследование износа в щелевых уплотнениях центробежных нефтяных насосов // Трение и износ. – 2012 (33), – № 4 – С. 386-392
- 2 Сосновский С.В., Селькин В.П. Влияние перекачиваемой среды на интенсивность изнашивания щелевых уплотнений центробежных насосов // Трение и износ. – 2013 (34), – № 2 – С. 171-174
- 3 Исследование работы центробежных насосов магистральных нефтепроводов в режимах малых подач: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. к.т.н.: Спец. 05.15.13 / Василенко С.С.; Рос. гос. ун-т нефти и газа им. И.М. Губкина. – М.: 2000
- 4 Гумеров А.Г., Гумеров Р.С, Акбердин А.М. Эксплуатация оборудования нефтеперекачивающих станций. – М.: Недра, 2001
- 5 Вахлярский В.С., Гуськов А.М. Численный анализ динамики ротора центробежного насоса // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Машиностроение». Спец. выпуск № 6 «Современные проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин». – 2012. – С. 34-49



## О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ (МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК ИСКУССТВО)

Л.К.Кузьмина

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева –  
КАИ

Адамюк, 4-6, Казань-15, 420015, РОССИЯ

*«Всякое познание берет начало из ощущений»*

**Я.Коменский**

*(ВЕЛИКАЯ ДИДАКТИКА)*

Тематика работы посвящена некоторым проблемам основ механики и инженерного образования. Рассматриваются актуальные вопросы, связанные с уровнем и качеством фундаментальных знаний по теоретической механике при подготовке специалистов (инженеров-механиков) как в общеинженерных областях, так и применительно к сложнейшим multidisciplinary областям авиационной и ракетно-космической техники. Обсуждаются принципы изучения теоретической механики в высшей школе, приводящие к эффективным приемам в процессе познания, с поиском таких методов предметного обучения, которые были бы одновременно обучающими, активизирующими и управляющими познавательной деятельностью. Это было предметом специальных обсуждений крупнейших механиков, ученых-педагогов, хорошо известных в России и за рубежом (А.Н.Крылова, А.П.Минакова, А.Ю.Ишлинского, Н.Г.Четаева, П.В.Харламова,...). Рассматриваются некоторые общие аспекты особенностей курса теоретической механики, выделяющие его среди других базовых дисциплин инженерного образования. Также анализируются затруднения в усвоении, понимании основ механики и в обучении, вызываемые ими. Причем, как показывают специальные исследования, они носят систематический характер, обусловлены объективными причинами, что и является источником «тормоза» в усвоении законов механики и длительного «процесса адаптации» при обучении. Обсуждаются пути и методы, психолого-методические аспекты преодоления интуитивных теорий и моделей в механике.

*Теоретическая механика (это – наука о движении макротел в пространстве) имеет отношение ко всем явлениям природы и творениям техники, ко всем естественным научным дисциплинам. Изучение механики в высшей школе имеет определяющее значение для формирования навыков и мышления будущего СПЕЦИАЛИСТА, для развития его интеллекта в целом. Основная цель теоретической механики – выявление, познание и практическое применение общих законов механического движения. Без усвоения механики не может быть современного инженерного и университетского образования. Этот главный принцип был заложен как основа преподавания в Инженерной Школе классическими традициями известной русской Школы Механиков, развитых*

фундаментальными трудами «Отца Русской Авиации» Н.Е.Жуковского, С.А.Чаплыгина, А.Н.Крылова, Н.Г.Четаева, ... Главная задача теоретической механики – дать общее развитие, необходимые навыки, научить учиться. Как? «Затруднения не в вопросе, что нужно сделать, но как сделать. А это вопрос педагогической техники», – А.С.Макаренко. Вся организация учебного процесса по теоретической механике всегда была посвящена этой задаче, и это связано с *особенностями предмета*, выделяющими его среди других дисциплин; с особыми затруднениями при усвоении отдельных вопросов.

Исследования интуитивных представлений и психологических процессов их формирования должны будут позволить усовершенствовать методику преподавания теоретической механики; помочь ввести системный метод обучения, позволяющий развить: 1) умение проникать в сущность изучаемого явления; 2) умение обобщать и расширять понятия; 3) *умение* мыслить аналогиями и *моделировать*; 4) понимание, что моделирование – это особое «искусство». Это особенно актуально для теоретической механики, для которой «*вся трудность состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы; а потом по этим силам изъяснить остальные явления*» (И.Ньютон).

Исследование выполняется в рамках НИР по госзаданию МОН РФ.

## ON SOME PROBLEMS IN THEORETICAL MECHANICS (MODELLING AS ART)

Lyudmila K.Kuzmina

Kazan National Research Technical University of A.N.Tupolev name – KAI

Adamuck, 4-6, Kazan-15, 420015, RUSSIA

*“Every knowledge is taking the beginning  
from sensations”*

**Yan Komenskiy**

(GREAT DIDACTICS)

This research is devoted to the specific problems of Mechanics Foundations. The actual questions are considered, that are connected with the level and quality of fundamental knowledge on Theoretical Mechanics in training-teaching of specialists (Engineers-Mechanicians) both in general and aviation engineering domain. The principles of subject teaching are discussed, that are led to the activating and governing methods of learning in High Engineering Education. In regard to this statement the general aspects of the peculiarities, inherent to the Theoretical Mechanics subject, that are distinguishing it from another basic disciplines of Engineering Education, are studied. Also of the special difficulties in the understanding and the education, that are generated by these peculiarities, are analyzed. The objective causes, having systematic

character, are selected and discovered. The general tenets are illustrated on the examples from the experience of our Education System in the Mechanical Engineering domain.

Our work is dedicated to actual problems that are related to the questions of study effectiveness in Theoretical Mechanics domain in High School, to the search of such methods of Education that could be at the same time both the teaching, activating and controlling ones in process of education. It was paramount subject for specific discussions of famous Mechanicians, Scientists-Teachers, well-known in Russia (SU) and in World in whole (A.N.Krylov, A.P.Minakov, N.G.Chetayev, A.Yu.Ishlinskiy, P.V.Kharlamov,...). The some general aspects of the peculiarities of Theoretical Mechanics subject are considered; the difficulties in education and understanding that are caused by these specific peculiarities are investigated. Moreover special analysis is showing, that these peculiarities have systematic character; and also it is revealed, that they are attributed by objective causes.

And it is the source of hindrance in the knowing of mechanics laws, and it is leading to prolonged adaptation process in the education in domain of Theoretical Mechanics.

*Theoretical Mechanics (it is Science about the motion of macro bodies in space and time) has the relation to all phenomena of Nature and Engineering Products; it is connected with all natural-scientific subjects (disciplines).*

The study of Mechanics in High School (University) has great importance and paramount significance to the forming skills and mentality of future specialist. Main aim of Theoretical Mechanics is discovery, cognition and practical application of general basic laws of mechanical motion. *The modern Engineering and University Education are impossible without knowing Mechanics. This leading principle was mortgaged as foundations for teaching in Engineering School by classical traditions of well-known Russian School of Mechanics, developed by fundamental researches of N.E.Zhukovskiy – “Father of Russian Aviation”, S.A.Chaplygin, N.G.Chetayev, A.N.Krylov, ...*

Principle task of Theoretical Mechanics is to give the general maturity-level, necessary skills, and – *to learn to study*. How?

“The difficulties are not in the question *that* it is necessary to do, but – *how* is it possible to do”, **A.S.Makarenko**.

All organizing of educational-teaching process on Theoretical Mechanics was always dedicated to this task; and it is caused the subject peculiarities that are distinguishing this discipline among another scientific-educational subjects; it is connected with the specific difficulties during learning of some sections – questions of subject. It is necessary to develop the special approach allowing possess *the art of modeling* due to mechanics.

It is very actual for Theoretical Mechanics, for that “*the all difficulty in whole is contained in what, that it is necessary on motion phenomena to understand the forces of Nature, and after on these forces – to explain another phenomena*”, – **Isaak Newton**.

*Acknowledgements:* The research is implemented with support from RF Education and Science Ministry for fundamental investigations.

**ПРИНЦИП ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО КВАЗИУСКОРЕНИЮ  
ДЛЯ БЕЗУДАРНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНЫХ МНОГООБРАЗИЙ  
УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ**

THE PRINCIPLE OF FEEDBACK ON THE QUASI-ACCELERATION  
FOR NON-IMPACT STABILIZATION OF PROGRAM MANIFOLD  
OF CONTROLLED SYSTEMS

Мухаметзянов И.А.

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия, [mukhia@mail.ru](mailto:mukhia@mail.ru)*

**Введение.** Описана процедура построения самонастраиваемого управляющего вектора для приведения состояния механических и обобщенных систем без удара в заданное многообразие за конечный промежуток времени в условиях неопределенности.

**Introduction.** The procedure of construction of the control vectors for bringing of the phase condition of mechanic and generalized systems to given manifold in finite time in the face of uncertainty is described.

**Постановка задачи.** Проблема синтеза законов управления механическими и обобщенными системами является одной из центральных задач теории и практики управления такими объектами как роботы–манипуляторы, преследующие тела и системы тел, краны, центрифуги, летательные, плавательные, космические аппараты постоянной и переменной массы, а также динамические аналоги экономических систем.

Весьма актуальными при решении этой проблемы представляются способы, пригодные в случае неполной информации о массо-инерционных характеристиках системы и о действующих на неё неуправляющих силах и возмущениях. Для решения проблемы управления такими системами Е.С.Пятницким был предложен в [1] «принцип декомпозиции», развитый авторами работ [2-5].

Этот принцип, предназначенный для приведения состояния механических систем со стационарными связями из любой точки фазового пространства в любую другую неподвижную точку, предполагает наличие вектора управления с размерностью, равной числу степеней свободы системы.

Имеет место достаточно много случаев, когда необходимо управлять системой так, чтобы система была приведена без удара из любой точки фазового пространства в заданное многообразие фазового состояния за конечный промежуток времени. Решение оказалось возможным множеством векторов управления. В связи с этим ставится задача построения этого множества с последующим выделением из него самонастраиваемого вектора управления минимальной размерности. Самонастройка осуществляется применением принципа обратной связи по квазиускорению [6].

**Построение множества векторов управления.** В работе [7] получено решение задачи приведения фазового состояния системы в заданную окрестность многообразия, образованного нестационарными голономными программными связями. В данной работе этот подход распространяется на решение задачи безударного приведения фазового состояния системы за конечный промежуток времени в многообразии, образованное голономными и неголономными программными связями. При этом сама система может иметь, кроме стационарных, и нестационарные связи. Получено множество векторов управления, обеспечивающих решение этой задачи самонастраиваемым управлением по принципу обратной связи по квазиускорению в дискретные моменты времени. А затем из этого множества выделяются векторы управления с размерностью, меньшей числа степеней свободы системы, в том числе вектора минимальной размерности. В случаях, когда размерность векторов управления больше минимальной, выделяются векторы с минимальной евклидовой нормой.

**Выводы.** Изложенные выше результаты позволяют решать различные задачи прикладного характера по управлению процессом безударной стыковки наземных, плавательных, летательных и космических аппаратов при их свободном движении в пространстве, процессом безударной посадки спускаемых аппаратов на подвижные платформы, характер движения которых известен не полностью, а также задачи управления динамическими аналогами экономических систем [8].

Для иллюстрации эффективности предложенного способа решения таких задач приводится пример управления процессом безударного придания положению тела заданной ориентации при преследующем движении центра масс тела по принципу пропорциональной навигации [9].

Таким образом, результаты работы можно рассматривать в качестве определенного вклада в теорию самонастраиваемого управления механическими и обобщенными системами, а также их динамическими аналогами, когда целью управления является

безударное приведение состояния системы в многообразии, образованное программными связями при неполной информации о массо-инерционных параметрах системы и действующих на нее неуправляющих силах и возмущениях.

При этом переходный процесс завершается за конечный промежуток времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 13-08-00535а).

### Литература

1. *Пятницкий Е.С.* // ДАН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 300-303.
2. *Матюхин В.И.* Универсальные законы управления механическими системами М.: МАКС Пресс, 2001. 249 с.
3. *Матюхин В.И.* // ДАН 2009. Т. 427. № 1. С. 44-47.
4. *Ананьевский И.М.* Непрерывное управление по обратной связи возмущенными механическими системами // ПММ. 2003. Т.67. Вып. 2. С. 163-178.
5. *Ананьевский И.М.* Синтез непрерывного управления механической системой с неизвестной матрицей инерции // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 3. С. 24-35.
6. *Мухаметзянов И.А.* Самонастраиваемое управление процессом безударного приведения состояния механических систем в заданное многообразие // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». № 3. 2013. С. 105-112.
7. *Мухаметзянов И.А.* О построении универсального алгоритма управления процессом сближения механических систем с заданным многообразием в условиях неопределенности // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». № 3. 2011. С. 3-14.
8. *Мухарлямов Р.Г.* Моделирование динамики простейших экономических объектов как систем с программными связями // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». № 3-4. 2007. С. 25-34.
9. *Кан В.Л., Кельзон А.С.* Теория пропорциональной навигации. Л.: Судостроение, 1965. 423 с.

## О ПРИМЕНЕНИИ ПРИНЦИПА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО КВАЗИУСКОРЕНИЮ

### IMPLEMENTING THE PRINCIPLE OF FEEDBACK ON THE QUASI- ACCELERATION

Мухаметзянов И.А., Чекмарева О.И.

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия, [spacefrogling@mail.ru](mailto:spacefrogling@mail.ru)*

**Введение.** Решена задача безударной стыковки двух подвижных объектов, один из которых является управляемым, движущимся в режиме преследующего тела по принципу пропорциональной навигации с целью стыковки со вторым объектом, движущимся непредсказуемым образом. При этом неуправляющие силы, в том числе сила сопротивления среды, считаются неизвестными. Для автоматического выбора оптимального значения управления предлагается самонастраиваемый способ, осуществляемый по «принципу обратной связи по квазиускорению» в дискретные моменты времени. Решение задачи получено как в случае преследующего тела постоянной, так и переменной массы, когда движение управляемого тела осуществляется реактивной силой. Во втором случае оценивается величина расходуемой в процессе управления массы.

**Introduction.** The problem of non-impact docking of two moving objects is solved, one of which is driven, moving in the body mode, pursuing the principle of proportional navigation to docking with the second object, moving unpredictably. In this non-control force, including force environmental resistance, considered to be unknown. To automatically select the optimal values of the control features self-adapting method, implemented by the "principle of feedback on the quasi-acceleration" at discrete points in time, is proposed. Solution of the problem is obtained as in the case of a haunting body of permanent mass, so as of variable mass, when the movement of the body is managed by reactive force. In the second case, the amount of mass, which expended in the process of control, is estimated.

**Постановка задачи.** Проблема управления процессом приведения механической системы из любой точки пространства фазового состояния в заданную точку за конечный

промежуток времени исследовалась такими учеными, как Е.С.Пятницкий, В.И.Матюхин, И.М.Ананьевский. В работах И.А.Мухаметзянова [1,2] был предложен универсальный метод, позволяющий решить задачу безударного приведения механических систем в заданное многообразие, образованное нестационарными программными связями, за конечный промежуток времени при размерности управляющих сил, меньшей числа степеней свободы системы. При этом предполагается, что массо-инерционные параметры системы и действующие на неё неуправляющие силы, в том числе возмущающие, известны неточно. Ранее этот метод был применен для управления безударной посадкой тела на подвижную платформу. Здесь ставится задача безударной стыковки подвижных объектов за конечный промежуток времени на примере управляемого преследующего тела, имеющего или постоянную, или переменную массу, стремящегося сблизиться с преследуемым телом, движущимся непредсказуемым образом, для стыковки с ним или захвата без удара.

**Основные результаты.** Решена задача безударной стыковки двух подвижных объектов на примере управляемого тела, движущегося в режиме преследования по принципу пропорциональной навигации с целью стыковки с преследуемым телом, движущимся непредсказуемым образом. Кроме того, неуправляющие силы, в частности, сила сопротивления среды, считаются неизвестными. Решение получено для управляемого тела как постоянной, так и переменной массы.

Для решения задачи используется уравнение относительного движения преследующего тела по отношению к преследуемому, в котором присутствуют случайные, но непрерывные и ограниченные силы, как активные, так и инерции. Вводится управляющая сила, представляющая собой сумму непрерывной и ступенчатой функций. Ступенчатая составляющая является величиной переменного знака, достаточно большой для того, чтобы нивелировать наличие возмущений. В результате процесс становится «квазиподобен» процессу безударной стыковки двух этих тел в идеальных условиях.

Такая управляющая сила строится для двух случаев, когда управляемое преследующее тело имеет или постоянную, или переменную массу. Во втором случае, когда управление осуществляется реактивной силой, оценивается величина расходуемой массы тела в процессе стыковки. Кроме того, предлагается алгоритм самонастраиваемого управления преследующим телом, позволяющий автоматически определять оптимальную величину ступенчатой управляющей силы, необходимой для безударной стыковки тел. Самонастройка осуществляется применением принципа обратной связи по квазиускорению в дискретные моменты времени, предложенного в [4].

**Выводы.** Применяя подход, предложенный в [2], и принцип обратной связи по квазиускорению в дискретные моменты времени решена задача самонастраиваемого



управления процессом безударной стыковки подвижных объектов как постоянной, так и переменной массы в условиях неопределенности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 13-08-00535а).

### Литература

1. *Мухаметзянов И.А.* О построении универсального алгоритма управления процессом сближения механических систем с заданным многообразием в условиях неопределенности // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – 2011. - №3. – С.3-14.
2. *Мухаметзянов И.А.* Безударное приведение состояния «черного ящика» в заданное многообразие // Доклады X Международной Четаевской конференции. – Казань: КНИТУ КАИ, 2012. – С.189-196.
3. *Мухаметзянов И.А., Чекмарева О.И.* Безударная посадка тела на подвижную платформу // Доклады X Международной Четаевской конференции. – Казань: КНИТУ КАИ, 2012. – С.197-204.
4. *Мухаметзянов И.А.* Самонастраиваемое управление процессом безударного приведения состояния механических систем в заданное многообразие // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – 2013. - №3. – С.105-112.

## УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИКОЙ СИСТЕМ С ПРОГРАММНЫМИ СВЯЗЯМИ

Р.Г. Мухарлямов, Москва, РУДН

## DYNAMICS CONTROL OF THE SYSTEM WITH PROGRAM CONSTRAINTS

R.G. Mukharlyamov

В ноябре 2014 г. исполняется 95 лет со дня рождения А.С. Галиуллина, заложившего основы динамики систем с программными связями. Первые работы в этом направлении были посвящены решению задач управления динамикой систем с переменной массой. Аналогии в механике систем переменной массы, в динамике производственных и технических систем, экономических и финансовых объектов позволили использовать уравнения и методы классической механики для решения задач управления и планирования.

In November 2014 marks the 95th anniversary of the birth of A.S. Galiullina, laid the foundations of the dynamics of systems with software links. The first works in this direction were devoted to the issues of managing the dynamics of systems with variable mass. The analogy in the mechanics of systems with variable mass, in the dynamics of the production and technical systems, economic and financial objects allowed to use equations and methods of classical mechanics for solving problems of control and planning.

**1. Введение.** Основные направления исследований по динамике систем с программными связями были сформулированы в работе [1] А.С. Галиуллина.

А.С. Галиуллин (26.11.1919-17.04.1999) проходил обучение в аспирантуре Казанского авиационного института под руководством Г.В. Каменкова. В 1930-40 годах в Казанском университете и авиационном институте Н.Г. Четаевым был организован научный семинар, впоследствии известный как Казанская школа устойчивости движения. Участниками этого семинара были М.Ш. Аминов, Г.Н. Багаутдинов, Е.Н. Берёзкин, Г.В. Каменков, П.А. Кузьмин, И.Г. Малкин, Ш.С. Нугманова, К.П. Персидский, Х.С. Муртазин. Исследования школы устойчивости были направлены на решение актуальных проблем развития авиации и ракетостроения. Участники этой школы и их последователи создали известные научные центры в Москве, в Казани, в Свердловске, в Алма-Ата.

В 1950 г. году А.С. Галиуллин защищает кандидатскую диссертацию, посвященную динамике ракет, занимается исследованием устойчивости движения. По совету Г.В. Каменкова осваивает новое направление, связанное с проблемами управления. В 1958 г. защищает диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук, в которой были заложены основы теории программного движения.

В связи с открытием в 1960 г. Университета дружбы народов А.С. Галиуллин переезжает в Москву. Будучи первым деканом факультета физико-математических и естественных наук и заведующим кафедрой теоретической механики основывает известную научную школу устойчивости и управления программным движением в РУДН.

Современные методы моделирования позволяют обеспечить требуемые свойства функционирования сложной системы на этапе составления уравнений динамики.

**2. Постановка задачи.** Движение механической системы с идеальными связями описывается уравнениями Лагранжа

$$q \in R_n, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)^T \lambda + \left( \frac{\partial f'}{\partial v} \right)^T \lambda', \quad \frac{dq}{dt} = v, \quad (1)$$

где  $T$  – кинетическая энергия,  $Q$  – вектор обобщенных сил. Множители  $\lambda, \lambda'$  могут рассматриваться как управления, необходимые для выполнения уравнений связей

$$f \in R_m, \quad f(q, t) = 0, \quad (2)$$

$$m + r \leq n. \quad f' \in R_r, \quad f'(q, v, t) = 0, \quad (3)$$

Решение  $q = q(t), v = v(t)$  системы (1), соответствующее начальным условиям  $q(t_0) = q^0, v(t_0) = v^0$ , удовлетворяет уравнениям связей (2),(3), если

$$\dot{f} = f_q v + f_t, \quad f(q^0, t_0) = 0, \quad \dot{f}(q^0, v^0, t_0) = 0, \quad f'(q^0, v^0, t_0) = 0, \quad (4)$$

и множители  $\lambda, \lambda'$  определяются из условий

$$\frac{df'}{dt} = 0 \quad \frac{df}{dt} = 0, \quad \frac{df}{dt} = \dot{f}, \quad (5)$$

с использованием уравнений (1) для вычисления производной  $dv/dt$ .

Если условия (4) не выполняются, то из уравнений (5) относительно функций  $f = f(q, t), f' = f'(q, v, t)$  следует, что решение уравнений (1) не удовлетворяет уравнениям связей (2),(3). Для стабилизации связей при численном решении уравнений динамики в [2] было предложено определять множители Лагранжа, используя вместо (5) уравнения возмущений связей

$$\omega, \alpha, k, \alpha > 0, k > 0. \quad \frac{df'}{dt} = -kf', \quad \frac{df}{dt} = -\omega^2 f - 2\alpha \dot{f}, \quad \frac{df}{dt} = \varphi, \quad (6)$$

При этом функции (2),(3) описывают интегральное многообразие системы дифференциальных уравнений динамики (1) [3].

Различные модификации метода Баумгарта [2] состояли в подборе коэффициентов системы уравнений (6) (например, [3-4]). По существу задача определения управлений  $\lambda, \lambda'$  сводится к построению уравнений динамики (1), частные интегралы которых описываются уравнениями связей (2),(3) [4]. Это возможно, если правые части уравнений (1) определяются в соответствии с равенствами

$$\frac{df'}{dt} = F'(f, \dot{f}, f', q, v, t), \quad \frac{d\dot{f}}{dt} = F(f, \dot{f}, f', q, v, t), \quad \frac{df}{dt} = \dot{f}, \quad (7)$$

$$F'(0, 0, 0, q, v, t) = 0. \quad F(0, 0, 0, q, v, t) = 0,$$

Правые части уравнений системы (7) могут быть определены в соответствии с дополнительными условиями [6]. Существенным является требование обеспечения стабилизации связей (2),(3) при численном решении уравнений динамики (1).

**3. Построение уравнений динамики технической системы.** Используя известные динамические аналогии, для описания динамики управляемых систем, содержащих элементы различной природы [7], экономических объектов и производственных систем [8] могут быть использованы те или иные формы уравнений классической механики. Представим уравнения динамики технической системы уравнениями Лагранжа

$$\frac{dq}{dt} = v \frac{d}{dt} \frac{\partial L^0}{\partial v} - \frac{\partial L^0}{\partial q} = a^0 + B^0 u, \quad (8)$$

Здесь  $L^0$  – лагранжиан системы,  $a^0$  – вектор непотенциальных сил,  $B^0 = B^0(q, v, t)$  – матрица коэффициентов,  $u$  – вектор управления размерности  $m + r$ , обеспечивающий выполнение уравнений связей (2),(3).

Введем функцию Лагранжа и диссипативную функцию

$$D = D(q, v, f, \dot{f}, f', t), \quad L = L(q, v, f, \dot{f}, f', t), \\ D(q, v, 0, 0, 0, t) = 0, \quad L(q, v, 0, 0, 0, t) = 0,$$

учитывающие возможные отклонения от уравнений связей, и запишем соответствующие уравнения динамики:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial q} = a^0 + B^0 u, \quad \frac{dq}{dt} = v, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} - \frac{\partial L}{\partial f} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{f}}, \quad \frac{df}{dt} = \dot{f}, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial f'} = -\frac{\partial D}{\partial f'}. \quad (11)$$

**4. Определение вектора управления.** Представим уравнения (9)-(11) в виде, разрешенном относительно производных:

$$\frac{dv}{dt} = \tilde{a} + Bu, \quad \frac{dq}{dt} = v, \quad (12)$$

$$g = (f, f'). \quad \frac{dg}{dt} = Sf + Kg, \quad \frac{df}{dt} = f, \quad (13)$$

Здесь вектор  $\tilde{a}$  и матрицы  $B, S, K$  являются функциями переменных  $q, v, t$ .

Уравнение для определения вектора управления  $u$  получается дифференцированием вектора  $g(q, v, t)$  с учетом уравнений (12),(13):

$$G' = g_v. \quad G = g_q, \quad Gv + G'(\tilde{a} + Bu) + g_t = Sf + Kg, \quad (14)$$

После определения вектора  $u$  из (14) уравнения динамики (12) принимают вид:

$$\frac{dv}{dt} = \hat{a} + B(G'B)(Sf + Kg), \quad \frac{dq}{dt} = v, \quad (15)$$

$$\hat{a} = \tilde{a} - B(G'B)^{-1}(Gv + G'\tilde{a} + g_t).$$

Система (15) допускает частные интегралы, определяемое равенствами

$$g(q, v, t) = 0. \quad f(q, t) = 0, \quad (16)$$

**5. Стабилизация связей.** Представим уравнения (15),(13),(16) в сокращенном виде:

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t) + M(x, t)y, \quad (17)$$

$$\frac{dy}{dt} = A(x, t)y, \quad (18)$$

$$y = h(x, t), \quad (19)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ B(G'B)^{-1}(SK) \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} v \\ \hat{a} \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix},$$

$$C = (I_m \ 0), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & C \\ S & K \end{pmatrix},$$

$I_m$  – единичная матрица. Уравнения (17),(19) имеют интегральное многообразие  $h(x, t) = 0$ , которому соответствует уравнение возмущений (18). Устойчивость решений уравнения (17) по отношению к множеству  $h(x, t) = 0$  определяется матрицей коэффициентов  $A(x, t)$ . Если матрица  $A$  является постоянной, то

устойчивость по отношению к функции  $h(x, t) = 0$  определяется знаком действительных частей корней характеристического уравнения системы (18). В случае  $A = A(x, t)$  условия устойчивости определяются методом функций Ляпунова [8].

