В.А. Наумов, К.Е. Самуйлов, Ю.В. Гайдамака

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Москва
Российский университет дружбы народов
2015

УДК 519.2:004.4(035.3)
ББК 22.18+22.171
Н34

У т в е р ж д е н о
РИС Ученого совета
Российского университета
дружбы народов

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра «Сети связи и системы коммутации»
Московского технического университета связи и информатики
(зав. кафедрой профессор *А.П. Пшеничников*),

доктор технических наук, профессор *Г.П. Башарин,*

доктор технических наук, профессор *С.Н. Степанов*

Наумов, В. А.

Н34 Мультипликативные решения конечных цепей Маркова : монография / В. А. Наумов, К. Е. Самуйлов, Ю. В. Гайдамака. – Москва : РУДН, 2015. – 159 с. : ил.

ISBN 978-5-209-06342-1

Монография посвящена результатам исследований мультипликативных решений конечных цепей Маркова, являющихся математическими моделями сложных стохастических систем.

Для научных работников, специалистов в области анализа показателей эффективности функционирования систем и сетей телекоммуникаций, преподавателей профильных кафедр, аспирантов и студентов старших курсов.

УДК 519.2:004.4(035.3)
ББК 22.18+22.171

ISBN 978-5-209-06342-1

Введение

Интерес к мультипликативным решениям конечных цепей Маркова объясняется тем, что они дают простейшие явные выражения для стационарных распределений конечных цепей Маркова. С мультипликативными решениями конечных цепей Маркова, описывающих класические системы массового обслуживания, и с посвященной им многочисленной литературой можно ознакомиться в [4, 28, 29, 33, 38]. Однако развитие теории массового обслуживания и математической теории телетрафика привело к новым результатам, позволяющим получать мультипликативным решения для более сложных цепей Маркова.

В марковских моделях технически сложных систем, таких, как вычислительные системы или системы связи, пространство состояний часто может быть естественным образом разбито на непересекающиеся подмножества, что приводит к разбиению матрицы СУР на блоки. Начиная с работ [1, 2, 16, 26], много усилий было предпринято для решения СУР в матрично-геометрическом виде. Формулы такого типа удобны для вычислений и, кроме того, позволяют исследовать асимптотическое поведение решения при возрастании блочного размера матрицы. Общий метод получения матрично-геометрических решений для цепей Маркова со счетным числом состояний и блочной почти треугольной матрицей интенсивностей переходов дал Ньютс в своей известной книге [24]. Оказалось, что решение выражается через матрицу, являющуюся минимальным неотрицательным корнем матричного квадратного уравнения.

Поиск матрично-мультипликативных решений конечных цепей Маркова был предпринят в работах [9, 11, 12, 23]. Было показано, что решение некоторых СУР с блочными трехдиагональными матрицами может быть представлено в виде суммы двух матрично-геометрических членов и требует решения двух матричных квадратных уравнений.

В настоящей книге даются мультипликативные решения цепей Маркова, являющихся математическими моделями мультисервисных сетей связи [4, 33, 38], а также цепей Маркова с блочными матрицами интенсивностей переходов. Изложение материала в книге замкнуто, и от читателя требуется лишь знакомство с основами линейной алгебры. Необходимые сведения содержатся в первой главе, в которой даются основные свойства неотрицательных матриц. Во второй главе исследуются мультипликативные модели мультисервисных сетей с одноадресными соединениями, а в третьей – с многоадресными соединениями. В четвертой главе рассматриваются смешанные сети, имеющие как одноадресные, так и многоадресные соединения. Пятая глава посвящена общим методам решения систем уравнений равновесия с блочными матрицами интенсивностей переходов. Матрично-геометрические и матрично-мультипликативные решения конечных цепей Маркова даются в шестой главе.

Глава 1, 5 и 6 подготовлены В.А. Наумовым, главы 3 и 4 – Ю.В. Гайдамака, глава 2 и общая редакция выполнены К.Е. Самуйловым. Материалы глав по марковским моделям мультисервисных сетей с потерями опираются на монографию [33], и авторы благодарят Н.В. Яркину, внесшую большой вклад в её написание.

1. Свойства матриц интенсивностей переходов и матриц переходных вероятностей

1.1. Основные понятия

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – прямоугольные матрицы одинаковых размеров. Будем писать

$\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$, если $\mathbf{A}(i, j) \geq \mathbf{B}(i, j)$ для всех i и j,

$\mathbf{A} >> \mathbf{B}$, если $\mathbf{A}(i, j) > \mathbf{B}(i, j)$ для всех i и j,

$\mathbf{A} > \mathbf{B}$, если $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ и $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

Матрица $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ называется *неотрицательной*, а матрица $\mathbf{A} >> \mathbf{0}$ – *положительной*. Аналогичные названия и обозначения будут применяться к векторам. Кроме того, векторы $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, имеющие координаты, равные нулю, будем называть *полуположительными*.

Неотрицательная матрица $\mathbf{P}$ порядка n называется *полустохастической*, если

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(i, j) \leq 1, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

и *стохастической*, если

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(i, j) = 1, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Стохастические и полустохастические матрицы возникают при анализе цепей Маркова с дискретным временем. В теории цепей Маркова с непрерывным временем важную роль играют *матрицы интенсивностей переходов* $\mathbf{A}$ с неотрицательными внедиагональными элементами, у которых суммы всех элементов каждой строки неположительны, т.е.

$$A(i, j) \geq 0, \; i \neq j, \; i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} A(i, j) \leq 0, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрица интенсивностей переходов называется *консервативной*, если имеет место строгое равенство $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{u} = (1,1,\ldots,1)$ – вектор из единиц соответствующей длины.

Основные свойства стохастических матриц и матриц интенсивностей переходов вытекают из общей теории неотрицательных матриц и М-матриц [6, 7, 15].

Для любой матрицы интенсивностей переходов справедливы неравенства

$$A(i, j) \leq -\sum_{j \neq i} A(i, j) \leq 0, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Поэтому диагональные элементы таких матриц неположительны. Если некоторый диагональный элемент матрицы интенсивностей переходов равен нулю, то в соответствующей строке все элементы нулевые.

Выберем число $a > 0$ таким, чтобы

$$a \geq -\min_{j} A(j, j),$$

тогда матрица $\mathbf{A}$ может быть записана в виде $\mathbf{A} = a(\mathbf{P} - \mathbf{I})$, где $\mathbf{P} = \mathbf{I} + a^{-1}\mathbf{A}$ – неотрицательная матрица. Более того, матрица $\mathbf{P}$ является полустохастической, поскольку $\mathbf{Pu} = \mathbf{u} + a^{-1}\mathbf{Au} \leq \mathbf{u}$. При этом $\mathbf{P}$ стохастическая, если $\mathbf{A}$ консервативна.

Верно и обратное, любая матрица вида $\mathbf{A} = a(\mathbf{P} - \mathbf{I})$, где $a > 0$ и $\mathbf{P}$ – полустохастическая матрица, является матрицей интенсивностей переходов. Если дополнительно $\mathbf{Pu} = \mathbf{u}$, то $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$ и, следовательно, матрица $\mathbf{A}$ консервативна. Суммируя вышесказанное, приходим к следующему выводу.

<u>Теорема 1.1.</u> Матрица $\mathbf{A}$ является матрицей интенсивностей переходов, если и только если она представима в виде $\mathbf{A} = a(\mathbf{P} - \mathbf{I})$, где a − положительное число и $\mathbf{P}$ − полустохастическая матрица. При этом $\mathbf{A}$ консервативна, если и только если $\mathbf{P}$ стохастическая матрица.

Теорема 1.2. Для любой матрицы интенсивностей переходов из неравенства $\mathbf{Ax} >> \mathbf{0}$ всегда следует $\mathbf{x} << \mathbf{0}$. Матрица интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ является невырожденной, если и только если из неравенства $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$ всегда следует $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}$ − матрица интенсивностей переходов, $\mathbf{Ax} >> \mathbf{0}$, и предположим, что при этом $x(k) = \max\limits_{j} x(j) \geq 0$. Запишем матрицу $\mathbf{A}$ в виде $\mathbf{A} = a(\mathbf{P} - \mathbf{I})$, где $a > 0$ и $\mathbf{P}$ – полустохастическая матрица. Тогда имеем

$$\mathbf{A}x(k) = a\left[\sum_{j=1}^{n} P(k, j)x(j) - x(k)\right] \leq a\left[\sum_{j=1}^{n} P(k, j) - 1\right]x(k) \leq 0,$$

что противоречит предположению о том, что $\mathbf{Ax} >> \mathbf{0}$. Поэтому из неравенства $\mathbf{Ax} >> \mathbf{0}$ всегда следует $\mathbf{x} << \mathbf{0}$.

Пусть матрица интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ невырождена, $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{-1}$ и $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$, тогда $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{Hu}) = \mathbf{Ax} + \varepsilon\mathbf{u} >> \mathbf{0}$ для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда в силу вышесказанного вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{Hu} << \mathbf{0}$, а значит $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$.

Предположим теперь, что для некоторой матрицы $\mathbf{A}$ из неравенства $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$ всегда следует $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$. Если $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, то одновременно выполняются неравенства $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$ и $\mathbf{A}(-\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$, и поэтому $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ и $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Следовательно, уравнение $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ имеет лишь нулевое решение, а значит, матрица $\mathbf{A}$ невырождена. ■

Теорема 1.3. Если матрица интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ невырождена, то у её обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ диагональные элементы строго отрицательны, а внедиагональные элементы неположительны.

Доказательство. Обозначим $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{h}_j$ - j-й столбец матрицы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{e}_j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots0)$ - вектор из нулей с единицей на j-м месте. Тогда $\mathbf{Ah}_j = \mathbf{e}_j \geq \mathbf{0}$, и по теореме 1.2 $\mathbf{h}_j \leq \mathbf{0}$. Следовательно, все элементы матрицы $\mathbf{H}$ неположительны. По теореме 1.1 матрица $\mathbf{A}$ представима в виде $\mathbf{A} = a(\mathbf{P} - \mathbf{I})$, где $a > 0$ и $\mathbf{P}$ – полустохастическая матрица. Из равенства $\mathbf{AH} = \mathbf{I}$ вытекает $a\mathbf{H} = a\mathbf{PH} - \mathbf{I}$, причем $a\mathbf{PH} \leq \mathbf{0}$. Поэтому диагональные элементы матрицы $\mathbf{H}$ строго отрицательны. ■

1.2. Неразложимые матрицы

Матрица $\mathbf{S}$ называется *матрицей перестановок*, если в каждом ее столбце и каждой строке стоит ровно одна единица, а остальные элементы равны нулю. Например,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

является матрицей перестановок. Произведение двух матриц перестановок снова является матрицей перестановок.

Каждой матрице перестановок $\mathbf{S}$ порядка n соответствует перестановка $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$, в которой $\sigma_i = j$, если $S(i, j) = 1$. Матрица перестановок $\mathbf{S}$ обладает следующим свойством:

$$\mathbf{SS}^T = \mathbf{S}^T\mathbf{S} = \mathbf{I},$$

т.е. транспонированная матрица $\mathbf{S}^T$ является матрицей, обратной к $\mathbf{S}$. Обратной матрице перестановок $\mathbf{S}^T$ соответствует обратная перестановка σ^{-1}. Для приведенного выше примера $\sigma_1 = 2,\ \sigma_2 = 3,\ \sigma_3 = 1$ и $\sigma_1^{-1} = 3,\ \sigma_2^{-1} = 1,\ \sigma_3^{-1} = 2$.

Перестановка в любой матрице $\mathbf{A}$ строк и столбцов с одинаковыми номерами равносильна умножению ее слева на некоторую матрицу перестановок $\mathbf{S}$ и справа на $\mathbf{S}^T$. Если матрице перестановок $\mathbf{S}$ соответствует перестановка σ, то в результате получим матрицу

$$\mathbf{SAS}^T = \begin{bmatrix} A(\sigma_1,\sigma_1) & A(\sigma_1,\sigma_2) & \cdots & A(\sigma_1,\sigma_n) \\ A(\sigma_2,\sigma_1) & A(\sigma_2,\sigma_2) & \cdots & A(\sigma_2,\sigma_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A(\sigma_n,\sigma_1) & A(\sigma_n,\sigma_2) & \cdots & A(\sigma_n,\sigma_n) \end{bmatrix}. \qquad (1.1)$$

Семейство непустых и попарно непересекающихся подмножеств множества $\mathscr{X}$, объединение которых совпадает с $\mathscr{X}$, называется *разбиением множества* $\mathscr{X}$.

Матрица $\mathbf{A}$ порядка n называется *неразложимой*, если $n=1$ или если $n \ge 2$ и для любого разбиения $\mathscr{Y}$, $\mathscr{Z}$ множества $\mathscr{X} = \{1, 2, ..., n\}$ существуют $i \in \mathscr{Y}$, $j \in \mathscr{Z}$, для которых $A(i, j) \ne 0$. В противном случае говорят, что матрица $\mathbf{A}$ *разложима*.

У неразложимых матриц в каждой строке есть по крайней мере один отличный от нуля внедиагональный элемент. Поэтому диагональные элементы неразложимых матриц интенсивностей переходов строго отрицательны.

Матрица $\mathbf{A}$ разложима, если и только если для некоторой матрицы перестановок $\mathbf{S}$ матрица $\mathbf{SAS}^T$ имеет вид

$$\mathbf{SAS}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ – квадратные матрицы. В этом случае $A(i, j) = 0$ для всех $i \in \mathscr{Y}$, $j \in \mathscr{Z}$, где $\mathscr{Y} = \{\sigma_k \mid 1 \le k \le m\}$, $\mathscr{Z} = \{\sigma_k \mid m < k \le n\}$ и m – порядок матрицы $\mathbf{B}$. Если какая-либо из матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ разложима, то ее можно также представить в виде, аналогичном (1.1). Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока в результате надлежащей перестановки строк и столбцов матрицы $\mathbf{A}$ она не примет клеточную треугольную форму

$$\mathbf{PAP}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & & & \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ \mathbf{A}_{l1} & \mathbf{A}_{l2} & \cdots & \mathbf{A}_{ll} \end{bmatrix}, \qquad (1.2)$$

в которой диагональные клетки являются неразложимыми матрицами. В полученной клеточной матрице можно выделить изолированные диагональные клетки $\mathbf{A}_{ii}$, такие, что $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{0}$ для всех $j \neq i$. Перестановкой клеточных строк и столбцов в матрице (1.2) можно все изолированные клетки поместить на первые места вдоль главной диагонали. Таким образом, для любой разложимой матрицы $\mathbf{A}$ существует матрица перестановок $\mathbf{Q}$, для которой

$$\mathbf{QAQ}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & & & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & & \ddots & & & & \\ & & & \mathbf{A}_r & & & \\ \mathbf{A}_{r+1,1} & \mathbf{A}_{r+1,2} & & \mathbf{A}_{r+1,r} & \mathbf{A}_{r+1} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ \mathbf{A}_{l,1} & \mathbf{A}_{l,2} & & \mathbf{A}_{l,r} & \mathbf{A}_{l,r+1} & \cdots & \mathbf{A}_l \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_l$ - неразложимые квадратные матрицы, а в каждой строке

$$\mathbf{A}_{i1}, \mathbf{A}_{i2}, ..., \mathbf{A}_{i,i-1}, \ i = r+1, r+2, ..., l ,$$

есть, по крайней мере, одна ненулевая матрица. Матрицу (1.3) называют *нормальной формой разложимой матрицы* $\mathbf{A}$ [7].

Теорема 1.4. Матрица интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ разложима, если и только если существует полуположительный вектор $\mathbf{x}$ такой, что $\mathbf{A}x(k) = \mathbf{0}$ для всех индексов k, для которых $x(k) = 0$.

Доказательство. Если матрица $\mathbf{A}$ разложима, то существует разбиение $\mathscr{Y}$, $\mathscr{Z}$ множества $\mathscr{X}=\{1,2,...,n\}$, такое что $A(k,j)=0$ для всех $k\in\mathscr{Y}$, $j\in\mathscr{Z}$. Определим полуположительный вектор равенствами $x(j)=0$ для $j\in\mathscr{Y}$ и $x(j)=1$ для $j\in\mathscr{Z}$. Если $x(k)=0$, то $k\in\mathscr{Y}$ и

$$\mathbf{A}x(k)=\sum_{j\in\mathscr{Y}}A(k,j)x(j)+\sum_{j\in\mathscr{Z}}A(k,j)x(j)=\mathbf{0},$$

поскольку $x(j)=0$ для $j\in\mathscr{Y}$ и $A(k,j)=0$ для $j\in\mathscr{Z}$.

Пусть $\mathbf{x}$ − полуположительный вектор и $\mathbf{A}x(k)=\mathbf{0}$ для всех k, для которых $x(k)=0$. Положим $\mathscr{Y}=\{i\,|\,x(i)=0\}$ и $\mathscr{Z}=\{i\,|\,x(i)>0\}$. Тогда множества $\mathscr{Y}$ и $\mathscr{Z}$ образуют разбиение множества $\mathscr{X}$, и для всякого $i\in\mathscr{Y}$ имеем

$$\mathbf{0}=\mathbf{A}x(i)=\sum_{j\in\mathscr{Y}}A(i,j)x(j)+\sum_{j\in\mathscr{Z}}A(i,j)x(j)=\sum_{j\in\mathscr{Z}}A(i,j)x(j).$$

Так как все слагаемые последней суммы неотрицательны и $x(j)>0$ для $j\in\mathscr{Z}$, отсюда следует: $A(i,j)=0$ для всех $j\in\mathscr{Y}$, $j\in\mathscr{Z}$. Таким образом, матрица $\mathbf{A}$ разложима. ■

Введем ориентированный граф $G(\mathbf{A})=(\mathscr{X},\mathscr{V})$, где $\mathscr{X}=\{1,2,...,n\}$ - множество вершин и $\mathscr{V}\subset\mathscr{X}\times\mathscr{X}$ - множество дуг, причем пара (i,j) является дугой графа $G(\mathbf{A})$, если $i\neq j$ и $\mathrm{A}(i,j)\neq 0$. Будем по определению считать, что для каждой вершины i в графе есть путь из i в i (путь длины 0). *Путь* длины $k\geq 1$ из вершины i в вершину j - это последовательность вершин $i_0=i,i_1,...,i_{k-1},i_k=j$, в которой пары соседних вершин образуют дуги. Говорят, что вершина j *достижима* из вершины i, если в графе $G(\mathbf{A})$ существует путь из i в j. Граф $G(\mathbf{A})$ называется *сильно связным*, если из любой вершины i достижима любая вершина j.

Теорема 1.5. Матрица $\mathbf{A}$ неразложима, если и только если граф $G(\mathbf{A})$ сильно связный.

Доказательство. Теорема очевидна для матриц порядка

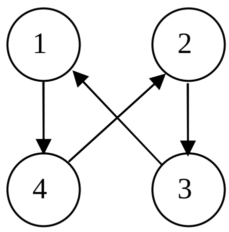
$n=1$. Пусть $\mathbf{A}$ – неразложимая матрица порядка $n \geq 2$. Для каждого i обозначим $\mathcal{Y}_i$ множество вершин j, достижимых из i. Так как $i \in \mathcal{Y}_i$, множество $\mathcal{Y}_i$ непусто. Если $\mathcal{Y}_i \neq \mathcal{X}$, то для любых $l \in \mathcal{Y}_i$ и $j \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}_i$ будем иметь $A(l, j) = 0$, что означает разложимость матрицы $\mathbf{A}$. Поэтому $\mathcal{Y}_i = \mathcal{X}$ и, следовательно, граф $G(\mathbf{A})$ сильно связный.