Если тривиальное решение уравнения (18) устойчиво асимптотически, то стабилизация связей может быть достигнута даже при использовании простейших численных методов решения уравнений (17),(19). Пусть  $\|y^0\| \leq \varepsilon$ ,  $y^0 = h(x^0, t_0)$ , и для решения уравнения (17) используется метод Эйлера:

$$\begin{aligned} X^k &= a(x^k, t_k) + M(x^k, t_k)y^k, & x^{k+1} &= x^k + \tau X^k, \\ \tau &= t_{k+1} - t_k. & y^k &= h(x^k, t_k), \end{aligned}$$

Учитывая разложение функции  $y^{k+1} = h(x^{k+1}, t_{k+1})$  в ряд и уравнение (18), имеем:

$$y^{k+1} = (I_{2m+r} + \tau A^k)y^k + Y^{(k2)}, \quad (20)$$

где  $Y^{(k2)}$  – погрешность, определяемая остаточным членом разложения в ряд и погрешностями округления. Оценивая правую часть равенства (20), получаем

$$\|y^{k+1}\| = \|(I_{2m+r} + \tau A^k)\| \|y^k\| + \|Y^{(k2)}\|. \quad (21)$$

Следовательно, если  $\|y^k\| \leq \varepsilon$ ,  $\|Y^{(k2)}\| \leq (1-\gamma)\varepsilon$  и  $\|(I_{2m+r} + \tau A(x^k, t_k))\| \leq \gamma < 1$ , то выполняется ограничение  $\|y^{k+1}\| \leq \varepsilon$ , откуда следует, что  $\|y^k\| \leq \varepsilon$  при всех  $k = 1, 2, \dots$

Если для решения уравнений (17),(19) используется разностная схема

$$\begin{aligned} \sigma > 0, \quad \Delta x^k &= \tau(1-\sigma)X^k + \tau\sigma\bar{X}^k, & x^k &= x^k + \Delta x^k, \\ 2\alpha\sigma &= 1, \quad \alpha > 0, & \bar{x}^k &= x^k + \alpha\tau X^k, & \bar{X}^k &= a(\bar{x}^k, t_k + \alpha\tau) + M(\bar{x}^k, t_k + \alpha\tau)\bar{y}^k, \end{aligned}$$

то условие  $\|y^k\| \leq \varepsilon$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , будет выполняться при ограничениях

$$\left\| \left( I_{2m+r} + \tau A^k + \frac{1}{2} \left( (A^k)^2 \right) + \left( \frac{dA}{dt} \right)^k \right) \right\| \leq \gamma < 1. \quad \|Y^{k(3)}\| \leq (1-\gamma)\varepsilon,$$

Ограничения, накладываемые на матрицу  $A(x, t)$  при использовании метода Рунге-Кутты, получены в [9]. Для разностной схемы 4-го порядка они составляют неравенства

$$\left\| I_{2m+r} + \sum_{s=1}^4 \frac{\tau^s}{s!} A_s^k \right\| \leq \gamma < 1, \quad \left\| Y^{k(5)} \right\| \leq (1-\gamma)\varepsilon,$$

$$A_3 = \frac{d^2 A}{dt^2} + 3 \frac{dA}{dt} A + A^3, \quad A_2 = \frac{dA}{dt} + A^2, \quad A_1 = A,$$

$$A_4 = \frac{d^3 A}{dt^3} + 4 \frac{d^2 A}{dt^2} A + 3 \left( \frac{dA}{dt} \right)^2 + 6 \frac{dA}{dt} A^2 + A^4.$$

**6. Приложения.** Изложенные методы и алгоритмы были использованы для решения задач управления манипулятором на подвижном основании, мобильным роботом с обходом препятствий, электромеханической системой, адаптивной оптической системой, производственным предприятием и другими объектами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 13-08-00535.

### Список литературы

1. Галиуллин А.С. О задачах динамического программирования. Тр. РУДН им. П. Лумумбы, т. 5., вып. 2, М. С. 3-10.
2. Baumgarte J, Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // Comp. Math. Appl. Mech. Eng. No. 1 (1972). P. 1-16.
3. Ascher U.M., Hongsheng Chin, Petzold L.R., Reich S. Stabilization of constrained Mechanical systems with DAEs and invariant manifolds // J. Mechanics of Structures and Machines. 23 (1995). P. 135-158.
4. Amirouche F. Fundamentals of Multibody Dynamics. Theory and Applications. Birkhauser, Springer and Verlag. 2005. 684 p.
5. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. Т. 21. № 6. 1952. С. 659-670.
6. Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. М. Наука. 1986. 224 с.
7. Layton R.A. Principles of Analytical System Dynamics. N.-Y. Springer. 1998. 158 p.
8. Абрамов Н.В., Мухарлямов Р.Г., Киргизбаев Ж.К. Управление динамикой систем с программными связями: Монография. – Нижневартовск. Изд. Нижневарт. гос. ун-та. 2013. 202 с.
9. Mukharlyamov R.G., Assaye Walelgn Beshaw. Solving Differential Equation of Motion for Constrained Mechanical Systems // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Математика. Информатика. Физика». № 3, 2013. С. 81-92.

**ОСНОВНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ  
ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ РАЗЛИЧНОЙ  
ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ**

Шемелова О.В., Нижнекамск, НХТИ КГТУ

**Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)  
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения  
высшего профессионального образования «Казанский национальный  
исследовательский технологический университет», г. Нижнекамск**

**THE MAIN KINEMATIC AND DYNAMIC  
CHARACTERISTICS OF VARIOUS PHYSICAL SYSTEMS**

Chemelova o.v.

*Аннотация*

В работе рассматриваются аналогии между физическими характеристиками систем различной физической природы и механических систем. Эти аналогии позволяют использовать методы классической механики для исследования динамических процессов в системах, содержащих элементы различной физической природы.

*Ключевые слова:* системы различной физической природы, унифицированное множество переменных, математическое моделирование.

There are considered the analogy between the physical characteristics of the systems of different physical nature and mechanical systems. These analogies allow the use of methods of classical mechanics to the study of dynamic processes in systems containing elements of different physical nature.

Среди разнообразных явлений различной физической природы нередко можно встретить похожие явления, обнаруживающие одинаковые признаки и закономерности. В таких случаях говорят о физических аналогиях, или аналогичных системах [1, 2]. Современные системы управления имеют достаточно сложную структуру, содержащую



элементы различной физической природы. Исследование динамики таких систем, в первую очередь, требует построения общей математической модели, описывающей динамику все системы [3]. Кинематические и динамические аналогии, существующие между электрическими, механическими, акустическими и другими системами, давно с успехом используются при построении и исследовании математических моделей. Методы, основанные на применении аналогий, в ряде случаев оказываются весьма плодотворными при решении задач. Они позволяют сводить решения некоторых задач к решениям других (уже известных) задач (зачастую из другого раздела физики).

В работе предлагается обобщение и унификация множества переменных, которые описывают кинематику и динамику физической системы.

В [1] определяется унифицированное множество переменных, которое включает следующие известные величины: усилие, расход импульс и перемещение.

Данное унифицированное множество может быть с успехом использовано для получения уравнений динамики механической системы. Использование динамических аналогий позволяет строить уравнения динамики для систем различной физической природы [1, 3, 4].

Известные к настоящему времени динамические аналогии позволяют использовать методы классической механики для решения задачи управления системами, содержащими элементы различной природы, экономическими объектами и производственными системами. Процессы изменения состояния таких систем описываются дифференциально-алгебраическими уравнениями, составленными из кинематических соотношений, целей управления, уравнений связей и уравнений динамики, выраженных в обобщенных координатах или в канонических переменных.

Соответствующие физические величины можно представить унифицированным множеством в виде таблицы 1.

Таблица 1.

Унифицированные множества переменных для физических систем

Система	Усилие $e$	Расход $f$	Перемещение $q$	Импульс $p$
Механическая поступательная	Сила $F$	Скорость $v$	Положение $x$	Количество движения $p$
Механическая вращательная	Вращающий момент $\tau$	Угловая скорость $\omega$	Угол $\theta$	Момент количества движения $H$
Электрическая	Электродвижущая сила $e$	Сила тока $i$	Заряд $q$	Магнитный поток $\lambda$
Акустическая	Давление $P$	Скорость течения материала $Q$	Объем $\gamma$	Давление импульса $p_p$

Данная таблица позволяет сопоставить величины, аналогичные в каждой из четырех систем. Они указывают на динамическую аналогию, существующую между этими четырьмя системами.

Исследование всех систем различной физической природы может быть разделено на две части: на составление дифференциального уравнения, исходя из постановки задачи и физических законов, и на решение дифференциального уравнения.

Для построения уравнений динамики рассматриваются величины, которые характеризуют динамическое поведение систем различной физической природы. А так как уравнения динамики системы могут быть составлены в форме уравнений Лагранжа или в форме уравнений Гамильтона, среди динамических величин возможно провести некоторую классификацию.

Одним из основных положений для большинства наук является принцип сохранения энергии. В электрической, механической поступательной, механической вращательной и акустической системах энергия может быть в трех видах: кинетическая, потенциальная и тепловая. Кинетическая энергия системы обуславливается ее скоростью; потенциальная энергия системы обуславливается ее конфигурацией или деформацией. Во всех четырех системах – электрической, механической поступательной, механической вращательной и акустической, энергия, превращается в тепло в рассеивающей части системы. Энергия рассеяния (диссипации) определяется функцией рассеяния, или диссипативной функцией.

Как известно, кинетическая энергия может быть выражена через импульс, либо же является функцией скорости (расхода  $f$ ). В [1] предлагается называть кинетическую энергию, выраженную через расход  $T^* = T^*(f, q, t)$  кинетической коэнергией. При этом при составлении уравнений динамики систем в форме уравнений Лагранжа используется функция  $T^* = T^*(f, q, t)$ , т.е. кинетическая коэнергия, а уравнения Гамильтона составляются с использованием  $T = T(p, q, t)$ , т.е. кинетической энергии. Аналогично рассматриваются понятия потенциальной энергии  $V = V(q, t)$  и потенциальной коэнергии  $V^* = V^*(e, t)$ , а также  $D = D(f, t)$  – диссипативной функции и  $G = G(e, t)$  – диссипативной кофункции. В табл. 2 представлены известные динамические аналогии для величин, характеризующих динамическое поведение систем различной физической природы.

Как уже упоминалось ранее, построение уравнений динамики для систем различной физической природы можно составлять в форме уравнений Лагранжа и Гамильтона (в канонических переменных) [4, 5, 6]. При этом полученные уравнения содержат неопределенные множители Лагранжа  $\kappa$  и  $\mu$ . В результате определения выражений для множителей Лагранжа появляется система дифференциальных уравнений динамики, для которой уравнения связей являются интегралами.

Таблица 2.

Система		Механиче- ская посту- пательная	Механиче- ская враща- тельная	Электриче- ская	Акустиче- ская
Кинетическая энергия $T = T(p, q, t)$ и кинетическая коэнергия $T^* = T^*(f, q, t)$					
Кинетическая энергия	$T(p, q, t)$	$\frac{p^2}{2m}$	$\frac{H^2}{2I}$	$\frac{\lambda^2}{2L}$	$\frac{p_p^2}{2I_f}$
Кинетическая коэнергия	$T^*(f, q, t)$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$	$\frac{1}{2}L \cdot i^2$	$\frac{1}{2}I_f Q^2$
Потенциальная энергия $V = V(q, t)$ и коэнергия $V^* = V^*(e, t)$					
Потенциальная энергия	$V(q, t)$	$\frac{1}{2}kx^2$	$\frac{1}{2}k_\theta\theta^2$	$\frac{q^2}{2C}$	$\frac{V^2}{2C_f}$
Потенциальная коэнергия	$V^*(e, t)$	$\frac{F^2}{2k}$	$\frac{\tau^2}{2k_\theta}$	$\frac{1}{2}C \cdot e^2$	$\frac{1}{2}I_f Q^2$
Диссипативная функция $D = D(f, t)$ и кофункция $G = G(e, t)$					
Диссипативная функция	$D(f, t)$	$\frac{1}{2}bv^2$	$\frac{1}{2}b_\theta\omega^2$	$\frac{q^2}{2C}$	$\frac{1}{2}R_f Q^2$
Диссипативная кофункция	$G(e, t)$	$\frac{F^2}{2b}$	$\frac{\tau^2}{2b_\theta}$	$\frac{e^2}{2R}$	$\frac{P^2}{2R_f}$

Полученные уравнения Лагранжа второго рода преобразовывается к виду, разрешаемому относительно старших производных. Представление системы уравнений связей и уравнений Лагранжа второго рода в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка с известными частными интегралами позволяет использовать стандартные численные методы для решения уравнений движения.

В конечном итоге, можно сказать, что аналогии в динамических показателях различных систем позволяют описывать фазовое состояние систем различной физической природы в унифицированных переменных и использовать для исследования динамических процессов методы и модели классической механики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 13-08-00535.

## Литература

1. Layton, Richard A. Principles of analytical system dynamics. – Springer-Verlag New-York, Inc. – 1998. – 156 p.
2. Ольсон Г. Динамические аналогии. Пер. с англ. Б.Л. Коробочкина. Под ред. М.А. Айзермана. – М.: Гос. изд. иностр. лит-ры, 1947.
3. Мухарлямов Р.Г., Матухина О.В., Ахметов А.А. Управление динамикой систем, содержащих элементы различной физической природы // Вестник ТГГПУ, 2011. №2(24), С.25–37.
4. Шемелова О.В. Уравнения динамики управляемых систем с неголономными связями // Вестник Казанского технологического университета, № 12, 2013, С. 285–288.
5. Шемелова О.В. Управление динамикой электромеханических систем // Вестник Российского университета дружбы народов, сер. Прикладная математика и информатика, № 1, 2003, С. 63–71.
6. Шемелова О.В. Уравнения динамики управляемой системы в канонических переменных // Вестник Российского университета дружбы народов, сер. Прикладная математика и информатика, № 1, 2004, С. 64–70.

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ НЕЙРОСЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ В НЕФТЕПРОВОДНОМ ТРАНСПОРТЕ

### APPLICATION OF NONLINEAR DYNAMICS METHODS IN THE CONSTRUCTION OF NEURAL NETWORK MODELS IN THE PIPELINE TRANSPORTATION

*Н.Т. Габдрахманова,*

*Российский университет дружбы народов, Россия, г. Москва*

Аннотация. Изложены основные результаты построения математической модели для решения задачи прогнозирования расхода электроэнергии на перекачку нефти по линейному участку нефтепровода. Показано, что при выборе архитектуры нейросетевой модели временного ряда можно использовать методы нелинейной динамики. Приведены основные результаты построения моделей по предложенному методу с использованием натуральных данных.

Abstract. The main results of a mathematical model to solve the problem of predicting power consumption for pumping oil through the linear portion of the pipeline. It is shown that the choice of the architecture of neural network time series model can use the methods of nonlinear dynamics. The main results of constructing models by the proposed method using full-scale data.

Современные условия развития транспорта нефти и газа обуславливают широкое внедрение автоматизированных систем управления технологическим процессом. Транспорт нефти и газа сопряжены со значительными затратами электроэнергии. Согласно [1] доля электроэнергии в себестоимости транспорта нефти составляет около 35%. В настоящее время существует множество методик [2], позволяющих рассчитать расход электроэнергии на перекачку нефти в зависимости от режимов перекачки, от характеристик трубы, реологических свойств нефти и т.д. Однако эти методики не удовлетворяют современным требованиям.

В предыдущих работах автора [3] изложены основные результаты построения нейросетевой модели идентификации для вычисления расхода электроэнергии на перекачку нефти. Верификация показала, что данная модель позволяет с высокой достоверностью рассчитать расход электроэнергии. Недостатком модели является то, что точность вычисления высока только в том случае, если погрешность входных данных нейросетевой модели невелика. Поэтому, в случае использования модели идентификации для прогноза расхода электроэнергии, необходимо построить комитет моделей. А именно, необходимо построить прогнозные модели для вычисления недостоверно известных значений массива входных данных и модель идентификации. Остановимся на принципах

построения модели первого типа. В качестве примера возьмем входную переменную – вязкость перекачиваемой нефти. Проведённые авторами исследования временных рядов температуры атмосферы, вязкости нефти показали, что данные ряды имеют фрактальную структуру [4]. С математической точки зрения фрактальный объект обладает дробной размерностью. Другое важное свойство, которым обладают почти все фракталы – свойство самоподобия (масштабная инвариантность). Приведём основные результаты наших исследований.

На рис. 1 приведен график временного ряда вязкости. По оси абсцисс отложены точки наблюдений, по оси ординат нормированные значения уровней временного ряда соответствующего показателя.

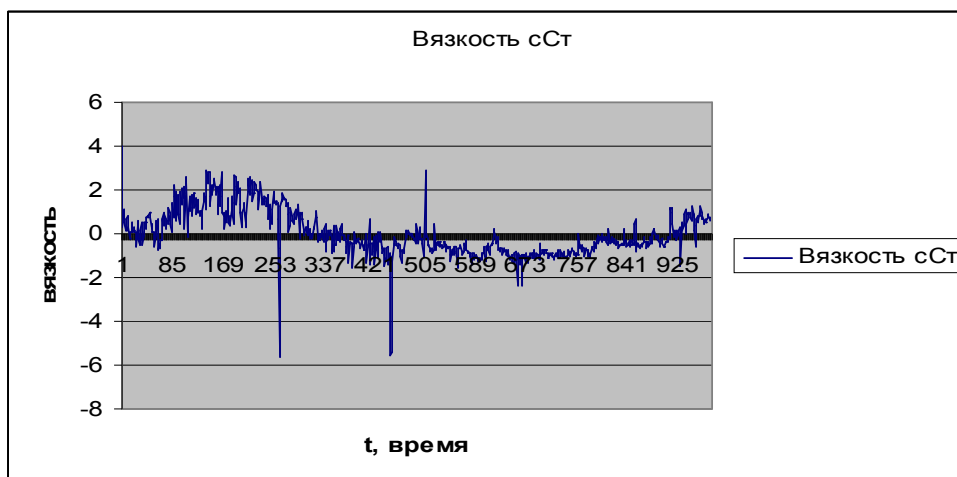


Рис.1. График изменения во времени нормированных значений кинематической вязкости ( $\text{м}^2/\text{с}$ ) нефти.

Вычислены основные статистические характеристики показателей.

Коэффициент выборочной корреляции между температурой и вязкостью равен:  $r = -0.66251$ ; между температурой и плотностью:  $r = -0.72369$ ; между плотностью и вязкостью:  $r = 0.591$ .

Для изучения наличия самоподобия в изучаемом процессе вычислен параметр Херста (при помощи пакета Fraktan 4.4). Известно, что непрерывный стохастический процесс считается самоподобным, если  $0,5 \leq H \leq 1$ . Для вязкости нефти: показатель Херста  $H$  равен  $0,8857$ , фрактальная размерность  $D = 2 - H = 1.1143$ . Корреляционная размерность равна  $C = 3$ . Полученные вычисления говорят о том, что при построении прогнозной модели можно использовать методы нелинейной динамики[4].

Результаты вычислений автокорреляционной функции и показателей Херста свидетельствуют о самоподобном характере временных рядов. Полученный результат

подтверждается и тем, что реологические свойства имеют высокий коэффициент корреляции с температурой. Известно, что именно исследования временных рядов температуры привели к открытию свойства самоподобности в процессах. Приведённые результаты исследования использовались в дальнейшем при выборе методов моделирования и структуры модели.

По данным временного ряда вязкости построена нейросетевая модель типа многослойный персептрон (MLP)

$$y(n+1) = F(y(n), y(n-1), \dots, y(n-p+1)) \quad (1)$$

где  $F$  – некоторая нелинейная функция своих аргументов. Архитектура MLP выбрана с использованием методов нелинейной динамики. Для нашей прогнозной нейросетевой модели временного ряда вязкости вычислено значение  $p$  в (1) по формуле [4]:

$$p = [2C] + 1, \text{ где } C \text{ – корреляционная размерность.}$$

Вывод. В настоящее время, собранная статистическая информация на нефтеперекачивающих станциях используется при решении производственных вопросов, однако методы обработки этой информации основаны главным образом на несложных арифметических операциях. Проведенные исследования свидетельствуют о возможности решения различных управленческих задач на основе модели идентификации расхода электроэнергии. Круг решения задач на основе модели идентификации может быть расширен при условии построения дополнительных к ней моделей и использовании комитета моделей.

Литература.

1. Методика расчета потребления электроэнергии на транспорт нефти по магистральным нефтепроводам. ГУП «ИПТЭР», Уфа, 2004.
2. Регламент разработки технологических карт, расчета режимов работы магистральных нефтепроводов ОАО «АК «Транснефть», Москва, 2008.
3. Козачук Б.А., Габдрахманова Н.Т. Применение нейронных сетей для прогнозирования расхода электроэнергии при транспорте нефти. Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов, ГУП «ИПТЭР», Уфа, 2009
4. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Руслы и джокеры: о новых методах прогноза поведения сложных систем.// Препринт ИМП ИИ.М. В Келдыша РАН, 2001.

## ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАДАННОГО ДВИЖЕНИЯ ТРЕХЗВЕННОГО ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО МАНИПУЛЯТОРА

*А.В. Соколов*

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

## CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL MODELS OF THE MOTION ASSIGNED THREE-TIER ELECTROMECHANICAL MANIPULATOR

*A.V. Sokolov*

*Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia*

**Questions of stability of program movement of electromechanical robots are designed. Deals with the construction of mathematical models that describe the kinematics and dynamics of the controlled manipulation of systems with software links. Investigates conditions of asymptotic stability of the software motion of a mechanical system with holonomic and non-holonomic constraints.**

**Исследуются условия асимптотической устойчивости движения модели трехзвенного управляемого электромеханического манипулятора. Рассматриваются вопросы построения математических моделей, описывающих кинематику и динамику управляемых манипуляционных систем с программными связями. Исследуются условия асимптотической устойчивости программного движения механической системы с голономными и неголономными связями.**

Для получения уравнений программных связей используются методы решения обратных задач качественной теории дифференциальных уравнений. Правые части, полученных таким способом дифференциальных уравнений, содержат произвольные функции, выбором которых можно управлять направлением движения по многообразию, соответствующего уравнениям связей, и в его окрестности. Это позволяет обеспечить устойчивость многообразия, распределение семейства траекторий в данной области, необходимую точность выполнения уравнений связей при численном решении и другие свойства. Для составления уравнений динамики можно воспользоваться дифференциальными уравнениями в форме Лагранжа. Переходя к 4-х мерным однородным координатам, система дифференциальных уравнений может быть записана в матричном виде [1]. Математическая модель робота-манипулятора включает в себя дифференциальные уравнения, описывающие электрические процессы в цепях электродвигателей приводов.

Исследуются условия асимптотической устойчивости движения модели трехзвенного управляемого электромеханического манипулятора [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код 13-08-00535.



## Литература

1. Мухарлямов Р.Г. Управление программным движением многозвенного манипулятора // Вестник РУДН, сер.: Прикладн. матем. и информ. Москва. 1998. №1. с. 22-40.
2. Соколов А.В. Управление динамикой электро-механического манипулятора // Вестн. РУДН. сер.: Прикладн. матем. и информ. Москва. 2003. № 1. С. 46–53.

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ В ОДНОМ РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

Маркеев А.П.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

## STABILITY OF A PLANAR ROTATION OF A SATELLITE

Markeev A.P.

A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

The stability results of a planar resonant rotation of a satellite in an elliptic orbit in a particular degeneracy case of the Hamiltonian of the perturbed motion are described.

*Приведены результаты исследования устойчивости плоского резонансного вращения спутника на эллиптической орбите в одном частном случае вырождения функции Гамильтона возмущенного движения.*

Рассмотрим плоское движение спутника относительно центра масс на эллиптической орбите. Через  $J_i$  обозначим момент инерции спутника относительно его главной центральной оси  $Ox_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Ось  $Ox_2$  во все время движения перпендикулярна плоскости орбиты, оси же  $Ox_1, Ox_3$  находятся в плоскости орбиты. Через  $\theta$  обозначим угол между осью  $Ox_3$  и радиус - вектором центра масс спутника относительно притягивающего центра. Пусть  $e$  — эксцентриситет орбиты, а  $\nu$  — истинная аномалия. Движение спутника относительно центра масс описывается дифференциальным уравнением второго порядка [1]

$$(1 + e \cos \nu) \frac{d^2 \theta}{d\nu^2} - 2e \sin \nu \frac{d\theta}{d\nu} + \frac{3(J_1 - J_3)}{J_2} \sin \theta \cos \theta = 2e \sin \nu \quad (1)$$

Если моменты инерции и эксцентриситет связаны соотношением  $(J_1 - J_3) = 2eJ_2$ , то это уравнение допускает [1] частное решение

$$\theta = \theta_* = \frac{\nu}{2} \quad (2)$$

Из неравенства треугольника для моментов инерции следует, что эксцентриситет орбиты должен при этом лежать в промежутке

$$0 < e \leq \frac{1}{2} \quad (3)$$

В соответствии с решением (2) спутник вращается в плоскости орбиты, совершая в абсолютном пространстве три оборота за время, равное двум периодам обращения центра масс по орбите.

Устойчивость вращения (2) исследовалась ранее [2,3]. Показана неустойчивость или устойчивость по Ляпунову для всех значений эксцентриситета из области (3), кроме одного значения  $e = e_0 = 0.054773$ . При  $e = e_0$  члены четвертой степени разложения функции Гамильтона в ряд в окрестности невозмущенного движения (1) вырождаются [3]. Поэтому строгое решение задачи об устойчивости требует учета членов выше четвертой степени в разложении функции Гамильтона в ряд. В докладе показано, что при  $e = e_0$  движение (2) будет устойчивым.

Как и в [3], введем возмущения  $q, p$  при помощи равенств

$$\theta = \theta_* + \frac{q}{1 + e_0 \cos v}, \quad \frac{dq}{dv} = p$$

Пусть  $u, v$  — начальные значения переменных  $q, p$ , а  $u_1, v_1$  — их значения при  $v = 2\pi$ . По теореме Лиувилля отображение  $u, v \rightarrow u_1, v_1$  сохраняет площадь. Это отображение имеет неподвижную точку  $u = v = 0$ , которая соответствует исследуемому движению спутника (2). Задача об устойчивости движения (2) эквивалентна задаче об устойчивости неподвижной точки  $u = v = 0$  отображения. Для исследования устойчивости неподвижной точки  $u = v = 0$  используем алгоритм из статьи [3].

Вычисления показывают, что линеаризованное в окрестности точки  $u = v = 0$  отображение  $u, v \rightarrow u_1, v_1$  представляет собой поворот на угол  $\alpha \approx 104^{\circ}40'$ . Для такого значения  $\alpha$  корни  $\rho = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$  характеристического уравнения матрицы линеаризованного отображения удовлетворяют неравенствам  $\rho^m \neq 1$  ( $m = 1, 2, \dots, 6$ ), т.е. резонансы до шестого порядка отсутствуют. При помощи аналитического канонического преобразования  $u, v \rightarrow \xi, \eta$  приведем отображение  $u, v \rightarrow u_1, v_1$  к его нормальной форме [4-6] до членов пятой степени включительно. После некоторых вычислений найдем, что в новых переменных отображение не будет содержать члены второй, третьей и четвертой степеней и запишется в виде

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi + \frac{\gamma}{4} \eta (\xi^2 + \eta^2)^2 + \dots \\ \eta - \frac{\gamma}{4} \xi (\xi^2 + \eta^2)^2 + \dots \end{pmatrix}, \gamma = -698.956746 \quad (4)$$

Многообразием обозначена совокупность членов не ниже шестой степени относительно  $\xi, \eta$ .

В симплектических полярных координатах  $R, \psi$ , вводимых равенствами

$$\xi = \sqrt{2R} \sin \psi, \quad \eta = \sqrt{2R} \cos \psi$$

отображение (4) запишется в виде

$$R_1 = R + O(R^{7/2}), \quad \psi_1 = \alpha + \psi + \gamma R^2 + O(R^{5/2})$$

Так как  $\gamma \neq 0$ , то в любой достаточно малой окрестности начала координат существует [6] кривая инвариантная при отображении (4). Поэтому неподвижная точка отображения устойчива. Тем самым утверждение об устойчивости вращения спутника (2) при значении эксцентриситета, равном  $e_0$ , доказано.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

### Литература

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М. Наука, 1965. 416 с.
2. Хентов А.И. Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника Земли вокруг своего центра масс // Космические исследования. 1968. Т.6. Вып.5. С. 793 - 795.
3. Маркеев А.П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем. // Известия РАН. Механика твердого тела. 2004. №6. С. 3 - 12.
4. Birkhoff G.D. Surface transformations and their dynamical applications. // Acta Math. 1922. V.43. March. P.1 - 119.
5. Зигель К.Л. Лекции по небесной механике. М.: Изд - во иностр. лит. 1959. 300 с.
6. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, НЕСУЩЕГО ПОДВИЖНУЮ МАТЕРИАЛЬНУЮ ТОЧКУ

Б.С. Бардин, А.С. Панёв

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», Москва, Российская Федерация.**

### Investigation of motion of solid body, with the internal mobile point mass

**Введение.** Среди различных типов современных самоходных мобильных роботов особую группу образуют вибрационные устройства, перемещающиеся за счет действия сил инерции, вызванных относительным движением внутренних элементов. Особенность такого типа мобильных роботов заключается в том, что они просты по конструкции: не требуют движителей, таких как колеса или гусеницы. Так как вибрационные роботы не нуждаются во внешних движителях, то их можно конструктивно выполнять в виде запаянных капсул, что делает их устойчивыми к агрессивному воздействию внешней среды, а также создает условия для их применения, как на твердых поверхностях, так и в жидкостях. Это делает их перспективными для современной космической отрасли. В частности, подобные устройства могут найти применение для исследования поверхностей удаленных небесных тел: астероидов, планет солнечной системы и их спутников.

#### **Introduction.**

Among the various types of modern self-propelled mobile robots form a special group of vibrating devices moving through the action of forces of inertia caused by the relative motion of the internal components. The peculiarity of this type of mobile robots is that they are simple in design not require propulsion such as wheels or tracks. Since vibrating robots do not need an external propellers, they can perform as a structurally sealed capsules that makes them resistant to aggressive external environment and creates the conditions for their application, as on hard surfaces and in liquids. This makes them promising for advanced space industry. In particular, these devices can be used to study surfaces distant celestial bodies: asteroids, solar system planets and their satellites.

**Постановка задачи.** Задачи динамики твердого тела, движущегося посредством относительного перемещения в нем одной или нескольких материальных точек, рассматривались в работах [1,2]. В данной работе исследования проведены аналитическими методами. Рассматривается прямолинейное движение по горизонтальной плоскости механической системы, состоящей из несущего тела (корпуса) массой  $M$ , непосредственно взаимодействующего с плоскостью, и материальной точки массы  $m$ , совершающей круговое движение относительно центра масс корпуса с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Движение системы будем рассматривать в вертикальной плоскости, в которой введена абсолютная система координат  $OXY$ . С корпусом жестко связана подвижная система координат  $O_1\xi\eta$ . Положение центра масс корпуса  $O_1$  определяется координатами  $x$  и  $y$  абсолютной системы координат. Между корпусом и плоскостью опоры действуют силы сухого (кулонова) трения,  $k$  – коэффициент сухого трения,  $N$  – нормальная составляющая силы, действующая на корпус со стороны плоскости опоры (сила нормального давления),  $g$  – ускорение свободного падения,  $R$  – радиус окружности, по которой движется материальная точка. Положение материальной точки задается углом  $\varphi$  (рис. 1). Пусть  $\varphi_0$  – значение угла  $\varphi$  в начальный момент времени. Тогда уравнения движения системы запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + m(\ddot{x} + R\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)) = F_c \\ M\ddot{y} + m(\ddot{y} + R\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)) = -(M + m)g + N \end{cases} \quad (1)$$

В данной работе принята модель сухого кулоновского трения (не учитывается сила вязкого трения между корпусом и поверхностью опоры):

$$F_c = \begin{cases} -kN \operatorname{sign}(\dot{x}), & \dot{x} \neq 0 \\ m\ddot{\xi}, & \dot{x} = 0 \text{ и } |-m\ddot{\xi}| \leq kN \\ -kN \operatorname{sign}(-m\ddot{\xi}), & \dot{x} = 0 \text{ и } |-m\ddot{\xi}| > kN \end{cases} \quad (2)$$

Мы предполагаем, что параметры системы выбраны так, что в момент начала движения и после него корпус совершает поступательное движение.

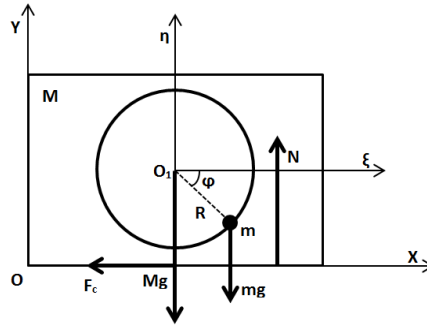


Рис. 1. Силы, действующие на систему

Для дальнейшего исследования вводятся безразмерные переменные времени и координаты, функция, характеризующая силу сухого трения, и дополнительный параметр  $\mu$ :

$$t = \frac{t'}{\omega}, \quad x = \frac{Rmx'}{M+m}, \quad f_c = \frac{F_c}{Rm\omega^2}, \quad \mu = \frac{(M+m)g}{Rm\omega^2} \quad (3)$$

Пусть в начальный момент времени тело покоится на плоскости, а материальная точка, вращаясь с постоянной угловой скоростью, находится на вертикали в нижней точке. Также предполагаем, что точка вращается против часовой стрелки. Тогда уравнение движения примет вид:

$$\dot{u} = \sin(t) + f_c^{-\frac{\pi}{2}}, \quad (4)$$

где  $u = \dot{x}$ , в дальнейшем обозначении безразмерного времени  $t'$  штрих «'» будем опускать

$$f_c^{-\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} -k(\mu + \cos(t)) \operatorname{sign}(u), & u \neq 0 \\ -\sin(t), & u = 0 \text{ и } |\sin(t)| \leq k(\mu + \cos(t)) \\ -k(\mu + \cos(t)) \operatorname{sign}(\sin(t)), & u = 0 \text{ и } |\sin(t)| > k(\mu + \cos(t)) \end{cases} \quad (5)$$

**Условия безотрывного движения. Зоны замедления.** Для исследования движения тела по горизонтальной плоскости потребуем выполнение двух условий.

1. Условие, при котором тело сможет начать движение из состояния покоя.
2. Условие, при котором тело будет двигаться без отрыва от горизонтальной плоскости.

Первое условие будет выполнено, если существует такой момент времени, что горизонтальная составляющая силы инерции, приложенной к материальной точке, равна по абсолютной величине предельному значению силы сухого трения, т.е. если уравнение  $\sin t = \mp k(\mu + \cos t)$

имеет действительные решения. Нетрудно показать, что последнее будет выполнено, если имеет место неравенство

$$k^2 \leq \frac{1}{\mu^2 - 1} \quad (7)$$

Второе условие будет выполнено, если во время движения вертикальная составляющая силы инерции по абсолютной величине не превзойдет силы тяжести, приложенной в центре масс системы, т.е. если уравнение

$$\mu + \cos t = 0 \quad (8)$$

не имеет действительных решений. Чтобы обеспечить выполнение данного условия, далее полагаем  $\mu \geq 1$ .

Найдем корни уравнения (6)

$$\begin{cases} t_1 = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k(\mu - 1)} \right) \\ t_2 = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1 + \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k(\mu - 1)} \right) \end{cases} \begin{cases} t_3 = 2\pi - t_2 \\ t_4 = 2\pi - t_1 \end{cases} \quad (9)$$

Моменты времени  $t_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) являются граничными точками интервалов  $(t_2, t_3)$  и  $(t_4, t_1)$ , на которых ускорение тела противоположно направлению скорости или равно нулю. При прохождении первого из указанных интервалов материальная точка находится в верхней части траектории движения, при прохождении второго – в нижней части. Указанные интервалы назовем соответственно *верхней и нижней зонами замедления трением*.

**Анализ режимов движения корпуса.** Рассмотрим один вид движения – движение с залипанием (остановкой) корпуса, при прохождении точечной массы верхней зоны замедления. В этом случае в некоторый момент времени, предшествующий моменту времени  $t_3$ , скорость корпуса должна равняться нулю. Поэтому, интегрируя уравнение (4) с начальными условиями  $u(t_1) = 0$  на интервале времени  $(t_2, t_3)$  и требуя  $u(t_3) \leq 0$ , приходим к следующему неравенству

$$-\operatorname{arctg}(k) + \frac{\sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{(k^2 + 1)\mu k} \leq 0, \quad (10)$$

которое гарантирует, что корпус остановится при прохождении верхней зоны замедления. Действуя аналогично, можно показать, что условие, остановки тела в нижней зоне замедления также обеспечивается выполнением неравенства (10). Это означает, что если тело остановится при прохождении верхней зоны замедления, то оно обязательно остановится и при прохождении ею нижней зоны замедления. Кроме того, несложно показать, что расстояние пройденное телом при движении вперед равно расстоянию, которое тело проходит при движении назад. То есть корпус совершает движение подобно тому, как двигалось бы твердое тело по абсолютно гладкой поверхности. Таким образом, данный режим является периодическим, а движение ограниченным по горизонтальной оси.

Если неравенство (11) выполнено с противоположным знаком, т.е.

$$-\operatorname{arctg}(k) + \frac{\sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{(k^2 + 1)\mu k} > 0, \quad (11)$$

то тело не останавливается при прохождении верхней зоны замедления. В этом случае корпус под действием силы инерции разгоняется так, что не остановится в верхней зоне замедления и проскакивает ее без остановки.

Определим теперь условие, при котором тело не остановится при прохождении нижней зоны замедления. Исследуем случай, когда тело остановится ровно на границе нижней зоны замедления. Для этого проинтегрируем уравнение (5) на промежутке  $(t_1, t^*)$  и  $(t^*, t_1 + 2\pi)$  и при условии, что  $u(t_1) = u(t^*) = u(t_1 + 2\pi) = 0$  и получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} -\cos(t^*) + \cos(t_1) - k\mu(t^* - t_1) - k(\sin(t^*) - \sin(t_1)) = 0 \\ \cos(t^*) - \cos(t_1) + k\mu(t_1 + 2\pi - t^*) + k(\sin(t_1) - \sin(t^*)) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

где  $t^*$  момент остановки корпуса после прохождения верхней зоны замедления. Решив эту систему уравнений получим аналитическое условие периодического режима движения (13).

$$\begin{aligned} & \cos\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2(\mu^2-1)}}{k(\mu-1)}\right)\right) + \pi - \frac{-\sin\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2(\mu^2-1)}}{k(\mu-1)}\right)\right)}{\mu} \\ & \pm \sqrt{\frac{\sin^2\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2(\mu^2-1)}}{k(\mu-1)}\right)\right) - \left[(\pi k\mu)^2 - 2\pi k\mu \cos\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2(\mu^2-1)}}{k(\mu-1)}\right)\right)\right]}{\mu}} \\ & - \cos\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2(\mu^2-1)}}{k(\mu-1)}\right)\right) + \pi k\mu = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

1. если данное выражение меньше или равно нулю, то тело будет совершать периодическое движение с остановкой только в нижней зоне замедления.
2. если данное выражение больше нуля, то тело не остановится ни в нижней ни в верхней зонах замедления, то есть движение в общем случае не будет периодическим.

Покажем, что в случае 2, существует некоторый периодический режим движения с началом движения в момент времени  $t_1^*$  и остановкой в момент времени  $t_2^*$ . Если это так, то имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -\cos(t_2^*) + \cos(t_1^*) - k\mu(t_2^* - t_1^*) - k(\sin(t_2^*) - \sin(t_1^*)) = 0 \\ \cos(t_2^*) - \cos(t_1^*) - k\mu(t_1^* - t_2^* + 2\pi) + k(\sin(t_1^*) - \sin(t_2^*)) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Численные исследования показали, что система вида (14) имеет единственное решение в области слева от кривой 3 на рисунке 2.

Покажем, что данный режим движения устойчив асимптотически, для этого предположим, что движение начинается с некоторой малой начальной скоростью  $\varepsilon$ . Таким образом используя условие малости  $\varepsilon$ , получаем:

$$u(t_1 + 2\pi n) = \varepsilon \cdot \Delta^n + O(\varepsilon^2), \quad (15)$$

где

$$\Delta = \frac{-\sin(t_2^*) - k\mu - k\cos(t_2^*)}{\sin(t_2^*) - k\mu - k\cos(t_2^*)}, \quad (16)$$

проведя несложное математическое исследование установим что  $0 < \Delta < 1$ , следовательно уравнение (15) представляет из себя сжимающее отображение причем,  $u(t_1^* + 2\pi n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то есть периодический режим устойчив асимптотически.

Предположим, что тело начинает движение с такой скоростью, что не останавливается ни в нижней, ни в верхней зонах замедления и не меняет направление движения на промежутке одного полного оборота точки, тогда справедливо равенство:

$$u(t_1^* + 2\pi n) = u(t_1^*) - 2\pi k\mu n,$$

то есть за каждый период скорость уменьшается на константу  $2\pi k\mu n$ , до тех пор пока в момент времени  $u(t_1^* + 2\pi n) = 0$ , тогда движение будет иметь характер одного из описанных выше в зависимости от параметров системы.

На рис. 2 в плоскости параметров задачи изображены области, в которых имеют место три, рассмотренные выше, режима движения. Область существования движения находится слева от кривой (1). Область между кривыми (1) и (2) определяет движение с залипанием тела, при прохождении верхней зоны замедления; между кривыми (2) и (3)



расположена область, в которой возможно движение без залипания при прохождении верхней зоны замедления и с залипанием в нижней зоне замедления. В области слева от кривой (3) характерным движением является движение без залипания.

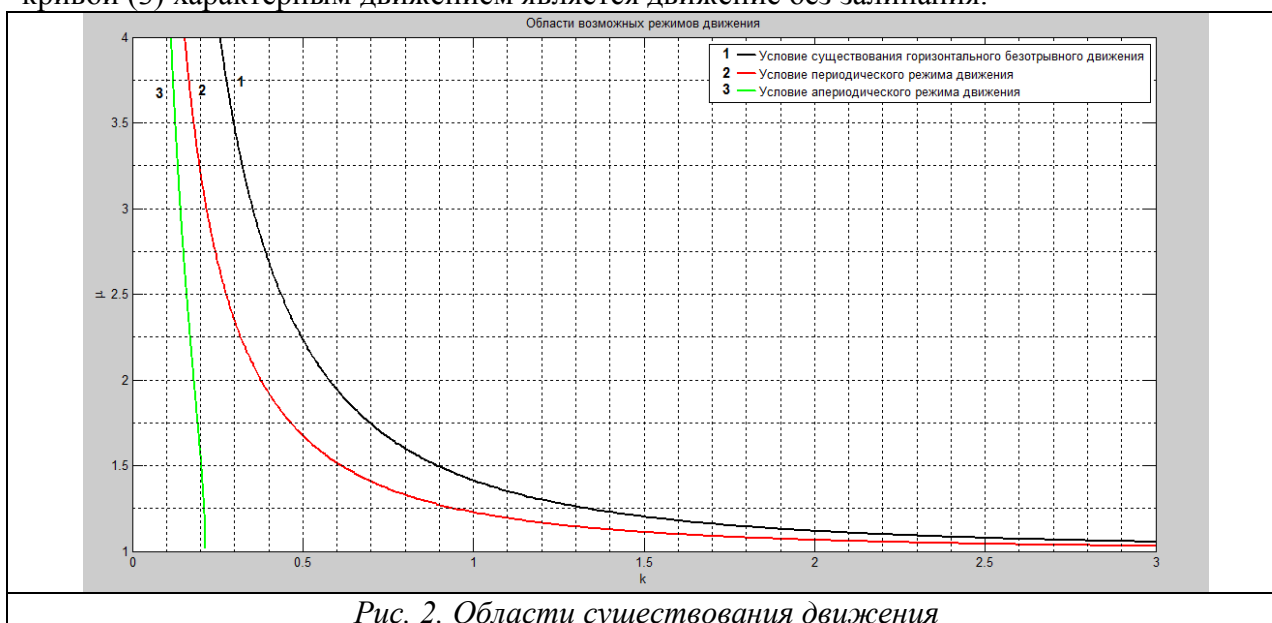


Рис. 2. Области существования движения

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда.

#### Библиографический список

1. Болотник Н.Н., Зейдис И.М., Циммерманн К., Яцун С.Ф. Динамика управляемых движений вибрационных систем. // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. Т.70, №№5. С. 157-167.
2. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы. // ПММ. 2006. Т.70 № Вып. 6. С. 915-946.

**ИЗУЧЕНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С  
БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ О  
КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ ПРИ ЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СО СМЫЧКОМ**

**STUDY OF THE APPEARED SELF-OSCILLATIONS IN SYSTEMS WITH INFINITE  
DEGREES OF FREEDOM EXAMPLED IN A TASK OF VIBRATIONS OF A ROD AND  
ITS INTERACTION WITH A BOW**

**Вильке В.Г. д.ф-м.н. профессор, Шаповалов И.Л. аспирант**

**Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия**

Контактное взаимодействие двух тел в ряде случаев сопровождается возникновением колебаний частей тел друг относительно друга. Колебания подобного рода называются автоколебаниями или релаксационными колебаниями [2, 3, 4]. Их возникновение связано с притоком энергии в систему от внешнего источника и с наличием нелинейности в законе, описывающем силовое взаимодействие тел. Примерами механических систем с одной степенью свободы, в которых возникают автоколебания, может служить маятник Фруда или груз на ленте транспортера, в которых используется модель сухого трения, когда сила трения покоя превосходит силу трения скольжения. Аналогичная модель позволяет найти периодические движения в системе с двумя степенями свободы [5, 6, 7]. При описании динамики колесных экипажей популярна модель взаимодействия шин с дорогой, называемая «магической формулой», в которой сила трения представляется комбинацией двух арктангенсов, зависящих от скорости скольжения шины по дороге, а также формула в виде многочлена от этой скорости и ее модуля [8].

In some cases the contact interaction of two bodies can be accompanied by vibrations of parts of the bodies relative to each other. The vibrations are referred as auto-oscillations or relaxation oscillations [2, 3, 4]. They appear due to flush into the system from an external source as well as nonlinearity of laws describing force interaction of the bodies. The Froude pendulum or a load on the conveyor can serve examples of the mechanical systems with one degree of freedom. They use a model of the Coulomb friction in which the static friction exceeds the force of sliding friction. The analog models permits assessing periodical motions with a system of equations with two degrees of freedom [5, 6, 7]. A model of interaction of tyres with the road, the so-called "magic formula", in which the static friction is a combination of two arctangents depending upon velocity of the tyre sliding on the road, as well as a formula in terms of the velocity polynomial of the velocity and its modulus are popular for describing dynamics of the wheeled vehicles [8].

С математической точки зрения использование законов подобного рода приводит либо к неоднозначности решений, вызванной переменной структурой правых частей дифференциальных уравнений, либо к сложностям аналитического исследования поведения фазовых траекторий. В результате используются численные методы исследования динамики систем с нелинейным трением [5].

В данной задаче рассматривается модель трения, описываемая полиномом пятой степени, содержащим нечетные степени относительной скорости трущихся тел. Характерной особенностью силы трения является наличие интервала скоростей, в котором сила трения убывает с ростом скорости. Предложенная модель трения используется для анализа динамики двух взаимодействующих тел – стержня и смычка, с использованием

переменных действие–угол и метода усреднения. На фазовой плоскости усредненных переменных действие найдены стационарные точки и исследована их устойчивость. Этим точкам соответствуют одночастотные или двухчастотные колебания, когда точка в двумерном конфигурационном пространстве описывает фигуру типа фигуры Лиссажу.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вильке В.Г., Шаповалов И.Л., Автоколебания двух тел с нелинейным трением. Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. № 4/2011.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз. 1959. 916 с.
3. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М. Либроком. 2010. 360 с.
4. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М. Наука. 1975. 248 с.
5. Степанов С.Я., Хизгияев С.В. Автоколебания двухмассовой механической системы с кусочно–постоянной моделью сухого трения. Ломоносовские чтения, апрель 2007. Изд–во МГУ. 2007. С.142.
6. Хизгияев С.В. Автоколебания двухмассового осциллятора с сухим трением // ПММ. 2007. № 6. С.1004–1013.
7. Pascal M. Dynamics and stability of a two degrees of freedom oscillator with an elastic stop // J. of Computational and Nonlinear Dynamics. 2006. V.1. № 1. P. 94–102.
8. Pacejka H.B. Tyre and Vehicle Dynamics. L.UK: Elsevier. 2005. 621
9. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.Наука. 1988. 304 с.
10. Вильке В.Г. Теоретическая механика. 3 издание. С.–П. Лань. 2003. 302 с.

## УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА НА КОЛЕСНОЙ СИСТЕМЕ

О.В. Матухина

### «THE MOTION CONTROL OF INVERSE PENDULUM ON WHEELED SYSTEM»

O.V. Matukhina

*Нижнекамский химико-технологический институт,*

*Нижнекамск, Татарстан, Россия*

*e-mail: ovmatukhina@gmail.com*

*The solution of dynamics control problem of inverse pendulum mounted on wheeled system is provided. The control problem is to stabilize the pendulum during movement of the wheeled system on the horizontal plane.*

Работа посвящена управлению движением перевернутого маятника, закрепленного на четырехколесной тележке. Задача управления заключается в стабилизации маятника во время движения тележки по горизонтальной плоскости.

Колесная система состоит из кузова, жестко скрепленного с осями передних и задних колес. Будем считать, что управление колесной системой осуществляется моментами  $M_1$ ,  $M_2$  и  $R_4$ , приложенными соответственно к левому и правому колесам переднего моста и к рулевому приводу. Необходимо определить выражения моментов  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $R_4$  такие, чтобы обеспечить вертикальное положение обратного маятника при движении тележки по заданной на плоскости траектории.

Траектория движения системы может быть задана с помощью уравнений неголономных связей, наложенных на координаты и скорости системы. Соответствующие уравнения можно получить на основе метода построения системы дифференциальных уравнений, изложенного в [1].

Динамика системы описывается уравнениями Чаплыгина

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} + \sum_{k=6}^9 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \sum_{j=1}^5 \left( \frac{\partial b_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial b_{ki}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = Q_i + R_i, \quad \dot{q}_k = \sum_{j=1}^5 b_{kj} \dot{q}_j \quad (i=1, \dots, 5, k=6, \dots, 9),$$

$q_1, q_2$  – координаты точки основания маятника,  $q_3$  – угол между осью симметрии колесной системы и осью  $Ox$ ,  $q_4$  – угол поворота передних колес, отсчитываемый от оси

симметрии системы,  $q_5$  – угол отклонения маятника от вертикали,  $q_6, q_7, q_8, q_9$  – углы поворотов соответственно левых и правых колес переднего и заднего мостов,  $T(q_1, \dots, q_9)$  – кинетическая энергия системы,  $T^*(q_1, \dots, q_5)$  – приведенная кинетическая энергия,  $Q_i = b_{6i}M_1 + b_{7i}M_2$ ,  $R_1, R_2, R_3, R_5$  – реакции связей,  $R_4$  – управляющий момент.

Для решения задачи стабилизации связей вводятся уравнения программных связей [2].

Решение задачи проводится в системе символьных вычислений Maple.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 10-08-00535.*

## Литература

- [1]. Матухина О.В. Моделирование кинематических свойств и управление динамикой систем с программными связями // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика, 2012. – №3. – С. 97-103.
- [2]. Мухарлямов Р.Г. Стабилизация движения механических систем на заданных многообразиях фазового пространства // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т. 70. – № 2. – С. 236-249.

## CONTROL OF PROGRAMMED MOTION IN HIGHER ORDER NONHOLONOMIC SYSTEMS

**Chernet Tuge Deressa, Jimma University, Ethiopia.e-mail: Chernettuge@ymail.com**

### 1. Introduction:

M. R. Flannery in 2011 [1] applied D’alembert-Lagrange’s principle to higher order constraints and established new dynamic equations and transposition relations between  $\delta \dot{q}_j$  and  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \psi_k}{\partial \dot{q}_j} \right)$ ,  $\delta \ddot{q}_j$  and  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \psi_k}{\partial \ddot{q}_j} \right)$  for first and second order nonholonomic constraints. In particular constraints of the form:  $\psi_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{t}) = 0$ , The work done by the constraint forces, the dynamic equations and the transposition relation are respectively given as:

$\frac{\partial \psi_k}{\partial \ddot{q}_j} \delta \ddot{q}_j = 0 \quad (1)$	$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{ex} + \lambda_k \left( \frac{\partial \psi_k}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (2)$
$\delta \psi_k - \frac{d^2}{dt^2} \left[ \left( \frac{\partial \psi_k}{\partial \ddot{q}_j} \right) \delta q_j \right] = 0 \quad (3)$	

In this paper the dynamic equations developed in [1] are used to develop dynamic reference model for trajectory tracking of programmed motion.

*The main purpose of this paper is to develop dynamic reference control model for trajectory tracking of programmed motion based on the above dynamic equation of higher order nonholonomic constraints.*

**Note that:** A **programmed constraint** is any requirement put on a physical system motion specified by an equation. A **programmed motion** is a system motion that satisfies a programmed constraint [2,3,4,5].

### 2. Dynamic Model for Control of Programmed Motion.

The constrained dynamic equation (2) can be written in the [5,6] form:

$$\begin{cases} M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + D(\mathbf{q}) = J^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\lambda} + Q^{ex} \\ \psi_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{t}) = 0, (k = 1, \dots, d) \end{cases} \quad (4)$$

where  $M(\mathbf{q})$  is a  $(n \times n)$  positive definite symmetric inertia matrix,  $\boldsymbol{\lambda}$  is a  $d$ -dimensional vector of Lagrange’s multipliers,  $J(\mathbf{t}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left( \frac{\partial \psi_k}{\partial \dot{q}_i} \right)$  is a full rank  $(d \times n)$ ,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , is  $n \times 1$  matrix, contains all other position and velocity terms (vector of centripetal and Coriolis forces terms),  $D(\mathbf{q})$  is the  $n$ -vector of gravitational torques,  $Q^{ex}$  is an external force

For **model-based control of programmed motion**, the dynamic model is to [3] be transformed to the reduced-state form. The concept of **Null space** is used to eliminate the Lagrange multiplier in (4). From Eq. (1) we have:

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial \ddot{q}_j} \delta \ddot{q}_j = 0$$

This can be written as:

$$A(q, \dot{q})\dot{q} = 0 \tag{5}$$

Where,  $A = \frac{\partial \psi_k}{\partial \dot{q}_j}$ ,  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

Let S be be  $n \times (n - d)$ , full rank matrix made from the basis vectors of the null space of A in (5) such that  $S(q) = [g_1(q) \ g_2(q) \ \dots \ g_{n-d}(q)]$

Then there exists velocity vector  $v(t) = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n-d}]^T$  such that  $\dot{q} = S(q)v(t)$  (6).

Substituting  $\dot{q}$  in (4) and premultiplying it by  $S^T$  we obtain:

$$\tilde{M}\dot{v}(t) + F(q, \dot{q}) + \tilde{D}(q) = \tilde{E} \tag{7}$$

Where,

$$\tilde{M} = S^T M(q) S(q), F(q, \dot{q}) = S^T [M(q)\dot{S}(q)v(t) + C(q, \dot{q})], \tilde{D}(q) = S^T D(q), \tilde{E} = S^T Q^{ex}$$

The constrained dynamic equation (4) is now changed to *reference Control model* for programmed motion given by:

$$\begin{cases} \tilde{M}\dot{v}(t) + F(q, \dot{q}) + \tilde{D}(q) = \tilde{E} \\ \psi_k(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0, (k = 1, \dots, d) \end{cases} \tag{8}$$

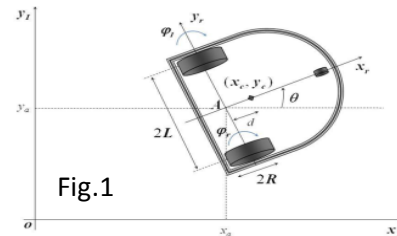
The advantage of(8) is that ,it doesn't include the constraint force and hence is convenient for tracking control.

Equation (8) is said to be *reference control model* because it is used for planning a dynamically possible trajectory of the dynamic system and a given programmed constraint. An example is provided to make the concept clear.

**Example:** Consider a wheeled mobile robot shown in the fig1.

The natural constraints of the system are given by:

$$\begin{aligned} -\dot{x}_a \sin\theta + \dot{y}_a \cos\theta &= 0, \\ \dot{x}_a \cos\theta + \dot{y}_a \sin\theta + \dot{\theta}L &= R\dot{\phi}_R, \\ \dot{x}_a \cos\theta + \dot{y}_a \sin\theta - \dot{\theta}L &= R\dot{\phi}_L \end{aligned}$$



Let us add a *programmed constraint* to the robot, that we require it to move along a curve whose curvature is 5,i.e.

$$\dot{x}_a \ddot{y}_a - \dot{y}_a \ddot{x}_a - 5[\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2]^{3/2} = 0.$$

Based on (8) we can get the plane (dynamically possible trajectory for the robot) or the required curve can be obtained. Indeed, it can be shown that,

$$m\dot{y}_a \ddot{y}_a + m\dot{x}_a \ddot{x}_a = 0$$

Where,  $m$  is the mass of the robot. The *required curve* as a result of the programmed constraint is obtained to be:

$$x_a = \frac{1}{5b} \sin(5bt), y_a = \frac{-1}{5b} \cos(5bt), \theta = 5bt \tag{9}$$

for a non-zero constant  $b$ .

The *Dynamic Control Model* is developed by considering only the **natural constraints** (without the programmed constraint) from:

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + D(q) = B^T(q, \dot{q})\lambda + Q^{ex} \\ B\dot{q} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Where  $\mathbf{B}$  is the usual Jacobian matrix given by  $\mathbf{B} = \left( \frac{\partial \psi_R}{\partial q_i} \right)$

**Remark: Natural constraints** includes holonomic and linear first order nonholonomic constraints that are not programmed constraints.

Using the concept of Null space employed above (10) can be written in the form:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{N}} = \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (11)$$

$\boldsymbol{\tau}$  is the control input. Equation (11) is said to be *dynamic control model*.

For the purpose of programmed motion tracking control, we use both equations (8) and (11). The required trajectory is obtained from (8) based on the given programmed constraint and the control tracking is done by (11).

Moreover for stabilization purpose we use the well known control method called Computed Torque(CT) [6].

If  $\mathbf{x}_f$  is the reference trajectory and  $\mathbf{q}$  is the actual trajectory vectors then from CT method the torque is required is given by:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{x}}_f + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{x}}_f + \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (12)$$

Eq.(12) is the first torque required to start motion tracking. (12) is then improved to (13) to look for appropriate(in the sense that the system is stable) entries of the positive definite symmetric matrices  $\mathbf{K}_d$  and  $\mathbf{K}_p$

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{x}}_f - \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_p\mathbf{e}] + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (13)$$

Where  $\mathbf{e} = \mathbf{x}_f - \mathbf{q}$  is the error encountered .