Обратно, пусть $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ – некоторое разбиение множества $\mathcal{X}$, $j \in \mathcal{Y}$, $j \in \mathcal{Z}$, и $i_0, i_1, ..., i_k$ - путь из i в j. Тогда, по крайней мере, для одной дуги (i_{r-1}, i_r) этого пути будем иметь $i_{r-1} \in \mathcal{Y}$, $i_r \in \mathcal{Z}$ и $A(i_{r-1}, i_r) \neq 0$. Значит, матрица $\mathbf{A}$ неразложима. ■

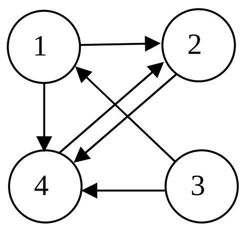
Пример.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$G(\mathbf{A})$



$G(\mathbf{B})$



Матрица $\mathbf{A}$ неразложима, а матрица $\mathbf{B}$ разложима.

1.3. Невырожденые матрицы

Теорема 1.6. Для любой матрицы интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ порядка n каждое из следующих трех условий эквивалентно утверждению: «Матрица $\mathbf{A}$ невырождена».

1°. Матрица

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{n} & \mathbf{u}^T \\ -\mathbf{Au} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

неразложима.

2°. $\mathbf{Au} \neq \mathbf{0}$ и матрица $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \dfrac{1}{n}\mathbf{Auu}^T$ неразложима.

3°. $\mathbf{A} < \mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q}$ – неразложимая матрица интенсивностей переходов.

Доказательство. Будем считать, что строки и столбцы матрицы $\mathbf{B}$ нумеруются, начиная с 0. Предположим, что матрица $\mathbf{B}$ разложима, и пусть $\mathscr{Y}$, $\mathscr{X}$ – разбиение множества $\mathscr{X}_0 = \{0,1,\dots,n\}$ такое, что $B(i, j) = 0$ для всех $i \in \mathscr{Y}$ и $j \in \mathscr{X}$. Так как 0-я строка матрицы $\mathbf{B}$ не имеет нулевых элементов, то $0 \notin \mathscr{Y}$, а значит $0 \in \mathscr{X}$.

Если $\mathscr{X} = \{0\}$, то $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$ и, следовательно, матрица $\mathbf{A}$ вырождена. Если же $\mathscr{X} \neq \{0\}$, то, не ограничивая общности, можно считать, что $\mathscr{X} = \{0,1,\dots,r\}$ и $\mathscr{Y} = \{r+1, r+2,\dots,n\}$, где $1 \leq r < n$. Поскольку $B(i, j) = 0$ для всех $i \in \mathscr{Y}$ и $j \in \mathscr{X}$, будем иметь

$$\begin{gathered} \mathbf{A}u(i) = 0,\ i = r+1, r+2,\dots,n, \\ A(i, j) = 0,\ i = r+1, r+2,\dots,n,\ \ j = 1, 2,\dots,r. \end{gathered} \tag{1.4}$$

В этом случае матрица $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{A}_{11}$ и $\mathbf{A}_{22}$ – квадратные матрицы, причем из (1.4) вытекает, что $\det(\mathbf{A}_{22}) = 0$. Отсюда следует, что $\det(\mathbf{A}) = 0$ и матрица $\mathbf{A}$ вырождена. Таким образом, если матрица $\mathbf{A}$ невырождена, то выполняется условие 1°.

Ясно, что $\mathbf{Au} \neq \mathbf{0}$, если матрица $\mathbf{B}$ неразложима. Предположим, что разложимой является матрица $\mathbf{C}$. Тогда согласно теореме 1.4 существует полуположительный вектор $\mathbf{x}$, такой, что $\mathbf{C}x(i)=\mathbf{0}$, всякий раз когда $x(i)=0$. Вектор

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\frac{1}{n}\mathbf{u}^T\mathbf{x}\\ \mathbf{x}\end{bmatrix}$$

полуположителен и если некоторая компонента этого вектора равна 0, то соответствующая компонента вектора

$$\mathbf{By}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{Cx}\end{bmatrix}$$

также равна 0. По теореме 1.4 это означает разложимость матрицы $\mathbf{B}$. Поэтому, если матрица $\mathbf{B}$ неразложима, такой же будет и матрица $\mathbf{C}$, т.е. из 1° следует 2°.

Предположим теперь, что матрица $\mathbf{A}$ вырождена, но $\mathbf{Au}\neq\mathbf{0}$. Пусть $\mathbf{Ay}=\mathbf{0}$, $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$, причем

$$m=\max_i y(i)>0$$

(иначе вместо $\mathbf{y}$ можно рассмотреть $-\mathbf{y}$). Ясно, что вектор $\mathbf{x}=m\mathbf{u}-\mathbf{y}$ полуположителен. Кроме того, поскольку внедиагональные элементы матрицы $\mathbf{A}$ неотрицательны, имеем $\mathbf{A}x(i)\geq 0$, если $x(i)=0$. С другой стороны, $\mathbf{Ax}=m\mathbf{Au}\leq\mathbf{0}$. Поэтому $\mathbf{A}x(i)=\mathbf{A}u(i)=\mathbf{0}$ для всех i, для которых $x(i)=0$. Для таких индексов i

$$\mathbf{C}x(i)=\mathbf{A}x(i)-\frac{1}{n}(\mathbf{u}^T\mathbf{x})\mathbf{A}u(i)=\mathbf{0},$$

что по теореме 1.4 означает разложимость матрицы $\mathbf{C}$. Таким образом, если матрица $\mathbf{A}$ вырождена, то либо $\mathbf{Au}=\mathbf{0}$, либо разложима матрица $\mathbf{C}$ и из условия 2° вытекает невырожденность матрицы $\mathbf{A}$.

Мы показали эквивалентность каждого из условий 1°, 2° утверждению: «Матрица $\mathbf{A}$ невырождена». Докажем теперь эквивалентность условий 2° и 3°. Нетрудно видеть, что $\mathbf{C}$ является матрицей интенсивностей переходов. Кроме того, из неравенства $\mathbf{Au} < \mathbf{0}$ вытекает $\mathbf{A} < \mathbf{C}$. Поэтому из 2° следует 3°.

Пусть теперь $\mathbf{A} < \mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q}$ – неразложимая матрица интенсивностей переходов. Тогда $\mathbf{Au} < \mathbf{Qu} \le \mathbf{0}$, и, следовательно, $\mathbf{Au} \ne \mathbf{0}$. Сравним ненулевые элементы матриц $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{C}$. Если $\mathbf{A}u(i) < \mathbf{0}$, то все элементы i-й строки матрицы $\mathbf{C}$ отличны от нуля. Если же $\mathbf{A}u(i) = \mathbf{0}$, то все элементы i-й строки матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{C}$ совпадают. Поэтому там, где у матрицы $\mathbf{C}$ расположены нулевые элементы, у матрицы $\mathbf{Q}$ также находятся элементы, равные нулю. Поскольку $\mathbf{Q}$ неразложима, неразложимой является и матрица $\mathbf{C}$. Таким образом, из 3° вытекает 2°. ■

Следствие 1.1. Пусть для матриц интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ выполняется неравенство $\mathbf{A} \le \mathbf{B}$ и матрица $\mathbf{B}$ невырождена. Тогда матрица $\mathbf{A}$ невырождена и $\mathbf{A}^{-1} \ge \mathbf{B}^{-1}$.

Доказательство. Согласно пункту 3° теоремы 1.6 $\mathbf{B} < \mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q}$ – неразложимая матрица интенсивностей переходов. Поскольку $\mathbf{A} \le \mathbf{B}$, снова выполняется неравенство $\mathbf{A} < \mathbf{Q}$, и, следовательно, матрица $\mathbf{A}$ невырождена. По теореме 1.3 $\mathbf{A}^{-1} \le \mathbf{0}$ и $\mathbf{B}^{-1} \le \mathbf{0}$, поэтому

$$\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}^{-1} = (-\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{B} - \mathbf{A})(-\mathbf{B}^{-1}) \ge \mathbf{0}. \ ■$$

Теорема 1.7. Пусть матрица интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ неразложима и неконсервативна. Тогда она невырождена и $\mathbf{A}^{-1} << \mathbf{0}$.

Доказательство. Если матрица интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ порядка n неразложима, то неразложима и матрица $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \frac{1}{n}\mathbf{Auu}^T$. Если к тому же $\mathbf{Au} \ne \mathbf{0}$, то по теореме 1.6 матрица $\mathbf{A}$ невырождена.

По теореме 1.3 матрица $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{-1}$ является неположительной, а ее диагональные элементы отрицательны. Предположим, что $H(k, j) = 0$ для некоторых

k и j, и, как и ранее, обозначаем h_j j-й столбец матрицы $\mathbf{H}$. Тогда вектор $\mathbf{x} = -h_j$ полуположителен и $\mathbf{A}x(k) = -e_j(k) = \mathbf{0}$ для всех k, для которых $x(k) = 0$. Отсюда по теореме 1.4 вытекает разложимость матрицы $\mathbf{A}$. Поэтому для неразложимой матрицы $\mathbf{A}$ все элементы матрицы $\mathbf{H}$ строго отрицательны. ■

Теорема 1.8. Пусть $\mathbf{A}$ – неразложимая матрица интенсивностей переходов порядка n, $0 < m < n$, и матрица $\mathbf{B}$ получается вычеркиванием из $\mathbf{A}$ некоторых m строк и m столбцов с одинаковыми номерами. Тогда $\mathbf{B}$ – невырожденная матрица интенсивностей переходов.

Доказательство. Пусть $\mathscr{Y} = \{i_1, ..., i_m\}$ – множество номеров удалённых строк и столбцов матрицы $\mathbf{A}$. Положим $C(i, j) = A(i, j)$ для $i, j \notin \mathscr{Y}$, $C(i,i) = A(i,i)$ для $i \in \mathscr{Y}$, и $C(i, j) = 0$ в остальных случаях, тогда

$$\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{B}) \prod_{i \in \mathscr{Y}} A(i,i) . \qquad (1.5)$$

Поскольку диагональные элементы неразложимой матрицы интенсивностей переходов отрицательны, то $\prod_{i \in \mathscr{Y}} A(i,i) \neq 0$.

Ясно, что $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ являются матрицами интенсивностей переходов, причем $\mathbf{C} < \mathbf{A}$. По теореме 1.6 матрица $\mathbf{C}$ невырождена и в силу равенства (1.5) невырождена и матрица $\mathbf{B}$. ■

Условию 1° теоремы 1.6 можно придать удобную геометрическую форму. Для матрицы интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ порядка n введем ориентированный граф $G_0(\mathbf{A}) = (\mathscr{X}_0, \mathscr{V}_0)$ с множеством вершин $\mathscr{X}_0$ и множеством дуг $\mathscr{V}_0 \subset \mathscr{X}_0 \times \mathscr{X}_0$. Граф $G_0(\mathbf{A})$ строится исходя из графа $G(\mathbf{A})$, введенного в разделе 1.2, следующим образом. Множество вершин $\mathscr{X}_0$ графа $G_0(\mathbf{A})$ получается добавлением к множеству вершин $\mathscr{X} = \{1, 2, ..., n\}$ графа $G(\mathbf{A})$ вершины 0.

Дугами графа $G_0(\mathbf{A})$ являются все дуги графа $G(\mathbf{A})$ и, кроме того, в нем есть дуги, идущие в вершину 0 из всех вершин $i \neq 0$, для которых $\mathbf{Au}(i) < 0$. Таким образом,

$$\mathscr{X}_0 = \{0,1,\ldots,n\},$$

$$\mathscr{V}_0 = \{(i,j) \mid i,j \in \mathscr{X},\ A(i,j) > 0\} \cup$$

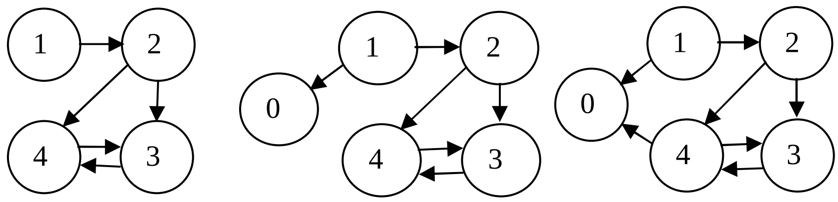
$$\{(i,0) \mid i \in \mathscr{X},\ \sum_{j=1}^{n} A(i,j) < 0\}.$$

Теорема 1.9. Матрица интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ невырождена, если и только если в графе $G_0(\mathbf{A})$ из любой вершины i достижима вершина 0.

Доказательство. Если строки и столбцы матрицы $\mathbf{B}$ из теоремы 1.6 нумеровать, начиная с 0, то граф $G(\mathbf{B})$ будет отличаться от графа $G_0(\mathbf{A})$ только тем, что в $G(\mathbf{B})$ из вершины 0 исходят дуги во все остальные вершины. Ясно, что условие настоящей теоремы равносильно сильной связности графа $G(\mathbf{B})$, а это по теореме 1.5 эквивалентно неразложимости матрицы $\mathbf{B}$, что в свою очередь эквивалентно невырожденности матрицы $\mathbf{A}$. ■

Пример.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$



$G(\mathbf{A})=G(\mathbf{B})$ $\quad$ $G_0(\mathbf{A})$ $\quad$ $G_0(\mathbf{B})$

Матрица **A** является вырожденной, а матрица **B** – невырожденной.

1.4. Системы уравнений равновесия

Пусть $\xi_k,\ k=0,1,\ldots$ – однородная цепь Маркова с дискретным временем и n состояниями. Обозначим

$$P(i,j)=P\{\xi_{k+1}=j\,|\,\xi_k=i\},\quad i,j=1,2,\ldots,n,$$

вероятности переходов этой цепи Маркова,

$$p_k(j)=P\{\xi_k=j\},\quad j=1,2,\ldots,n,$$

распределение цепи Маркова в момент k. Матрица вероятностей переходов $\mathbf{P}$ является стохастической. Если известно начальное распределение $\mathbf{p}_0$ цепи Маркова, то распределение $\mathbf{p}_k$ в момент k можно найти по формуле

$$\mathbf{p}_k^T=\mathbf{p}_0^T\mathbf{P}^k,\quad k=1,2,\ldots$$

Начальное распределение $\mathbf{p}_0=\mathbf{q}$ цепи Маркова с дискретным временем называется стационарным, если $\mathbf{p}_k=\mathbf{q}$ для всех $k=0,1,\ldots$. Ясно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор $\mathbf{q}$ удовлетворял системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{q}^T(\mathbf{P}-\mathbf{I})=\mathbf{0}^T,\ \ \mathbf{q}^T\mathbf{u}=\mathbf{1},$$

называемой *системой уравнений равновесия цепи Маркова с дискретным временем*.

Пусть $\xi_t,\ t\geq 0$ – однородная цепь Маркова с непрерывным временем и n состояниями. Обозначим

$$P_t(i,j) = P\{\xi_t = j \mid \xi_0 = i\}, \quad i,j = 1,2,\dots,n, \quad t \ge 0,$$

вероятности переходов за время t этой цепи Маркова,

$$p_t(j) = P\{\xi_t = j\}, \quad j = 1,2,\dots,n, \quad t \ge 0,$$

распределение цепи Маркова в момент t. Матрицы вероятностей переходов $\mathbf{P}_t$ являются стохастическими. Цепь Маркова стохастически непрерывна, если

$$\lim_{t\downarrow 0} \mathbf{P}_t = \mathbf{I}.$$

Для стохастически непрерывной цепи Маркова всегда существует предел

$$\mathbf{A} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(\mathbf{P}_t - \mathbf{I}),$$

называемый матрицей интенсивностей переходов цепи Маркова. Эта матрица однозначно определяет вероятности переходов цепи Маркова, поскольку

$$\mathbf{P}_t = e^{\mathbf{A}t}, \ t \ge 0.$$

Если известно начальное распределение $\mathbf{p}_0$ цепи Маркова, то распределение $\mathbf{p}_t$ в момент t можно найти по формуле

$$\mathbf{p}_t^T = \mathbf{p}_0^T \mathbf{P}_t, \ t \ge 0.$$

Начальное распределение $\mathbf{p}_0 = \mathbf{q}$ цепи Маркова с непрерывным временем называется стационарным, если $\mathbf{p}_t = \mathbf{q}$ для всех $t \ge 0$. В случае стохастически непрерывной цепи Маркова для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор $\mathbf{q}$ удовлетворял системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{q}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T, \ \mathbf{q}^T \mathbf{u} = 1,$$

называемой *системой уравнений равновесия цепи Маркова с непрерывным временем*.

Нетрудно видеть, что как в случае дискретного времени, так и в случае непрерывного времени матрица коэффициентов при неизвестных в системе уравнений равновесия является консервативной матрицей интенсивностей переходов.

Теорема 1.10. Система уравнений $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$ с неразложимой консервативной матрицей интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ имеет положительное решение $\mathbf{g}$. Любое другое решение этой системы уравнений пропорционально $\mathbf{g}$.

Доказательство. По теореме 1.8 матрицы, получающиеся из неразложимой матрицы $\mathbf{A}$ вычеркиванием строки и столбца с одинаковыми номерами, невырождены, в то время как по условию теоремы сама матрица $\mathbf{A}$ вырождена. Следовательно, ее ранг равен $n-1$, а размерность подпространства решений системы уравнений $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$ равна 1. Таким образом, решения этой системы уравнений отличаются лишь постоянным множителем.

Рассмотрим решение системы уравнений $\mathbf{g}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$, удовлетворяющее условию $g(k) = \max_i g(i) > 0$. Поскольку $\mathbf{A}$ неразложима, некоторый ее элемент k-й строки, например, $A(k, j)$ положителен. Положим

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \frac{1}{2} A(k, j) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j^T,$$

тогда

$$\mathbf{g}^T \mathbf{B} = -\frac{1}{2} A(k, j) g(k) \mathbf{e}_j^T.$$

Нетрудно видеть, что $\mathbf{B}$ является матрицей интенсивностей переходов и $\mathbf{Bu} \neq \mathbf{0}$. По теореме 1.7 $\mathbf{B}$ невырождена и $\mathbf{B}^{-1} << \mathbf{0}$. Поэтому

$$\mathbf{g}^T = -\frac{1}{2} A(k, j) g(k) \mathbf{e}_j^T \mathbf{B}^{-1} >> \mathbf{0}. \blacksquare$$

Следствие 1.2. Система уравнений $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$ с неразложимой консервативной матрицей интенсивностей переходов имеет единственное решение $\mathbf{p}$, удовлетворяющее условию $\mathbf{p}^T\mathbf{u} = \mathbf{1}$. Все координаты вектора $\mathbf{p}$ положительны.