**Note: The main objective of tracking a programmed motion is to a find a torque that constrain the motion of the dynamics towards the required trajectory.**

Let us continue with the example started above. With regarding to equation(\*) let us take  $\mathbf{b} = \mathbf{1}/\mathbf{10}$  and then the reference trajectory becomes:

$$\mathbf{x}_f = 2\sin(0.5.t); \quad \mathbf{y}_f = -2.\cos(0.5.t); \quad \theta_f = 0.5.t;$$

**Simulation.** We obtain  $\boldsymbol{\tau}$  from (15a) and then actual position from the first part of (14) .

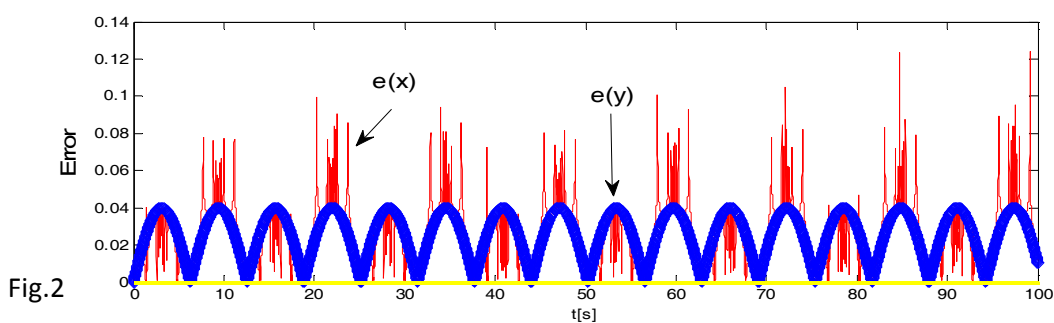
The new trajectory becomes:  $\mathbf{x}_f = \sin(0.5t); \quad \mathbf{y}_f = -\cos(0.5t), \quad \theta_f = 0.5t$

After several experimentation on MATLAB, the following simulation is made using

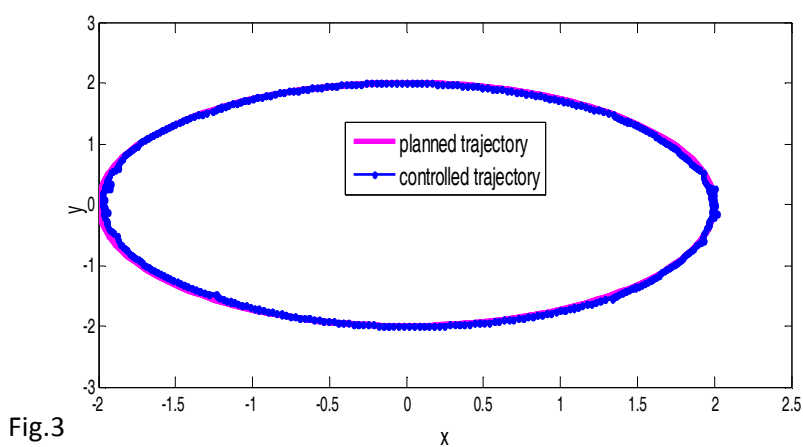
$$k_d_{11}=0.01, k_d_{22}=0.01, k_p_{11}=0.01, k_p_{22}=0.01, k_d_{33}=1, k_p_{33}=10$$

Error simulation result:





The **planned trajectory** and the **controlled trajectory** with good harmony are shown in figure 3.



### References:

- [1] M. R. Flannery, d'Alembert–Lagrange analytical dynamics for nonholonomic systems, *Journal Of Mathematical Physics* 52, 032705 (2011). published online 18 March 2011
- [2] R. G. Mukharlyamov and Zh.K. Kirgizbayev. *Control of Programmed Motion and Inverse Dynamic Problems with variable Mass. Изд.-во HBTY* (2013)
- [3] Elżbieta Jarzebowska, Dynamics modeling of nonholonomic mechanical systems: Theory and applications, *Nonlinear Analysis*, 63 (2005) P:185 -197, ELSEVIER.
- [4] A.C. Galiulin, *Design of Systems for Programmed Motion*, Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
- [5].Mukharlyamov R.G. *Equations of Motion of Mechanical Systems*. Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, 2001(In Russian).
- [6] S. Sastry, *Nonlinear Systems Analysis, Stability and Control*, Interdisciplinary Applied Mathematics, Volume 10, Springer-Verlag, New York, 1999.

## О ПОВЕДЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО РОТАТОРА С СУХИМ ТРЕНИЕМ В ОПОРАХ ОСИ

В.В. ЧИСТЯКОВ

ФГБОУ ВПО Ярославский ГПУ им. К.Д. Ушинского,  
150000, Россия, г. Ярославль, ул. Республиканская, 108

E-mail: v.chistyakov@yarcx.ru

## ON THE BEHAVIOR OF DYNAMICALLY NON-BALANCED ROTATOR BY DRY FRICTION ACTING IN THE AXE SUPPORTS

V.V. Chistyakov

Yaroslavl' State Academy of Agriculture, *Tutaevskoe shosse, 58, Yaroslavl', 150042, Russia*

**Abstract.** — Studying is a rigid body rotation around the central but non-principal axis fixed by two supports  $O$  and  $B$  under combined dry friction and drag acting. Obeying the D'Alembert's principle the reaction forces  $N_{O,B}$  in the supports are both depending on angular acceleration  $\varepsilon$  and influencing it through dry friction torque  $M_{fr} = \alpha N_{O,(B)}$  along with quadratic in angular speed drag  $M_d = -c\omega^2$  and other moments applied. This results in explicit irrationality of dynamical equation and strong peculiarities of rotational free and forced dynamics especially in partial case when the axial moment of inertia  $J_{zz}$  is equal to the  $c$  and  $\alpha$ .

В опорах  $O$  и  $B$  неподвижной оси вращения, проходящей через центр масс абсолютно твердого тела (*a.m.m.*) (Рис.1), но не совпадающей с главным направлением, возникают поперечные силы реакции, определяемые в соответствии с принципом Даламбера (см., например, [1]) как

$$\begin{cases} B_y = \frac{\varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz}}{h}, \\ B_x = \frac{\varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{zx}}{h} \end{cases}, \quad \begin{cases} O_x = -\frac{\varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{zx}}{h}, \\ O_y = -\frac{\varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz}}{h}, \end{cases} \quad h = OB \quad (1).$$

Наличие неизбежного сухого трения скольжения либо качения в опорах приводит к появлению тормозящего момента

$$M_{fr} = -\frac{(f_O r_O + f_B r_B) \sqrt{(J_{xz}^2 + J_{yz}^2)(\varepsilon^2 + \omega^4)}}{h} = -\alpha \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (2),$$

где  $f_O, f_B, r_O, r_B$  — соответствующие фрикционные коэффициенты и радиусы цапф опор,  $J_{yz}, J_{zx}$  — центробежные моменты инерции.

Тормозящее действие также оказывает аэродинамическое/жидкостное сопротивление с моментом  $M_R = -c|\omega|\omega$ , и при наличии других моментов  $M(t, \varphi)$  динамическое уравнение для угла поворота  $\varphi(t)$  имеет вид

$$J_{zz} \ddot{\varphi} = -\alpha \sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} - c\dot{\varphi}^2 + M(t, \varphi) \quad (3).$$

Его особенностью является зависимость правой части от старшей производной  $\dot{\varphi}$ , что уже само по себе чревато неожиданностями причинно-следственного характера.

Правда, такая зависимость может быть устранена в соответствии с методом, изложенным в § 7.2 монографии А.И. Лурье [2], предполагающем введение и последующее «вымораживание» дополнительных обобщенных координат, связанных с

силами реакции. Однако получающееся при этом уравнение в любом случае будет эквивалентно уравнению (3), но разрешенному относительно  $\ddot{\varphi}$ :

$$\ddot{\varphi} = \frac{J_{zz}(M(t, \varphi) - c|\dot{\varphi}|\dot{\varphi}) - \alpha\sqrt{\dot{\varphi}^4(J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\dot{\varphi}^2 M(t, \varphi) + M(t, \varphi)^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}, \quad J_{zz}^2 < \alpha^2 \quad (4).$$

В случае  $J_{zz} = \alpha = c = J$  уравнение теряет свою иррациональность —

$$\ddot{\varphi} = \frac{(M(t, \varphi) - 2J|\dot{\varphi}|\dot{\varphi})M(t, \varphi)}{2J(M(t, \varphi) - J|\dot{\varphi}|\dot{\varphi})} \quad (5),$$

но приобретает потенциальную разрывность из-за знаменателя.

Интегрирование (4) для постоянного разгоняющего момента дает зависимости

$$\varphi(\omega) = \int_0^\omega \frac{(J_{zz}^2 - \alpha^2)\omega' d\omega'}{J_{zz}(M - c\omega'^2) - \alpha\sqrt{\omega'^4(J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\omega'^2 M + \alpha^2 M^2}} \quad (6),$$

$$t(\omega) = \int_0^\omega \frac{(J_{zz}^2 - \alpha^2)d\omega'}{J_{zz}(M - c\omega'^2) - \alpha\sqrt{\omega'^4(J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\omega'^2 M + \alpha^2 M^2}} \quad (7),$$

между тем как (5) дает иные кривые (Рис.2)

$$\varphi(\omega) = \frac{J\omega^2}{2M} - \sqrt{\frac{J}{8M}} \ln\left(1 - \frac{2J\omega^2}{M}\right), \quad t(\omega) = \frac{J\omega}{2M} - \sqrt{\frac{J}{8M}} \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{M}{2J}} - \omega}{\omega + \sqrt{\frac{M}{2J}}}\right) \quad (8-9).$$

В отсутствии дополнительных моментов  $M(t, \varphi) \equiv 0$  уравнение (5), описывающее вращение по инерции, становится несовместным для а.т.т, т. к. описывает невозможное равномерное вращение, что составляет еще один парадокс сухого трения, дополняющий давно существующий список Пэнлеве [3] и его последователей.

Введение запаздывания во времени между угловыми темпами в левой и правой частях (3) на величину  $\tau = \frac{l}{c} \ll \frac{1}{\omega_0}$ , где  $l$  — характерный размер тела,  $c$  — скорость звука

в его материале,  $\omega_0$  — начальная угловая скорость, приводит к динамическому уравнению

$$\ddot{\varphi}(t) = -\sqrt{\dot{\varphi}^4(t-\tau) + \dot{\varphi}^2(t-\tau) - \dot{\varphi}^2(t)} \quad (10),$$

разрешимому разложением в ряд Тейлора по величине  $\tau$  относительно *углового рывка* [4]

$$\ddot{\varphi}(t) \approx -\frac{\dot{\varphi}^2(t)}{\tau} - 2\dot{\varphi}^3(t) \quad (11).$$

Оно легко интегрируется как

$$\varphi(\omega) \approx -\sqrt{\tau} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\omega' d\omega'}{\sqrt{\frac{2\omega_0^3}{3} + 5\omega_0^4 \tau - \frac{2\omega'^3}{3} - \omega'^4 \tau}}, \quad t(\omega) \approx -\sqrt{\tau} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega'}{\sqrt{\frac{2\omega_0^3}{3} + 5\omega_0^4 \tau - \frac{2\omega'^3}{3} - \omega'^4 \tau}} \quad (12)$$

и описывает собой явление *фрикционно-аэродинамического удара*, тем более выраженное, чем выше начальная угловая скорость  $\omega_0$  и меньше лаг  $\tau$ .

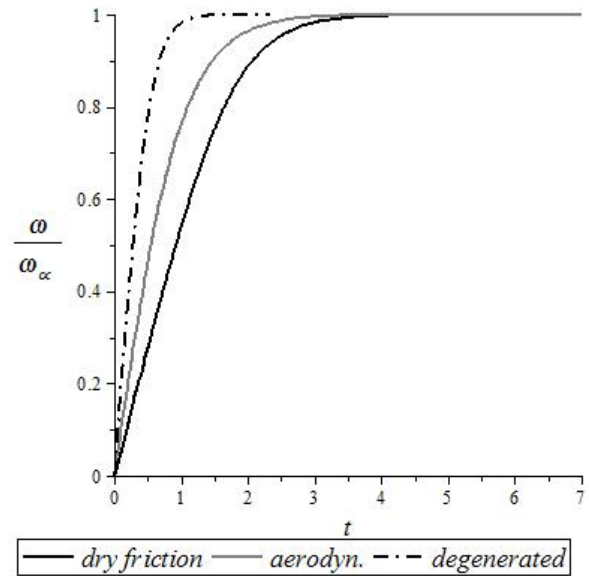
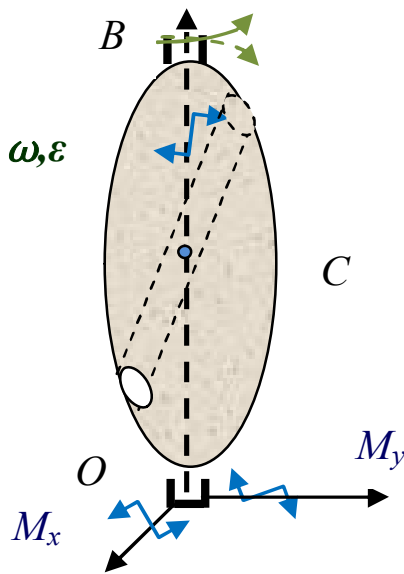


Рис. 1. Астатический ротатор с неглавной осью вращения.

Рис. 2. Кинетики при  $M=const$  в общем случае комбинированного трения  $J_{zz} \neq \alpha$ , только аэродинамического сопротивления ( $\alpha=0$ ) и в вырожденном случае  $J_{zz} = \alpha = c$ .

Вырожденность параметров особенно проявляется в случае свободных и вынужденных колебаний под дополнительным действием упругого  $M_c = -k\varphi$  и гармонического  $M_{ind}(t) = A_0 \sin(\Omega t)$  моментов. В первом случае решение динамического уравнения имеет две разделенные скачком ускорения фазы: начальную, определяемую стартовыми условиями, и фазу очень медленного квазипериодического убывания (Рис.3).

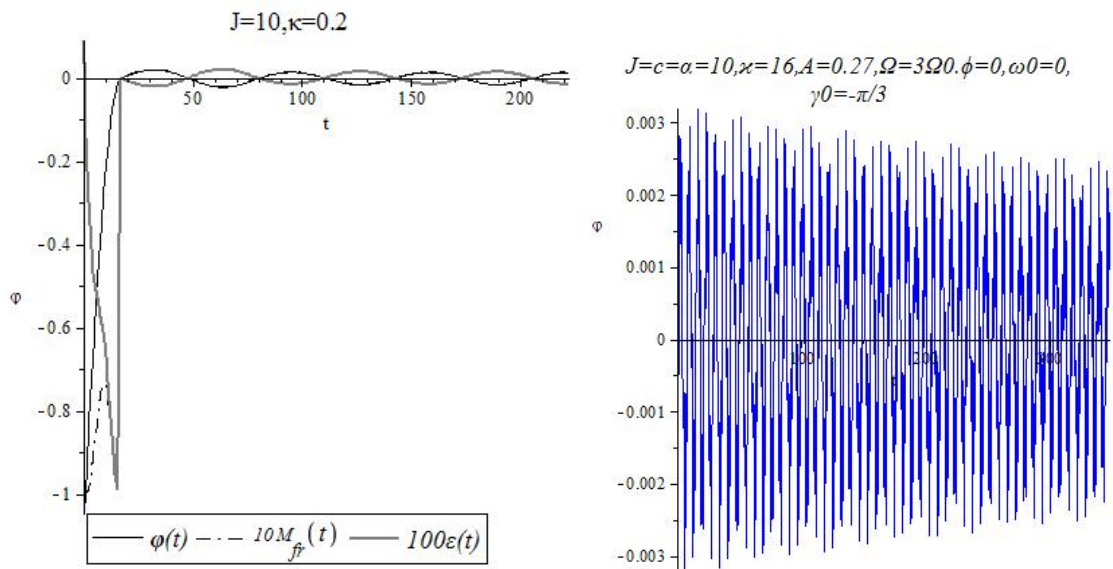


Рис. 3. Кинетика изменения угла, углового ускорения и момента сухого трения в вырожденном случае при  $J_{zz} = \alpha = c = 10, \kappa = 0.2$ .

Рис. 4. Кинетика  $\varphi(t)$  вынужденных колебаний в вырожденном случае.

В вырожденном случае вынужденных колебаний угловая кинетика имеет гладкий аperiодический характер с квазипериодической модуляцией, причем в некоторых случаях

имеет место убывающий тренд (Рис.4). При этом амплитуда автокорреляционной функции для  $\varphi(t)$  также медленно убывает при чередовании знака (Рис.5).

Между тем как в общем случае кинетика характеризуется скачками ускорения  $\varepsilon(t)$  и изломами  $\omega(t)$  в точках разворота ротатора (Рис. 6), а при малых значениях  $\alpha \ll J_{zz}$  она мало чем отличается от линейного осциллятора с диссипацией.

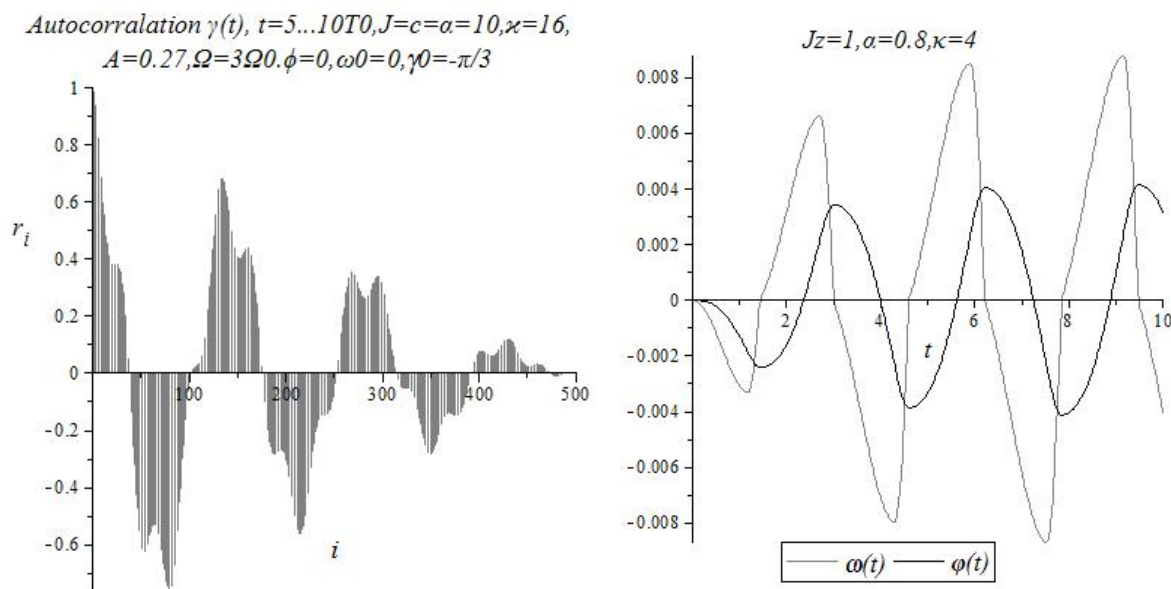


Рис. 5. Автокорреляционная функция для  $\varphi(t)$  вынужденных колебаний в вырожденном случае.

Рис. 6. Кинетика вынужденных колебаний в общем случае.

Таким образом, двусторонняя причинно-следственная связь между моментом трения  $M_{fr}$  и ускорением  $\varepsilon$  приводит к нестандартным как уравнениям динамики, так и их решениям, в особенности в вырожденных случаях, когда уравнения приобретают разрывность, переводя проблему в класс задач негладкой динамики.

### Литература

1. А.П. Маркеев, Теоретическая механика: Учебник для университетов.— Москва: ЧеРо, 1999, 572 с.
2. А.И. Лурье, Аналитическая механика, М.: Наука, 1961
3. Painlevé P. Leçons sur le frottement. Paris: Hermann, 1895 [Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.]
4. О.И. Сомов, Об ускорениях различных порядков в относительном движении, «Зап. Импер. Акад. Наук», 1866, т.9, с. 121—132

## MODIFIED FORMULATION FOR DYNAMIC EQUATION OF CONSTRAINED MECHANICAL SYSTEM

Assaye Walelgn Beshaw

Department of mathematics

Bahr Dar University

Bahr Dar, Ethiopia.

### 1. Introduction

Let the total number of displacement components in a discrete mechanical system be  $N$ -vectors [1] and denoted by

$$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)). \quad (1)$$

If the configuration coordinates  $(u_1, u_2, \dots, u_N)$  are not all independent variables, a set of reduced-order variables  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  exists, where  $n < N$ , that is sufficient to define a system's configuration [2] with initial conditions

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}^0 \quad (2)$$

The equation of motion of the system can be obtained, using Lagrangian equation

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

where  $\frac{dq_i}{dt} = v_i$ . The equation of motion of the system (3) can be rewritten by a relation

$$M\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}, \quad (4)$$

where  $M$  is an  $n \times n$  symmetric, positive-definite, generalized mass matrix and  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  is an  $n \times 1$  column array of generalized applied forces and generalized inertia force terms. The generalized acceleration of the system, which we denote by the  $n$ -vector  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , is then given by

$$\ddot{\mathbf{q}} = M^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{a}, \quad (5)$$

where  $\mathbf{a} = \frac{dv_i}{dt}$  is said to be unconstrained acceleration, and let us denote it as  $\mathbf{a}_u$ .

### 2. Construction of Dynamic Equations of the System

We suppose next that the system is subjected to  $m$  constraints of the form

$$\psi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad (6)$$

where  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m)$ . The constraints (6) include all the usual varieties of holonomic and nonholonomic cases.

The initial conditions  $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^0$  and  $\dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}^0$  are assumed to satisfy these constraints.

Under the assumption of sufficient smoothness, we can differentiate equations (6) with respect to time:

$$\dot{\psi} = \psi_{\dot{q}} \dot{\ddot{\mathbf{q}}} + \psi_q \dot{\mathbf{q}} + \psi_t. \quad (7)$$

To avoid the stability problems during numerical integrations of constraints let us add terms those compensate the deviations. So that equation (7) rewritten as

$$\Psi_{\dot{q}}\ddot{q} + \Psi_q\dot{q} + \Psi_t = \mathbf{g}, \quad (8)$$

where  $\mathbf{g} = (\psi, q, \dot{q}, t)$  and  $\mathbf{g}(0, q, \dot{q}, t) = 0$ .

Rearranging the coefficients of (8) along with acceleration, velocity and other terms we get

$$A\ddot{q} = B\dot{q} + C, \quad (9)$$

The presence of the constraints (6) imposes additional constraint forces on the system which change its acceleration. Using Lagrange's method of undetermined multipliers the equation of motion of the constrained system can be given as [3,4,5]:

$$M\ddot{q} = f + A^T\mu. \quad (10)$$

Solving for acceleration from (10) will give us

$$\ddot{q} = M^{-1}(f + A^T\mu). \quad (11)$$

If the combined mass and constraint matrix is nonsingular, equation (11) can be solved as

$$a_{\alpha}^i = a_{\alpha}^i + D_k^i \mu_k, \quad (12)$$

where  $\mu_k$  is the Lagrange multiplier obtained from (11),  $a_{\alpha}^i$  is unconstrained acceleration of the system which is obtained from (4) and  $a_{\alpha}^i$  is the actual acceleration of the constrained system.

Substitute (11) in equation (9) and solve for  $\mu$  we get

$$\mu = (AM^{-1}A^T)^{-1}B\dot{q} + (AM^{-1}A^T)^{-1}(C - AM^{-1}f). \quad (13)$$

The dynamic equations of motion of the system can be obtained by replacing the Lagrange multiplier (13) from relation (11)

$$\ddot{q} = M^{-1}f + M^{-1}A^T(AM^{-1}A^T)^{-1}\{B\dot{q} + (C - AM^{-1}f)\}. \quad (14)$$

Equation (14) further simplified and can be written in the form:

$$a_{\alpha} = a_{\alpha} + H(B\dot{q} + C - Aa_{\alpha}), \quad (15)$$

where  $H = M^{-1}A^T(AM^{-1}A^T)^{-1}$  is an n by m matrix.

Again relation (15) may be put in the form

$$a_{\alpha} = Pa_{\alpha} + Sv + R, \quad (16)$$

where  $P = I - HA$ ,  $S = HB$  and  $R = HC$ .

To solve equation (16) numerically we should change the equation from second order to first order ordinary differential equations as:

$$\begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = v^i, \\ \frac{dv^i}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{ij} \frac{dv^j}{dt} + \sum_{j=1}^m s_{ij} v^j + r^i \end{cases} \quad (17)$$

The terms (8-11) added to correct deviation of constraints during numerical integrations may be represented as a multiple of constraints themselves:

$$g_i = \sum_{j=n+1}^m k_{ij} \Psi_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (18)$$

### 3. Stabilization of Constraints During Numerical solutions

Let the initial values  $q^0, v^0$  satisfy the condition  $\|\Psi^0\| \leq \sigma$  and the system (17) is solved by

Euler method

$$\begin{cases} q^{i+1} = q^i + \tau \dot{q}^i, \\ v^{i+1} = v^i + \tau \dot{v}^i, \end{cases}$$

where  $q^i = q(t_i)$ ,  $\tau = t_{i+1} - t_i$ ,  $\dot{q}^i = v^i$  and

$$\dot{v}^i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \frac{dv^j}{dt} \Big|_{(q^i, t_i)} + \sum_{j=1}^m s_{ij} v^j \Big|_{(q^i, t_i)} + r^i \Big|_{(q^i, t_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Taking  $\tau$  sufficiently small and the inequality  $\|\psi^i\| \leq \sigma$  holds for  $t = t_0$ , and expanding the components of  $\psi$  in powers of  $\tau$  in relation with (16) we get

$$\psi^{i+1} = \psi^i + [A(Pa_{xx} + Sv + R) - Bv - C]^i \tau + \frac{\tau}{2} \psi^{(2)}, \quad (19)$$

where  $\psi^i = \psi(q^i, v^i, t_i)$  and  $\frac{\tau}{2} \psi^{(2)}$  is the remainder of Taylor expansion.

From the relation (19) and the supposition (18) it follows that

$$\psi^{i+1} = (I + \tau K^i) \psi^i + \frac{\tau}{2} \psi^{(2)}, \quad (20)$$

where  $I$  is the identity matrix. The following statements can be proposed by estimating the right hand side of (20).

*In the power series expansion of  $\psi^{i+1}$ , if  $\|\psi^i\| \leq \sigma$ ,  $\|I + \tau K^i\| \leq \delta < 1$  and*

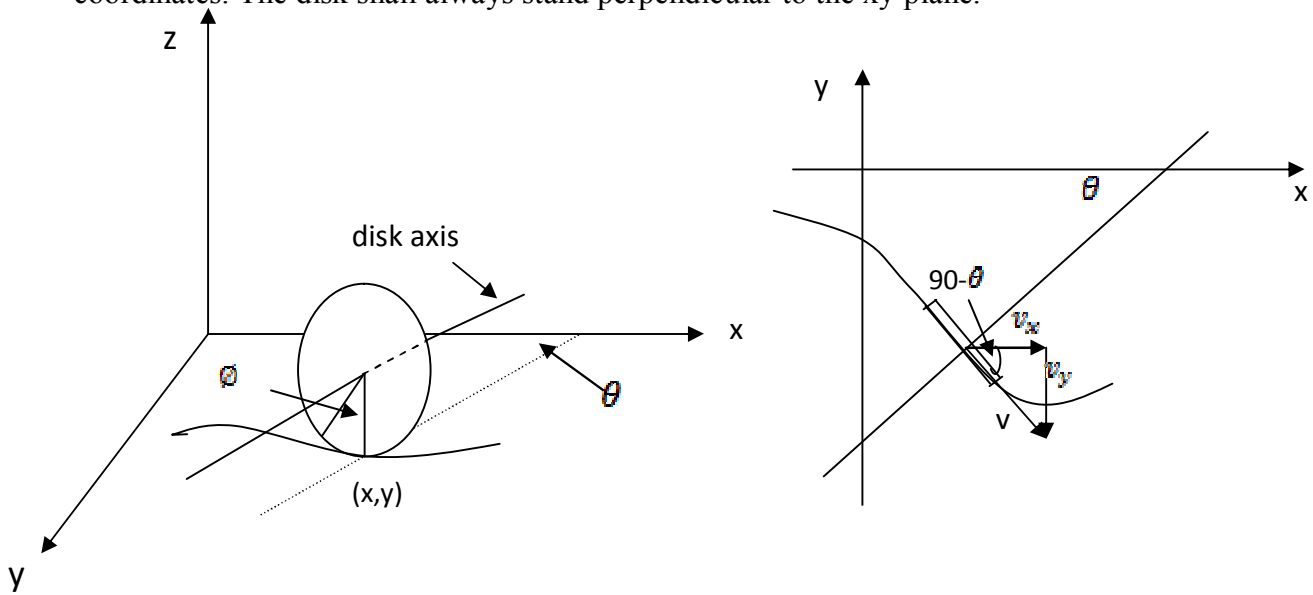
$$\left\| \frac{\tau}{2} \psi^{(2)} \right\| \leq (1 - \delta)\sigma, \text{ then } \|\psi^{i+1}\| \leq \sigma.$$

That is,

$$\|\psi^{i+1}\| \leq \|I + \tau K^i\| \|\psi^i\| + \frac{\tau}{2} \|\psi^{(2)}\| \leq \delta\sigma + (1 - \delta)\sigma = \sigma.$$

#### 4. Example

A disk that rolls on a plane without gliding can be considered as a system with differential coordinates. The disk shall always stand perpendicular to the xy-plane.



The center of the disk is exactly above the contact point  $(x, y)$ , and the velocity of the circumference  $R\dot{\theta}$  of the edge equals the velocity of the contact point in the xy-plane;

$$v = R\dot{\theta}, \quad \dot{x} = R\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y} = -R\dot{\theta} \cos \theta. \quad (a)$$

These nonholonomic constraint forces can be put in the form [5]

$$\psi_1 \equiv \dot{x} - r\dot{\theta} \sin \theta = 0,$$

$$\psi_2 \equiv \dot{y} + r\dot{\theta} \cos \theta = 0 \quad (b)$$

The kinetic energy is  $T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2$ ,



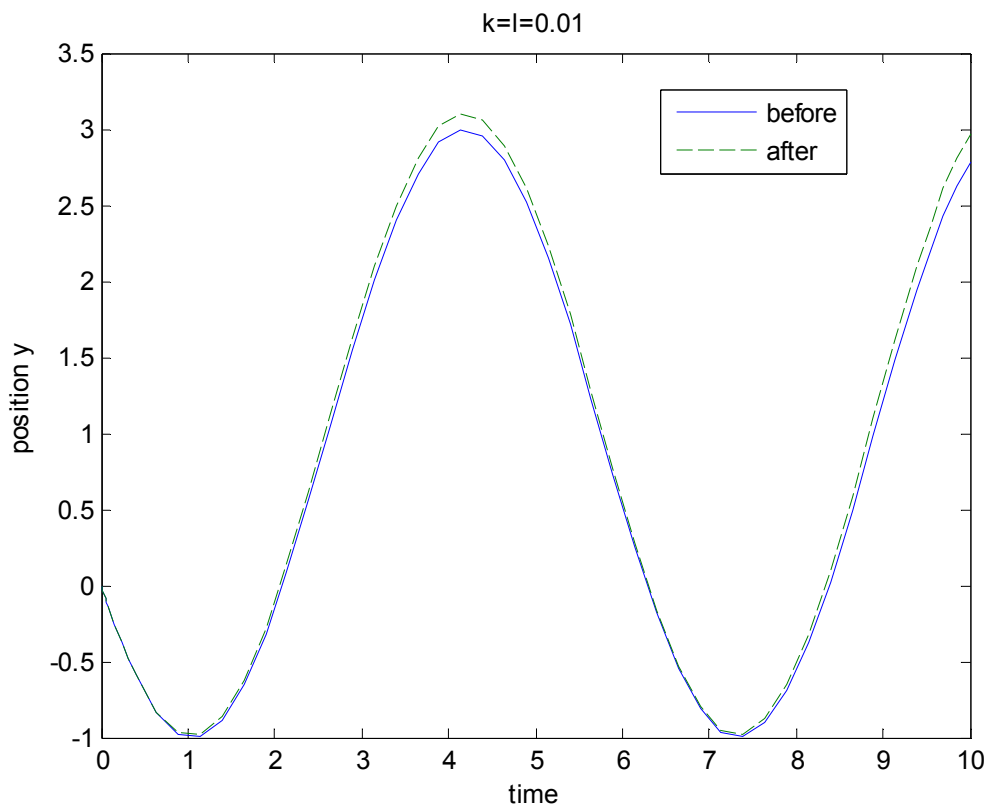
where  $I_1$  is the moment of inertia of the disk about the axis perpendicular to the disk through the center, and  $I_2$  is the moment about the axis through the center and the contact point (x,y). The resulting dynamic equation before stabilization will be

$$\ddot{q} = M^{-1}A^T(AM^{-1}A^T)^{-1}b, \quad (c)$$

$$\text{where } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b = [\dot{\theta}\dot{\theta}\cos\theta \quad \dot{\theta}\dot{\theta}\sin\theta]^T.$$

And the dynamic equation after stabilization can be given as

$$\ddot{q} = M^{-1}A^T(AM^{-1}A^T)^{-1}(b + K\psi), \quad \dot{\psi} = K\psi. \quad (d)$$



#### Reference materials

- 1) P.P., Teodorescu, Mechanical Systems; Classical Models, volume II, 2009 Springer Science+Business Media B.V.
- 2) R.A. Layton, Principles of Analytical System Dynamics, springer, 1998.
- 3) A. Arabyan, F. Wu, An Improved Formulation for Constrained Mechanical Systems, *Multibody System Dynamics 2*: 49–69, 1998.
- 4) Р.Г. Мухарлямов, Уравнение Движения Механических Систем, издательство РУДН, 2001.
- 5) Р.Г. Мухарлямов, О Численном Решении Уравнений Экстремалей Вариационной Задачи С Ограничениями, математика, 4(479), 36-43, 2002.

- 6) P. Flores, R. Pereira, M. Machado and E. Seabra, Investigation on the Baumgarte Stabilization Method for Dynamic Analysis of Constrained Multibody Systems, *Proceedings of EUCOMES 08*, Springer Science+Business Media B.V. 2009, p. 305-312.
- 7) M.D. Ardema, *Analytical Dynamics: Theory and Applications*, Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York, 2005.
- 8) J.G. de Jalon, E. Bayo, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems*, Springer-verlag, 1988.
- 9) R.G. Mukharlyamov, Differential-Algebraic Equations of Programmed Motions of Lagrangian Dynamical System, ISSN 0025-6544, *Mechanics of Solids*, 2011, Vol. 46, No. 4, pp. 534–543.

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ В СЛУЧАЕ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕНИЯ СВЯЗЕЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Горшков Е.А.

Российский университет дружбы народов, gorshkov\_j@mail.ru

Предлагается метод построения математической модели динамики управляемой механической системы.

### Введение

Современные системы управления имеют достаточно сложную структуру, содержащую элементы различной физической природы. Исследование динамики таких систем в первую очередь требует построения общей математической модели, описывающей динамику всей системы. Кинематические и динамические аналогии позволяют использовать для моделирования кинематики и динамики управляемых систем методы классической механики [1]. Основываясь на известных принципах, уравнения динамики управляемых систем можно представить в форме уравнений Лагранжа. [2], [3].

### Моделирование динамики системы

Уравнения динамики механической системы могут быть построены, если известны ее кинетическая энергия  $T = T^*(q^i, \dot{q}^j, t)$ , потенциальная энергия  $P = P^*(q^i, t)$ , диссипативная функция  $D = D^*(q^i, \dot{q}^j, t)$ , обобщенные непотенциальные внешние силы  $Q_s = Q_s(q^i, \dot{q}^j, t)$ , и управляющие силы  $U_s = U_s(q^i, \dot{q}^j, t)$ , где  $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ ,  $i, j, s = 1, \dots, n$ .

Управляющие силы  $U_s$ , действующие на систему, призваны обеспечить выполнение уравнений связей

$$f^\mu(q^i, t) = 0, \quad \dot{f}^\mu \equiv f_i^\mu \dot{q}^i + f_t^\mu = 0, \quad \dot{f}^\rho(q^i, \dot{q}^j, t) = 0, \quad (1)$$

$$f_i^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial q^i}, \quad f_t^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial t}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \mu = 1, \dots, m, \quad \rho = m+1, \dots, r.$$

Согласно принципу Даламбера-Лагранжа можно построить уравнения динамики расширенной системы. Они состоят из двух частей. Первая группа уравнений соответствует уравнениям динамики управляемой системы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = - \frac{\partial P}{\partial q^i} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}^i} + Q_i + f_i^\kappa \lambda_\kappa. \quad (2)$$

Вторая группа представляет собой систему уравнений возмущений связей

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{n+\kappa}} - \frac{\partial T}{\partial q^{n+\mu}} = - \frac{\partial P}{\partial q^{n+\mu}} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}^{n+\kappa}}. \quad (3)$$

Последнее слагаемое правой части уравнения (2)  $f_i^\kappa \lambda_\kappa$  представляет собой управляющие силы  $U_s$ .

### Исследование устойчивости системы

Решение системы уравнений (2)- (3) сводится к определению множителей  $\lambda_\kappa$  из (2) и выражениями избыточных переменных  $q^{n+\mu}$ ,  $\dot{q}^{n+\kappa}$  из (2),(8) через обобщенные координаты  $q^i$  и скорости  $\dot{q}^j$ .

В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно множителей  $\lambda_\kappa$ :

$$\alpha^{\kappa\theta} \lambda_\theta = \alpha^\kappa, \quad (4)$$

$$\alpha^{\kappa\theta} = \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial \dot{q}^i} f^{i\theta}, \quad \alpha^\kappa = k_\gamma^\kappa \dot{q}^{n+\gamma} + b_\gamma^\kappa q^{n+\gamma} - \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial q^i} \dot{q}^i - \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial \dot{q}^i} m^i - \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial t}$$

Система (4) имеет решение:

$$\lambda_\theta = \alpha_{\theta\kappa} \alpha^\kappa, \quad (14)$$

где  $\alpha_{\theta\kappa}$  – матрица, обратная  $\alpha^{\kappa\theta}$ :  $\alpha_{\theta\kappa} = \left( \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial \dot{q}^k} f^{k\eta} \right)^{-1}$ , а  $\alpha^\kappa$  определяется суммой слагаемых  $\alpha^\kappa = \alpha^{\kappa(0)} + \alpha^{\kappa(1)} + \dots$ , распределенных по степеням переменных  $q^{n+\mu}$ ,  $\dot{q}^{n+\kappa}$ :

$\alpha^{\kappa(0)} = -\frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial q^i} \dot{q}^i - \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial \dot{q}^i} m^i - \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial t}$ . При множителях  $\lambda_\kappa$ , определенных таким образом, уравнения связей (1) исходной системы оказываются справедливыми для решений  $q^i = q^i(t)$  дифференциальных уравнений динамики управляемой системы при  $q^{n+\mu} = 0$ ,  $\dot{q}^{n+\kappa} = 0$ :

$$\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \quad \frac{d\dot{q}^i}{dt} = m^i + f^{i\kappa} \alpha_{\theta\kappa} \alpha^\kappa. \quad (5)$$

Отклонения решений системы (5) от уравнений связей (1) описываются уравнениями возмущений связей

$$\frac{dq^{n+\mu}}{dt} = \dot{q}^{n+\mu}, \quad \frac{d\dot{q}^{n+\kappa}}{dt} = k_\gamma^\kappa \dot{q}^{n+\gamma} + b_\gamma^\kappa q^{n+\gamma}. \quad (16)$$

### Выводы

Учет возможных отклонений от уравнений связей управляемых систем на этапе составления уравнений позволяет решить задачу стабилизации связей. Для этого уравнения возмущений связей должны быть построены в соответствии с требованием асимптотической устойчивости по отношению к уравнениям связей.

Приведенные модели решения реализованы автором в системе символьных вычислений Maple и могут быть использованы для решения задач управления программным движением.

**Литература**

1. R.A. Layton Principles of Analytical System Dynamics // N. Y.: Springer, 1998. 158 p..
2. Мухарлямов Р.Г. О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифф. уравнения. 2003. Вып. 39. № 3. С. 343-353.
3. Мухарлямов Р.Г. О численном решении дифференциально-алгебраических уравнений // Вестник РУДН. Сер. Прикладн. матем. и информ. 1999. №1. С. 33-37.
4. Горшков Е.А. Построение уравнений динамики управляемой системы // Вестник РУДН, сер Прикл. матем. и информ., 2007, № 3-4, с. 20-24.
5. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 256 с.
6. Мухарлямов Р.Г. О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференц. уравнения. 1969. Т.5. N 4. С. 688-699.

**RESEARCH OF STABILITY OF INTEGRATED VARIETY IN CASE OF THE  
EQUATIONS OF INDIGNATION OF COMMUNICATIONS WITH CONSTANT  
FACTORS**

*E.A. Gorshkov*

*Peoples' Friendship University of Russia, gorshkov\_j@mail.ru*

The method of construction of mathematical model of dynamics of operated mechanical system is offered.

## ОДИН СЛУЧАЙ МАЯТНИКОВЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕАВТОНОМНОГО ГИРОСТАТА

**А.В.Мазнев, Т.В.Бычкова**

*Донецкий национальный университет, г.Донецк, Украина*

Рассмотрена задача о маятниковых движениях гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. Уравнения движения неавтономного гиростата запишем в виде [1]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - L(t)\boldsymbol{\alpha} - \lambda(t)(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\omega} \times B\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (C\mathbf{v} - \mathbf{s}), \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\lambda} = L(t), \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\lambda(t)$  - переменные задачи;  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\mathbf{s}$  - постоянные векторы;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  - постоянные матрицы третьего порядка;  $L(t)$  - проекция момента действующих сил на ось вращения носимого тела.

Уравнения (1),(2) допускают два первых интеграла

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}(B\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = k. \quad (3)$$

Если вектор угловой скорости имеет вид  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{a}$ , где единичный вектор  $\mathbf{a}$  неподвижен в теле, то гиростат совершает маятниковые движения. Для случая, когда на гиростат действует только сила тяжести, исследование маятниковых движений проведено в работе [2].

Проектируя равенство (1) на три линейно независимых вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{v}$  и выбирая подвижную систему координат так, чтобы  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{a}, 0, \alpha_3\mathbf{a} \times \mathbf{v}$ , получим

$$\alpha_3 \dot{\lambda}(t) + A_{33} \ddot{\varphi} = -C'_2 \cos 2\varphi + C_2 \sin 2\varphi + \kappa'_1 \cos \varphi - \kappa_1 \sin \varphi, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 a'_0 \sin \varphi + a_0 \alpha_3) \dot{\lambda}(t) + a'_0 \alpha_1 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \lambda(t) + \\ & + (\beta_1 \cos \varphi + \beta'_1 \sin \varphi + \beta_0) \ddot{\varphi} + (\beta'_1 \cos \varphi - \beta_1 \sin \varphi) \dot{\varphi}^2 + \end{aligned} \quad (5)$$

$$+ (B_2 \sin 2\varphi - B'_2 \cos 2\varphi - a_0 \gamma'_1 \cos \varphi + a_0 \gamma_1 \sin \varphi) \dot{\varphi} = 0,$$

$$a'_0 \alpha_1 \cos \varphi \cdot \dot{\lambda}(t) - a'_0 \alpha_1 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \lambda(t) + (\beta'_1 \cos \varphi - \beta_1 \sin \varphi) \ddot{\varphi} - \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & - (\beta_1 \cos \varphi + \beta'_1 \sin \varphi) \dot{\varphi}^2 + (B_2 \cos 2\varphi + B'_2 \sin 2\varphi + a_0 \gamma_1 \cos \varphi + \\ & + a_0 \gamma'_1 \sin \varphi - B_0^*) \dot{\varphi} + (a_0 C_2 \cos 2\varphi + a_0 C'_2 \sin 2\varphi + \delta_1 \cos \varphi + \\ & + \delta'_1 \sin \varphi + G_0) = 0, \end{aligned}$$

Из интеграла моментов (3) получено равенство на функцию  $\lambda(t)$ .

$$\lambda(t) = (\alpha_1 a'_0 \sin \varphi + a_0 \alpha_3)^{-1} \left[ 2^{-1} B_2 \cos 2\varphi + 2^{-1} B'_2 \sin 2\varphi + a_0 \gamma_1 \cos \varphi + a_0 \gamma'_1 \sin \varphi + (k + 2^{-1} B_0) - (\beta_1 \cos \varphi + \beta'_1 \sin \varphi + \beta_0) \dot{\varphi} \right]. \quad (7)$$

В формуле (7) предполагаем  $(\alpha_1 a'_0)^2 + (a_0 \alpha_3)^2 \neq 0$ .

Рассмотрен случай, когда  $\alpha_3 = 0$  (т.е.  $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ ). Из уравнения (4) следует, что

$$\dot{\varphi}^2 = A_{33}^{-1} (-C_2 \cos 2\varphi - C'_2 \sin 2\varphi + 2\kappa'_1 \sin \varphi + 2\kappa_1 \cos \varphi + c_*), \quad (8)$$

где  $c_*$  – произвольная постоянная. Очевидно, что  $\varphi(t)$  является эллиптической функцией времени.

Поскольку уравнение (7) является следствием уравнения (5), то уравнение (6) с учётом равенств (7), (8) можно записать в виде

$$p_3 \cos 3\varphi + p'_3 \sin 3\varphi + p_2 \cos 2\varphi + p'_2 \sin 2\varphi + p_1 \cos \varphi + p'_1 \sin \varphi + p_0 = A_{33} \left[ 2^{-1} B_0^* \cos 2\varphi + a_0 \gamma_1 \cos \varphi - 2^{-1} (2k + B_2 + B_0 + B_0^*) \right] \dot{\varphi}, \quad (9)$$

где все коэффициенты и свободный член известны.

Требование того, чтобы правая часть уравнения (9) обращалась в нуль для любых значений  $\dot{\varphi}$ , приводит к системе алгебраических равенств на параметры задачи, при выполнении которых гири стат совершает маятниковые движения. Показана возможность трёх классов таких движений, для которых выполнено одно из условий.

- $a_0 = 0$  (ось маятникового движения горизонтальна);
- $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$  (центр масс расположен в неподвижной точке);
- $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{a} \neq 0, a_0 \neq 0$ .

Найдено три решения (1), (2), которые задают указанные классы движений.

Если же  $a_3 \neq 0$ , то удалось найти два решения системы уравнений (1), (2). В случае, когда ось собственного вращения горизонтальна ( $a_0 = 0$ ), найдены условия существования такого решения

$$A_{23} = 0, \quad \alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13} = 0, \quad B_{22} = 0, \quad B_{12} = 0, \quad C_{12} = C_{23} = 0, \\ \alpha_1 (C_{22} - C_{11}) - \alpha_3 C_{13} = 0, \quad \alpha_1 s_1 + \alpha_3 s_3 = 0, \quad s_2 = 0,$$

а решение можно записать в виде

$$\lambda(t) = (\alpha_1 \sin \varphi)^{-1} \left[ -4^{-1} B_{11} \cos 2\varphi + (k + 4^{-1} B_{11}) - A_{13} \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \right],$$

$$\alpha_3 \left[ (k - 8^{-1} B_{11}) \cos \varphi + 8^{-1} B_{11} \cos 3\varphi \right] \dot{\varphi} = \alpha_1 \sin^2 \varphi \times \\ \times \left[ 2^{-1} (C_{22} - C_{11}) \sin 2\varphi - s_1 \cos \varphi \right].$$

Второй случай характеризуется следующими ограничениями на параметры задачи

$$\alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13} = 0, \quad A_{23} = 0, \quad B_{11} = B_{22}, \quad B_{12} = 0, \quad B_{23} = 0,$$

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{12} = 0, \quad s_1 = a_0 C_{13}, \quad s_2 = a_0 C_{23},$$

$$k = \left[ a_0^2 \alpha_3 B_{13} - \alpha_1 (a_0'^2 B_{11} + a_0'^2 B_{33}) / 2 \right] / \alpha_1.$$

При выполнении этих условий решение можно записать так:

$$\dot{\varphi} = \left[ a_0' C_{23} \cos \varphi + a_0' C_{13} \sin \varphi - (s_3 + a_0 (C_{11} - C_{33})) \right] / B_{22},$$

$$\lambda(t) = \alpha_1^{-1} (a_0 B_{13} - A_{13} \dot{\varphi}). \quad (10)$$

Очевидно, что функция  $\varphi(t)$  в этом случае является элементарной функцией времени.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Харламов П.В. О решениях уравнений динамики твёрдого тела / П.В. Харламов // Прикл. Математика и механика. – 1965. – 29, вып.3. – С. 567-572.
2. Волкова О.С. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом / О.С. Волкова, И.Н. Гашененко // Механика твёрдого тела. – 2009. – Вып.39. – С.42-49



## ОПТИЧЕСКИЕ И ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ КОДИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ ОБ ОБЪЁМНЫХ СЦЕНАХ С ПОМОЩЬЮ СЛУЧАЙНЫХ ФАЗОВЫХ МАСОК В ЦИФРОВОЙ ГОЛОГРАФИИ

Н.Н. Евтихийев, Е.А. Курбатова, С.Н. Стариков, П.А. Черёмхин

«OPTICAL AND DIGITAL METHODS OF ENCRYPTION OF INFORMATION OF 3D SCENES  
USING RANDOM PHASE MASKS IN DIGITAL HOLOGRAPHY»

N.N. Evtikhiev, E.A. Kurbatova, S.N. Starikov, P.A. Cheremkhin

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

e-mail: [holo@pico.mephi.ru](mailto:holo@pico.mephi.ru)

Цифровая голография [1] является распространенным инструментом исследований и практических применений в различных областях науки и техники. Среди областей применения цифровой голографии к числу наиболее важных относится оптическая обработка информации, в частности кодирование и декодирование информации. Наиболее распространены методы кодирования информации с использованием случайных фазовых масок [2-6]. В процессе фиксации интерференционной картины эти фазовые маски позволяют создать сложную форму волнового фронта. Для восстановления информации об объекте необходимо иметь точную или практически точную копию маски, использованной при кодировании цифровой голограммы. Так как форма маски может быть самой разнообразной, то подобрать ей подобную практически невозможно. Таким образом, обеспечивается высокая степень защищенности информации. Первой работой подобного рода являлся метод кодирования изображений с использованием двух случайных фазовых масок, представленный в 1995 году [2]. В 2000 году подобный алгоритм был адаптирован для кодирования информации с помощью цифровой голографии [3]: случайная фазовая маска добавлялась в опорный пучок. В результате регистрировалась закодированная цифровая голограмма с высокой степенью защищенности информации.

Кодирование и декодирование цифровых данных с использованием голографического принципа важно во многих применениях, связанных как с записью цифровой информации на электронные носители, так и с передачей информации по каналам связи. Целью данной работы являлась реализация, проверка и анализ криптостойкости различных методов кодирования информации о «плоских» объектах и объёмных сценах с помощью случайных фазовых масок в цифровой голографии.

Программно реализованы и применены 3 метода кодирования информации об объектах, регистрируемых цифровыми голограммами:

1. Оптические методы: кодирование с двумя случайными фазовыми масками (К2) [2] и кодирование объектного пучка в пространственной плоскости с использованием случайной фазовой маски (КОП) (похожий метод представлен в [3]).
2. Цифровой метод кодирования в частотной плоскости свёрткой с импульсным откликом системы с использованием случайной фазовой маски (КЧС) [6].

Анализ методов производился путём моделирования оптической записи цифровых голограмм Френеля, моделирования оптического или цифрового кодирования, моделирования оптического или цифрового декодирования информации. Длина волны излучения принималась равной 532 нм, размер пикселя фоторегистратора составлял  $9 \times 9$  мкм<sup>2</sup>. В качестве исходного объектного изображения использовалось стандартное тестовое изображение в оттенках серого размером  $128 \times 128$  отсчётов на поле  $1024 \times 1024$  отсчётов. На рис. 1 приведены восстановленные изображения объектных

полей с кодированных голограмм после декодирования информации с них с использованием случайной (а, в, д) и требуемой фазовых масок (б, г, е). Как видно, при декодировании информации с использованием некорректной фазовой маски изображение объекта неидентифицируемо.

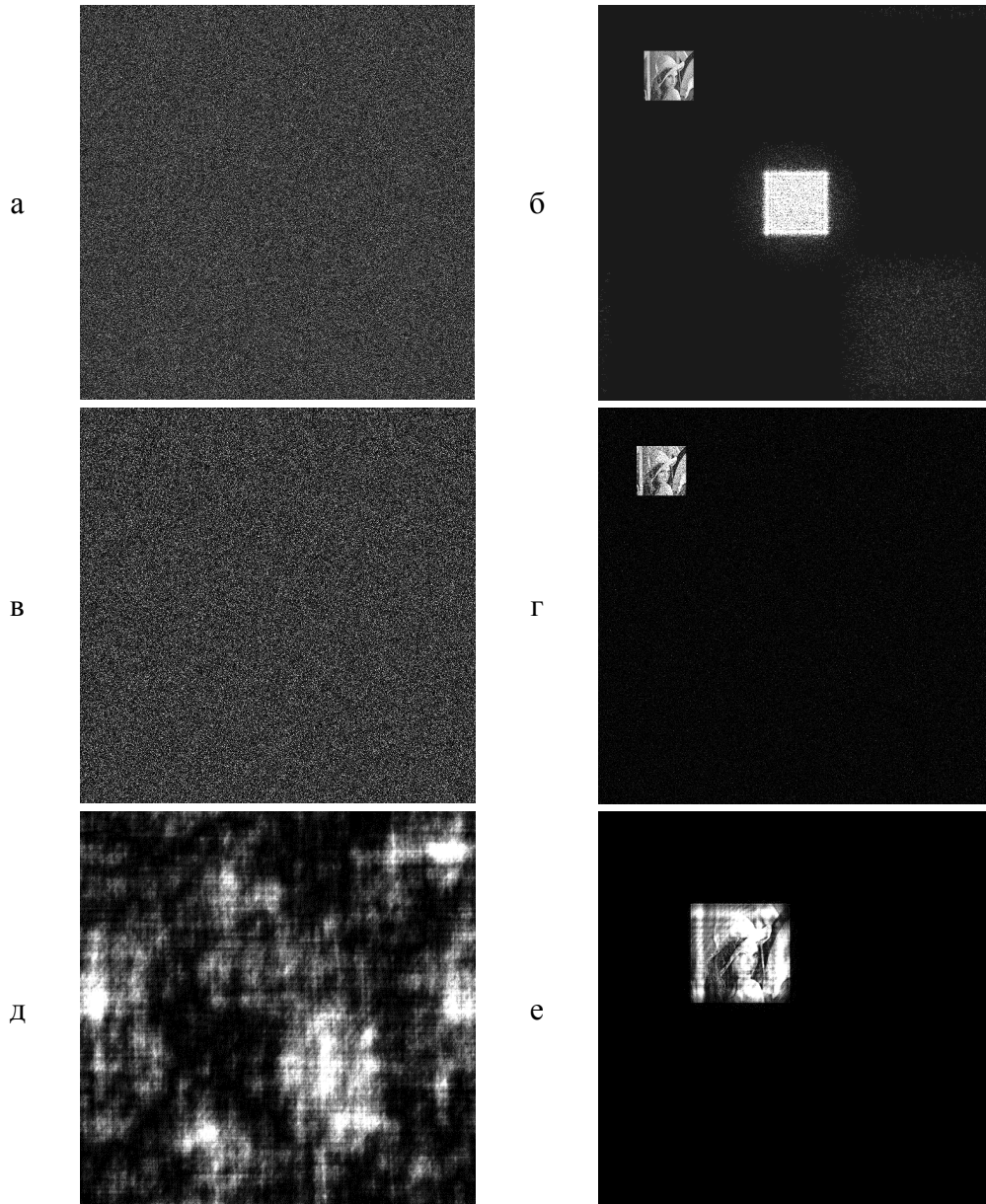


Рис. 1. Восстановленные изображения объектных полей с закодированной голограммы Френеля методами К2 (а, б), КОП (в, г) и КЧС (д, е) с некорректным (а, в, д) и корректным декодированием (б, г, е)

Была проведена проверка стойкости рассматриваемых методов кодирования к использованию при декодировании произвольных фазовых масок. На рис. 2 приведён график зависимости нормированного среднеквадратического отклонения (НСКО) восстановленного изображения относительно исходного от порядкового номера используемой при декодировании информации произвольной случайной маски. В данном случае значения НСКО практически идентичны и составляют около 0,6. В результате восстановленное изображение объекта, как и представленное на рис. 1а,

неидентифицируемо. Графики для других методов (КОП и КСЧ) аналогичны.

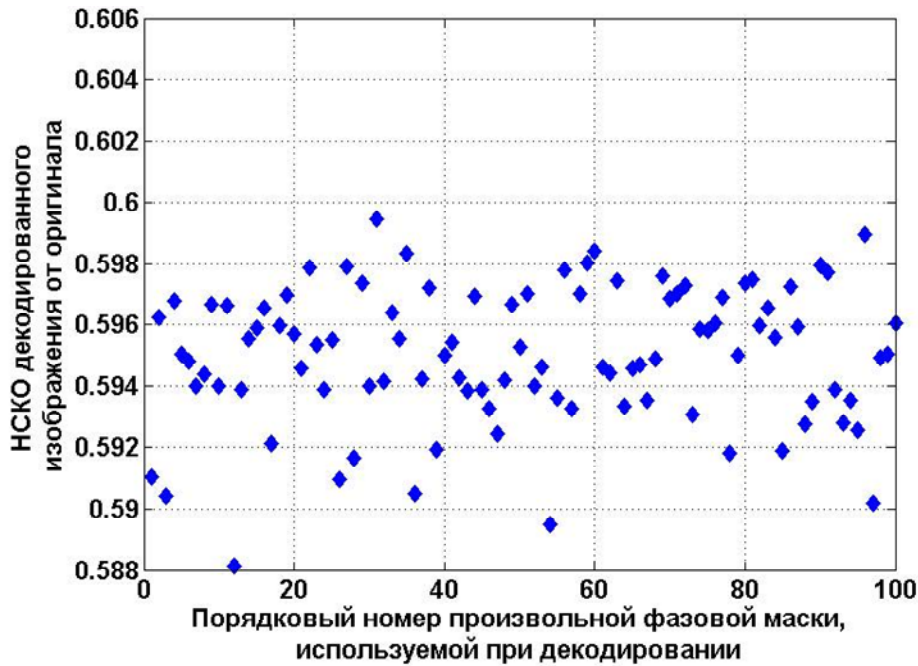


Рис. 2. График зависимости НСКО декодированного изображения относительно оригинала от порядкового номера произвольной случайной маски, используемой при декодировании

Также была проведена оценка стойкости рассматриваемых методов к использованию при декодировании случайной фазовой маски, сходной с используемой при кодировании. На рис. 3 приведён график зависимости НСКО восстановленного изображения относительно исходного от доли диапазона фаз 2 случайных фазовых масок при декодировании информации с голограммы относительно используемой при кодировании. Для кодирования использовался метод К2. Как видно, изменение диапазона маски на 18 % относительно используемой при кодировании приводит к увеличению НСКО до 0,2.