Рассмотрим теперь системы уравнений равновесия с разложимыми матрицами. Для разложимой матрицы $\mathbf{A}$ существует матрица перестановок $\mathbf{Q}$ такая, что матрица $\mathbf{B} = \mathbf{QAQ}^T$ имеет нормальную форму (1.3). Ясно, что вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет системе уравнений $\mathbf{x}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}^T$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^T = \mathbf{y}^T\mathbf{Q}$, где $\mathbf{y}$ – решение системы уравнений $\mathbf{y}^T\mathbf{B} = \mathbf{0}^T$.

Теорема 1.11. Пусть разложимая консервативная матрица интенсивностей переходов $\mathbf{B}$ имеет нормальную форму

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & & 0 & & \\ 0 & & \ddots & & & & \\ & & & \mathbf{A}_r & & & \\ \mathbf{A}_{r+1,1} & \mathbf{A}_{r+1,2} & \cdots & \mathbf{A}_{r+1,r} & \mathbf{A}_{r+1} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ \mathbf{A}_{l,1} & \mathbf{A}_{l,2} & \cdots & \mathbf{A}_{l,r} & \mathbf{A}_{l,r+1} & \cdots & \mathbf{A}_l \end{bmatrix},$$

n_i – порядок матрицы $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{u}_i$ – вектор из единиц длины n_i для $i = 1, 2, \ldots, l$. Тогда общее решение системы уравнений $\mathbf{y}^T\mathbf{B} = \mathbf{0}^T$ имеет вид $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_l)$, где

$$\mathbf{y}_i = \begin{cases} c_i\mathbf{p}_i, & 1 \le i \le r, \\ 0, & r < i \le l, \end{cases}$$

– вектор длины n_i; $\mathbf{p}_i$ – единственное решение системы уравнений равновесия $\mathbf{p}_i^T\mathbf{A}_i = \mathbf{0}^T$, $\mathbf{p}_i^T\mathbf{u}_i = \mathbf{1}$ и c_i – некоторые постоянные множители, $i = 1, 2, ..., r$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что диагональные клетки $\mathbf{A}_i$ матрицы $\mathbf{B}$ являются неразложимыми матрицами интенсивностей переходов. При этом $\mathbf{A}_i\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ для $1 \le i \le r$ и $\mathbf{A}_i\mathbf{u}_i < \mathbf{0}$ для $r < i \le l$, поскольку в каждой строке $\mathbf{A}_{i1}, \mathbf{A}_{i2}, ..., \mathbf{A}_{ii-1}$ есть ненулевая матрица. Выпишем систему уравнений $\mathbf{y}^T\mathbf{B} = \mathbf{0}^T$:

$$\mathbf{y}_l^T \mathbf{A}_l = \mathbf{0}^T, \tag{1.6}$$

$$\mathbf{y}_j^T \mathbf{A}_j = -\sum_{i=j+1}^{l} \mathbf{y}_i^T \mathbf{A}_{ij}, \quad r < j < l, \tag{1.7}$$

$$\mathbf{y}_j^T \mathbf{A}_j = -\sum_{i=r+1}^{l} \mathbf{y}_i^T \mathbf{A}_{ij}, \quad 1 < j < r. \tag{1.8}$$

По теореме 1.7 матрицы $\mathbf{A}_i$, $r < i \le l$ невырождены и из (1.6)-(1.7) вытекает, что $\mathbf{y}_i = \mathbf{0}$ для $r < i \le l$. Поэтому уравнения (1.8) принимают вид $\mathbf{y}_j^T \mathbf{A}_j = \mathbf{0}^T$, $1 \le j \le r$. Согласно теореме 1.10 и следствию 1.2 из нее, каждый вектор $\mathbf{y}_i$ пропорционален единственному решению $\mathbf{p}_i$ системы уравнений $\mathbf{p}_i^T \mathbf{A}_i = \mathbf{0}^T$, $\mathbf{p}_i^T \mathbf{v}_i = \mathbf{1}$. ■

Следствие 1.3. Система уравнений $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$ с консервативной матрицей интенсивностей переходов имеет положительное решение, если и только если она приводима к виду

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{A}_r \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{Q}$ − некоторая матрица перестановок и $\mathbf{A}_i$ – неразложимые квадратные матрицы.

Следствие 1.4. Система уравнений $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$ с консервативной матрицей интенсивностей переходов имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $\mathbf{x}^T\mathbf{u} = \mathbf{1}$, если и только если она приводима к виду

$$\mathbf{QAQ}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ \mathbf{A}_{l1} & \mathbf{A}_{l2} & \cdots & \mathbf{A}_{ll} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{Q}$ − некоторая матрица перестановок, $\mathbf{A}_{ii}$ – неразложимые квадратные матрицы и, если $l \geq 2$, в каждой строке

$$\mathbf{A}_{i1}, \mathbf{A}_{i2}, ..., \mathbf{A}_{ii-1}, \ i = 2, 3, ..., l,$$

есть ненулевая матрица.

1.5. Укрупнение цепей Маркова

Пусть $1 \leq m \leq n$ и φ – отображение множества $\{1, 2, ..., n\}$ на множество $\{1, 2, ..., m\}$, $\varphi^{-1}(k) \neq \varnothing$, $k = 1, 2, ..., m$. Говорят, что матрица интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ $\varphi -$ *укрупнима*, если для некоторых чисел $A_\varphi(v, w)$, $v, w = 1, 2, ..., m$, выполняются равенства

$$\sum_{j \in \varphi^{-1}(r)} A(i, j) = A_\varphi(\varphi(i), r), \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.9}$$

Нетрудно видеть, что векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_m$ длины n, заданные равенствами

$$u_r(j) = \begin{cases} 1, & \varphi(j) = r, \\ 0, & \varphi(j) \neq r, \end{cases} \tag{1.10}$$

обладают следующими свойствами:

$$\mathbf{u}_k > \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, ..., m,$$

$$\mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad k \neq r, \quad k, r = 1, 2, ..., m,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbf{u}_k = \mathbf{u}.$$

Каждый такой набор векторов однозначно определяет отображение $\varphi:\{1,2,...,n\}\to(1,2,...,m\}$ по правилу

$$\varphi(i)=k \Leftrightarrow u_k(i)>0.$$

С помощью векторов $\mathbf{u}_k$ условие укрупнимости матрицы $\mathbf{A}$ можно записать в следующем виде

$$\mathbf{Au}_r=\sum_{k=1}^{m}A_\varphi(k,r)\mathbf{u}_k,\quad r=1,2,...,m. \qquad (1.11)$$

Действительно, в силу (1.9) имеем

$$\mathbf{Au}_r(i)=\sum_{j\in\varphi^{-1}(r)}A(i,j)u(j)=A_\varphi(\varphi(i),r)u(i)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}A_\varphi(k,r)\delta_{k,\varphi(i)}u(i)=\sum_{k=1}^{m}A_\varphi(k,r)u_k(i).$$

Заметим, что любая матрица интенсивностей переходов будет φ-укрупнима, если в качестве φ взять отображение $\varphi(i)=1,\ i=1,2,...,n$. В этом случае $m=1,\ u_1=u,\ A_\varphi(1,1)=0$.

Теорема 1.12. Пусть матрица интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ $\varphi-$укрупнима. Тогда $\mathbf{A}_\varphi$ является матрицей интенсивностей переходов. Если $\mathbf{A}$ консервативна, то $\mathbf{A}_\varphi$ консервативна. Если $\mathbf{A}$ неразложима, то $\mathbf{A}_\varphi$ неразложима. Все собственные числа матрицы $\mathbf{A}_\varphi$ являются собственными числами матрицы $\mathbf{A}$.

Доказательство. Пусть $k=\varphi(i)$, тогда

$$A_\varphi(k,r)=\sum_{j\in\varphi^{-1}(r)}A(i,j)\ge 0,\ k\ne r,$$

$$\sum_{r=1}^{m}A_\varphi(k,r)=\sum_{j=1}^{n}A(i,j)\le 0.$$

Поэтому $\mathbf{A}_\varphi$ является матрицей интенсивностей переходов, причем $\mathbf{A}_\varphi$ консервативна, если $\mathbf{A}$ консервативна.

Предположим, что матрица $\mathbf{A}_\varphi$ разложима. Согласно теореме 1.4, в этом случае существует полуположительный вектор x, такой, что $\mathbf{A}_\varphi x(k) = 0$, если $x(k) = 0$. Нетрудно видеть, что вектор $\mathbf{y}$, задаваемый равенствами $y(j) = x(\varphi(j)), \quad j = 1, 2, ..., n$, является полуположительным. Если $\varphi(i) = k$, то

$$\mathbf{A}\mathbf{y}(i) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{j \in \varphi^{-1}(r)} A(i, j) y(j) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{j \in \varphi^{-1}(r)} A(i, j) x(r) =$$

$$= \sum_{r=1}^{m} A_\varphi(k, r) x(r).$$

Отсюда следует, что $\mathbf{A}y(i) = \mathbf{0}$ для всех i, для которых $y(i) = 0$. По теореме 1.4 матрица $\mathbf{A}$ разложима. Поэтому для неразложимых матриц $\mathbf{A}$ укрупненная матрица $\mathbf{A}_\varphi$ также неразложима.

Пусть $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ − собственный вектор матрицы $\mathbf{A}_\varphi$, соответствующий собственному числу γ. Тогда для ненулевого вектора $\mathbf{y} = \sum_{r=1}^{m} x(r) \mathbf{u}_r$ будем иметь:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \sum_{r=1}^{m} x(r) \mathbf{A}\mathbf{u}_r = \sum_{k,r=1}^{m} x(r) A_\varphi(k, r) \mathbf{u}_k = \gamma \mathbf{y},$$

т.е. γ − собственное число матрицы $\mathbf{A}_\varphi$. ■

<u>Теорема 1.13.</u> Пусть $\mathbf{A}$ – некоторая матрица порядка n, $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m, \mathbf{b}$ – векторы длины n и для некоторых чисел $\gamma(k, r),\ k, r = 1, 2, ..., m$, выполняются равенства

$$\mathbf{A}\mathbf{a}_r = \sum_{k=1}^{m} \gamma(k, r) \mathbf{a}_k, \ \ r = 1, 2, ..., m.$$

Пусть также некоторые индексы $j_1, j_2, ..., j_m$ таковы, что

$a_r(j_r) \neq 0$ и $a_r(j_k) = 0$ для $k \neq r$. Тогда вектор $\mathbf{x}$ является решением системы уравнений $\mathbf{x}^T\mathbf{A} = \mathbf{b}^T$, если и только если

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}(j) = \mathbf{b}(j) \qquad (1.12)$$

для всех $j \neq j_1, j_2, ..., j_m$ и

$$\sum_{k=1}^{m} (\mathbf{x}^T\mathbf{a}_k)\gamma(k,r) = \mathbf{b}^T\mathbf{a}_r,\ r = 1,2,...,m. \qquad (1.13)$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $\mathbf{x}^T\mathbf{A} = \mathbf{b}^T$, т.е. $\mathbf{x}^T\mathbf{A}(j) = \mathbf{b}(j)$ для всех j. Тогда для всех r

$$\sum_{k=1}^{m} (\mathbf{x}^T\mathbf{a}_k)\gamma(k,r) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{a}_r = \mathbf{b}^T\mathbf{a}_r.$$

Обратно, пусть справедливы равенства (1.13) и равенство (1.12) выполняется для всех $j \notin \mathcal{J} = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$. Тогда, учитывая, что $\mathbf{a}_r(j_k) = \mathbf{0}$ для $k \neq r$, будем иметь:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}(j_r)\mathbf{a}_r(j_r) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{a}_r - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_r}}^{n} \mathbf{x}^T\mathbf{A}(j)\mathbf{a}_r(j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (\mathbf{x}^T\mathbf{a}_k)\gamma(k,r) - \sum_{j \notin J} \mathbf{x}^T\mathbf{A}(j)\mathbf{a}_r(j) = \mathbf{b}^T\mathbf{a}_r - \sum_{j \notin J} \mathbf{b}(j)\mathbf{a}_r(j) =$$

$$= \mathbf{b}^T\mathbf{a}_r - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_r}}^{n} \mathbf{b}(j)\mathbf{a}_r(j) = \mathbf{b}(j_r)\mathbf{a}_r(j_r).$$

Поскольку $\mathbf{a}_r(j_r) \neq \mathbf{0}$, отсюда следует, что равенство (1.12) выполняется и для $j \in \mathcal{J}$, т.е. $\mathbf{x}^T\mathbf{A} = \mathbf{b}^T$. ■

Пусть теперь $\mathbf{A}$ есть φ-укрупнимая неразложимая консервативная матрица интенсивностей переходов. В силу теоремы 1.12 укрупненная матрица $\mathbf{A}_\varphi$ также является неразложимой консервативной матрицей интенсивностей переходов, и согласно следствию 1.2 из теоремы 1.10

существует единственное решение укрупненной системы уравнений равновесия $\mathbf{p}_\varphi^T \mathbf{A}_\varphi = \mathbf{0}^T$, $\mathbf{p}_\varphi^T \mathbf{v} = \mathbf{1}$. В силу равенств (1.11) векторы $\mathbf{a}_k = \mathbf{u}_k$, определяемые равенством (1.10), удовлетворяют условию теоремы 1.13. При этом роль коэффициентов $\gamma(k,r)$ играют элементы укрупненной матрицы $\mathbf{A}_\varphi$.

Теорема 1.14. Пусть $\mathbf{A}$ есть φ-укрупнимая неразложимая консервативная матрица интенсивностей переходов и индексы $j_1, j_2, ..., j_m$ таковы, что $\varphi(j_k) = k$.

Тогда вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет системе уравнений равновесия $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$, $\mathbf{x}^T \mathbf{u} = \mathbf{1}$, если и только если

$$\sum_{i=1}^{n} x(i) A(i,j) = 0 \tag{1.14}$$

для всех $j \neq j_1, j_2, ..., j_m$ и

$$\sum_{i \in \varphi^{-1}(k)} \mathbf{x}(i) = \mathbf{p}_\varphi(k),\ k = 1, 2, ..., m. \tag{1.15}$$

Доказательство. Действительно, в силу теоремы 1.13 вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет системе уравнений $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$, если и только если он удовлетворяет уравнениям (1.14) для всех $j \neq j_1, j_2, ..., j_m$, а также уравнениям

$$\sum_{k=1}^{m} (\mathbf{x}^T \mathbf{u}_k) \mathbf{A}_\varphi(k,r) = \mathbf{0},\ r = 1, 2, ..., m.$$

Это, по теореме 1.10, равносильно тому, что $\mathbf{x}^T \mathbf{u}_k = c\mathbf{p}_\varphi(k)$, где c – некоторая константа. Однако, поскольку $\sum_k \mathbf{x}^T \mathbf{u}_k = \mathbf{x}^T \mathbf{u} = \mathbf{1}$, константа c равна 1. ■

Таким образом, если неразложимая консервативная матрица интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ φ-укрупнима и известно решение укрупнённой системы уравнений равновесия $\mathbf{p}_\varphi^T \mathbf{A}_\varphi = \mathbf{0}^T$, то из системы уравнений равновесия $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$ можно удалить m уравнений, по одному из каждого подмножества индексов $\varphi^{-1}(k)$, $k = 1, 2, ..., m$, заменив их уравнениями (1.15).

Следствие 1.5. Система уравнений $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$, $\mathbf{x}^T \mathbf{u} = \mathbf{1}$, с неразложимой консервативной матрицей интенсивностей переходов эквивалентна системе уравнений $\mathbf{x}^T \mathbf{A}_j = \mathbf{e}_j^T$. Здесь j – произвольный индекс, $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$ - вектор из нулей с единицей на j-м месте, а матрица $\mathbf{A}_j$ получается заменой j-го столбца матрицы $\mathbf{A}$ вектором из единиц $\mathbf{u}$.

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть тривиальное укрупнение $\varphi(i) = 1,\ i = 1, 2, ..., n.$

Заметим, что к некоторым случайным процессам применима операция разукрупнения. Хотя решение разукрупнённой системы уравнений может не иметь вероятностного смысла, его укрупнение (1.15) даёт стационарное распределение исходного процесса [5].

1.6. Максимальное собственное число

Предположим, что среди собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$ существует действительное число σ со следующим свойством: если γ – собственное число матрицы $\mathbf{A}$, отличное от σ, то $\operatorname{Re}\gamma < \sigma$. В этом случае будем говорить, что матрица $\mathbf{A}$ имеет *максимальное собственное число* σ, и обозначать его $\sigma(\mathbf{A})$. Очевидно, любая матрица первого порядка имеет максимальное собственное число $\sigma(\mathbf{A}) = A(1,1)$.

Теорема 1.15. Любая неразложимая матрица $\mathbf{A}$ порядка $n \geq 2$ с неотрицательными внедиагональными элементами имеет максимальное собственное число

$$\sigma(a) > \max_i A(i,i)\,. \qquad (1.16)$$

Максимальному собственному числу соответствует положительный собственный вектор. Все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ лежат в круге

$$|z-m| \le \sigma(\mathbf{A}) - m,\ \ m = \min_i A(i,i)\,. \qquad (1.17)$$

Доказательство. Выберем положительное число t таким, чтобы выполнялось неравенство $\mathbf{Au} < t\mathbf{u}$. Тогда $\mathbf{A} - t\mathbf{I}$ является неразложимой матрицей интенсивностей переходов. По теореме 1.7 матрица $\mathbf{A} - t\mathbf{I}$ невырождена и $(\mathbf{A} - t\mathbf{I})^{-1} << \mathbf{0}$.

Для каждого вектора $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ определим число $\sigma_{\mathbf{x}} = \max\{\gamma \mid \mathbf{Ax} \ge \gamma\mathbf{x}\}$. Нетрудно видеть, что

$$\sigma_{\mathbf{x}} = \min_{\mathbf{x}(i) \ne \mathbf{0}} \frac{\mathbf{Ax}(i)}{\mathbf{x}(i)}\,.$$

Если бы для некоторого вектора $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ число σ_x было больше t, то выполнялось бы неравенство $(\mathbf{A} - t\mathbf{I})\mathbf{x} >> \mathbf{0}$. Согласно теореме 1.2, это возможно лишь в случае, когда $\mathbf{x} << \mathbf{0}$. Поэтому $\sigma_{\mathbf{x}} \le t$ для всех $\mathbf{x} > \mathbf{0}$. Кроме того, функция $\sigma_{\mathbf{x}}$ непрерывна на ограниченном и замкнутом множестве векторов $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^T\mathbf{u} = \mathbf{1}$. Поэтому она принимает максимальное значение $\sigma = \sigma_{\mathbf{g}} \le t$ на некотором векторе $\mathbf{g} > \mathbf{0}$, $\mathbf{g}^T\mathbf{u} = \mathbf{1}$. Ясно, что $\mathbf{Ag} \ge \sigma\mathbf{g}$. Покажем, что на самом деле здесь имеет место равенство, т.е. σ является собственным числом матрицы $\mathbf{A}$.