Была проведена численная оценка криптостойкости методов кодирования информации. Использовались фазовые маски с 256 градациями фазы и размером  $2048 \times 2048$  отсчётов. Согласно теории статистики вероятность абсолютно верного подбора (с точностью до каждого пикселя) подобных масок составляет  $10^{-20201781}$ . Вероятность подбора фазовых масок с учётом возможностей получения не только максимально высокого качества, но и приемлемого ( $НСКО \leq НСКО_{\min} + 0,2$ , где  $НСКО_{\min}$  определяется при выборе абсолютно верных фазовых масок) составила  $10^{-7907446}$ . При этом были использованы некоторые оценки криптостойкости метода К2, приведённые в [7], для масок с малым числом отсчётов. При кодировании методами КОП и КСЧ используется одна фазовая маска. В результате вероятность абсолютно верного подбора маски составит  $10^{-10100892}$ , а маски с приемлемыми характеристиками -  $10^{-3953723}$ .

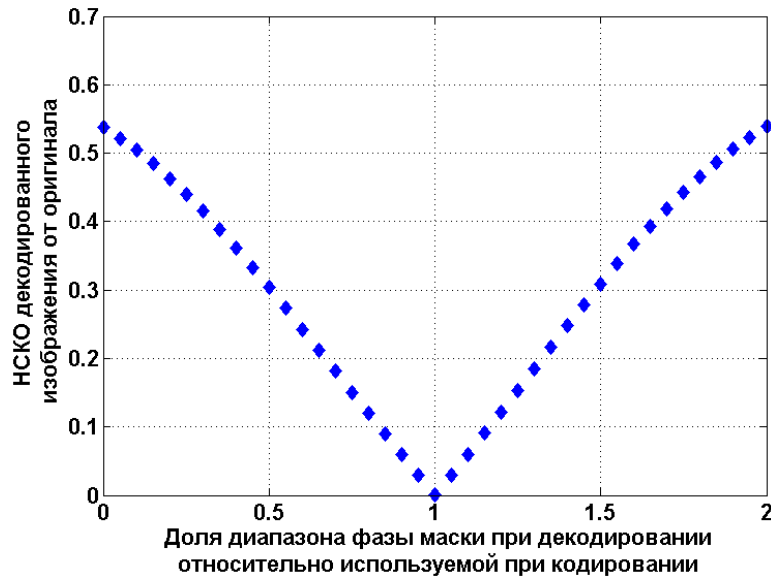


Рис. 3. График зависимости НСКО декодированного изображения от доли диапазона фазы маски, используемой при кодировании

Таким образом, подбор корректного ключа путём прямого перебора значений фазы фазовых масок является чрезвычайно ресурсоёмким и при существующих на данный момент компьютерных мощностях составит приблизительно  $10^{7900000}$  лет для метода К2 и  $10^{3950000}$  лет для методов кодирования КОП и КСЧ.

### Литература

1. Ulf Schnars, Werner Jüptner, Digital Holography: Digital Hologram Recording, Numerical Reconstruction, and Related Techniques. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. – 2005. – 164 p.
2. Philippe Refregier, Bahram Javidi // Opt. Lett. – 1995. – V. 20. – P. 767-769.
3. Enrique Tajahuerce, Bahram Javidi // Appl. Opt. – 2000. – V. 39. – P. 6595-6601.
4. Hyun Kim, Do-Hyung Kim, Yeon H. Lee // Opt. Express. – 2004. – V. 12. –P. 4912-4921.
5. Shi Liu, Changliang Guo, John T. Sheridan // Optics Laser Technology. – 2014. – V. 57. – P. 327-342.
6. Anith Nelleri, Joby Joseph, Kehar Singh, Digital Holography and Three-Dimensional Imaging Conference, Vancouver, Canada (2009) DTuB1.
7. David S. Monaghan, Unnikrishnan Gopinathan, Thomas J. Naughton, John T. Sheridan // Appl. Opt. – 2007. – V. 46. – P. 6641-6647.

## ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЁТКИ НА DC ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛА $\text{LiCu}_2\text{O}_{2+\delta}$

Х.Ш. Дау<sup>1)</sup>, Е.А. Тищенко<sup>2)</sup>, А.А. Буш<sup>3)</sup>, К.Е. Каменцев<sup>3)</sup>

### « INFLUENCE OF CRYSTAL LATTICE DEFORMATION ON DC ELECTRICAL PROPERTIES OF CRYSTAL $\text{LiCu}_2\text{O}_{2+\delta}$ »

H.S. Dau<sup>1)</sup>, E.A. Tishchenko<sup>2)</sup>, A. A. Bush<sup>3)</sup>, K.E. Kamenzev<sup>3)</sup>

1. *People's Friendship University of Russia, Moscow, 117198, Russia.*

2. *P.L. Kapitza Institute for Physical Problems, Moscow, 119334, Russia*

3. *Moscow State Institute of Radioengineering, Electronics, and Automation (Technical University), Moscow, 117454, Russia*

e-mail: [dausyhieu@gmail.com](mailto:dausyhieu@gmail.com); [tishchenko@kapitza.ras.ru](mailto:tishchenko@kapitza.ras.ru)

Элементарная ячейка  $\text{LiCu}_2\text{O}_2$  представляет собой структуру, основными базовыми блоками которой являются пирамиды  $\text{Cu}^{2+}\text{O}_5$  с квадратными основаниями  $\text{Cu}^{2+}\text{O}^4$ , гантели  $\text{O}-\text{Cu}^{1+}-\text{O}$ , и такие же для  $\text{Li}^+$  [1]. Эти блоки в плоскости **ab** образуют слоистую структуру из двойных слоев типа  $\text{LiCuO}_2$ , в которых медные и литиевые пирамиды выстроены в виде линейных цепей вдоль оси **b** альтернативно вдоль оси **a**. Двойные слои вдоль оси **c** разделены плоскостями  $\text{Cu}^{1+}$ , образующими почти квадратную решетку, в которой центры квадратов могут быть вакансиями для аккомодации экстра-кислорода  $\text{O}_\delta$  или других допирующих элементов. Эти слои одновалентной меди, гантельно координированные кислородом, соответствуют структурному мотиву ВТСП соединений типа 123.

Установлено, что электрические свойства этого кристалла изменяются под влиянием локальных деформаций кристаллической решетки и при пропускании через него сильного тока [2]. Такие деформации возникают не только из-за внедрения  $\text{O}_\delta$ , но и из-за взаимного обмена структурными позициями катионов  $\text{Li}^+$  и  $\text{Cu}^{2+}$  с близкими химическими радиусами в процессе закалки образцов из области температур выше  $T_0 \sim 993$  К, при которой происходит структурный переход типа порядок – беспорядок [3].

### ЭКСПЕРИМЕНТ И ОБСУЖДЕНИЕ

Чтобы изучить влияние деформации кристаллической решетки на зарядовый транспорт кристалла  $\text{LiCu}_2\text{O}_2$ , мы использовали серию образцов, выращенных методом спонтанной кристаллизации из раствора в расплаве. Для модификации образцов использовали отжиг при 1120 К в течение 40 минут в воздушной атмосфере, быструю закалку и последующий мягкий отжиг при 400 К в течение 4 часов в потоке воздуха. Измерением массы образцов до и после закалки и рентгеновским структурным анализом было установлено, что масса образцов на уровне микрограмм не изменялась, однако на поверхностях (001) кристаллов в очень тонком слое появлялась фаза  $\text{LiCu}_3\text{O}_3$ , которая легко устранялась полировкой. Кристаллическая структура образцов характеризовалась рентгеновским фазовым анализом, а морфология их поверхности поляризационным микроскопом. Было установлено, что после синтеза, как правило, на обеих (0 0 1) **ab** -плоскостях образцов наблюдалась мелкая доменная структура, которая после модификации исчезала и возникала более крупная доменная структура в виде периодических светлых и темных полос, вытянутых вдоль естественных [2 1 0] или [2 -1 0] граней кристалла ( см. рис. 1). Причем на тех **ab** плоскостях, где площадь под светлыми полосами превалировала, измеренные константы **c** были больше аналогичных для сторон с противоположным соотношением, а рефлекты (0 0 12) были интенсивнее почти на 2 раза. Указанные тенденции наблюдались для всех изученных

нами модифицированных образцов (более десятка). В результате модификации в среднем кристаллическая решетка сжимается: уменьшается объем элементарной ячейки и особенно константа  $c$  (см. рис. 2).

Из результатов лазерного масс-спектрометрического анализа выяснилось, что отношение атомных концентраций  $[Cu]/[Li]$  отличалась от стехиометрического значения 2 в третьем-четвертом знаке мантииссы, а отношение  $[O]/[Li]$  составляло 2,2–2,3 для используемых нами образцов из двух разных синтезов. Можно предположить, что данные значения  $\delta = 0,2–0,3$  соответствуют избыточному кислороду  $O_\delta$ , который аналогично ВТСП типа 123 может занимать вакантные октаэдрические позиции в плоскостях одновалентной меди [4]. Из практики ВТСП материалов известно, что  $O_\delta$  обладает мобильностью и способен самоорганизовываться в кластеры, осуществляя локальную деформацию кристаллической структуры и дырочное допирование  $CuO_4$  блоков [5]. Исходя из сказанного можно предположить, что сжатие вдоль оси  $c$  связано с участием  $O_\delta$ . Для иллюстрации описанной картины мы используем данные для образца А4.

После модификации DC проводимость при комнатной температуре по **ab** плоскости увеличилась примерно на 20% и в целом изменила свою температурную зависимость. В исходном образце при  $150 < T < 300$  К кривые этих зависимостей хорошо подгонялись моделью прыжковой проводимости между ближайшими соседями (ППБС) ( $\sigma = \sigma_0 \exp\{-E_a/T\}$ ) с  $E_a = 800$  К; ниже 150 К ни эта модель ни модель Мотта [6] для прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка (ПППДП) ( $\sigma = \sigma_0 \exp\{-[T_0/T]^\nu\}$ ),  $\nu = 1/(d+1)$ ,  $d$  – размерность системы) не работали. Поэтому в интервале  $50 < T < 150$  К с помощью программы MATCAD мы подгоняли экспериментальные кривые по переходной модели, которая описывает транспорт при переходе из одного режима в другой ( $\sigma = \sigma_0 \exp\{-E_a/T - [T_0/T]^{1/4}\}$ ), хорошая подгонка получалась с параметрами  $E_a = 354$  К и  $T_0 = 1,46 \cdot 10^7$  К и дисперсией 0,4%. После закалки в интервале 300–150 К и ниже 50 К хорошо работала модель ПППДП с  $T_0 = 3,46 \cdot 10^7$  и  $4,34 \cdot 10^6$  К, соответственно. После мягкого отжига в интервале 300–100 К кривые проводимости описывались моделью ПППДП с  $T_0 = 2,80 \cdot 10^7$  К. Изложенное проиллюстрировано на Рис. 3 и 4. Размерность проводимости для ПППДП была проконтролирована путем определения значения  $\nu$  по наклону линейной подгонки кривых температурной зависимости локальной активационной энергии  $\Delta = -\partial \ln \rho / \partial \ln(1/T)$ , построенных в координатах  $(\log(\Delta), \log T)$ . Это значение, например, для **ab** плоскости после мягкого отжига в интервале 120–300 К равнялось  $0,23 \pm 0,03 \approx 1/4$ , что близко к значению  $d = 3$ .

По оси  $c$  ситуация другая (рис. 5): DC проводимость при комнатной температуре после модификации увеличилась на порядок, до модификации зависимости в интервале 300–70 К хорошо подгоняются моделью ПППДП с  $T_0 = 2,6 \cdot 10^8$  К; после закалки от 1120 К: в 300–100 К – ПППДП с  $T_0 = 3,94 \cdot 10^7$  К и при  $T < 50$  К моделью для смешанного режима с  $T_0 = 1,06 \cdot 10^5$  К и  $E_a = 56,8$  К; после мягкого отжига при 400 К: в 300–130 К - ПППДП с  $T_0 = 3,08 \cdot 10^7$  К и при  $T < 50$  К – ППБС с  $E_a = 124$  К. Активационный режим при  $T < 50$  К после модификации может быть связан с активацией носителей заряда через магнитную жесткую щель (рис. 5). Значение параметра  $T_0$  характеризуется формулой [6]:

$$T_0 = 2,1^4 \cdot [\alpha^3 / k_B N(E_F)] \quad (1)$$

Где  $1/\alpha$  – радиус волновой функции, соответствующий радиусу локализованного состояния,  $N(E_F)$  – плотность электронных состояний вблизи уровня Ферми на единицу объема и энергии. Уменьшение значения  $T_0$  после модификации указывает на

увеличение плотности электронных состояний в объеме локализации носителя за счет сжатия объема.

Величина напряжения и тока смещения оказывают влияние на величину его проводимости. На Рис. 6 показаны кривые DC проводимости образца по **ab** плоскости после мягкого отжига при двух напряжениях смещения 10 В и 1 В. Видно, что при смещении 10 В увеличиваются и проводимость, и значение  $T_0$  по сравнению со смещением 1 В. Это свидетельствует об увеличении плотности электронных состояний за счет инжекции носителей. Аналогичная ситуация также возникает и вдоль оси **c**.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Смена после модификации режима проводимости ППБС на ПППДП в плоскости **ab** в области  $T > 150$  К указывает на возникновение большей разупорядоченности в локальной структуре, приводящей к более широкому распределению как прыжковых барьеров, так и электронных состояний, локализованных около уровня Ферми. Однако сжатие решетки увеличило интеграл перекрытия, что привело к росту плотности состояний и проводимости, как это видно и для режима ПППДП по оси **c**. Это привело к уменьшению анизотропии и трехмерному транспорту. Возникновение макроскопических упорядоченных двойников можно объяснить самоорганизацией  $O_\delta$ , которой препятствуют химический беспорядок из-за обмена взаимными позициями  $Li^+$  и  $Cu^{2+}$  и структурные дефекты (одномерные и двумерные), которые могут возникать и усиливаться в результате процессов быстрого нагрева до 1120 К и закалки до 300 К.

### Литература

1. Berger R., Meetsma A., Smalen S. et. al. // J. Less-Common Met. – 1991. – V. 175. – P. 119.
2. Буш А.А., Каменцев К.Е. Физика твердого тела. – 2004. – Т. 46, вып. 3.
3. Каменцев К.Е., Буш А.А., Тищенко Э.А. и др. // ЖЭТФ. – 2013. – Т. 144. – С. 371.
4. Parfionov O.E., Konovalov A.A. // Physica C. – 1992. – V. 202. – P. 385.
5. Fratni M., Rocca N., Ricci A. et.al. // Nature. – 2010. – V. 466. – P. 841-844.
6. Мотт Н., Девис Э. Электрические процессы в некристаллическом веществе. – М.: Мир, 1974.

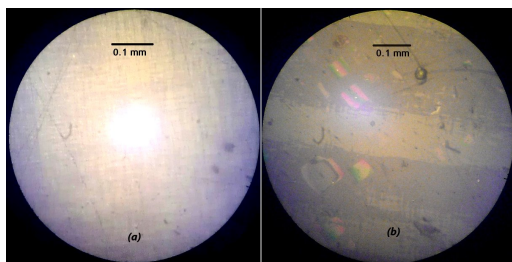


Рис. 1. Фото поверхности образца А4 до (а) и после (б) модификации в поляризованном свете микроскопа.

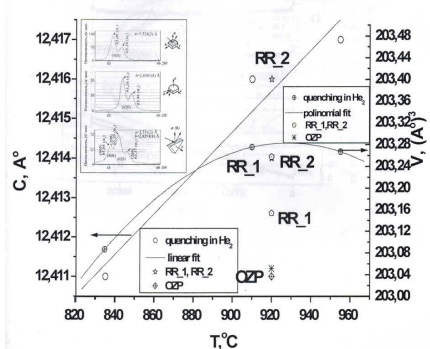


Рис. 2. Зависимости константы  $c$  и объема кристалла как функции температуры закалки

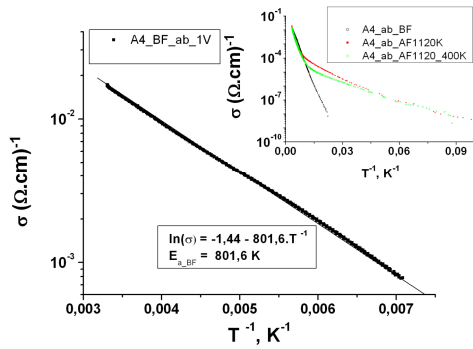


Рис. 3. DC проводимость A4 на шкале  $T^{-1}$  по **ab** плоскости в интервале 140-300 К. На вставке показаны кривые до, после модификации и отжига в интервале 4-300 К

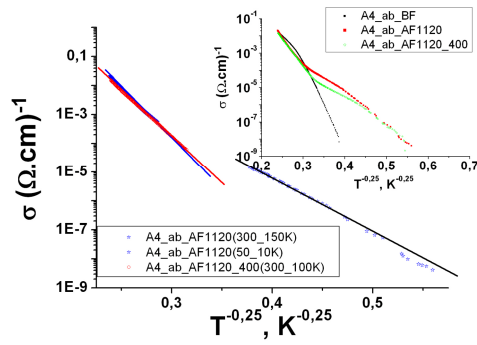


Рис. 4. DC проводимость A4 на шкале  $T^{-0,25}$  по **ab** плоскости после модификации и отжига. На вставке показаны кривые в полном интервале 4-300 К

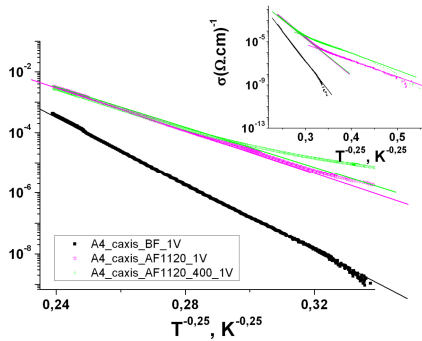


Рис. 5. DC проводимость образца A4 вдоль **c** оси на шкале  $T^{-0,25}$  в интервале температур 70-300 К до и после модификации. На вставке представлены кривые температурных зависимостей в интервале 4-300К

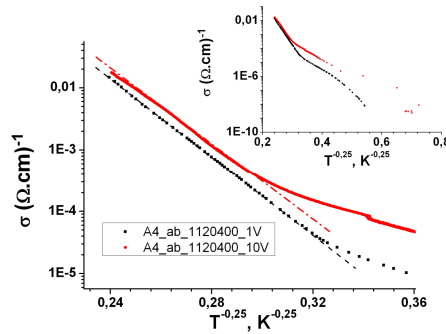


Рис. 6. DC проводимость A4 по **ab** плоскости после модификации и мягкого отжига на шкале  $T^{-0,25}$ , напряжения смещения 1 В и 10 В и параметры  $T_0 = 2,810^7$  К и  $2,710^7$  К, соответственно. На вставке показаны кривые ависимостей в интервале 4-300К



## ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ТОНКИХ ОПТИЧЕСКИХ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ ПЛЁНОК МЕТОДОМ СКАНИРУЮЩЕЙ МИКРОСКОПИИ

И. М. Ахмеджанов<sup>1</sup>, Д. В. Баранов<sup>1</sup>, Е. М. Золотов<sup>1</sup>,  
Н. С. Трофимов<sup>2</sup>, Т. К. Чехлова<sup>2</sup>

«CHARACTERIZATION OF SOL-GEL THIN FILM WITH SCANNING MICROSCOPY»

I. M. Akhmedzhanov, D. V. Baranov, E. M. Zolotov,  
N. S. Trofimov, T. K. Tchekhlova

<sup>1</sup>*Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия*

<sup>2</sup>*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

e-mail: [zolotov@kapella.gpi.ru](mailto:zolotov@kapella.gpi.ru)

В настоящее время сканирующая оптическая микроскопия относится к числу наиболее распространенных методов исследования поверхности. Тем не менее, задача исследования возможности ее применения для количественной характеристики объектов не теряет актуальности. Связано это, с одной стороны, с технологическим прогрессом и появлением новых перспективных объектов для исследования, а с другой – с естественным отсутствием универсальных методов и, как следствие, необходимостью взаимной адаптации объектов и методов.

Основными преимуществами сканирующего дифференциального оптического микроскопа (СДГМ), используемого нами для целей оптической характеристики, являются: одновременная регистрация как фазовой, так и амплитудной составляющей оптического сигнала, высокая устойчивость к акустическим помехам, а также локальный (порядка величины дифракционного предела разрешения) характер сбора информации [1]. Кроме этого, в СДГМ есть дополнительная степень свободы, связанная с возможностью установки необходимого расстояния между двумя зондирующими пучками на объекте. Однако широкому применению СДГМ препятствует, в частности, нелинейный характер его функции отклика. Решение обратной задачи СДГМ выполняется при решении нелинейного интегрального уравнения, связывающего функцию отклика с параметрами микроскопа и параметрами объекта:

$$F(x_s) = \iint g(x_s + \varepsilon/2 - x) g^*(x_s - \varepsilon/2 - x') r(x) r^*(x') dx dx',$$

где  $g(x)$  – функция формы зондирующего пятна,  $x_s$  – координата сканирования,  $r(x)$  – локальный коэффициент отражения объекта,  $\varepsilon$  – интервал между зондирующими пучками. Существует алгоритм линеаризации функции отклика [2], основанный на использовании теоремы отсчетов Котельникова-Шеннона, но заранее определить возможность его применения для произвольного объекта нельзя. Ключевым параметром здесь является отношение сигнал/шум, которое становится достоверно известным только в ходе получения отклика СДГМ.

В настоящей работе изучается возможность применения метода сканирующей дифференциальной гетеродинной микроскопии для определения толщины, показателя преломления и оптической неоднородности тонких оптических волноводных пленок, сформированных с помощью золь-гель технологии на стеклянных подложках. Для полученных экспериментальных откликов обратная задача решается методом

линеаризации. Анализируются величины и источники погрешностей определения параметров оптических пленок, а также проводится сравнение полученных результатов с результатами, полученными альтернативными методами.

### **Литература**

1. Akhmedzhanov I. M., Baranov D. V., Zolotov E. M. Object characterization with a differential heterodyne microscope // *J. Opt. A.* – 2003. – V. 5. – S. 200.
2. Баранов Д.В., Егоров А.А., Золотов Е.М., Свидзинский К.К. Восстановление профиля микрообъекта в гетеродинном дифференциальном микроскопе // *Оптика и спектроскопия.* – 1997. – Т. 83. – С. 516.

## ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МИКРОВОЛНОВОДОВ ПО ОТКЛИКУ ОПТИЧЕСКОГО МИКРОСКОПА

И. М. Ахмеджанов, Д. В. Баранов, Е. М. Золотов

«ADVANCED SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM FOR RECTANGULAR MICROWAVEGUIDES BY THE RESPONSE OF OPTICAL MICROSCOPE»

I. M. Akhmedzhanov, D. V. Baranov and E. M. Zolotov

*Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия*

*e-mail: [zolotov@kapella.gpi.ru](mailto:zolotov@kapella.gpi.ru)*

Сканирующая гетеродинная микроскопия благодаря высокой точности измерений и устойчивости к вибрациям является перспективным средством для метрологии поверхностных наноструктур, в том числе плазмонных волноводов (ПВ), формируемых в металлических подложках в виде микроканалов различного профиля [1]. Целью настоящей работы является исследование алгоритма решения обратной задачи (ОЗ) сканирующего дифференциального гетеродинного микроскопа (СДГМ) по его откликам на двух длинах волн от ПВ прямоугольного профиля. Предложенный ранее в работах [2,3] алгоритм решения ОЗ для указанного типа волноводов использовал амплитудно-фазовые отклики на одной длине волны зондирующего луча микроскопа. Однако этот метод имел недостаток, выражающийся в наличии определенных областей значений параметров ПВ, в которых решение ОЗ было неустойчивым. Хотя был найден алгоритм смещения этих областей путем изменения параметров микроскопа, тем не менее представляет интерес исследование других вариантов решения ОЗ, свободных от указанного недостатка. В настоящей работе мы исследуем возможность решения ОЗ только по фазовым откликам на одной ТЕ поляризации, но на двух разных длинах волн зондирующего пучка микроскопа. Обратная задача, как и в предыдущих случаях, решается с использованием метода подбора [4], база данных для которого формируется из величин фазового контраста, рассчитанных для выбранного диапазона параметров ПВ. Условием возможности решения ОЗ является существование решения, его однозначность и устойчивость. Наличие указанной базы данных и алгоритма решения ОЗ позволит осуществлять характеризацию реальных ПВ прямоугольного профиля по экспериментальным откликам СДГМ.

В нашем случае база данных состояла из значений контраста фазовых откликов, рассчитанных для длин волн  $\lambda_1 = 0,63$  мкм и  $\lambda_2 = 0,53$  мкм на ТЕ-поляризации. Диапазоны значений параметров ПВ, в которых рассчитывалась база данных составляли  $w = 0,4 \div 0,6$  мкм для ширины и  $d = 0,8 \div 1,5$  мкм для глубины волновода. Рассчитанные двумерные массивы контрастов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  для  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , соответственно, были интерполированы до размера  $300 \times 300$  при интервалах дискретизации  $\Delta w = 1$  нм и  $\Delta d = 2$  нм, которые в графическом представлении имеют вид квазипериодических двумерных функций, зависящих от параметров  $w$  и  $d$  (рис. 1). Входными данными для ОЗ являются значения контраста фазового отклика микроскопа  $\Phi_0(\lambda_1)$  и  $\Phi_0(\lambda_2)$ , полученного на двух длинах волн. Решению ОЗ на представленном рисунке будут соответствовать те значения параметров волновода  $w$  и  $d$ , которые являются общими при пересечении поверхностей  $\Phi_1(d, w)$  и  $\Phi_2(d, w)$  горизонтальными плоскостями  $\Phi_1 = \Phi_0(\lambda_1)$  и  $\Phi_2 = \Phi_0(\lambda_2)$ , соответственно.

Следует отметить, что в значениях контраста фазового отклика подразумевается наличие некоторой ошибки, обусловленной точностью определения фазового отклика,

которая оценивается на основании эксперимента. Графически указанная ошибка должна проявляться в том, что функции  $\Phi_1(d, w)$  и  $\Phi_2(d, w)$  должны представляться поверхностями некоторой толщины, вследствие чего пересечение поверхностей с горизонтальными плоскостями будет иметь вид полос, что приведет к возникновению ошибки решения.

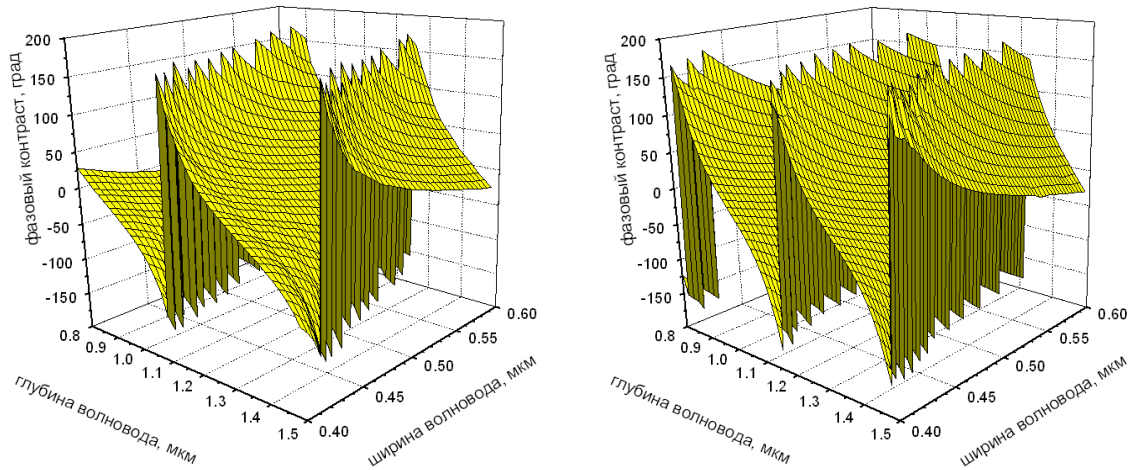


Рис. 1. Контраст фазового отклика СДГМ на волновод с прямоугольным профилем в зависимости от глубины и ширины волновода для двух значений длины волны зондирующего пучка:  $\lambda_1 = 0,63$  мкм (слева) и  $\lambda_2 = 0,53$  мкм (справа).

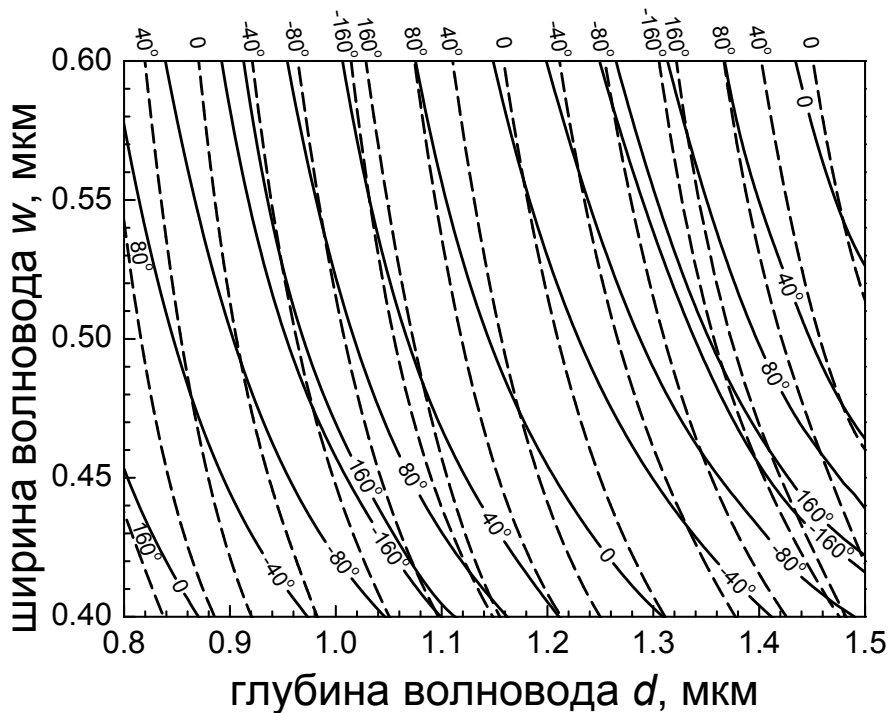


Рис. 2. Изолинии поверхности контраста фазового отклика СДГМ на волновод с прямоугольным профилем в зависимости от глубины и ширины волновода для двух значений длины волны зондирующего пучка:  $\lambda_1 = 0,63$  мкм (сплошные линии) и  $\lambda_2 = 0,53$  мкм (штриховые линии).

Ширина полосы, как и углы пересечения полос для двух длин волн, являются определяющими факторами величины ошибки решения ОЗ микроскопа для выбранного объекта. Удобнее всего взаимное пересечение сечений двух поверхностей представить с помощью их изолиний на координатной сетке  $Owd$ . На рис. 2 изображены изолинии функций фазового контраста рассчитанных массивов для двух длин волн с интервалом  $\Delta\Phi = 40^\circ$ . Точки пересечения изолиний представляют решение обратной задачи для рассматриваемого объекта. Характерным отличием полученной сетки фазовых изолиний для двух длин волн от использованной ранее амплитудно-фазовой сетки [3] для одной длины волны является отсутствие непересекающихся изолиний, образующих нестабильные зоны. Кроме того, фазовые изолинии пересекаются между собой под большими углами, что свидетельствует о меньших погрешностях решения обратной задачи в этом варианте. Оценка ошибки решения ОЗ была осуществлена для контрольного волновода с теми же параметрами  $d = 1,1$  мкм и  $w = 0,5$  мкм, как и в работе [3]. Если принять в качестве входных погрешностей для фазового контраста те же значения, что и в указанной работе, т.е.  $\delta\Phi_0(\lambda_1) = \delta\Phi_0(\lambda_2) = 0.5^\circ$ , то после расчетов получим значения ошибки решения ОЗ, равные  $\delta d = 10$  нм,  $\delta w = 5$  нм, что существенно меньше, чем в случае решения обратной задачи по амплитудному и фазовому контрасту на одной длине волны. Оценка относительной погрешности решения для других областей представленной сетки показала примерно такой же выигрыш в точности, практически везде она находится в пределах 0,5...2% для обоих параметров волновода.

Таким образом, разработанный на основе двухволнового зондирования алгоритм решения ОЗ СДГМ на ТЕ-поляризации позволяет характеризовать параметры прямоугольных ПВ с большей точностью, чем в случае использования контраста на одной длине волны. Дальнейшая оптимизация предложенного алгоритма возможна путем подбора длин волн и использования дополнительной информации из амплитудного отклика для повышения точности решения ОЗ.

### Литература

1. Sondergaard T., Bozhevolnyi S. I. Surface-plasmon polariton resonances in triangular-groove metal gratings // *Phys. Rev. B.* – 2009. – V. 80. – P. 195407.
2. Ахмеджанов И. М., Баранов Д. В., Золотов Е. М. Метод определения параметров треугольных плазмонных волноводов по отклику гетеродинного микроскопа на ТЕ-поляризации // XLVIII Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники, 15–18 мая 2012. Тезисы докладов – М.: РУДН, 2012.
3. Akhmedzhanov I. M., Baranov D. V., Zolotov E. M. Characterization of V-shaped plasmon polariton waveguides using a differential heterodyne microscope at single polarization // (отправлена в *Laser Physics*).
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979.

## НОВЫЕ СХЕМЫ МОДУЛЯТОРОВ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ДИФРАКЦИОННОГО ТИПА

Е.В. Басистый В.А. Комоцкий Ю.М. Соколов

«NEW SCHEMES OF DIFFRACTION TYPE MODULATORS OF LASER RADIATION»

E.V. Basisty V.A. Komotskii Yu. M. Sokolov

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

e-mail: [zbhh@yandex.ru](mailto:zbhh@yandex.ru)

Модуляция лазерного излучения может осуществляться с помощью дифракционных элементов. Так, например, в работе [1] предложена оригинальная конструкция дифракционного фильтра для управления излучением мощных лазеров. Фильтр представляет собой дифракционную структуру, выполненную на диске в виде одномерной дифракционной решётки с постоянным периодом, но с изменяющейся по кругу скважностью, или двумерную дифракционную решетку с изменяющейся площадью ячеек. Вращая диск, можно изменять выходную мощность нулевого порядка лазерного пучка в значительном динамическом диапазоне.

Здесь описаны **две новые** схемы модуляторов дифракционного типа, в основе работы которых лежит явление дифракции лазерного пучка при отражении от рельефной дифракционной решетки с прямоугольным профилем с одинаковой протяженностью выступов и впадин,

Схема модулятора **первого типа** [2] приведена на рис. 1.

Дифракционная решетка 5, с глубиной рельефа  $H$  порядка нескольких длин световой волны  $\lambda$ , покрытая металлической плёнкой 6 установлена на подвижной платформе 2, закрепленной на оси поворота 3.

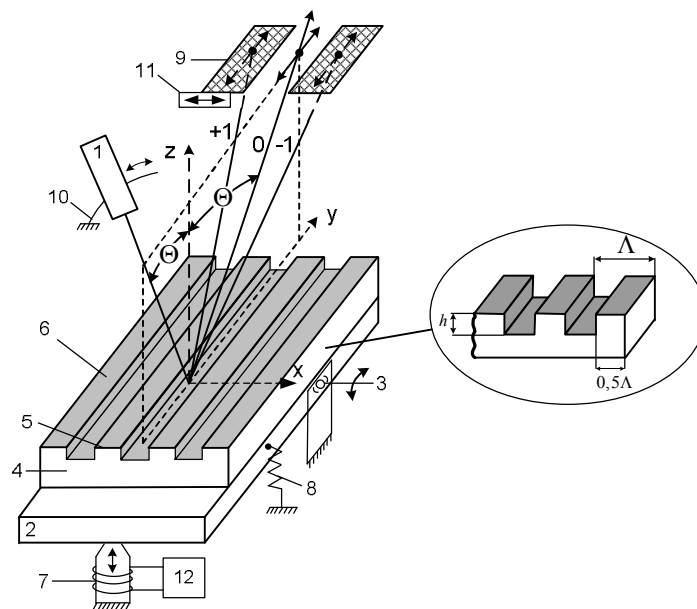


Рис. 1. Схема модулятора лазерного излучения первого типа

Пучок излучения лазера 1 направляется на дифракционную решетку под углом  $\Theta$ , который соответствует линейному участку зависимости мощности в нулевом порядке дифракции  $P_0(\Theta)$ . Эта зависимость определяется следующим соотношением [3,5]:

$$P_0 = P_i \cdot R \cdot \cos^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} H \cos \Theta \right) = P_i \cdot R \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left( \frac{4\pi}{\lambda} H \cos \Theta \right) \right].$$

Здесь  $R$  – коэффициент отражения,  $P_i$  – мощность лазерного излучения, падающего на дифракционную решетку. Середина линейного участка соответствует точке, в которой мощность нулевого порядка дифракции равна половине мощности падающего на модулятор лазерного пучка. С помощью щелевого пространственного фильтра 9 в отражённой дифракционной картине выделяем излучение нулевого порядка дифракции. При колебаниях платформы с решеткой вокруг оси 3 под действием электромеханического вибратора 7 мощность нулевого дифракционного порядка изменяется в соответствии с зависимостью  $P_0(\Theta)$ . Глубина модуляции мощности отражённого пучка нулевого порядка в некотором диапазоне линейно зависит от амплитуды угловых колебаний платформы с решёткой. При увеличении амплитуды может быть получена 100% модуляция, но при этом не будет соблюдаться линейная зависимость мощности от угла поворота платформы. Заметим, что модуляция мощности излучения в модуляторе первого типа сопровождается пространственной модуляцией, т.е. изменением направления отражённого пучка.

Схема модулятора *второго* типа [4] изображена на рис. 2. В отличие от схемы модулятора первого типа, в этой конструкции модуляция мощности лазерного пучка не сопровождается изменением направления выходного пучка излучения.

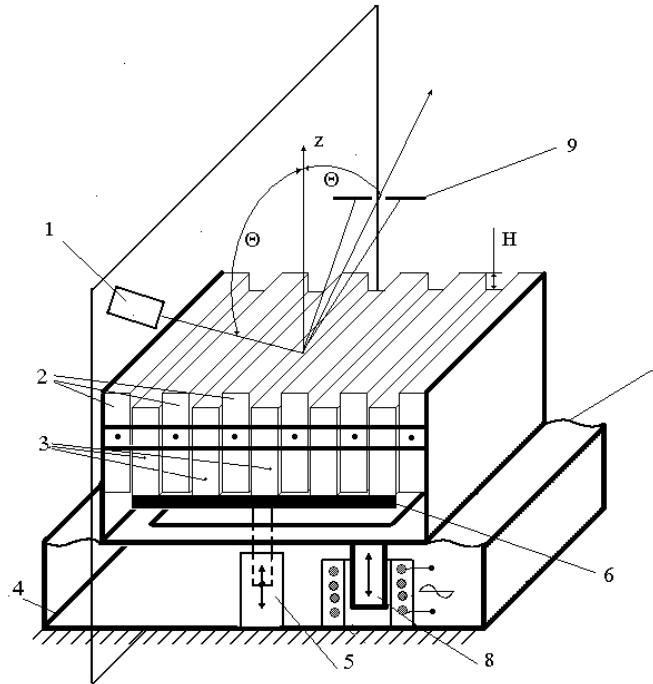


Рис. 2. Схема модулятора лазерного излучения второго типа

Пучок излучения лазера 1 с длиной волны  $\lambda$  направляют на поверхность отражательной дифракционной решетки, которая составлена из двух групп пластин: стационарной 2 и подвижной 3. В результате поступательного перемещения группы подвижных пластин 3 вдоль оси  $Oz$  под воздействием электромеханического вибратора 8 изменяется глубина рельефа  $H$ , при этом мощность излучения в нулевом дифракционном порядке может меняться в пределах от нулевого значения до максимального значения, равного  $P_{0\max} = P_i \cdot R$ .

**Литература**

1. Полещук А.Г., Малышев А.И., Харисов А.А., Черкашин В.В. Дифракционные фильтры для управления излучением мощных лазеров // Автометрия. Сибирское отделение РАН. – 1998. – №. 6. – С. 38-46.
2. Комоцкий В.А., Соколов Ю.М. Модулятор лазерного излучения. Патент на изобретение № 2411620 от 13.08.2009.
3. Комоцкий В. А., Соколов Ю. М., Басистый Е. В. Модулятор лазерного излучения // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 7. – С. 243-248.
4. Комоцкий В. А. Модулятор лазерного излучения Патент на изобретение №. 2013146688 Зарегистрировано в госреестре изобретений. РФ 20 марта 2013 г.
5. Комоцкий В.А., Соколов Ю.М., Алексеев А.Н., Басистый Е.В. Исследование оптоэлектронного датчика угловых смещений на основе глубокой отражательной фазовой дифракционной решетки // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – 2009. – №4. – С. 95-104.



## ОЦЕНКА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ ИК ИЗЛУЧЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОПТОЭЛЕКТРОННОГО ДИФРАКЦИОННОГО ЭЛЕМЕНТА.

В.А. Комоцкий, Н.В. Суетин

«INVESTIGATION OF INFRARED RADIATION SENSOR BASED ON THE DEEP REFLECTIVE  
DIFFRACTION GRATING»

V.A. Komotskii, N.V. Suetin

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

*e-mail: [ponama911@mail.ru](mailto:ponama911@mail.ru)*

Импульс ИК излучения поглощается в некоторой среде и разогревает ее, что приводит к изменению показателя преломления. Это изменение мы обнаруживаем с помощью специфической дифракционной схемы, которая изображена на рис. 1. Эта схема содержит отражающую глубокую дифракционную решетку 6, закрепленную на поворотном столике 7, источник зондирующего когерентного оптического излучения 1, диафрагму 4, представляющую собой пространственный фильтр, и фоточувствительный элемент 3. Для оценки чувствительности датчика в схему добавляется источник ИК излучения 2, а также модулятор этого излучения 5.

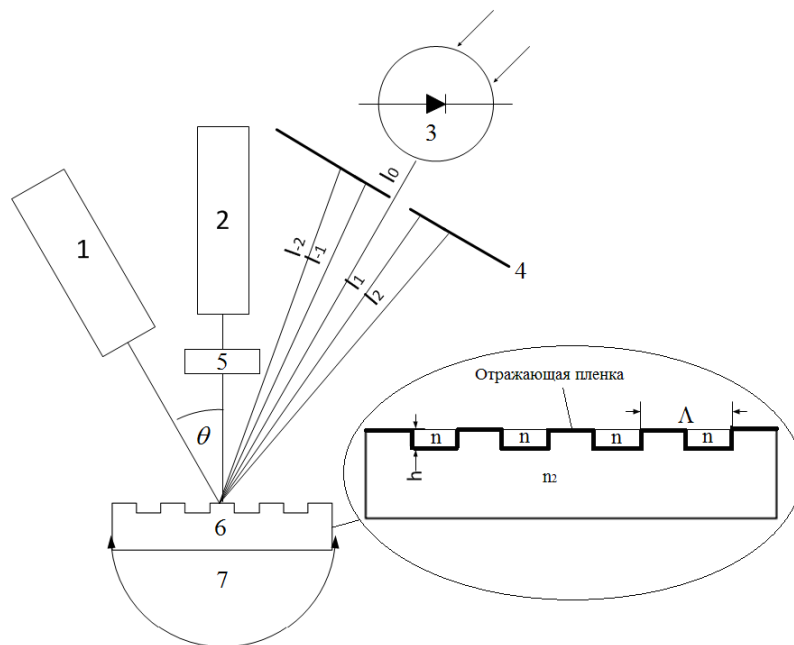


Рис. 1. Схема дифракционного датчика ИК излучения

Решетка представляет собой рельеф с профилем в виде меандра покрытый отражающей алюминиевой пленкой с коэффициентом отражения  $R$ . Период решетки  $\Lambda$  выбирается в соответствии с условием  $\Lambda \ll \lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны зондирующего лазерного излучения (ЗИ). Впадины решетки заполнены веществом, прозрачным для ЗИ, но имеющим высокий коэффициент поглощения для ИК излучения. Лазерный пучок от источника 1, направленный под углом  $\theta$ , дифрагирует на решетке. С помощью пространственного фильтра выделяем нулевой порядок дифракции, мощность которого рассчитывается по формуле (1):

$$P_0 = P_{\text{зонд}} \cdot R \cdot \cos^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} h \cdot n \cos \theta \right), \quad (1)$$

где  $P_{\text{зонд}}$  – мощность излучения лазера,  $h$  – глубина решетки,  $n$  – показатель преломления вещества, заполняющего впадины. Глубина решетки выбирается с условием:  $hn > \frac{\lambda}{4}$ . Под действием поглощенного ИК излучения происходит нагрев вещества, заполняющего впадины, в результате чего изменяется показатель преломления  $n$ . Как видно из формулы (1), в результате изменяется мощность излучения в нулевом порядке дифракции. Это изменение фиксируется фотодетектором 3.

Получим формулу, определяющую крутизну  $\frac{dP_0}{dn}$ , дифференцируя (1).

$$\frac{dP_0}{dn} = -P_{\text{зонд}} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} h \cdot \cos \theta \cdot R \cdot \sin \left( \frac{4\pi}{\lambda} h \cdot n \cos \theta \right). \quad (2)$$

Далее, найдем условия, при которых крутизна имеет максимальное значение. Исследуем зависимость крутизны от угла.

При изменении угла  $\theta$  от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \theta$  монотонно убывает. Множитель  $\sin \left( \frac{4\pi}{\lambda} h \cdot n \cos \theta \right)$  может иметь множество колебаний от 0 до 1, если решетка глубокая, то есть значение аргумента  $\frac{4\pi}{\lambda} h \cdot n \cos \theta$  достаточно велико.

Максимальным значениям синуса в выражении (2) соответствуют значения аргумента:

$$\frac{4\pi}{\lambda} h \cdot n \cdot \cos \theta = \frac{\pi}{2} \pm \pi \cdot k \quad (3)$$

Отсюда находим углы, соответствующие максимумам синуса в (2):

$$\theta_k = \arccos \left( \frac{2k+1}{8} \right) \frac{\lambda}{nh}. \quad (4)$$

При глубине решетки  $h = \frac{\lambda}{4n}$ , максимуму синуса соответствует лишь один угол  $\theta$ .

Однако при увеличении глубины решетки количество этих углов растёт. Поскольку в (2)  $\cos \theta$  присутствует как монотонно убывающий множитель, а значения синусов в максимумах одинаковы и равны 1, то максимальное значение  $\frac{dP_0}{dn}$  будет соответствовать минимальному углу из набора углов  $\theta_k$ .

Рассчитаем крутизну  $\frac{dP_0}{dn}$  при различных глубинах дифракционных решеток. Для простоты коэффициент отражения  $R$  положим равным единице.

1) Рассчитаем максимальную крутизну преобразования датчика при глубине решетки  $h \cdot n = 2\lambda$ . Из (4) найдем угол, соответствующий максимуму (2):  $\theta_7 = \arccos \left( \frac{15}{16} \right) = 20^\circ$ .

Подставив этот угол в (2), получим максимальное значение крутизны датчика с этой

решеткой:

$$\frac{dP_0}{dn}(\theta_7) = -11,81 \frac{P_{\text{зонд}}}{n}. \quad (5)$$

Для наглядности на рис. 2 представлены зависимости  $P_0(\theta)$  и  $\frac{dP_0}{dn}(\theta)$  при  $h \cdot n = 2\lambda$ .

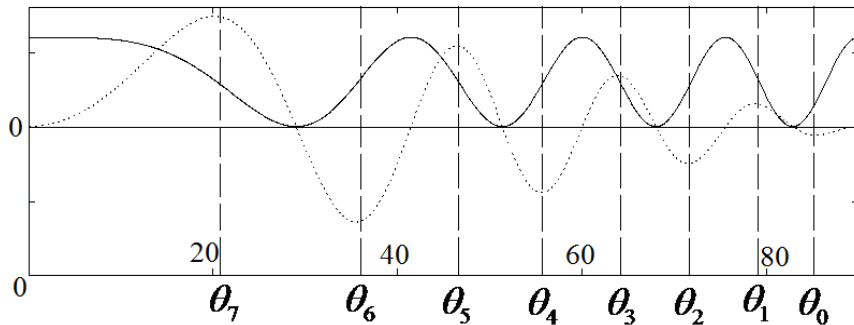


Рис. 2. Зависимость мощности дифракции в нулевом порядке  $P_0$  (сплошная линия) и крутизны  $\frac{dP_0}{dn}$  (пунктирная линия) от угла падения ЗИ  $\theta$

2) Прделаем аналогичные вычисления для  $h \cdot n = 10\lambda$ .

Здесь максимуму (2) соответствует угол  $\theta_{39} = 9^\circ$ .

Крутизна в этом случае будет равна

$$\frac{dP_0}{dn}(\theta_{39}) = -62,041 \frac{P_{\text{зонд}}}{n}. \quad (6)$$

Как видно, крутизна увеличивается с увеличением глубины решетки. Используя полученные максимальные значения крутизны для разных решеток, можем посчитать чувствительность датчика к воздействию ИК излучения. Расчет ведется при условии кратковременного воздействия излучения, т.е. в течение времени, за которое тепло не успевает распространиться в подложку, а идет только на разогрев вещества, заполняющего впадины.

При воздействии ИК излучения с плотностью энергии  $dw$  показатель преломления вещества, заполняющего впадины решетки, изменяется в соответствии со следующей формулой:

$$dn = \frac{k \cdot (1 - e^{-2\chi h})}{c\rho} dw. \quad (7)$$

Здесь  $k$  – термооптический коэффициент,  $\chi$  – коэффициент поглощения ИК излучения в пленке,  $h$  – глубина решетки,  $c, \rho$  – теплоемкость и плотность вещества, образующего пленку.

Изменение мощности в нулевом порядке дифракции при условии (3) в этом случае составит:

$$dP_0 = -P_{\text{зонд}} \chi \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos \theta \cdot \frac{k \cdot (1 - e^{-2\chi h})}{c\rho} dw.$$

Для примера возьмем полистирол в качестве вещества, заполняющего ячейки. Рассчитаем чувствительность датчика при следующих условиях:  $h \cdot n = 2\lambda$  и при  $h \cdot n = 10\lambda$  при  $P_{\text{зонд}} = 10 \text{ мВт}$ . В качестве источника зондирующего излучения

используется He-Ne лазер, в качестве фоточувствительного элемента – фотодиод.

$$\lambda = 0,6328 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \quad k = 2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{°C}}, \quad \chi = 7800 \frac{1}{\text{м}}, \quad c = 1110 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{°C}},$$

$$\rho = 1200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad n = 1,594, \quad S_\phi = 0,24 \text{ А / Вт}.$$

При глубине решетки  $h \cdot n = 2\lambda$  :

Из (5) и (7) получаем:

$$S_{w \rightarrow P_0} = \frac{dP_0(\theta_7)}{dw} = -11,81 \cdot \frac{P_{\text{зонд}}}{n} \cdot \frac{dn}{dw} = -1,72 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Вт}}{\text{Дж / см}^2} \quad (8)$$

Учитывая крутизну преобразования фотодиода, определим крутизну преобразования плотности энергии в фототок:

$$S_{w \rightarrow I} = S_\phi \cdot S_{w \rightarrow P_0} = \frac{dP_0(\theta_7)}{dw} S_\phi = -4,1 \cdot 10^{-8} \frac{\text{А}}{\text{Дж / см}^2} \quad (9)$$

Пороговая чувствительность датчика определяется уровнем внутренних шумов. Для схем с фотодиодом основной вклад дает дробовый шум.

При  $P_{\text{зонд}} = 10 \text{ мВт}$  в полосе частот 1кГц шумовой ток равен:

$$I_{\text{ш}}(10 \text{ мВт}) \approx I_{\text{ш,до}} = \sqrt{q \cdot S_{\text{ФД}} \cdot P_{\text{зонд}} \cdot \Delta f} = 6,3 \cdot 10^{-10} \text{ А};$$

Зная уровень внутренних шумов и крутизну преобразования датчика, находим чувствительность датчика. При отношении  $c/\chi=1$ , чувствительность датчика равна:

$$D = \frac{I_{\text{ш}}}{S_{w \rightarrow I}} = 1,5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^2}$$

Проделав аналогичные вычисления при глубине решетки  $h \cdot n = 10\lambda$ , получаем чувствительность, равную  $D = 3,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^2}$ .

## Литература

1. Комоцкий В. А., Соколов Ю. М., Басистый Е. В. Модулятор лазерного излучения // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 7. – С. 243-248.
2. Комоцкий В.А., Соколов Ю.М., Алексеев А.Н., Басистый Е.В. Исследование оптоэлектронного датчика угловых смещений на основе глубокой отражательной фазовой дифракционной решетки // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – 2009. – №4. – С. 95-104.
3. Комоцкий В.А. Основы когерентной оптики и голографии. Конспект лекций. – М: РУДН, 2011. – 42 с.
4. Black T.D., Komotskii V. A. Infrared detection using acousto-optic interaction with thermally induced grating in Optical Waveguide // Applied Physics Letters. – 1981. – V. 38, No 3 (1 febr). – P. 113-115.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ФОТОЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МЕТОДОМ ЭПР СПЕКТРОСКОПИИ ПЛЁНОК $TiO_2$ , ИЗГОТОВЛЕННЫХ ПО ГЕЛЬ ТЕХНОЛОГИИ

С. А. Алиев, Н. С. Трофимов

«INVESTIGATION OF PHOTSENSITIVITY OF OPTICAL  $TiO_2$  GEL WAVEGUIDES BY ESR  
SPECTROSCOPY»

S. A. Aliev, N. S. Trofimov

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

*e-mail: [tchekhlova@mail.ru](mailto:tchekhlova@mail.ru)*

В настоящее время пристальное внимание исследователей, как физиков, так и химиков, обращено на нанокристаллический диоксид титана, в том числе легированный различными элементами. Это внимание обусловлено рядом уникальных свойств этого соединения. Диоксид титана обладает фоточувствительностью, фотокаталитической активностью, химической устойчивостью и прекрасными оптическими свойствами.

Одной из перспективных областей применения диоксида титана является создание высокоэффективных солнечных батарей, для изготовления которых требуются материалы с большой удельной площадью поверхности и высокой электропроводностью.

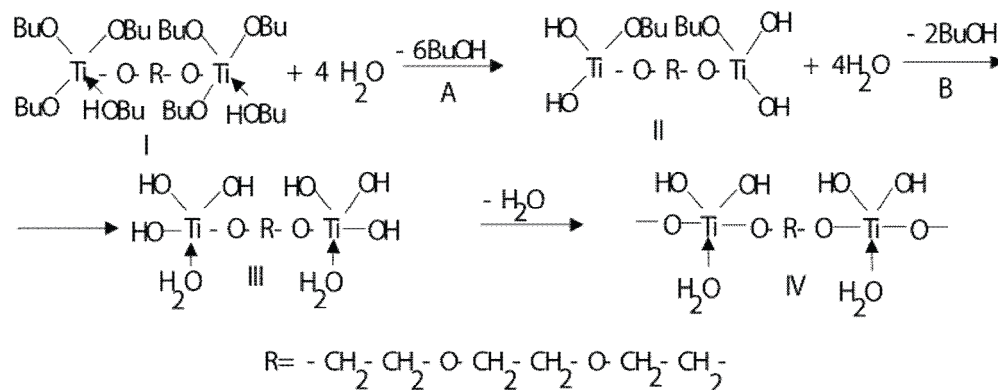
Интерес к этим исследованиям обусловлен благодаря их использованию в фотокатализе, в частности, при фотолизе воды, как экономически выгодного способа получения водорода. Фотокаталитические процессы также можно использовать для очистки воздуха.

Кроме того, хорошие оптические свойства пленок  $TiO_2$  дают перспективы их использования для создания элементной базы интегральной оптики (ИО).

Целью настоящей работы является исследование фоточувствительности пленок  $TiO_2$ . Эти пленки могут быть изготовлены различными способами, в том числе, золь-гель и гель методами. Нами была выбрана гель технология изготовления [1], которая позволяет получить пленки диоксида титана с содержанием анатаза, близким к 100%. В отличие от золь-гель метода здесь не происходит образование раствора золя, изготовление пленок упрощается.

Для получения гель пленок на основе  $TiO_2$  и его модификаций в качестве исходных материалов используют тетрабутоксид титана (ТБТ) и полигликоли. Полученные таким образом пленки обладают пористостью. Размер пор определяется влиянием полигликолей, которые в то же время практически не оказывают влияния на формирование кристаллической структуры и температуру полиморфных превращений. Полученные результаты на практике также показывают, что наиболее перспективным для получения  $TiO_2$  наноматериалов является соединение тетрабутоксититан-триэтиленгликоль (ТЭГ), потому что только в этом случае образуются линейные структуры. Формирование пленки происходило в результате реакции ТБТ и его соединения с ТЭГ, гелеобразования раствора полученного соединения ТЭГ и ТБТ в бутаноле-1 на воздухе и последующих превращений при отжиге.

Процесс пленкообразования аддукта ТБТ с ТЭГ в тонком слое без учета реакции поликонденсации может быть представлен следующей схемой:



За счет линейного строения молекулы может проявиться свойство анизотропии в получаемых пленках при определенных параметрах технологического режима [2], что может быть использовано для создания нелинейных интегрально оптических устройств.