Предположим, что $\mathbf{Ag} > \sigma\mathbf{g}$ и пусть $\mathbf{x} = (t\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{g}$. Тогда $\mathbf{x} >> \mathbf{0}$ и

$$\mathbf{Ax} - \sigma\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \sigma\mathbf{I})(t\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{g} = (t\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{Ag} - \sigma\mathbf{g}) >> \mathbf{0}\,.$$

Отсюда следует, что $\sigma_{\mathbf{x}} > \sigma$, что противоречит определению σ и значит $\mathbf{Ag} = \sigma\mathbf{g}$.

Поскольку $\sigma \le t$, а матрица $t\mathbf{I} - \mathbf{A}$ невырождена, $\sigma < t$ и из неравенства $(t-\sigma)^{-1}\mathbf{g} = (t\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{g} >> \mathbf{0}$ вытекает, что $\mathbf{g} >> \mathbf{0}$. Таким образом, собственный вектор $\mathbf{g}$ матрицы $\mathbf{A}$, соответствующий числу σ, является положительным. Кроме того, в каждой строке неразложимой матрицы $\mathbf{A}$ имеется ненулевой внедиагональный элемент, поэтому

$$(\sigma - A(i,i))g(i) = \sum_{j\neq i} A(i,j)g(j) > 0\,,$$

т.е. $\sigma > A(i,i)$ для всех i.

Пусть γ − некоторое собственное число матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{y}$ − соответствующий ему собственный вектор. Обозначим $|\mathbf{y}|$ вектор с координатами $|\mathbf{y}(i)|$. Из равенства $\mathbf{Ay} = \gamma\mathbf{y}$ вытекает, что

$$A|\mathbf{y}|(i) \geq A(i,i)|y(i)| + |\sum_{j\neq i} A(i,j)y(j)| =$$

$$= (A(i,i) + |\gamma - A(i,i)|)\,|y(i)|,$$

поэтому

$$\sigma_{|\mathbf{y}|} \geq \min_{y(i)\neq 0}(A(i,i) + |\gamma - A(i,i)|)\,.$$

Если бы для всех i было справедливо неравенство $|\gamma - A(i,i)| > \sigma - A(i,i)$, отсюда, в противоречие с определением числа σ, следовало бы, что $\sigma_{|\mathbf{y}|} > \sigma$. Поэтому по крайней мере для одного индекса i имеет место неравенство $|\gamma - A(i,i)| \leq \sigma - A(i,i)$. Следовательно, собственное число γ лежит в одном из кругов

$$|z - A(i,i)| \leq \sigma - A(i,i),\ \ i = 1,2,...,n\,,$$

которые, в свою очередь, все содержатся в круге (1.17). В частности, ни одно собственное число не лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \sigma$ и ни одно, кроме σ, не лежит на прямой $\operatorname{Re} z = \sigma$, т.е. σ − максимальное собственное число матрицы $\mathbf{A}$. ■

Теорема 1.16. Любая матрица $\mathbf{A}$ с неотрицательными внедиагональными элементами имеет максимальное собственное число

$$\sigma(\mathbf{A}) \ge \max_i A(i,i).$$

Максимальному собственному числу соответствует неотрицательный собственный вектор. Все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ лежат в круге

$$|z-m| \le \sigma(\mathbf{A})-m,\ m=\min_i A(i,i).$$

<u>Доказательство.</u> Для любой матрицы $\mathbf{A}$ с неотрицательными внедиагональными элементами существует такая матрица перестановок $\mathbf{P}$, что

$$\mathbf{PAP}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ \mathbf{A}_{l1} & \mathbf{A}_{l2} & \cdots & \mathbf{A}_{ll} \end{bmatrix},$$

где диагональные матрицы либо имеют порядок 1, либо являются неразложимыми матрицами большего порядка с неотрицательными внедиагональными элементами (см. раздел 1.2). Собственные числа диагональных клеток и только они являются собственными числами матрицы $\mathbf{A}$. Из теоремы 1.15 следует, что $\sigma = \max_k \sigma(\mathbf{A}_{kk}) \ge \max_i A(i,i)$ является максимальным собственным числом матрицы $\mathbf{A}$.

Любое собственное число матрицы $\mathbf{A}$ лежит в одном из кругов

$$|z-m_k| \le \sigma(\mathbf{A}_{kk})-m_k,\ m_k = \min_i A_{kk}(i,i),$$

которые содержатся в круге $|z-m| \le \sigma(\mathbf{A})-m,\ m=\min A(i,i)$.

При любом $\varepsilon > 0$ матрица $\mathbf{A}_\varepsilon = \mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{u}\mathbf{u}^T$, $\mathbf{u} >> \mathbf{0}$ имеет положительные внедиагональные элементы и, в частности, неразложима. Обозначим $\mathbf{g}_\varepsilon$ положительный собственный вектор, соответствующий $\sigma(\mathbf{A}_\varepsilon)$, $\mathbf{g}_\varepsilon^T\mathbf{u} = \mathbf{1}$. Поскольку множество векторов $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^T\mathbf{u} = \mathbf{1}$, ограничено и замкнуто, из множества векторов $\mathbf{g}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, можно выбрать последовательность $\mathbf{g}_{\varepsilon_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящуюся при $\varepsilon_k \to 0$ к некоторому неотрицательному вектору $\mathbf{g}$. При этом $\sigma(\mathbf{A}_{\varepsilon_k})$ сходится к $\sigma(\mathbf{A})$, и из равенств $\mathbf{A}_{\varepsilon_k}\mathbf{g}_{\varepsilon_k} = \sigma(\mathbf{A}_{\varepsilon_k})\mathbf{g}_{\varepsilon_k}$ вытекает $\mathbf{Ag} = \sigma(\mathbf{A})\mathbf{g}$. ■

Следствие 1.6. Если матрица $\mathbf{A}$ имеет неотрицательные внедиагональные элементы и для некоторого положительного вектора $\mathbf{f}$ выполняется неравенство $\mathbf{Af} \le \gamma\mathbf{f}$, то справедлива оценка $\sigma(\mathbf{A}) \le \gamma$. В частности, $\sigma(\mathbf{A}) \le 0$, если $\mathbf{A}$ является матрицей интенсивностей переходов.

Действительно, если $\mathbf{g}$ – неотрицательный собственный вектор матрицы $\mathbf{A}^T$, соответствующий $\sigma(\mathbf{A})$, тогда $\mathbf{g}^T\mathbf{f} > \mathbf{0}$ и $\sigma(\mathbf{A})\mathbf{g}^T\mathbf{f} = \mathbf{g}^T\mathbf{Af} \le \gamma\mathbf{g}^T\mathbf{f}$, т.е. $\sigma(\mathbf{A}) \le \gamma$.

Если матрица $\mathbf{A}$ является неотрицательной, то круг $|z - m| \le \sigma(\mathbf{A}) - m$, $m = \min A(i,i)$ содержится в круге $|z| \le \sigma(\mathbf{A})$. Поэтому для неотрицательных матриц $\sigma(\mathbf{A})$ является не только собственным числом с максимальной действительной частью, но и максимальным по модулю.

Теорема 1.17. Пусть $\mathbf{A}$ – неразложимая матрица порядка $n \ge 2$ с неотрицательными внедиагональными элементами, а матрица $\mathbf{B}$ порядка $n-1$ получается из $\mathbf{A}$ вычеркиванием j-й строки и j-го столбца. Тогда $\sigma(\mathbf{B}) < \sigma(\mathbf{A})$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{Bx} = \sigma(\mathbf{B})\mathbf{x}$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, тогда

$$\sum_{k \ne j} A(i,k)x(k) = \sigma(\mathbf{B})x(i), \; i \ne j, \tag{1.18}$$

$$\sum_{k \ne j} A(j,k)x(k) \ge 0. \tag{1.19}$$

Положим $f(i) = x(i)$ для $i \ne j$ и $f(j) = 0$. Если допустить, что в (1.19) имеет место равенство, тогда для полуположительного вектора $\mathbf{f}$ мы бы имели $\mathbf{A}f(k) = \mathbf{0}$ для всех индексов k, для которых $f(k) = 0$. Согласно теореме 1.4 это означало бы разложимость матрицы $\mathbf{A}$, что противоречит условию теоремы. Значит, в (1.19) имеет место строгое неравенство и $\mathbf{Af} > \sigma(\mathbf{B})\mathbf{f}$. Пусть $\mathbf{g}$ – положительный собственный вектор матрицы $\mathbf{A}^T$, соответствующий $\sigma(\mathbf{A})$. Тогда $\mathbf{g}^T\mathbf{f} > \mathbf{0}$ и $\sigma(\mathbf{A})\mathbf{g}^T\mathbf{f} = \mathbf{g}^T\mathbf{Af} > \sigma(\mathbf{B})\mathbf{g}^T\mathbf{f}$, т.е. $\sigma(\mathbf{A}) > \sigma(\mathbf{B})$. ■

Теорема 1.18. Максимальное собственное число неразложимой матрицы с неотрицательными внедиагональными элементами является простым.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}$ – неразложимая матрица порядка $n \geq 2$ с неотрицательными внедиагональными элементами и $\mathbf{A}_k$ получается из $\mathbf{A}$ вычеркиванием k-й строки и k-го столбца. Рассмотрим характеристический многочлен $f(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Дифференцируя его, получим

$$f'(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1) + \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2) + \ldots + \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_n). \quad (1.20)$$

Число $\sigma(\mathbf{A}_k)$ является максимальным нулем многочлена $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_k)$. В силу теоремы 1.17 $\sigma(\mathbf{A}_k) < \sigma(\mathbf{A})$. Поэтому $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_k) > 0$ при $s = \sigma(\mathbf{A})$ для всех k, и из равенства (1.20) получаем $f'(\sigma(\mathbf{A})) > 0$. Следовательно, $\sigma(\mathbf{A})$ является простым корнем характеристического уравнения. ■

Теорема 1.19. Пусть $\mathbf{Q}$ – матрица перестановок и

$$\mathbf{QAQ}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & & \ddots & & & \\ \mathbf{A}_{r+1,1} & \mathbf{A}_{r+1,2} & \cdots & \mathbf{A}_{r+1} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ \mathbf{A}_{l,1} & \mathbf{A}_{l,2} & \cdots & \mathbf{A}_{l,r+1} & \cdots & \mathbf{A}_l \end{bmatrix}$$

– нормальная форма матрицы интенсивностей переходов.

Тогда нулевое собственное число матрицы $\mathbf{A}$ имеет одинаковые геометрическую и алгебраическую кратности, равные числу r изолированных диагональных блоков.

Доказательство. Согласно следствию 1.6 из теоремы 1.16 $\sigma(\mathbf{A}) \le 0$, поэтому нулевое собственное число матрицы $\mathbf{A}$ является максимальным. По теореме 1.11 существует ровно r линейно независимых решений системы уравнений $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$. Поэтому геометрическая кратность нулевого собственного значения равна r. По теореме 1.7 матрицы $\mathbf{A}_{r+1}, \mathbf{A}_{r+2}, ..., \mathbf{A}_l$ невырождены, а по теореме 1.18 алгебраические кратности нулевого собственного числа матриц $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_r$ равны 1. Поэтому алгебраическая кратность нулевого собственного числа матрицы $\mathbf{QAQ}^T$, а значит, и матрицы $\mathbf{A}$ равна r. ■

Следствие 1.7. Нулевое собственное число консервативной матрицы интенсивностей переходов является простым, если и только если для некоторой матрицы перестановок

$$\mathbf{QAQ}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & & & \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ \mathbf{A}_{l1} & \mathbf{A}_{l2} & \cdots & \mathbf{A}_{ll} \end{bmatrix}, \qquad (1.21)$$

где $\mathbf{A}_{ii}$ – неразложимые квадратные матрицы и, если $l \ge 2$, в каждой строке

$$\mathbf{A}_{i1}, \mathbf{A}_{i2}, ..., \mathbf{A}_{ii-1},\ i = 2, 3, ..., l,$$

есть ненулевая матрица.

1.7. Обобщенные обратные матрицы

Матрица $\mathbf{A}$ называется *устойчивой*, если все ее собственные числа имеют отрицательные действительные части. Поскольку максимальное собственное число любой матрицы интенсивностей переходов неположительно, невырожденные матрицы интенсивностей переходов устойчивы.

<u>Теорема 1.20.</u> Для устойчивых матриц

$$\lim_{t \to \infty} e^{t\mathbf{A}} = 0, \tag{1.22}$$

$$\int_0^\infty e^{t\mathbf{A}} dt = -\mathbf{A}^{-1}. \tag{1.23}$$

<u>Доказательство.</u> Для существования предела $\lim_{k \to \infty} \mathbf{R}^k = 0$ необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы $\mathbf{R}$ были по модулю меньше 1. Собственными числами матрицы $e^{\mathbf{A}}$ являются числа e^{γ_k}, где γ_k – собственные числа матрицы $\mathbf{A}$. Причем $|e^{\gamma_k}| < 1$, поскольку $\operatorname{Re}\gamma_k < 0$. Обозначим $[t]$ целую часть числа t. В правой части равенства $e^{t\mathbf{A}} = e^{[t]\mathbf{A}} e^{(t-[t])\mathbf{A}}$ матрица $(e^{\mathbf{A}})^{[t]}$ при $t \to \infty$ стремится к нулевой, а все элементы матрицы $e^{(t-[t])\mathbf{A}}$ при $t \ge 0$ ограничены. Отсюда вытекает существование предела (1.22). Переходя к пределу при $t \to \infty$ в равенстве

$$\int_0^t e^{\mathbf{x}\mathbf{A}} d\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(e^{t\mathbf{A}} - I),$$

получим равенство (1.23). ■

<u>Лемма 1.1.</u> Пусть $\mathbf{f}$ – некоторый вектор длины n, матрица $\mathbf{A}$ порядка n имеет собственные числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ и числу γ_1 соответствует собственный вектор $\mathbf{g}$. Тогда матрица $\mathbf{A} + \mathbf{g}\mathbf{f}^T$ имеет собственные числа $\gamma_1 + \mathbf{f}^T\mathbf{g}, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

<u>Доказательство.</u> Действительно,

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{g}\mathbf{f}^T = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} - \frac{1}{s - \gamma_1}\mathbf{g}\mathbf{f}^T).$$

Определитель матрицы $\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{b}^T$ равен $1 + \mathbf{b}^T\mathbf{a}$ для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Поэтому характеристический многочлен матрицы $\mathbf{A}+\mathbf{g}\mathbf{f}^T$ равен

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{g}\mathbf{f}^T) = (1-\frac{1}{s-\gamma_1}\mathbf{f}^T\mathbf{g})\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) =$$

$$= \frac{s-\gamma_1-\mathbf{f}^T\mathbf{g}}{s-\gamma_1}\prod_{j=1}^{n}(s-\gamma_j) = (s-\gamma_1-\mathbf{f}^T\mathbf{g})\prod_{j=2}^{n}(s-\gamma_j). \blacksquare$$

Лемма 1.2. Пусть $\mathbf{f}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}^T$, $\mathbf{A}\mathbf{g} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{f}^T\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$, тогда для любого числа t

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{g}\mathbf{f}^T)} + \frac{1}{\mathbf{f}^T\mathbf{g}}(1-e^{t\mathbf{f}^T\mathbf{g}})\mathbf{g}\mathbf{f}^T.$$

Доказательство основано на равенствах

$$(\mathbf{A}+\mathbf{g}\mathbf{f}^T)^k = \mathbf{A}^k + (\mathbf{f}^T\mathbf{g})^{k-1}\mathbf{g}\mathbf{f}^T,\ k=1,2,...,$$

вытекающих из условия леммы 1.2. Используя эти равенства и определение матричной экспоненты

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k,$$

приходим к доказываемому тождеству. $\blacksquare$

Рассмотрим теперь консервативные матрицы интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ с простым нулевым собственном числом. Это консервативные матрицы интенсивностей переходов, которые либо неразложимы, либо имеют нормальную форму (1.21).

Пусть нулевое собственное число матрицы $\mathbf{A}$ является простым и $\gamma_1 = 0, \gamma_2, ..., \gamma_n$ – все ее собственные числа. Числа $\gamma_2, ..., \gamma_n$ имеют отрицательные действительные части, поскольку 0 является максимальным собственным числом матрицы $\mathbf{A}$. Согласно следствиям 1.3 и 1.4 теоремы 1.11 и следствию 1.7 теоремы 1.19, существует единственное решение системы уравнений равновесия

$$\mathbf{p}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}^T,\ \mathbf{p}^T\mathbf{u} = \mathbf{1}.$$

Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}+a\mathbf{u}\mathbf{p}^T$, где a – некоторое число. Из леммы 1.1 вытекает, что собственными числами этой матрицы являются числа $a, \gamma_2, ..., \gamma_n$, причем

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{A}+a\mathbf{u}\mathbf{p}^T) = a\mathbf{p}^T, \ (\mathbf{A}+a\mathbf{u}\mathbf{p}^T)\mathbf{u} = a\mathbf{u}. \quad (1.24)$$

При любом $a \neq 0$ матрица $\mathbf{A}+a\mathbf{u}\mathbf{p}^T$ невырождена. Собственными числами обратной матрицы $(\mathbf{A}+a\mathbf{u}\mathbf{p}^T)^{-1}$ являются числа $1/a, 1/\gamma_2, ..., 1/\gamma_n$, а собственными числами матриц

$$\mathbf{A}_a^{\#} = (\mathbf{A}+a\mathbf{u}\mathbf{p}^T)^{-1} - \frac{1}{a}\mathbf{u}\mathbf{p}^T, \ a \neq 0, \quad (1.25)$$

согласно равенствам (1.24) и лемме 1.1, являются числа 0, $1/\gamma_2, ..., 1/\gamma_n$.

Из леммы 1.2 вытекает справедливость следующего разложения

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{t(\mathbf{A}+a\mathbf{u}\mathbf{p}^T)} + (1-e^{ta})\mathbf{u}\mathbf{p}^T. \quad (1.26)$$

Если число a отрицательно, то все собственные числа матрицы $\mathbf{A}+a\mathbf{u}\mathbf{p}^T$ имеют отрицательные действительные части. Поэтому в разложении (1.26) первое слагаемое при $t \to \infty$ стремится к 0, а второе слагаемое – к вектору $\mathbf{u}\mathbf{p}^T$. Таким образом,

$$\lim_{t\to\infty} e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{u}\mathbf{p}^T.$$

Из разложения (1.26) и теоремы 1.20 также следует, что

$$\int_0^\infty (e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{u}\mathbf{p}^T)dt = -\mathbf{A}_a^{\#}.$$

Поскольку левая часть этого равенства не зависит от a, то и его правая часть не зависит от a. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

<u>Теорема 1.21.</u> Пусть нулевое собственное число консервативной матрицы интенсивностей переходов $\mathbf{A}$

является простым, и $\mathbf{p}$ – решение системы уравнений равновесия $\mathbf{p}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}^T$, $\mathbf{p}^T\mathbf{u}=\mathbf{1}$. Тогда

$$\lim_{t\to\infty} e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{up}^T, \qquad (1.27)$$

$$\int_0^\infty (e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{up}^T)dt = -\mathbf{A}^\#, \qquad (1.28)$$

где

$$\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A} + a\mathbf{up}^T)^{-1} - \frac{1}{a}\mathbf{up}^T,\ a \neq 0, \qquad (1.29)$$

не зависит от a.

Из равенства (1.24) следует, что

$$\mathbf{p}^T\mathbf{A}^\# = \mathbf{0}^T,\ \mathbf{A}^\#\mathbf{u} = \mathbf{0}. \qquad (1.30)$$

Кроме того, из (1.24) и равенства

$$(\mathbf{A} + a\mathbf{up}^T)(\mathbf{A} + a\mathbf{up}^T)^{-1} = (\mathbf{A} + a\mathbf{up}^T)^{-1}(\mathbf{A} + a\mathbf{up}^T) = \mathbf{I}$$

вытекают следующие свойства матрицы $\mathbf{A}^\#$:

$$\begin{aligned} \mathbf{AA}^\# &= \mathbf{I} - a\mathbf{up}^T(\mathbf{A} + a\mathbf{up}^T)^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{up}^T, \\ \mathbf{A}^\#\mathbf{A} &= \mathbf{I} - a(\mathbf{A} + a\mathbf{up}^T)^{-1}\mathbf{up}^T = \mathbf{I} - \mathbf{up}^T. \end{aligned} \qquad (1.31)$$

Теорема 1.22. Пусть нулевое собственное число консервативной матрицы интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ является простым. Тогда система линейных уравнений $\mathbf{x}^T\mathbf{A}=\mathbf{b}^T$ имеет решение, если и только если $\mathbf{b}^T\mathbf{u}=\mathbf{0}$. При этом $\mathbf{x}^T=\mathbf{b}^T\mathbf{A}^\#$ является единственным решением, удовлетворяющим условию $\mathbf{x}^T\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

Доказательство. Если решение системы уравнений $\mathbf{x}^T\mathbf{A}=\mathbf{b}^T$ существует, то $\mathbf{b}^T\mathbf{u}=\mathbf{x}^T\mathbf{Au}=\mathbf{0}$.

Пусть $\mathbf{b}^T\mathbf{u}=\mathbf{0}$, тогда, учитывая равенства (1.30) и (1.31), имеем $\mathbf{b}^T\mathbf{A}^\#\mathbf{u}=\mathbf{0}$ и $\mathbf{b}^T\mathbf{A}^\#\mathbf{A}=\mathbf{b}^T(\mathbf{I}-\mathbf{up}^T)=\mathbf{b}^T$. Таким образом, вектор $\mathbf{x}^T=\mathbf{b}^T\mathbf{A}^\#$ является решением системы линейных уравнений $\mathbf{x}^T\mathbf{A}=\mathbf{b}^T$, $\mathbf{x}^T\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

Если $\mathbf{y}^T\mathbf{A} = \mathbf{b}^T$ и $\mathbf{y}^T\mathbf{u} = \mathbf{0}$, тогда $\mathbf{y}^T(\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{p}^T) = \mathbf{b}^T$ и, значит $\mathbf{y}^T = \mathbf{b}^T(\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{p}^T)^{-1} = \mathbf{b}^T[(\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{p}^T)^{-1} - \mathbf{u}\mathbf{p}^T] = \mathbf{b}^T\mathbf{A}^{\#}$. ■

Заметим, что общее решение системы уравнений $\mathbf{x}^T\mathbf{A} = \mathbf{b}^T$ в условиях теоремы 1.22 имеет вид $\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T\mathbf{A}^{\#} + c\mathbf{p}^T$, где c – некоторая константа и $\mathbf{p}$ – единственное решение системы уравнений равновесия $\mathbf{p}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}^T$, $\mathbf{p}^T\mathbf{u} = \mathbf{1}$.

Из равенств (1.30) и (1.31) следует, что матрица $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\#}$ удовлетворяет матричным уравнениям

$$\mathbf{AXA} = \mathbf{A},\ \mathbf{XAX} = \mathbf{X},\ \mathbf{AX} = \mathbf{XA}. \qquad (1.32)$$

Для любой матрицы $\mathbf{A}$ решение $\mathbf{X}$ этой системы матричных уравнений, если оно существует, является единственным и называется групповой обобщенной обратной матрицей для $\mathbf{A}$. Как мы видели, консервативные матрицы интенсивностей переходов, для которых нулевое собственное число является простым, имеет групповую обобщенную обратную $\mathbf{A}^{\#}$. Можно показать, что ее имеет любая консервативная матрица интенсивностей переходов. Интересующихся этой матрицей рекомендуем обратиться к работам [15] и [22].

Другой широко используемой обобщенной обратной матрицей является обобщенная обратная Мура–Пенроуза $\mathbf{A}^{+}$, которая существует для любой матрицы $\mathbf{A}$ и является единственным решением другой системы матричных уравнений:

$$\mathbf{AXA} = \mathbf{A},\ \mathbf{XAX} = \mathbf{X},\ (\mathbf{AX})^T = \mathbf{AX},\ (\mathbf{XA})^T = \mathbf{XA}. \qquad (1.33)$$

Обобщенная обратная Мура–Пенроуза обладает следующим свойством: для любого вектора $\mathbf{b}$ вектор $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b}$ является вектором с минимальной нормой среди всех векторов, минимизирующих ошибку $\sum_{i=1}^{n}(b(i) - \mathbf{A}x(i))^2$ [7, 13]. Заметим, что $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$ и $(\mathbf{A}^T)^+ = (\mathbf{A}^+)^T$.

Следуя работе [25], найдем матрицу $\mathbf{A}^+$ для консервативных матриц интенсивностей переходов с простым нулевым собственным числом.

Лемма 1.3. Пусть $\overline{\mathbf{A}}$ – присоединенная матрица для матрицы $\mathbf{A}$ порядка n и $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ – некоторые векторы длины n. Тогда

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{f}\mathbf{g}^T) = \det(\mathbf{A}) + \mathbf{g}^T \overline{\mathbf{A}}\mathbf{f} . \qquad (1.34)$$

Доказательство. Поскольку $\det(\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{b}^T) = 1 + \mathbf{b}^T\mathbf{a}$ и $\mathbf{B}^{-1} = \det(\mathbf{B})^{-1}\overline{\mathbf{B}}$, из равенства

$$\mathbf{A} + \mathbf{f}\mathbf{g}^T - s\mathbf{I} = (\mathbf{A} - s\mathbf{I})[\mathbf{I} + (\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{f}\mathbf{g}^T]$$

вытекает, что

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{f}\mathbf{g}^T - s\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - s\mathbf{I})(1 + \mathbf{g}^T(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{f}) =$$
$$= \det(\mathbf{A} - s\mathbf{I}) + \mathbf{g}^T\overline{(\mathbf{A} - s\mathbf{I})}\mathbf{f}.$$

Устремляя в полученном равенстве s к нулю, получим равенство (1.34). ■

Теорема 1.23. Пусть нулевое собственное число консервативной матрицы интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ является простым, и $\mathbf{p}$ – решение системы уравнений равновесия $\mathbf{p}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}^T$, $\mathbf{p}^T\mathbf{u} = \mathbf{1}$. Тогда обобщенной обратной Мура–Пенроуза для $\mathbf{A}$ является матрица

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A} + \alpha\mathbf{p}\mathbf{u}^T)^{-1} - \alpha\mathbf{u}\mathbf{p}^T, \ \alpha = \frac{1}{\sqrt{n\mathbf{p}^T\mathbf{p}}} . \qquad (1.35)$$

Доказательство. Из равенств $\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I} = \mathbf{0}$ вытекает, что каждый столбец присоединенной матрицы $\overline{\mathbf{A}}$ пропорционален вектору $\mathbf{u}$, а каждая ее строка пропорциональна вектору $\mathbf{p}$, т.е. $\overline{\mathbf{A}} = k\mathbf{u}\mathbf{p}^T$, где k – некоторая константа. Нетрудно видеть, что матрица, получаемая вычеркиванием первой строки и первого столбца у матрицы (1.21), невырождена и, значит, $k \neq 0$. Согласно лемме 1.3 имеем:

$$\det(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{p}\mathbf{u}^T) = \alpha \mathbf{u}^T \overline{\mathbf{A}}\mathbf{p} = \frac{k}{\alpha} \neq 0.$$

Поэтому матрица $\mathbf{A} + \alpha \mathbf{p}\mathbf{u}^T$ невырождена. Обозначим

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{p}\mathbf{u}^T)^{-1} - \alpha \mathbf{u}\mathbf{p}^T .$$

Из равенств

$$\mathbf{p}^T (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{p}\mathbf{u}^T) = \alpha (\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{u}^T , \quad (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{p}\mathbf{u}^T)\mathbf{u} = \alpha n \mathbf{p}$$

вытекает, что

$$\mathbf{u}^T (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{p}\mathbf{u}^T)^{-1} = \frac{1}{\alpha (\mathbf{p}^T \mathbf{p})} \mathbf{p}^T , \quad (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{p}\mathbf{u}^T)\mathbf{p} = \frac{1}{n\alpha} \mathbf{u} .$$

Поэтому $\mathbf{u}^T \mathbf{X} = \mathbf{0}^T$ и $\mathbf{X}\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Отсюда, с учетом равенств

$$(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{p}\mathbf{u}^T)(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{p}\mathbf{u}^T)^{-1} = (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{p}\mathbf{u}^T)^{-1}(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{p}\mathbf{u}^T) = \mathbf{I} ,$$

получаем

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I} - \alpha \mathbf{p}\mathbf{u}^T (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{p}\mathbf{u}^T)^{-1} = \mathbf{I} - \frac{1}{(\mathbf{p}^T \mathbf{p})} \mathbf{p}\mathbf{p}^T , \qquad (1.36)$$

$$\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{I} - \alpha (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{p}\mathbf{u}^T)^{-1} \mathbf{p}\mathbf{u}^T = \mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{u}\mathbf{u}^T . \qquad (1.37)$$

Таким образом, матрицы $\mathbf{AX}$ и $\mathbf{XA}$ симметричные. Умножая обе части равенства (1.36) справа на $\mathbf{A}$ и обе части равенства (1.37) справа на $\mathbf{X}$, получим соответственно $\mathbf{AXA} = \mathbf{A}$ и $\mathbf{XAX} = \mathbf{X}$. ■

Обратим внимание на перемену мест для векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{u}$ внутри скобок в формулах (1.29) и (1.35).

2. Мультипликативное решение для модели мультисервисной сети с одноадресными соединениями

В этой главе, следуя [33], кратко излагается подход к анализу модели цепи Маркова (ЦМ) мультисервисной сети с потерями (англ. loss network), известной по работам Фрэнка Келли [30, 31] и Кейта Росса [32]. В первом разделе главы в виде многомерной ЦМ построена модель мультисервисной сети, в явном мультипликативном виде получены стационарное распределение, а также выражения для вероятностей блокировки установления соединений. Во втором разделе изложены методы анализа модели отдельного звена сети, функционирование которой описывается мультисервисной моделью Эрланга с явными потерями [4], и приведен алгоритм типа Кауфмана–Робертса [4, 29, 38].

2.1. Построение модели и стационарное распределение

2.1.1. Постановка задачи

Будем рассматривать сеть произвольной топологии, состоящую из некоторого числа узлов, соединенных звеньями. Пусть L – общее число звеньев сети, а $\mathscr{L} = \{1, 2, \ldots, L\}$ – множество всех звеньев, занумерованных произвольным образом. Обозначим C_l емкость l-звена. Емкость соответствует пропускной способности звена, выраженной в условных единицах измерения (единицах емкости). При вычислениях величина единицы емкости выбирается в зависимости от требований соединений к ширине полосы пропускания (ШПП). Бывает удобно выбрать в качестве этой единицы наименьшее из таких требований. Например, если принять за единицу емкости 8 кбит/с, то емкость звена сети с пропускной способностью

622 Мбит/с составит 77750 условных единиц.

Для передачи информационных потоков между узлами сети могут быть установлены двухточечные соединения различных классов. Каждый класс соединений характеризуется двумя параметрами: маршрутом, то есть множеством звеньев сети, через которые устанавливается соединение, и требованием к емкости, которую необходимо выделить соединению на каждом звене соответствующего маршрута. Обозначим $\mathscr{K} = \{1, 2, ..., K\}$ множество всех классов соединений, и пусть $\mathscr{L}_k \subseteq \mathscr{L}$ – маршрут, а d_k – требование к емкости, выделяемой на каждом звене маршрута для соединения *k*-класса.

Заметим, что рассматриваемая модель является наиболее естественным с точки зрения приложений частным случаем базовой модели мультисервисной сети с фиксированной маршрутизацией, которую использовал в своих работах Ф. Келли [30, 31]. Базовая модель мультисервисной сети в этих работах отличается от рассматриваемой в данной книге модели лишь тем, что требования соединений к емкости звеньев задаются матрицей $\left(d_{kl}\right)_{k\in\mathscr{K}, l\in\mathscr{L}}$, и, следовательно, число занятых одним соединением единиц емкости может различаться на разных звеньях маршрута.

На рисунке 2.1 в качестве примера показан фрагмент сети, состоящий из трех звеньев – 1-го, 2-го и 3-го, имеющих емкость 30, 35 и 40 условных единиц соответственно, т.е. $\mathscr{L} = \{1, 2, 3\}$, $C_1 = 30$, $C_2 = 35$ и $C_3 = 40$. Между любыми двумя узлами могут быть установлены соединения, требующие выделения на каждом звене соответствующего маршрута 1 или 5 условных единиц емкости. Таким образом, мы получаем 6 классов соединений, т.е. $\mathscr{K} = \{1, 2, ..., 6\}$, параметры которых указаны на рисунке. Например, соединения класса 1 устанавливаются через звенья 1 и 2 и занимают 1 единицу емкости звена, т.е. $\mathscr{L}_1 = \{1,2\}$ и $d_1 = 1$.

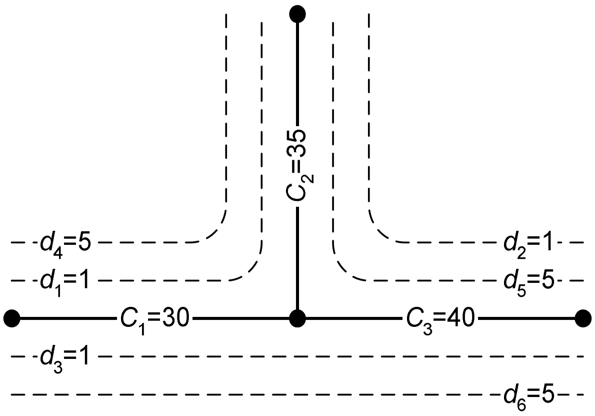


Рис. 2.1. Пример мультисервисной сети с одноадресными соединениями

Введем теперь нагрузочные параметры модели. Пусть в систему поступают запросы пользователей на установление соединения того или иного класса. Будем считать, что запросы на установление соединения k-класса образуют пуассоновский поток интенсивности ν_k, а продолжительности таких соединений независимы в совокупности, не зависят от моментов установления соединения и одинаково распределены по произвольному закону со средним $1/\kappa_k$. Обозначим через $a_k = \nu_k / \kappa_k$ интенсивность предложенной нагрузки, чтобы упростить дальнейшие выкладки.

По запросу пользователя будет установлено соединение требуемого класса, если на момент прихода запроса на всех звеньях соответствующего маршрута окажется необходимое число свободных единиц емкости звена. В этом случае требуемое число единиц ресурса предоставляется данному соединению до его разъединения. Если же хотя бы на одном из звеньев маршрута не окажется требуемого числа свободных единиц ресурса, произойдет блокировка и запрос буде потерян. Обратимся вновь к рис. 2.1: если, например, в момент поступления запроса на установление соединения класса 4 ($d_4 = 5$, $\mathscr{L}_4 = \{1, 2\}$) в сети имеется пять активных соединений класса 6 ($d_6 = 5$, $\mathscr{L}_6 = \{1, 3\}$) и одно соединение класса 1 ($d_1 = 1$, $\mathscr{L}_1 = \{1, 2\}$), запрос будет заблокирован, так как на звене 1 ($C_1 = 30$) окажутся свободными лишь 4 единицы емкости (30 – 5×5 – 1×1 = 4), что меньше требуемых пяти.

2.1.2. Стационарное распределение цепи Маркова

Пусть емкости всех звеньев сети неограниченны: $C_l = \infty$, $l \in \mathscr{L}$. В этом случае запрос пользователя на установление соединения любого класса принимается на обслуживание и потерь не происходит. Обозначим через $\tilde{N}_k(t)$ число установленных в момент t соединений k-класса. Тогда состояние системы можно описать с помощью многомерного случайного процесса

$$\left\{\tilde{\mathbf{N}}(t) = (\tilde{N}_1(t), \tilde{N}_2(t), ..., \tilde{N}_K(t)),\ t \ge 0\right\},$$

каждая компонента которого соответствует одному классу соединений. Поскольку емкости звеньев неограниченны, то множество состояний случайного процесса $\left\{\tilde{\mathbf{N}}(t),\ t \ge 0\right\}$ имеет вид $\tilde{\mathscr{N}} = \{0,1,2,...\}^K$. Легко видеть, что ЦМ $\left\{\tilde{N}_k(t), t \ge 0\right\}$ является процессом размножения и гибели (ПРГ) со стационарным распределением

$$p_k(n_k) = \mathrm{P}\{\tilde{N}_k(t) = n_k\} = \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}\mathrm{e}^{-a_k},\ n_k \in \{0,1,2,...\}.$$

Поскольку, в силу неограниченной емкости звеньев, компоненты составного случайного процесса $\left\{\tilde{\mathbf{N}}(t),\ t\ge 0\right\}$ независимы, он является обратимой ЦМ (ОЦМ) и имеет стационарное распределение мультипликативного вида:

$$\tilde{\pi}(\mathbf{n}) = \mathrm{P}\{\tilde{\mathbf{N}}(t)=\mathbf{n}\} = \prod_{k\in\mathscr{K}} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}\mathrm{e}^{-a_k},\ \ \mathbf{n}\in\tilde{\mathscr{N}}.$$

Пусть емкости звеньев снова ограничены: $C_l<\infty$, $l\in\mathscr{L}$. Введем множество $\mathscr{K}^l=\{k\in\mathscr{K}: l\in\mathscr{L}_k\}$ классов соединений, маршруты которых проходят через l-звено, и функцию

$$d_l(\mathbf{n}) = \sum_{k\in\mathscr{K}^l} d_k n_k\ , \tag{2.1}$$

соответствующую числу единиц емкости, занятых на l-звене, когда система находится в состоянии $\mathbf{n}\in\tilde{\mathscr{N}}$. Теперь пространство состояний системы (с ограниченными звеньями) можно представить в виде

$$\mathscr{N} = \{\mathbf{n}\in\tilde{\mathscr{N}} : d_l(\mathbf{n})\le C_l,\ l\in\mathscr{L}\}. \tag{2.2}$$

Обозначим $\{\mathbf{N}(t),\ t\ge 0\}$ сужение ОМЦ $\{\tilde{\mathbf{N}}(t),\ t\ge 0\}$ на множество состояний $\mathscr{N}\subset\tilde{\mathscr{N}}$. Из известных свойств обратимости ЦМ (см., например [33]) вытекает утверждение следующей теоремы.