Для формирования пленок в работе использовали тетрабутоксититана (ТБТ), триэтиленгликоль (ТЭГ), *n*-бутанол марки х.ч. Соотношение компонент раствора ТБТ:ТЭГ составляло 27:6.

Пленки изготавливались путем вытягивания стеклянной подложки из раствора. По описанной технологии была изготовлена серия образцов пленок диоксида титана, параметры которых, а именно толщина и показатель преломления, варьировались путем изменения соотношения компонент раствора, скорости вытягивания подложки из раствора, температуры раствора и температуры и времени отжига.

Из многочисленных литературных источников, например [3], нам известно, что под действием ультрафиолетового (УФ) излучения в пленках на основе  $\text{TiO}_2$  образуются свободные радикалы. Поэтому для исследований был выбран метод ЭПР в силу своей высокой чувствительности к радикалам. Также метод ЭПР в ряде случаев дает информацию о ближайшем локальном окружении парамагнитного центра.

В работе [4] методом спектроскопии ЭПР были исследованы образцы диоксида титана в процессе УФ облучения, полученные по золь-гель технологии (см. рис. 1).

Исследования показали, что при воздействии УФ облучения сигнал поглощения смещается в сторону меньших значений напряженности магнитного поля и увеличивается по амплитуде, а по прошествии 10 минут после облучения сигнал поглощения восстанавливается до прежнего уровня при комнатной температуре, а для низких температур остается неизменным. В настоящей работе были исследованы ЭПР-спектры плёнок диоксида титана, изготовленных по гель-технологии.

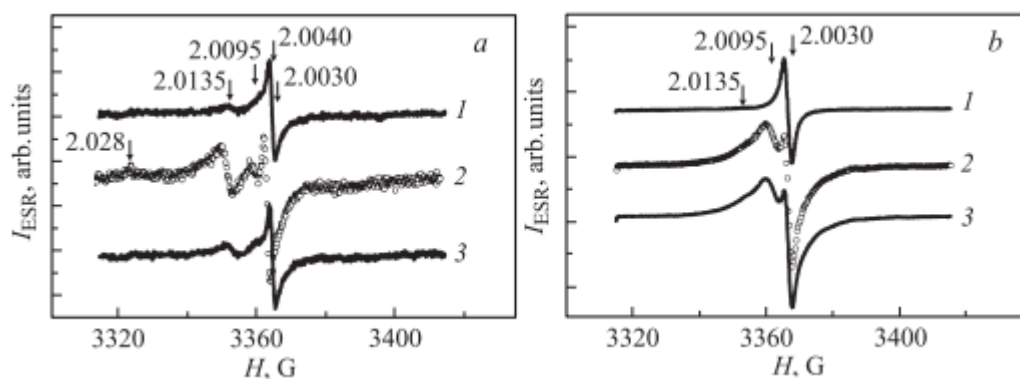


Рис. 1. Спектры ЭПР образцов диоксида титана до облучения (спектр 1), в процессе

облучения (спектр 2) и через 10 минут после УФ облучения (спектр 3) при температуре 300К (*a*) и 10К (*b*)

Диоксид титана может существовать в виде четырех основных модификаций: аморфного состояния, анатаза, брукита и рутила, отличающихся параметрами кристаллической решетки. Анатаз, как считает большинство исследователей, проявляет более высокую фотокаталитическую активность по сравнению с рутилом. Усиление фотоактивности объясняется более высоким положением уровня Ферми у анатаза (3,3 – 3,4 эВ) по сравнению с рутилом (3,1 – 3,2 эВ). Для генерации электрон-дырочных пар необходимо ультрафиолетовое излучение. Возможно, путем надлежащего легирования диоксида титана удастся создать приборы, работающие не только в УФ, но и в видимой области спектра.

Для устройств интегральной оптики предпочтительно использовать прозрачные пленки диоксида титана (аморфное состояние и анатаз), а также важно изучить механизм воздействия ультрафиолетового излучения на получаемые пленки.

### Литература

1. Алиев С.А., Трофимов Н.С., Чехлова Т.К. Исследование свойств пленок, изготовленных по гель технологии // Сборник научных трудов III Всероссийской научной конференции по фотонике и информационной оптике, НИЯУ «МИФИ», 2014. С. 89-90.
2. Евтушенко Ю.М., Ловецкий К.П., Павлов С.В., Ромашкин С.В., Трофимов Н.С., Чехлова Т.К. Оптические свойства пленок на основе  $TiO_2$ , изготовленных по гель технологии // Тезисы докладов пятой Всероссийской конференции (с международным участием) «Химия поверхности и нанотехнология», 2012. С. 275-276.
3. Watanabe T., Nakajima A., Wang R. et al. Photocatalytic activity and photoinduced hydrophilicity of titanium dioxide coated glass // *Thin solid films*. 1999. V. 351. N1-2. P. 260-263.
4. Константинова Е.А., Гайворонский В.Я., Тимошенко В.Ю., Кашкаров П.К. Исследование спиновых центров в нанокристаллическом диоксиде титана с высокой степенью фотокаталитической активности // *Физика и техника полупроводников*, 2010, том 44, вып. 8.

## РАСЧЁТ ПАРАМЕТРОВ ДЕМУЛЬТИПЛЕКСОРА НА ОСНОВЕ $\text{TiO}_2\text{-SiO}_2$ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ МАТЕРИАЛА

С.В. Павлов, Н.А. Руднев

### «CALCULATION OF PARAMETERS OF DEMULTIPLEXER ON THE BASE OF $\text{TiO}_2\text{-SiO}_2$ SOL-GEL MATERIAL»

S.V. Pavlov, N.A. Rudnev

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

e-mail: [tchekhlova@mail.ru](mailto:chekhlova@mail.ru)

В последнее время в области разработки и исследований элементной базы устройств волоконно-оптических линий связи (ВОЛС) появился большой интерес к оптическим волноводам, изготовленным по золь-гель технологии, которая обеспечивает хорошие оптические свойства и при этом не требует дорогостоящего оборудования и специально обученного персонала для его обслуживания.

Оптические золь-гель пленки, обладают рядом свойств, дающих большие перспективы их применения в устройствах интегральной оптики и ВОЛС [1].

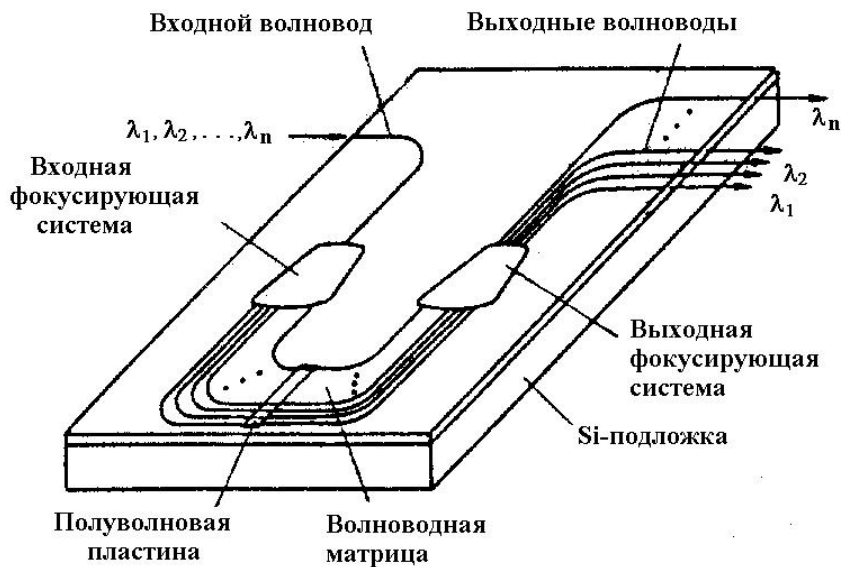


Рис.1. Оптическая схема демультиплексора

Одна из проблем современных демультиплексоров (рис. 1) с высоким разрешением связана с температурными изменениями их характеристик. Важной особенностью оптических пленок, изготовленных по золь-гель технологии, является относительно большой отрицательный термооптический коэффициент (ТОК), что может быть использовано для термической подстройки параметров демультиплексора (ДМ) для обеспечения стабильности в широких пределах температур [2].

Устройство ДМ состоит из нескольких частей – входного волновода, по которому направляется в систему излучение с длинами волн  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ ; входной фокусирующей системы; волноводной матрицы и выходной фокусирующей системы, к которой пристыковываются выходные волоконные световоды или фотоприемники [3].

Выбор волноводной системы ДМ обусловлен следующими факторами:



- 1 – возможностью обеспечения заданных спектральных характеристик ДМ;
- 2 – возможностью обеспечения заданного уровня потерь;
- 3 – возможностью обеспечения геометрических параметров, отвечающих заданным спектральным характеристикам ДМ и заданному уровню потерь;
- 4 – наличием хорошо отработанной технологии, которая позволяет реализовать ДМ с заданными характеристиками.

В данной работе была рассмотрена возможность создания ДМ на основе  $\text{TiO}_2\text{-SiO}_2$  золь-гель материала. Основное внимание уделялось расчетам основных параметров ДМ и их температурным изменениям.

Основным элементом ДМ является волноводная матрица, работающая по схеме эшелона Майкельсона, основные параметры которого, влияющие на работу ДМ в целом, – область дисперсии  $\Delta\lambda_{\text{эм}}$ , разрешающая способность  $R_{\text{эм}}$  и разрешаемое спектральное расстояние  $\delta\lambda_{\text{эм}}$ , зависящие от геометрических величин структуры эшелона и характеристик оптического материала.

Волноводная матрица представляет собой матрицу канальных гребневых волноводов, геометрические параметры выбираются для обеспечения одномодового режима. Радиус изгиба  $R$  должен иметь величину, обеспечивающую минимальные потери на центральной длине волны  $\lambda_c$  и равен обычно  $\sim 2$  мм. Разность геометрических длин соседних элементов матрицы  $\Delta L$  необходимо изготавливать с достаточной точностью, чтобы обеспечить расчетное  $\delta\lambda$ . Величина  $\Delta L$  сильно влияет на спектральные характеристики ДМ – спектральный диапазон  $\Delta\lambda$ , спектральное разнесение каналов  $\delta\lambda$  и геометрическое расстояние между выходными каналами  $\delta x$ , определяющее линейный размер области приемников.

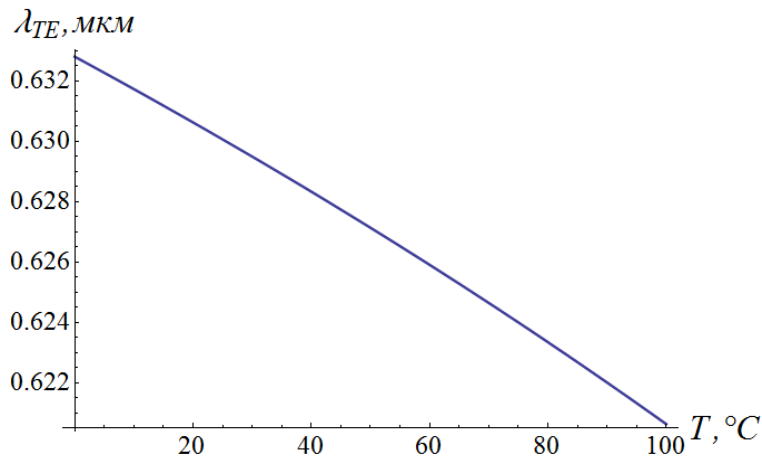


Рис. 2. Зависимость центральной длины волны ДМ от температуры для TE моды.

Изменение рабочей температуры вызывает сдвиг центральной длины волны  $\lambda_c(T)$  в результате изменения длины оптического пути, что отрицательно сказывается на стабильности спектральных характеристик ДМ (рис. 2).

Для уменьшения влияния термического фактора можно использовать волноводы на основе золь-гель материала. Моды золь-гель волноводов обладают относительно большим отрицательным температурным коэффициентом эффективного показателя преломления (ТК ЭПП), что выгодно отличает их от обычных используемых материалов. ТК ЭПП сильно зависит от параметров пленки и его можно изменять в относительно широком диапазоне [4].

Проведенные исследования показали, что параметрами пленок можно варьировать ТК ЭПП волноводных мод для минимизации температурного сдвига центральной длины волны, т.е. обеспечения температурной стабильности параметров и характеристик ДМ на основе  $\text{TiO}_2\text{-SiO}_2$  золь-гель материала.

### Литература

1. Чехлова Т.К., Живцов С.В., Погосян А.С. Оптические волноводы на основе пленок, изготовленных по технологии золь-гель // Вестник РУДН. Серия «Физика», № 1 (13), 2005, С. 35–47.
2. Kang E.-S., Lee T.-H., Bae B.-S. Measurement of the thermo-optic coefficients in sol-gel derived inorganic-organic hybrid material films // Applied Physics Letters, Vol. 81, № 8, 2002, P. 1438–1440.
3. Черемискин И.В., Чехлова Т.К. Волноводные оптические системы спектрального мультиплексирования/демультиплексирования // Электросвязь, № 2, 2000, С. 23–30.
4. Николаев Н.Э., Павлов С.В., Трофимов Н.С., Чехлова Т.К. Исследование температурного коэффициента эффективного показателя преломления  $\text{TE}_1$ - и  $\text{TM}_1$ -мод в оптических золь-гель волноводах // Радиотехника и электроника, Т. 57, № 1, 2012, С.1–7.

## *Теоретическая физика*

- «ИЗВЛЕЧЕНИЕ» КОРНЯ КВАДРАТНОГО ИЗ ДАЛАМБЕРТИАНА**  
Н.В. Самсоненко, А. Усман Манга, Ф. Ндахай (3)
- ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE HILL EQUATION WITH A SLOWLY VARYING PARAMETER**  
E.M. Maslov and V.A. Koutvitsky (6)
- CONTROL OF PROGRAMMED MOTION IN HIGHER ORDER NONHOLONOMIC SYSTEMS**  
Chernet Tuge Deressa (8)
- COSMOLOGICAL MODELS WITH AN EFFECTIVE  $\Lambda$  -TERM IN LYRA MANIFOLD**  
V.K. Shchigolev (12)
- CYLINDRICALLY AND AXIALLY SYMMETRIC WORMHOLES. THROATS IN VACUUM?**  
K. A. Bronnikov and M. V. Skvortsova (17)
- METRICAL CONCEPTION OF THE SPACE-TIME GEOMETRY**  
Yuri A. Rylov (18)
- ON A CLASS OF AXIALLY SYMMETRIC WAVE SOLUTIONS TO THE YANGMILLS EQUATIONS**  
A. S. Rabinowitch (22)
- ON THE HOMOTOPY PERTURBATION METHOD IN COSMOLOGY**  
V. K. Shchigolev (28)
- ROTATION OF AN ELASTIC SPHERE ABOUT ITS MASS CENTRE IN THE GRAVITATIONAL FIELD OF TWO ATTRACTING CENTRES**  
Baranova E.Y., Vilke V.G. (33)
- STABILIZATION OF OSCILLATIONS IN THE MODEL CONTAINING THREE COUPLED SUBSYSTEMS**  
Valentin N. Tkhai, Ivan N. Barabanov (35)
- THE MODEL CONTAINING THREE COUPLED SUBSYSTEMS: EXISTENCE OF OSCILLATIONS IN THE MAIN MODE**  
Valentin N. Tkhai, Ivan N. Barabanov (36)
- АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ МЕХАНИКИ НЬЮТОНА: ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ**  
Владимир В. Кассандров, Илдус Ш. Хасанов (37)

- АТОМ ВОДОРОДА И ГЕОМЕТРИИ ДЕ СИТТЕРА**  
О.В. Веко, О.В. Казмерчук, Е.М. Овсюк, В.М. Редьков (41)
- АТТРАКТОРЫ, ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА - ФИЗИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ**  
М.Е. Мазуров (48)
- ГРАВИТАЦИОННОЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ**  
Д.С. Бондарев (53)
- КАНОНИЧЕСКАЯ КАЛИБРОВКА ГРАВИТАЦИОННОГО ВАКУУМА И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ РИМАНА-КАРТАНА**  
Р. Ф. Полищук (54)
- КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА В ОБОБЩЁННОЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ**  
Скугорева М. А. (59)
- О ВЛИЯНИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ИДЕАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ НА СВОЙСТВА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СКАЛЯРНОГО И СПИНОРНОГО ПОЛЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСУ-СИММЕТРИЧНОЙ МЕТРИКЕ**  
Н. А. Ковальчуков, Г. Н. Шикин, Л. П. Ющенко (60)
- О КОНЦЕПТУАЛЬНЫХ ОСНОВАХ БАР-АНАПОЛЬНОЙ МОДЕЛИ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ**  
С.И. Кузнецов (63)
- О СВОЙСТВАХ НЕАССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР И ТОЖДЕСТВАХ НА НИХ**  
Александр Элиович. (69)
- ОБ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ**  
С.В. Копылов (70)
- ON A PROBABILITY DENSITY EQUATION**  
S.V. Kopylov (73)
- ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ В ОДНОМ РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ**  
Маркеев А.П.. (74)
- ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОЛДИ-ВОУТХОУЗЕНА ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ГРИНА ФОТОНОВ ЭЙНШТЕЙНА**  
А.А. Бейлинсон, Н. Гоним. (77)
- СВЯЗЬ КУРСОВ ОБЩЕЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ВОЗМОЖНОСТЬ ЕЕ РЕАЛИЗАЦИИ В ПРЕПОДАВАНИИ ФИЗИКИ (НА ПРИМЕРЕ ТЕРМОДИНАМИКИ)**  
Ю. Г. Рудой, О.С. Овсянникова. (81)

**ТОПОЛОГИЯ, ЧАСТИЦЫ И ГРАВИТАЦИЯ**

Журавлев В.М. (85)

**ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОРГАНИЧЕСКИХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ**

И.М. Каширский, Ю.С. Булышев. (89)

**ЧАСТИЦЫ В МОДЕЛЯХ ПРИЧИННОСТНОГО МНОЖЕСТВА В КВАНТОВОЙ ГРАВИТАЦИИ**

А.Л. Круглый (91)

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССАСЫВАНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КВАНТОВО-ТЕПЛОВОЙ ДИФФУЗИИ**

Голубева О.Н., Сидоров С.В. (96)

**KERR-NEWMAN ELECTRON AS SPINNING SOLITON: EMERGENCE OF THE DIRAC EQUATION**

Alexander Burinskii. (100)

**ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЛЕПТОННОГО СЕКТОРА В МОДЕЛИ СКИРМА-ФАДДЕЕВА**

В.И.Молотков. (102)

**ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ: ОГРАНИЧЕНИЯ НА ЗАКОН ДАРСИ, УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ.**

Рыбаков Ю.П., Свиридова О.Д., Шикин Г.Н. (107)

**НЕПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ, УЧИТЫВАЮЩЕЕ ЗАКОН ДАРСИ И ДИФФУЗИЮ.**

Рыбаков Ю.П., Свиридова О.Д., Шикин Г.Н. (109)

**THE EXISTENCE OF THE DIRAC SCALAR FIELD IN NATURE AND DARK ENERGY AND DARK MATTER PROBLEMS**

O.V. Babourova, K.N. Lipkin, E.V. Febres, B.N. Frolov. (112)

**ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА ТУРБУЛЕНТНОГО СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ**

Я.А.Суслов, С.Г.Черкасов (117)

**FIDELITY OF THE ONE-PHOTON STATE REFLECTIVITY FROM THE 1D ABSORBING BRAGG MIRROR**

Chizhov A.V., Cevizovic D. (118)

**ВАРИАНТЫ КВАЗИКОНСТРУКТИВНОГО ОПИСАНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ**

А. В. Коганов. (120)

**ВОЗМОЖНОСТЬ ПРЕОДОЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА ГРЕЙЗЕНА-ЗАЦЕПИНА-ЗА СЧЕТ ПРИБЛИЖЕННОГО РАСШИРЕНИЯ ЛОРЕНЦЕВОЙ СИММЕТРИИ ДО КОНФОРМНОЙ В ПРЕДЕЛЕ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ**

Ю.Г.Рудой, И.А. Вернигора. (125)

**НУКЛЕОХИМИЯ ХОЛОДНОЙ ТРАНСМУТАЦИИ АТОМНЫХ ЯДЕР**

Ю. С. Копысов. (128)

***Физика плазмы и взаимодействие  
электромагнитного излучения с веществом***

**ВЛИЯНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ СТРУКТУР И ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ГРОЗОВОЙ ОБЛАЧНОСТИ**

Царькова К.В., Ерохин Н.С. (129)

**ДИНАМИКА ТРАЕКТОРИЙ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ СЕРФОТРОННОМ УСКОРЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ С БОЛЬШИМ ПРОДОЛЬНЫМ ИМПУЛЬСОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ**

Мкртчян Г.С., Ерохин Н.С. (132)

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Е.А. Сорокина, Н.А. Марусов. (137)

**О ПРИЧИНЕ ИЗЛОМА В СПЕКТРАХ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ ПРОТОНОВ И ЯДЕР ГЕЛИЯ ОКОЛО ~230 ГВ**

Лозников В.М., Ерохин Н.С., Зольникова Н. Н., Михайловская Л.А. (140)

**ОБ ОПИСАНИИ МОЩНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ**

В.П. Милантьев, Я.Н. Шаар. (144)

**ОПТИМАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ЗАХВАТА И СЕРФОТРОННОГО УСКОРЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ**

Ерохин А.Н., Зольникова Н.Н., Ерохин Н.С. (149)

**ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА СТРУКТУР В УРАВНЕНИИ БЮРГЕРСА**

Суслов А.И., Ерохин Н.С. (154)

**УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЕ УСКОРЕНИЕ ПРОТОНОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ**

Ерохин Н.С., Зольникова Н.Н., Михайловская Л.А., Лозников В.М. (157)

**МАГНИТНАЯ КОНФИГУРАЦИЯ ТОКАМАКА С ЭРГОДИЗИРОВАННЫМ ЦЕНТРОМ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА**

О.И. Подтурова, Е.А. Сорокина. (161)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЛАЗМЫ МИКРОВОЛНОВОГО ЭЦР РАЗРЯДА МЕТОДАМИ ОЭС**

И. Василеска, М.А. Корнеева. (166)

**МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ В РАСШИРЕННОЙ МОДЕЛИ СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА С УЧЕТОМ ТУРБУЛЕНТНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ПЛАЗМЫ**

Миронов П. П., Журавлев В. М. (171)

***Теоретическая механика*****ИЗУЧЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРОТИВОУДАРНОЙ ИЗОЛЯЦИИ ПРИ РЕЗКИХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

В.А.Корнеев. (174)

**THE MODEL CONTAINING THREE COUPLED SUBSYSTEMS: EXISTENCE OF OSCILLATIONS IN THE MAIN MODE**

Valentin N. Tkhai, Ivan N. Barabanov. (179)

**STABILIZATION OF OSCILLATIONS IN THE MODEL CONTAINING THREE COUPLED SUBSYSTEMS**

Valentin N. Tkhai, Ivan N. Barabanov. (180)

**ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМЫ ДВУЗВЕННЫХ МАЯТНИКОВ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ**

И.М. Ананьевский, Т.А. Ишханян. (181)

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЙ ТВЁРДОГО ТЕЛА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ВДОЛЬ ГОРИЗОНТАЛИ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА**

Беличенко М.В. (185)

**О КОНФОРМНЫХ СИММЕТРИЯХ И ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ В МЕХАНИКЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ**

Будочкина С.А. (189)

**ЗАДАЧА СУСЛОВА ДЛЯ НЕГОЛОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ЧАПЛЫГИНА**

Р.Г. Мухарлямов, Ж.К. Киргизбаев. (192)

**ВЛИЯНИЕ ВИБРАЦИИ НА ИЗНОС ЩЕЛЕВОГО УПЛОТНЕНИЯ РАБОЧЕГО КОЛЕСА НЕФТЯНОГО НАСОСА**

С.В. Сосновский, В.П. Селькин, С.В. Копылов. (196)

**О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ  
(МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК ИСКУССТВО)**

Л.К.Кузьмина. (201)

**ПРИНЦИП ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО КВАЗИУСКОРЕНИЮ ДЛЯ БЕЗУДАРНОЙ  
СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНЫХ МНОГООБРАЗИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ  
СИСТЕМ**

Мухаметзянов И.А. (204)

**О ПРИМЕНЕНИЯХ ПРИНЦИПА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО  
КВАЗИУСКОРЕНИЮ**

Мухаметзянов И.А., Чекмарева О.И. (207)

**УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИКОЙ СИСТЕМ С ПРОГРАММНЫМИ СВЯЗЯМИ**

Р.Г. Мухарлямов. (210)

**ОСНОВНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
СИСТЕМ РАЗЛИЧНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ**

Шемелова О.В. (216)

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ  
НЕЙРОСЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ В НЕФТЕПРОВОДНОМ ТРАНСПОРТЕ**

Н.Т. Габдрахманова. (221)

**ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАДАННОГО ДВИЖЕНИЯ  
ТРЕХЗВЕННОГО ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО МАНИПУЛЯТОРА**

А.В. Соколов. (224)

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА НА  
ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ В ОДНОМ РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ**

Маркеев А.П. (226)

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА,  
НЕСУЩЕГО ПОДВИЖНУЮ МАТЕРИАЛЬНУЮ ТОЧКУ**

Б.С. Бардин, А.С. Панёв. (229)

**ИЗУЧЕНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С  
БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ О  
КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ ПРИ ЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СО СМЫЧКОМ**

Вильке В.Г., Шаповалов И.Л., (234)

**УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА НА КОЛЕСНОЙ  
СИСТЕМЕ**

О.В. Матухина. (236)

**CONTROL OF PROGRAMMED MOTION IN HIGHER ORDER NONHOLONOMIC  
SYSTEMS**

Chernet Tuge Deressa. (238)



**О ПОВЕДЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО РОТАТОРА С СУХИМ ТРЕНИЕМ В ОПОРАХ ОСИ**

В.В. Чистяков. (242)

**MODIFIED FORMULATION FOR DYNAMIC EQUATION OF CONSTRAINED MECHANICAL SYSTEM**

Assaye Walelgn Beshaw. (246)

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ В СЛУЧАЕ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕНИЯ СВЯЗЕЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Горшков Е.А. (251)

**ОДИН СЛУЧАЙ МАЯТНИКОВЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕАВТОНОМНОГО ГИРОСТАТА**

А.В.Мазнев, Т.В.Бычкова. (254)

***Оптоэлектроника и интегральная оптика*****ОПТИЧЕСКИЕ И ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ КОДИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ ОБ ОБЪЁМНЫХ СЦЕНАХ С ПОМОЩЬЮ СЛУЧАЙНЫХ ФАЗОВЫХ МАСОК В ЦИФРОВОЙ ГОЛОГРАФИИ**

Н.Н. Евтихийев, Е.А. Курбатова, С.Н. Стариков, П.А. Черёмхин. (257)

**ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЁТКИ НА DC ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛА  $\text{LiCu}_2\text{O}_{2+\delta}$** 

Дау Х.Ш., Е.А. Тищенко, Буш А.А., Каменцев К.Е. (261)

**ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ТОНКИХ ОПТИЧЕСКИХ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ ПЛЁНОК МЕТОДОМ СКАНИРУЮЩЕЙ МИКРОСКОПИИ**

Ахмеджанов И.М. , Баранов Д.В., Золотов Е.М., Трофимов Н.С., Чехлова Т.К. (265)

**ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МИКРОВОЛНОВОДОВ ПО ОТКЛИКУ ОПТИЧЕСКОГО МИКРОСКОПА**

И. М. Ахмеджанов, Д. В. Баранов, Е. М. Золотов. (267)

**НОВЫЕ СХЕМЫ МОДУЛЯТОРОВ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ДИФРАКЦИОННОГО ТИПА**

Е.В. Басистый В.А. Комоцкий Ю.М. Соколов. (270)

**ОЦЕНКА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ ИК ИЗЛУЧЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОПТОЭЛЕКТРОННОГО ДИФРАКЦИОННОГО ЭЛЕМЕНТА**

В.А. Комоцкий, Н.В. Суетин. (273)

**ИССЛЕДОВАНИЕ ФОТОЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МЕТОДОМ ЭПР  
СПЕКТРОСКОПИИ ПЛЁНОК TiO<sub>2</sub>, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ПО ГЕЛЬ  
ТЕХНОЛОГИИ**

С. А. Алиев, Н. С. Трофимов.

(277)

**РАСЧЁТ ПАРАМЕТРОВ ДЕМУЛЬТИПЛЕКСОРА НА ОСНОВЕ TiO<sub>2</sub>-SiO<sub>2</sub> ЗОЛЬ-  
ГЕЛЬ МАТЕРИАЛА**

С.В. Павлов, Н.А. Руднев.

(280)

*Научное издание*

**Л**  
**ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ**  
**ПО ПРОБЛЕМАМ ДИНАМИКИ,**  
**ФИЗИКИ ЧАСТИЦ, ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ**  
**И ОПТОЭЛЕКТРОНИКИ**

Издание подготовлено в авторской редакции

Технический редактор *Н.А. Ясько*  
Дизайн обложки *М.В. Рогова*

Подписано в печать 04.09.2014 г. Формат 60×84/8.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.  
Усл. печ. л. 36,5. Тираж 150 экз. Заказ 1138.

---

Российский университет дружбы народов  
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

---

Типография РУДН  
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41