Теорема 2.1. Марковская цепь $\{\mathbf{N}(t),\ t\ge 0\}$ является ОЦМ, и ее стационарное распределение имеет мультипликативный вид:

$$\pi(\mathbf{n}) = \frac{1}{G(\mathscr{N})}\prod_{k\in\mathscr{K}} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!},\ \ \mathbf{n}\in\mathscr{N}, \tag{2.3}$$

где $G(\mathscr{N})$ – нормировочная константа:

$$G(\mathscr{N}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathscr{N}}\prod_{k\in\mathscr{K}} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}. \tag{2.4}$$

Опираясь на формулы (2.3) и (2.4), можно выписать выражения для многих важных характеристик модели, в том числе для вероятности блокировки установления соединения.

2.1.3. Вероятности блокировок установления соединений

Если при поступлении запроса пользователя на звеньях сети недостаточно ресурсов для установления соединения, происходит блокировка запроса. Пусть B_k – стационарная вероятность блокировки запроса на установление соединения k-класса. Вычислить эту величину можно с помощью распределения (2.3) по формуле

$$B_k = \sum_{\mathbf{n} \in \mathscr{B}_k} \pi(\mathbf{n}), \quad k \in \mathscr{K}. \qquad (2.5)$$

Здесь $\mathscr{B}_k$ – множество таких состояний, когда происходит блокировка запросов на установление соединения k-класса, т.е. когда хотя бы на одном из звеньев маршрута соединения k-класса недостаточно свободных ресурсов для его установления:

$$\mathscr{B}_k = \left\{ \mathbf{n} \in \mathscr{N} : \exists l \in \mathscr{L}_k : d_l(\mathbf{n}) > C_l - d_k \right\}, \; k \in \mathscr{K}. \qquad (2.6)$$

Дополнением подпространства $\mathscr{B}_k$ блокировки запроса на установление соединения k-класса до пространства состояний $\mathscr{N}$ является подпространство приема запроса

$$\overline{\mathscr{B}}_k = \{ \mathbf{n} \in \mathscr{N} : d_l(\mathbf{n}) + d_k \le C_l, \, l \in \mathscr{L}_k \},$$

объединяющее состояния, в которых запрос на установление соединений k-класса будет принят. Очевидно, что вероятность приема $\overline{B}_k = \mathrm{P}\{ \mathbf{n} \in \overline{\mathscr{B}}_k \} = 1 - B_k$.

Вернемся к модели на рис. 2.1 и рассмотрим, например, состояние $\mathbf{n} = (4,3,1,2,3,3)$. В этом состоянии $d_1(\mathbf{n}) = 30$, $d_2(\mathbf{n}) = 32$ и $d_3(\mathbf{n}) = 34$. Следовательно, оно является состоянием блокировки для соединений всех классов, кроме 2-го, так как на звене 1 свободных ресурсов нет, а на звене 2 свободно только 3 единицы емкости. Для класса 2 состояние $\mathbf{n}$ является состоянием приема. Далее, анализируя, например, множество $\mathscr{B}_1$ блокировок класса 1, заметим, что оно включает все состояния из $\mathscr{N}$, в которых на звене 1 занято 30 единиц емкости или на звене 2 занято 35 единиц емкости. Таким образом, помимо состояния $\mathbf{n}$ в $\mathscr{B}_1$ войдут состояния $(2,8,1,2,3,3)$, $(0,0,0,0,0,6)$ и другие.

Если принять во внимание рост количества возможных состояний модели при увеличении емкости звеньев, а также то, что с увеличением количества звеньев число возможных маршрутов может вырасти экспоненциально, становится ясно, что метод нахождения вероятностей блокировок непосредственно по формулам (2.3)–(2.5) применим лишь для простейших случаев. Более того, для сети произвольной топологии вычисление нормировочной константы $G(\mathscr{N})$ по формуле (2.4) относится к NP-полным проблемам, что означает отсутствие эффективных комбинаторных алгоритмов. Поэтому много внимания уделялось и уделяется разработке приближенных методов вычисления вероятностных характеристик модели, которые можно было бы использовать для анализа широкого класса моделей. Приближенным методам расчета сетей рассматриваемого типа посвящена глава 5 книги [33], а здесь мы приводим одну из основных составляющих приближенных методов, относящихся к так называемым «методам просеянной нагрузки» – рекурсивный алгоритм для вычисления вероятностей блокировок на отдельном звене сети.

2.2. Модель отдельного звена сети

Частным случаем рассмотренной в предыдущем разделе модели является модель отдельного звена сети. В данном разделе мы покажем, как применить построенную выше модель к анализу модели отдельного звена с одноадресными соединениями и приведем известный алгоритм Кауфмана – Робертса для вычисления вероятностных характеристик модели.

2.2.1. Построение модели

Пусть все звенья сети, кроме звена l^*, имеют неограниченную емкость. Тогда задача анализа блокировок сводится к рассмотрению системы, состоящей из одного звена l^* емкости C_{l^*}, и множества классов соединений $\mathcal{K}^{l^*}$, маршруты которых ограничены одним звеном: $\mathcal{L}_k = \{l^*\}$, $k \in \mathcal{K}^{l^*}$. Далее для краткости индекс l^* будем опускать: $C = C_{l^*}$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{l^*}$. Напомним, что каждый класс соединений характеризуется требованием к емкости d_k, а также интенсивностью предложенной нагрузки $a_k = \nu_k / \kappa_k$. Функционирование такой системы описывает построенную в разделе 2.1.2 ЦМ $\{\mathbf{N}(t),\ t \geq 0\}$ с пространством состояний

$$\mathcal{N} = \{\mathbf{n} \in \tilde{\mathcal{N}} : d(\mathbf{n}) \leq C\}. \qquad (2.7)$$

Для этой ЦМ верна теорема 2.1, и, следовательно, ее стационарное распределение выражается формулами (2.3) и (2.4).

Опираясь на формулы (2.3) и (2.4), выпишем выражения для основных вероятностных характеристик модели. Стационарную вероятность блокировки запроса на установление соединения k-класса можно получить по формуле (2.5), при этом соответствующее пространство блокировок имеет вид

$$\mathcal{B}_k = \left\{\mathbf{n} \in \mathcal{N} : d(\mathbf{n}) > C - d_k\right\},\ k \in \mathcal{K}. \qquad (2.8)$$

Важным показателем производительности системы является коэффициент использования звена. Для его вычисления нам потребуется среднее число занятых единиц емкости, которое можно получить по формуле

$$\bar{d} = \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}} d(\mathbf{n})\pi(\mathbf{n}). \qquad (2.9)$$

Теперь выражение для коэффициента использования звена имеет вид

$$U = \frac{\bar{d}}{C}. \qquad (2.10)$$

Таким образом, мы показали, как более общая модель мультисервисной сети применима к анализу модели отдельного звена сети. Полученная система представляет собой известную в теории телетрафика модель простого стохастического ранца, или мультисервисную модель Эрланга с потерями.

2.2.2. Алгоритм Кауфмана – Робертса

Для эффективного вычисления точных значений вероятностей блокировок и коэффициента использования звена в модели звена сети с одноадресными соединениями применим метод Кауфмана – Робертса. Данный метод основан на разбиении пространства состояний модели по числу занятых единиц емкости:

$$\mathcal{C}(n) = \{\mathbf{n}\in\mathcal{N} : d(\mathbf{n}) = n\},\ n = 0,\ldots,C, \qquad (2.11)$$

$$\mathcal{N} = \bigcup_{n=0}^{C}\mathcal{C}(n);\ \mathcal{C}(i)\cap\mathcal{C}(i) = \varnothing,\ i\neq j.$$

Оказывается, что распределение вероятностей числа занятых единиц емкости звена

$$P(n) = \mathrm{P}\{\mathcal{C}(n)\} = \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{C}(n)} \pi(\mathbf{n}) \qquad (2.12)$$

связаны между собой рекуррентным соотношением

$$nP(n) = \sum_{k=1}^{K} d_k a_k P(n - d_k),\ n = 0, \dots, C. \tag{2.13}$$

Данные соотношения позволяют построить простой и эффективный алгоритм расчета искомых характеристик. Введем функцию

$$h(n) = \begin{cases} 0,\ n < 0; \\ 1,\ n = 0; \\ \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{K} d_k a_k h(n - d_k),\ n = 1, \dots, C. \end{cases} \tag{2.14}$$

Предложение 2.1. Значение нормирующей константы (2.4) стационарного распределения вероятностей состояний отдельного звена сети можно получить по формуле

$$G(\mathcal{N}) = \sum_{n=0}^{C} h(n). \tag{2.15}$$

Предложение 2.2. Вероятность блокировки установления соединения k-класса вычисляется по формуле

$$B_k = \frac{\sum\limits_{n=C-d_k+1}^{C} h(n)}{G(\mathcal{N})},\ k \in \mathcal{K}. \tag{2.16}$$

Предложение 2.3. Среднее число занятых единиц емкости звена вычисляется по формуле

$$\bar{d} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{C} n \cdot h(n)}{G(\mathcal{N})}. \tag{2.17}$$

Добавим, что временная сложность вычисления нормирующей константы данным методом при рекурсивном расчете функции (2.14) имеет порядок $O(CK^C)$. Если не использовать рекурсию и последовательно вычислять промежуточные значения функции (2.14), записывая их в память, то порядок временной сложности алгоритма составит $O(CK)$, и, следовательно, время вычисления характеристик будет увеличиваться линейно с ростом емкости звена.

3. Мультипликативное решение для модели мультисервисной сети с многоадресными соединениями

В этой главе в соответствии с [35] построена в виде ЦМ модель мультисервисной сети с многоадресной передачей данных – сети мультивещания. Применение принципа «точка-много точек» при установлении соединений позволяет эффективно использовать ресурсы сети, в отличие от режима одноадресных соединений, устанавливаемых по принципу «точка-точка», когда по общим для нескольких соединений звеньям сети передается несколько копий одних и тех же данных [34]. При мультивещании пользователи совместно используют пропускную способность некоторых звеньев сети, поскольку дублирования данных не происходит.

Данная глава имеет ту же структуру, что и предыдущая, вторая, глава. В первом разделе построена в виде многомерной ЦМ модель сети мультивещания и в мультипликативном виде получено ее стационарное распределение. Второй раздел посвящен анализу модели отдельного звена сети и ее вероятностных характеристик, а также в нем получен рекуррентный алгоритм для вычислений.

3.1. Модель сети мультивещания

3.1.1. Определения и обозначения

Будем рассматривать сеть мультивещания с несколькими источниками данных, которые, как и пользователи, могут быть подключены к любому узлу сети. Каждый источник предоставляет конечное число услуг и по запросам передает данные пользователям. В рассматриваемой сети соединения имеют вид дерева с корнем в узле подключения источника и с листевыми вершинами, соответствующими узлам подключения пользователей. Такое дерево называют деревом мультивещания.

Рассматриваемая далее модель сети была предложена в [35], и именно такой подход к моделированию многоадресной передачи использован в четвертой главе при построении модели сети с одноадресными и многоадресными соединениями.

Последовательность звеньев сети от пользователя до источника будем называть физическим путем. Введем обозначения:

$\mathscr{L} = \{1,...,L\}$ – множество звеньев сети;

$\mathscr{S} = \{1,...,S\}$ – множество источников информации;

$\mathscr{P}_s = \{1,...,P_s\}$ – множество физических путей к источнику $s \in \mathscr{S}$;

$\mathscr{M}_s = \{1,...,M_s\}$ – множество услуг, предоставляемых источником $s \in \mathscr{S}$;

$\mathscr{L}_{ps} \subseteq \mathscr{L}$ – множество всех звеньев физического пути $p \in \mathscr{P}_s$ к источнику $s \in \mathscr{S}$;

$\mathscr{S}^l = \{s \in \mathscr{S} : \mathscr{P}_s^l \neq \varnothing\}$ – множество источников, предоставляющих услуги через звено $l \in \mathscr{L}$;

$\mathscr{P}_s^l = \{p \in \mathscr{P}_s : l \in \mathscr{L}_{ps}\}$ – множество физических путей к источнику $s \in \mathscr{S}^l$, проходящих через звено $l \in \mathscr{L}$;

b_{ms} – число единиц емкости звена, требуемое для предоставления услуги $m \in \mathscr{M}_s$;

C_l – емкость звена $l \in \mathscr{L}$.

Рассмотрим пример сети мультивещания, изображенной на рис. 3.1. Сеть состоит из пяти звеньев, т.е. $\mathscr{L} = \{1,...,5\}$. В ней имеются два источника, $\mathscr{S} = \{1,2\}$. К первому ведут физические пути от каждого из четырех пользователей, т.е.

$\mathscr{P}_1 = \{1, ..., 4\}$, при этом $\mathscr{L}_{11} = \{2,1\}$, $\mathscr{L}_{21} = \{3,1\}$, $\mathscr{L}_{31} = \{4,3,1\}$ и $\mathscr{L}_{41} = \{5,3,1\}$ (рис. 3.2, а).

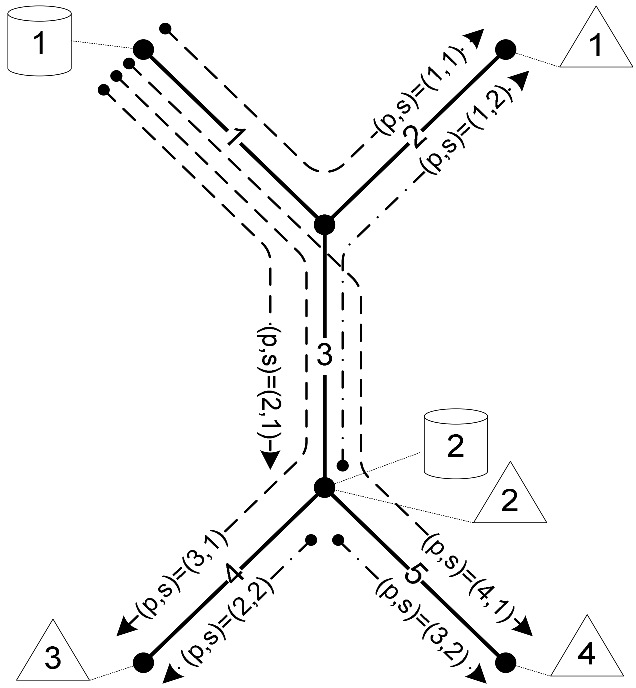
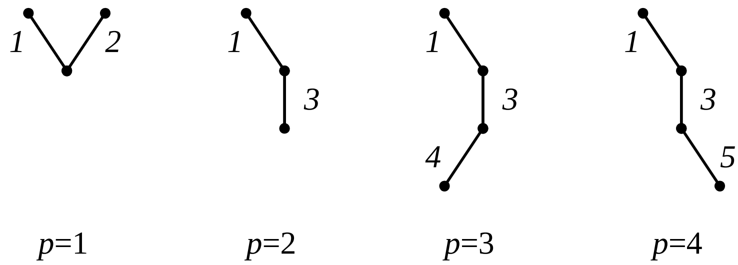
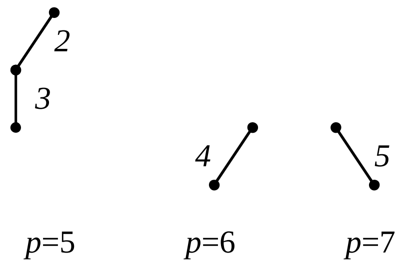


Рис. 3.1. Пример сети мультивещания

Ко второму источнику имеются три пути, так как можно считать, что пользователь 2 подсоединен ко второму источнику напрямую, а не через звенья рассматриваемой сети, т.е. $\mathscr{P}_2 = \{1, 2, 3\}$ и $\mathscr{L}_{12} = \{2,3\}$, $\mathscr{L}_{22} = \{4\}$, $\mathscr{L}_{32} = \{5\}$ (рис. 3.2, б). Наконец, если рассматривать, например, третье звено, то через него проходят два физических пути к первому источнику от третьего и четвертого пользователей $\mathscr{P}_1^3 = \{3, 4\}$ и один физический путь – ко второму источнику $\mathscr{P}_2^3 = \{1\}$.



а) к 1-источнику



б) к 2-источнику

Рис. 3.2. Физические пути в сети на рис. 3.1

Деревья мультивещания от каждого из источников показаны на рис. 3.3.

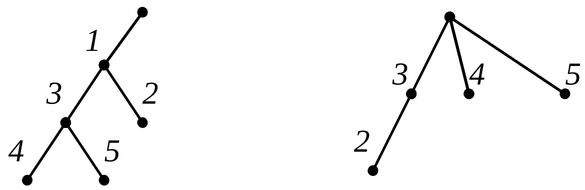


Рис. 3.3. Примеры деревьев мультивещания

Пару (m, s), $m \in \mathcal{M}_s$, $s \in \mathcal{S}$ будем называть (m, s)-услугой. Пусть для предоставления (m, s)-услуги требуется выделение b_{ms} единиц емкости на каждом звене пути $p \in \mathscr{P}_s$. Тройку (m, p, s), $m \in \mathscr{M}_s$, $p \in \mathscr{P}_s$, $s \in \mathscr{S}$ будем называть логическим путем или (m, p, s)-путем. Состояние логического пути обозначим x_{mps}, при этом пусть $x_{mps} = 1$, когда (m, s)-услуга предоставляется пользователю, которого связывает с источником s физический путь p; в противном случае $x_{mps} = 0$. Теперь состояние всех логических путей сети можно описать набором матриц $\mathbf{x} = (\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_s, ..., \mathbf{X}_S)$, где матрица

$$\mathbf{X}_s = \begin{pmatrix} x_{11s} & \dots & x_{1P_s s} \\ \dots & & \dots \\ x_{M_s 1s} & \dots & x_{M_s P_s s} \end{pmatrix}$$

определяет детальное состояние всех логических путей к источнику $s \in \mathscr{S}$. Множество всех возможных матриц такого вида обозначим $\tilde{\mathscr{X}} = \{0,1\}^{\sum_{s \in \mathscr{S}} M_s P_s}$.

3.1.2. Пространство состояний и стационарное распределение цепи Маркова

Определим для каждого звена $l \in \mathscr{L}$, источника $s \in \mathscr{S}^l$ и состояния сети $\mathbf{x} \in \tilde{\mathscr{X}}$ функцию $y_{ms}^l(\boldsymbol{x}) = u\left(\sum_{p \in \mathscr{P}_s^l} x_{mps}\right)$, соответствующую состоянию (m, s)-услуги на l-звене. Здесь $u(a) = \begin{cases} 1, & a > 0; \\ 0, & a \le 0 \end{cases}$ − функция Хевисайда.

Обозначим $\mathbf{y}^l(\mathbf{x}) = \left(y_{ms}^l(\mathbf{x})\right)_{m \in \mathscr{M}_s, s \in \mathscr{S}^l}$ состояние услуг на l-звене, когда логические пути сети находятся в состоянии $\mathbf{x} \in \tilde{\mathscr{X}}$. Для $l \in \mathscr{L}$ введем величину

$$c_l(\mathbf{x}) = \sum_{s \in \mathcal{S}^l} \sum_{m \in \mathcal{M}_s} b_{ms} y_{ms}^l(\mathbf{x}), \ \ \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}\,, \tag{3.1}$$

задающую количество занятых единиц емкости l-звена, если сеть находится в состоянии $\mathbf{x}$. Тогда пространство состояний логических путей сети можно выразить следующим образом:

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} : c_l(\mathbf{x}) \le C_l, \ \ l \in \mathcal{L}\}\,. \tag{3.2}$$

Построение математической модели сети будем проводить в предположении о независимости функционирования физических путей, и начнем с описания поведения логического пути при введенных ниже предположениях. На рис. 3.4 изображена схема функционирования (m, p, s)-пути, на которой показаны его «жизненные циклы», состоящие из двух периодов: (m, p, s)-путь включен ($x_{mps} = 1$) и (m, p, s)-путь выключен ($x_{mps} = 0$).

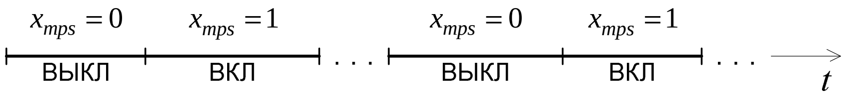


Рис. 3.4. Схема функционирования логического пути

Будем рассматривать систему в простейших предположениях о поведении логического пути. Пусть все логические пути функционируют независимо друг от друга, поток запросов на установление (m, p, s)-пути является пуассоновским с параметром λ_{mps}, а время предоставления услуги (время занятия (m, p, s)-пути) является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с параметром μ_{mps}. Поведение (m, p, s)-пути опишем в терминах СМО $\mathrm{M}_{\lambda_{mps}} | \mathrm{M}_{\mu_{mps}} | 1 | 0$ с «прозрачными заявками» [40]. В этой СМО заявка (запрос пользователя), поступившая на периоде простоя прибора (период, когда логический путь выключен), занимает прибор и обслуживается в течение некоторого случайного интервала времени (период, когда логический путь включен). Все последующие заявки, поступившие в СМО на этом интервале времени, не теряются и не становятся в очередь на обслуживание, а получают его вместе с заявкой, которая инициировала период занятости прибора, и покидают систему вместе с ней.

Пусть $\xi_{mps}(t)$ – число заявок в СМО в момент времени $t \geq 0$. Процесс $\xi_{mps}(t)$ ЦМ, у которой при любых значениях $\lambda_{mps} > 0$ и $\mu_{mps} > 0$ существует стационарное распределение

$$p_n = \mathrm{P}\left\{\xi_{mps}(t) = n\right\},\ n \geq 0,$$

вида

$$p_n = \frac{1}{1+\rho_{mps}} \left(\frac{\rho_{mps}}{1+\rho_{mps}} \right)^n, \quad n \geq 0,$$

где $\rho_{mps} = \lambda_{mps} / \mu_{mps}$.

Введем ЦМ $\left\{X_{mps}(t),\ t \geq 0\right\}$, описывающую поведение (m, p, s)-пути, и ее стационарное распределение

$$\pi_{mps}\left(x_{mps}\right) = \mathrm{P}\left\{X_{mps}(t) = x_{mps}\right\},\ x_{mps} \in \{0,1\}.$$

Стационарное распределение этой ЦМ связано с распределением ЦМ $\xi_{mps}(t)$ и имеет вид

$$\begin{aligned} \pi_{mps}(0) &= p_0 = \frac{1}{1+\rho_{mps}}, \\ \pi_{mps}(1) &= \sum_{n \geq 1} p_n = \frac{\rho_{mps}}{1+\rho_{mps}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Заметим, что стационарное распределение ЦМ

$\left\{X_{mps}(t), t \geq 0\right\}$ удовлетворяет уравнениям детального баланса

$$\pi_{mps}(0)\lambda_{mps} = \pi_{mps}(1)\mu_{mps},$$

поэтому ЦМ является обратимой.

Для описания функционирования логических путей введем составную ЦМ $\tilde{X}(t) = \left(X_{mps}(t)\right)_{m\in\mathcal{M}_s,\, p\in\mathcal{P}_s,\, s\in\mathcal{S}}$, которая по построению является обратимой на множестве $\tilde{\mathcal{X}}$ со стационарным распределением

$$\tilde{\pi}(\mathbf{x}) = \prod_{s\in\mathcal{S}}\prod_{p\in\mathcal{P}_s}\prod_{m\in\mathcal{M}_s}\pi_{mps}(x_{mps}), \quad \mathbf{x}\in\tilde{\mathcal{X}},$$

причем

$$\tilde{\pi}(\mathbf{0}) = \prod_{s\in\mathcal{S}}\prod_{p\in\mathcal{P}_s}\prod_{m\in\mathcal{M}_s}\frac{1}{1+\rho_{mps}}.$$

Поведение системы с учетом ограниченной емкости звеньев может быть описано сужением этой ЦМ на множество $\mathcal{X}$. Пусть $X(t)$ является сужением ОЦМ $\tilde{X}(t)$ на множество $\mathcal{X}\subseteq\tilde{\mathcal{X}}$.

Теорема 3.1. Стационарное распределение $\pi(\mathbf{x}) = \mathrm{P}\{X(t)=\mathbf{x}\}$ ЦМ $\left\{X(t),\, t\geq 0\right\}$ имеет мультипликативный вид

$$\begin{gathered}\pi(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{0})\prod_{s\in\mathcal{S}}\prod_{p\in\mathcal{P}_s}\prod_{m\in\mathcal{M}_s}\rho_{mps}^{x_{mps}}, \quad \mathbf{x}\in\mathcal{X}, \\ \pi^{-1}(\mathbf{0}) = \sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}}\prod_{s\in\mathcal{S}}\prod_{p\in\mathcal{P}_s}\prod_{m\in\mathcal{M}_s}\rho_{mps}^{x_{mps}}.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Доказательство. Из основного свойства сужения ОЦМ следует, что для любого состояния $\mathbf{r}$ ЦМ

$$\pi(\mathbf{r}) = \frac{\tilde{\pi}(\mathbf{r})}{\sum\limits_{\mathbf{x}\in\mathscr{X}} \tilde{\pi}(\mathbf{x})} = \frac{\prod\limits_{s\in\mathscr{S}} \prod\limits_{p\in\mathscr{P}_s} \prod\limits_{m\in\mathscr{M}_s} \pi_{mps}(r_{mps})}{\sum\limits_{\mathbf{x}\in\mathscr{X}} \prod\limits_{s\in\mathscr{S}} \prod\limits_{p\in\mathscr{P}_s} \prod\limits_{m\in\mathscr{M}_s} \pi_{mps}(x_{mps})} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{s\in\mathscr{S}} \prod\limits_{p\in\mathscr{P}_s} \prod\limits_{m\in\mathscr{M}_s} \dfrac{\rho_{mps}^{r_{mps}}}{1+\rho_{mps}}}{\sum\limits_{x\in\mathscr{X}} \prod\limits_{s\in\mathscr{S}} \prod\limits_{p\in\mathscr{P}_s} \prod\limits_{m\in\mathscr{M}_s} \dfrac{\rho_{mps}^{x_{mps}}}{1+\rho_{mps}}} = \frac{\prod\limits_{s\in\mathscr{S}} \prod\limits_{p\in\mathscr{P}_s} \prod\limits_{m\in\mathscr{M}_s} \rho_{mps}^{r_{mps}}}{\sum\limits_{x\in\mathscr{X}} \prod\limits_{s\in\mathscr{S}} \prod\limits_{p\in\mathscr{P}_s} \prod\limits_{m\in\mathscr{M}_s} \rho_{mps}^{x_{mps}}} =$$

$$= \pi(\mathbf{0}) \prod_{s\in\mathscr{S}} \prod_{p\in\mathscr{P}_s} \prod_{m\in\mathscr{M}_s} \rho_{mps}^{r_{mps}}, \ \ \mathbf{r}\in\mathscr{X}\,. \ \blacksquare$$

3.1.3. Вероятностные характеристики модели

Зная стационарное распределение, можно получить выражения для основных вероятностных характеристик модели. Для любого множества $\Omega \subseteq \tilde{\mathscr{X}}$ определим функцию

$$G(\Omega) = \sum_{\mathbf{x}\in\Omega} \prod_{s\in\mathscr{S}} \prod_{p\in\mathscr{P}_s} \prod_{m\in\mathscr{M}_s} \rho_{mps}^{x_{mps}}\,, \tag{3.5}$$

и тогда нормирующую константу распределения (3.4) можно представить в виде

$$\pi^{-1}(\mathbf{0}) = G(\mathscr{X})\,.$$

Выражения для многих важных характеристик модели, которые задаются вероятностью некоторого события, могут быть получены посредством функции $G(\Omega)$ следующим образом:

$$\mathrm{P}\{\mathbf{x}\in\Omega\} = \sum_{\mathbf{x}\in\Omega} \pi(\mathbf{x}) = \frac{G(\Omega)}{G(\mathscr{X})}\,. \tag{3.6}$$

К искомым характеристикам относятся вероятности блокировки соединений и ряд других характеристик, к рассмотрению которых мы переходим.

Пусть $\mathscr{B}_{mps}$ – множество состояний блокировок (m, p, s)-пути, т.е. подмножество состояний логических путей, в которых запрос на предоставление (m, s)-услуги по физическому пути $p \in \mathscr{P}_s$ блокируется по причине нехватки свободных ресурсов звеньев. Для того чтобы запрос на установление многоадресного соединения оказался заблокированным, необходимо, чтобы одновременно выполнялись два условия: на каком-либо звене (или нескольких звеньях) соответствующего физического пути не было достаточного числа b_{ms} свободных единиц емкости и запрашиваемая (m, s)-услуга не предоставлялась через такое звено другим пользователям. Поэтому множество блокировок (m, p, s)-пути имеет вид

$$\mathscr{B}_{mps} = \left\{\mathbf{x} \in \mathscr{X} : \exists l \in \mathscr{L}_{ps} : y_{ms}^{l}(\mathbf{x}) = 0,\ c_l(\mathbf{x}) + b_{ms} > C_l\right\}. \quad (3.7)$$

Значение вероятности $B_{mps} = \mathrm{P}\{\mathbf{x} \in \mathscr{B}_{mps}\}$ можно получить по формуле (3.6).

Помимо вероятности потерь интерес представляют вероятность того, что услуга предоставляется пользователю, и вероятность того, что услуга не предоставляется, но ресурсов достаточно, чтобы по запросу инициировать ее предоставление. Введем для любой тройки (m, p, s), $m \in \mathscr{M}_s$, $p \in \mathscr{P}_s$, $s \in \mathscr{S}$, события

$$\mathscr{F}_{mps} = \left\{\mathbf{x} \in \mathscr{X} : x_{mps} = 1\right\} \quad (3.8)$$

и

$$\mathscr{H}_{mps} = \left\{\mathbf{x} : x_{mps} = 0, \forall l \in \mathscr{L}_{ps}\ c_l(\mathbf{x}) + b_{ms} \le C_l \vee y_{ms}^{l}(\mathbf{x}) = 1\right\}. \quad (3.9)$$

Вычислить соответствующие вероятности $F_{mps} = \mathrm{P}\{\mathbf{x} \in \mathscr{F}_{mps}\}$ и $H_{mps} = \mathrm{P}\{\mathbf{x} \in \mathscr{H}_{mps}\}$ также можно по формуле (3.6). Первая из этих величин представляет собой вероятность того, что (m, p, s)-путь включен, вторая – вероятность того, что

(m, p, s)-путь выключен, но в сети достаточно ресурсов для его включения.

Легко видеть, что для любого (m, p, s)-пути система множеств $\mathscr{B}_{mps}$, $\mathscr{F}_{mps}$, $\mathscr{H}_{mps}$ является разбиением пространства состояний $\mathscr{X}$, поэтому вероятности этих событий связаны соотношением

$$B_{mps} + F_{mps} + H_{mps} = 1. \tag{3.10}$$

Лемма 3.1. Для любой тройки (m, p, s), $m \in \mathscr{M}_s$, $p \in \mathscr{P}_s$, $s \in \mathscr{S}$, выполняется соотношение

$$F_{mps} = \rho_{mps} H_{mps}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Зафиксируем некоторую тройку $(\hat{m}, \hat{p}, \hat{s})$, $\hat{m} \in \mathscr{M}_{\hat{s}}$, $\hat{p} \in \mathscr{P}_{\hat{s}}$, $\hat{s} \in \mathscr{S}$. По определению множества $\mathscr{H}_{mps}$ соответствующая $(\hat{m}, \hat{p}, \hat{s})$-пути компонента для любого $\mathbf{x} \in \mathscr{H}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$ равна нулю, то есть $x_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}} = 0$, и для каждого $l \in \mathscr{L}_{\hat{p}\hat{s}}$ выполняется соотношение

$$\tilde{c} = \sum_{s \in \mathscr{S}^l \setminus \{\hat{s}\}} \sum_{m \in \mathscr{M}_s} b_{ms} y^l_{ms}(\mathbf{x}) + \sum_{m \in \mathscr{M}_{\hat{s}} \setminus \{\hat{m}\}} b_{m\hat{s}} y^l_{m\hat{s}}(\mathbf{x}) \le C_l - b_{\hat{m}\hat{s}}.$$

Левая часть неравенства, обозначенная $\tilde{c}$, определяет суммарный ресурс l-звена, занятый в состоянии $\mathbf{x}$: $c_l(\mathbf{x}) = \tilde{c}$, если $y^l_{\hat{m}\hat{s}}(\mathbf{x}) = 0$, и $c_l(\mathbf{x}) = \tilde{c} + b_{\hat{m}\hat{s}}$ в противном случае.

Для любого $\mathbf{x} \in \mathscr{H}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$ состояние сети $\mathbf{x}' = \left(\mathbf{x} + \mathbf{1}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}\right)$ принадлежит множеству $\mathscr{F}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$ (здесь $\mathbf{1}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$ – вектор, $(\hat{m}, \hat{p}, \hat{s})$-я компонента которого равна 1, а остальные – 0). Действительно: $x'_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}} = 1$, для $l \in \mathscr{L} \setminus \mathscr{L}_{\hat{p}\hat{s}}$ выполняется равенство $c_l(\mathbf{x}') = c_l(\mathbf{x})$, и для всех $l \in \mathscr{L}_{\hat{p}\hat{s}}$

$$c_l(\mathbf{x}') = \sum_{s\in\mathcal{S}^l\setminus\{\hat{s}\}} \sum_{m\in\mathcal{M}_s} b_{ms} y_{ms}^l(\mathbf{x}) + \sum_{m\in\mathcal{M}_{\hat{s}}\setminus\{\hat{m}\}} b_{m\hat{s}} y_{m\hat{s}}^l(\mathbf{x}) + b_{\hat{m}\hat{s}} =$$
$$= \tilde{c} + b_{\hat{m}\hat{s}} \le C_l.$$

С другой стороны, для любого $\mathbf{x}' \in \mathcal{F}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$ найдется такое состояние $\mathbf{x} \in \mathcal{H}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$, что $\mathbf{x}' = \left(\mathbf{x} + \mathbf{1}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}\right)$. Таким образом, отображение $\mathbf{x}' = \varphi_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{x} + \mathbf{1}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}\right)$ является биекцией из $\mathcal{H}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$ в $\mathcal{F}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$.

Переходя к вероятностям, получаем для любого $\mathbf{x}' \in \mathcal{F}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$

$$\pi(\mathbf{x}') = G^{-1}(\mathcal{X}) \prod_{s\in\mathcal{S}\setminus\{\hat{s}\}} \prod_{p\in\mathcal{P}_s} \prod_{m\in\mathcal{M}_s} \rho_{mps}^{x_{mps}} \prod_{p\in\mathcal{P}_{\hat{s}}\setminus\{\hat{p}\}} \prod_{m\in\mathcal{M}_{\hat{s}}} \rho_{mp\hat{s}}^{x_{mp\hat{s}}} \times$$
$$\times \prod_{m\in\mathcal{M}_{\hat{s}}\setminus\{\hat{m}\}} \rho_{m\hat{p}\hat{s}}^{x_{m\hat{p}\hat{s}}} \rho_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}} = \rho_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}} \pi(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}' - \mathbf{1}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}\right) \in \mathcal{H}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$, и окончательно

$$F_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}} = \sum_{\mathbf{x}'\in\mathcal{F}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}} \pi(\mathbf{x}') = \sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{H}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}} \pi\left(\mathbf{x} + \mathbf{1}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}\right) =$$
$$= \rho_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}} \sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{H}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}} \pi(\mathbf{x}) = \rho_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}} H_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}. \blacksquare$$

Следствие 3.1. Для любого (m, p, s)-пути, $m \in \mathcal{M}_s$, $p \in \mathcal{P}_s$, $s \in \mathcal{S}$, верно соотношение

$$F_{mps} = \frac{\rho_{mps}}{1 + \rho_{mps}} \left(1 - B_{mps}\right). \qquad (3.12)$$

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться утверждением леммы 3.1 и соотношением (3.10). ■

3.2. Модель отдельного звена сети

3.2.1. Построение модели

Рассмотрим сеть мультивещания, в которой для некоторого звена $l^* \in \mathscr{L}$ выполняются соотношения

$$\sum_{s\in\mathscr{S}^{l^*}} \sum_{m\in\mathscr{M}_s} b_{ms} > C_{l^*};$$

$$\sum_{s\in\mathscr{S}^{l}} \sum_{m\in\mathscr{M}_s} b_{ms} \le C_l, \ l \in \mathscr{L} \setminus \{l^*\}.$$

Таким образом, все звенья, кроме звена l^*, имеют неограниченные ресурсы для обслуживания запросов пользователей. Такую сеть называют сетью с выделенным звеном. Ясно, что задача анализа блокировок в сети с выделенным звеном сводится к анализу сети, состоящей из одного звена $\mathscr{L} = \{l^*\}$ и имеющей один источник, который предоставляет услуги из множества $\mathscr{M} = \bigcup\limits_{s\in\mathscr{S}^{l^*}} \mathscr{M}_s$. Далее для краткости индексы l^* и s будем опускать: $C = C_{l^*}$, $\mathscr{P} = \mathscr{P}^{l^*}$.

Модель отдельного звена будем описывать с помощью многопотоковой СМО без накопителя, состоящей из C приборов, на которую поступает $M = |\mathscr{M}|$ потоков заявок. Будем считать, что все поступающие потоки являются пуассоновскими и независимы в совокупности. Если на момент поступления m-заявки в системе нет ни одной заявки этого потока, то поступившая заявка принимается при условии наличия b_m свободных приборов и занимает их на случайное время, распределенное экспоненциально с параметром μ_m и не зависящее ни от длительности обслуживания заявок других потоков, ни от процессов поступления. Все поступившие в течение этого интервала времени m-заявки принимаются на обслуживание без выделения дополнительных приборов, а по истечении указанного интервала одновременно покидают систему и b_m приборов освобождаются. Потеря заявки происходит в том случае, если при ее поступлении в системе нет заявок того же потока, а также нет достаточного количества свободных приборов.

Обозначим $\rho_m = \dfrac{\lambda_m}{\mu_m}$, где $\lambda_1, ..., \lambda_M$ – интенсивности входящих потоков. Согласно [35], параметры $\rho_1, ..., \rho_M$ связаны с интенсивностями потоков запросов на включение соответствующих логических путей в сети соотношением

$$\rho_m = \prod_{p \in \mathscr{P}} (1 + \rho_{mp}) - 1, \; m = 1, ..., M . \qquad (3.13)$$

Положим $C = \infty$, в этом случае все поступившие в систему заявки принимаются на обслуживание и потери отсутствуют. Пусть случайный процесс $\{Y_m(t), t \geq 0\}$, $m = 1, ..., M$, находится в состоянии 1, если в момент $t \geq 0$ в системе обслуживается хотя бы одна m-заявка, и в состоянии 0 в противном случае. Аналогично ЦМ $\left\{X_{mps}(t), t \geq 0\right\}$, введенной в разделе 3.1.2, процесс $\{Y_m(t), t \geq 0\}$ является ОЦМ и имеет стационарное распределение

$$\pi_m(y_m) = \mathrm{P}\{Y_m(t) = y_m\} = \frac{\rho_m^{y_m}}{1 + \rho_m}, \; y_m \in \{0,1\} . \qquad (3.14)$$

Рассмотрим составную ЦМ

$$\left\{\tilde{Y}(t) = \left(Y_m(t)\right)_{m \in \mathscr{M}}, \, t \geq 0\right\},$$

определенную на множестве $\tilde{\mathscr{Y}} = \{0,1\}^M$. По построению эта цепь является ОЦМ на данном множестве и, как следует из формулы (3.14), имеет стационарное распределение

$$\tilde{\pi}(\mathbf{y}) = G^{-1}(\tilde{\mathscr{Y}}) \prod_{m=1}^{M} \rho_m^{y_m}, \ \mathbf{y} \in \tilde{\mathscr{Y}}, \qquad (3.15)$$

где функция $G(\Omega)$ для любого множества $\Omega \subseteq \tilde{\mathscr{Y}}$ определяется соотношением

$$G(\Omega) = \sum_{\mathbf{y}\in\Omega} \prod_{m=1}^{M} \rho_m^{y_m}. \qquad (3.16)$$

Из (3.16) следует, что нормирующая константа $G(\tilde{\mathscr{Y}})$ распределения ЦМ $\{\tilde{Y}(t),\, t \ge 0\}$ равна

$$G(\tilde{\mathscr{Y}}) = \prod_{m=1}^{M} (1 + \rho_m). \qquad (3.17)$$

ЦМ $\{\tilde{Y}(t),\, t \ge 0\}$ с пространством состояний $\tilde{\mathscr{Y}}$ и распределением (3.15) описывает состояние модели при $C = \infty$. Пусть теперь $C < \infty$ и, следовательно, возможны потери заявок. Будем считать, что потерянные заявки не оказывают влияние на интенсивность соответствующего входящего потока. В этом случае функционирование системы описывает ЦМ $\{Y(t),\, t \ge 0\}$, являющаяся сужением ЦМ $\{\tilde{Y}(t),\, t \ge 0\}$ на множество

$$\mathscr{Y} = \{\mathbf{y} \in \tilde{\mathscr{Y}} : c(\mathbf{y}) \le C\}, \qquad (3.18)$$

где $c(\mathbf{y}) = \sum_{m=1}^{M} b_m y_m$ – число занятых приборов в состоянии $\mathbf{y} \in \tilde{\mathscr{Y}}$. Как сужение обратимой цепи $Y(t)$ также обратима, и, следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3. Стационарное распределение ЦМ $\{Y(t),\ t \ge 0\}$ имеет мультипликативный вид

$$\pi(\mathbf{y}) = G^{-1}(\mathscr{Y})\prod_{m=1}^{M}\rho_m^{y_m},\ \ \mathbf{y} \in \mathscr{Y}, \qquad (3.19)$$

где $G(\mathscr{Y})$ – нормирующая константа:

$$G(\mathscr{Y}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{Y}}\prod_{m=1}^{M}\rho_m^{y_m}. \qquad (3.20)$$

3.2.2. Вероятностные характеристики

Как и для модели сети, характеристики отдельного звена могут быть выражены с использованием функции $G(\Omega)$ от соответствующего подмножества пространства состояний посредством соотношения (3.6). К таким характеристикам относятся вероятность потери заявок, вероятность того, что m-заявка находится в системе и вероятность того, что m-заявок в системе нет, но если такая заявка поступит, то будет принята на обслуживание. Напомним, что условием потери заявки помимо недостаточного числа свободных приборов является отсутствие в системе заявок данного потока. Следовательно, множество потерь m-заявок имеет вид

$$\mathscr{B}_m = \{\mathbf{y}\in\mathscr{Y} : c(\mathbf{y}) + b_m > C,\ y_m = 0\}. \qquad (3.21)$$

Множество таких состояний, что m-заявка находится в системе, имеет вид

$$\mathscr{F}_m = \{\mathbf{y}\in\mathscr{Y} : y_m = 1\}, \qquad (3.22)$$

тогда как множество таких состояний, что m-заявок в системе нет, но если заявка поступит, то будет принята на обслуживание, принимает вид

$$\mathscr{H}_m = \{\mathbf{y}\in\mathscr{Y} : c(\mathbf{y}) + b_m \le C,\ y_m = 0\}. \qquad (3.23)$$

Физический смысл первого события состоит в том, что соответствующие m-услуге данные передаются через рассматриваемое звено. Во втором случае m-услуга через звено не предоставляется, но ресурсов достаточно, чтобы по запросу пользователя инициировать ее предоставление.

Легко видеть, что и здесь для любого $m = 1,...,M$ система множеств $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{F}_m$, $\mathcal{H}_m$ является разбиением пространства состояний $\mathcal{Y}$. Следовательно, вероятности данных событий связаны соотношением

$$B_m + F_m + H_m = 1.$$

Устанавливающие дополнительную связь между этими вероятностями лемма 3.2 и следствие 3.2 из нее доказываются аналогично соответствующим утверждениям, сформулированным в разделе 3.1.3.

Лемма 3.2. Для любого $m = 1,...,M$ выполняется соотношение

$$F_m = \rho_m H_m. \tag{3.24}$$

Следствие 3.2. Для любого $m = 1,...,M$ верно соотношение

$$F_m = \frac{\rho_m}{1+\rho_m}\left(1 - B_m\right). \tag{3.25}$$

При анализе отдельного звена сети мультивещания интерес представляет характеристика случайной величиной (СВ) γ, принимающей значение $c(\mathbf{y})$. Заметим, что γ является СВ числа занятых приборов в рассматриваемой СМО и соответствует случайному числу занятых единиц емкости звена сети. Если за единицу емкости принять величину одной единицы канального ресурса, то γ представляет собой СВ ширины полосы пропускания (ШПП), занятой на звене сети при обслуживании установленных через него соединений. Среднее значение занятой ШПП, то есть среднее число занятых приборов в рассматриваемой модели, можно найти как математическое ожидание $c^{(1)}$ СВ γ, а именно

$$c^{(1)} = \sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{Y}} c(\mathbf{y})\pi(\mathbf{y}). \tag{3.26}$$

При этом величина $\dfrac{c^{(1)}}{C}$ представляет собой коэффициент использования звена.

Лемма 3.3. Для нахождения среднего числа занятых приборов применима формула

$$c^{(1)} = \sum_{m=1}^{M} b_m F_m . \tag{3.27}$$

Доказательство.

$$\sum_{m=1}^{M} b_m F_m = \sum_{m=1}^{M} b_m \sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{F}_m} \pi(\mathbf{y}) = \sum_{m=1}^{M} b_m \sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{F}_m} y_m \pi(\mathbf{y}) =$$

$$= \sum_{m=1}^{M} b_m \left(\sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{F}_m} y_m \pi(\mathbf{y}) + \sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{Y}\setminus\mathscr{F}_m} y_m \pi(\mathbf{y}) \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{M} b_m \sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{Y}} y_m \pi(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{Y}} \pi(\mathbf{y}) \sum_{m=1}^{M} b_m y_m = \sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{Y}} c(\mathbf{y})\pi(\mathbf{y}). \ \blacksquare$$

Утверждение следующей леммы вытекает из соотношений (3.25) и (3.27).

Лемма 3.4. Среднее число занятых приборов в системе выражается формулой

$$c^{(1)} = \sum_{m=1}^{M} b_m \frac{\rho_m}{1+\rho_m}\left(1 - B_m\right). \tag{3.28}$$

В следующем разделе мы рассмотрим эффективный метод численного анализа системы, предложенный в [35] и основанный на рекуррентном вычислении нормирующей константы $G(\mathscr{Y})$.

3.2.3. Алгоритм свертки

Для вывода алгоритма расчета вероятностных характеристик модели прежде всего необходимо исследовать свойства множества $\mathscr{Y}$ и получить алгоритм для расчета нормирующей константы $G(\mathscr{Y})$.

Введем для $m \in \mathscr{M}$ и $n = 0,\dots,C$ множества

$$\mathscr{Y}\left(m,n\right) = \left\{\mathbf{y}(m) = (y_1,\dots,y_m) : c\left(\mathbf{y}(m)\right) = n\right\}.$$

Доопределим данную систему множеств для значений $m = 0$ и $n < 0$ следующим образом:

$$\mathscr{Y}(m,n) = \begin{cases} \mathscr{Y}(m,n),\ m = 1,\dots,M,\ n = 1,\dots,C; \\ \{0\},\ m = 0,\dots,M,\ n = 0; \\ \varnothing,\ m = 0,\ n = 1,\dots,C; \\ \varnothing,\ m = 0,\dots,M,\ n < 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

По построению множества $\mathscr{Y}(m,n)$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathscr{Y}(m,n) \cap \mathscr{Y}(m,\tilde{n}) = \varnothing,\ n \neq \tilde{n},$$

для любого $m = 0,\dots,M$ и

$$\mathscr{Y} = \bigcup_{n=0}^{C} \mathscr{Y}(M,n).$$

Для всех $m = 1,\dots,M$ и $n = 1,\dots,C$ множество $\mathscr{Y}(m,n)$ представимо в виде

$$\mathscr{Y}(m,n) = \mathscr{Y}(m-1,n) \times \left\{0\right\} \cup \mathscr{Y}(m-1,n-b_m) \times \left\{1\right\}. \tag{3.30}$$

Введем функцию

$$g(m,n)=\sum_{\mathbf{y}(m)\in\mathscr{Y}(m,n)}\prod_{i=1}^{m}\rho_i^{y_i}$$

и заметим, что

$$G(\mathscr{Y})=\sum_{n=0}^{C}g(M,n)\,. \qquad (3.31)$$

Лемма 3.5. Функцию $g(m,n)$ можно вычислить по формуле

$$g(m,n)=\begin{cases}0, & m=0,\ n=1,\ldots,C;\\ 0, & m=0,\ldots,M,\ n<0;\\ 1, & m=0,\ldots,M,\ n=0;\\ g(m-1,n)+\rho_m g(m-1,n-b_m), & \begin{array}{l}m=1,\ldots,M,\\ n=1,\ldots,C.\end{array}\end{cases} \qquad (3.32)$$

Доказательство. Первые три строки формулы очевидным образом следуют из (3.29). Докажем утверждение четвертой строки. В силу (3.30) имеем:

$$g(m,n)=\sum_{\mathbf{y}(m)\in\mathscr{Y}(m,n)}\prod_{i=1}^{m}\rho_i^{y_i}=$$

$$=\sum_{\mathbf{y}(m)\in\mathscr{Y}(m-1,n)\times\{0\}}\prod_{i=1}^{m}\rho_i^{y_i}+\sum_{\mathbf{y}(m)\in\mathscr{Y}(m-1,n-b_k)\times\{1\}}\prod_{i=1}^{m}\rho_i^{y_i}=$$

$$=\sum_{\mathbf{y}(m-1)\in\mathscr{Y}(m-1,n)}\prod_{i=1}^{m}\rho_i^{y_i}+\left(\sum_{\mathbf{y}(m-1)\in\mathscr{Y}(m-1,n-b_m)}\prod_{i=1}^{m}\rho_i^{y_i}\right)\rho_m=$$

$$=g\left(m-1,n\right)+\rho_m g\left(m-1,n-b_k\right).\ \blacksquare$$

Лемма 3.5 и формула (3.31) определяют алгоритм для расчета нормирующей константы $G(\mathscr{Y})$. Вывод формул для расчета вероятностных характеристик проведем для услуги с номером M. Это не ограничивает общности, поскольку всегда можно перенумеровать услуги, присваивая номер M той из них, для которой необходимо провести вычисления.

Теорема 3.4. Вероятностные характеристики B_M, F_M, H_M и $c^{(1)}$ звена сети мультивещания вычисляются по формулам

$$B_M = \left(\sum_{n=0}^{C} g(M,n) \right)^{-1} \sum_{n=C-b_M+1}^{C} g(M-1,n). \qquad (3.33)$$

$$F_M = \left(\sum_{n=0}^{C} g(M,n) \right)^{-1} \rho_M \sum_{n=0}^{C-b_M} g(M-1,n), \qquad (3.34)$$

$$H_M = \left(\sum_{n=0}^{C} g(M,n) \right)^{-1} \sum_{n=0}^{C-b_M} g(M-1,n), \qquad (3.35)$$

$$c^{(1)} = \left(\sum_{n=0}^{C} g(M,n) \right)^{-1} \sum_{n=1}^{C} n g(M,n). \qquad (3.36)$$

Доказательство. Ограничимся доказательством формулы (3.33), остальные формулы теоремы доказываются аналогично. Множество блокировок представимо в виде

$$\mathscr{B}_M = \left\{ \mathbf{y} \in \tilde{\mathscr{Y}} : C - b_M + 1 \le c(\mathbf{y}) \le C, y_M = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \mathbf{y}(M-1) : C - b_M + 1 \le c(\mathbf{y}(M-1)) \le C \right\} \times \{0\} \overset{not}{=} \hat{\mathscr{Y}}(M-1) \times \{0\},$$

отсюда, с использованием введенного обозначения,

$$G(\mathscr{B}_M) = \sum_{\mathbf{y}(M-1) \in \hat{\mathscr{Y}}(M-1)} \prod_{i=1}^{M-1} \rho_i^{y_i} \cdot 1 = \sum_{n=C-b_M+1}^{C} g(M-1,n).$$

Из формул (3.6) и (3.31) следует (3.33). ■

Формулы (3.31)–(3.36) определяют рекуррентный алгоритм расчета вероятностных характеристик отдельного звена сети мультивещания.

4. Модель сети с многоадресными и одноадресными соединениями

При анализе сети, в которой передача трафика осуществляется посредством как одноадресных, так и многоадресных соединений, естественно использовать комбинации рассмотренных выше методов. Однако необходимо учитывать ряд особенностей, вызванных более сложной комбинаторной структурой пространства состояний модели. В данной главе построена [37, 39] модель сети произвольной структуры с двумя типами соединений, построен рекуррентный метод расчета вероятностных характеристик сети древовидной структуры, представлены модели и методы расчета для полнодоступного звена сети и отдельного звена с резервированием ресурсов.

4.1. Мультипликативность стационарного распределения

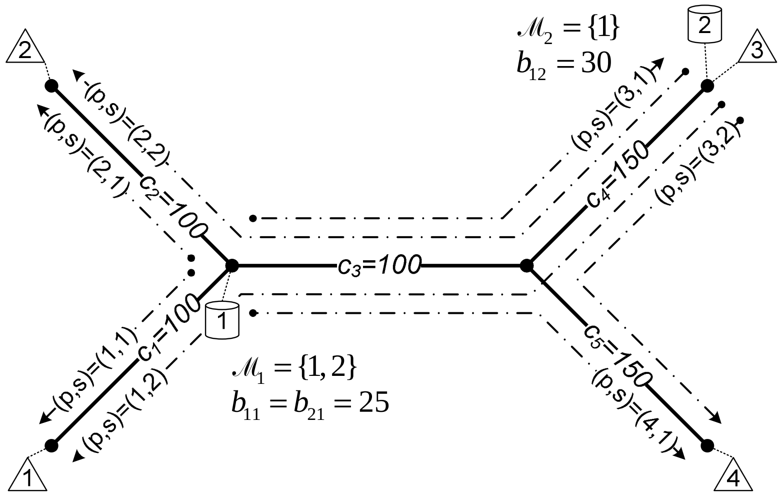
4.1.1. Построение модели

Будем рассматривать сеть произвольной топологии, состоящую из некоторого числа узлов, соединенных звеньями. Пусть, как и в предыдущих главах, L – общее число звеньев сети, а $\mathscr{L}=\{1,2,...,L\}$ – множество всех звеньев, занумерованных произвольным образом. Обозначим C_l емкость l-звена. Обозначим $\mathscr{S}=\{1,...,S\}$ множество всех источников в сети и $\mathscr{M}_s=\{1,...,M_s\}$ – множество услуг, предоставляемых s-источником. Пусть b_{ms} – число единиц емкости звена, требуемое для предоставления услуги $m\in\mathscr{M}_s$. Обозначим $\mathscr{P}_s=\{1,...,P_s\}$ множество физических путей от s-источника,

$\mathscr{L}_{ps} \subseteq \mathscr{L}$ – множество всех звеньев p-пути к s-источнику, $\mathscr{P}_s^l = \{p \in \mathscr{P}_s : l \in \mathscr{L}_{ps}\}$ – множество физических путей к s-источнику, проходящих через звено $l \in \mathscr{L}$, и $\mathscr{S}^l = \{s \in \mathscr{S} : \mathscr{P}_s^l \neq \varnothing\}$ – множество источников, предоставляющих услуги через l-звено.

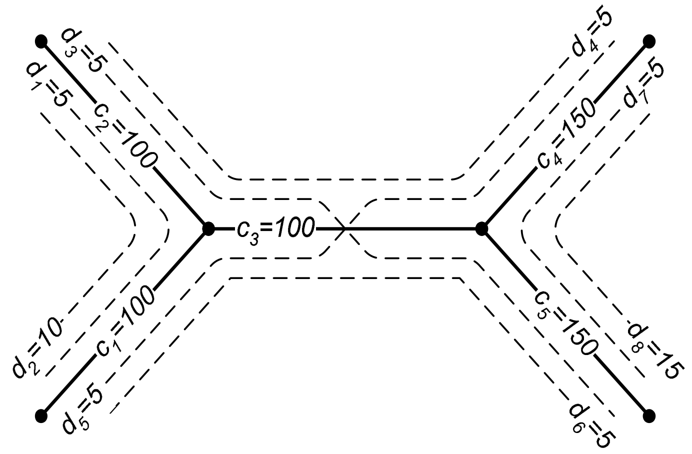
Одноадресные соединения, в отличие от многоадресных, могут быть установлены между двумя произвольным узлами сети. Обозначим $\mathscr{K} = \{1, 2, ..., K\}$ множество всех классов одноадресных соединений сети. Как и во второй главе, каждый класс соединений характеризуется двумя параметрами: маршрутом, то есть множеством звеньев сети, через которые устанавливается соединение, и требованием к емкости, которую необходимо выделить соединению на каждом звене соответствующего маршрута. Пусть $\mathscr{L}_k \subseteq \mathscr{L}$ – маршрут, а d_k – требование к емкости, выделяемой на каждом звене маршрута для соединения k-класса. Введем также множество $\mathscr{K}^l = \{k \in \mathscr{K} : l \in \mathscr{L}_k\}$ классов одноадресных соединений, маршруты которых включают l-звено.

На рис. 4.1 представлена схема модели с параметрами многоадресных и одноадресных соединений. На данном примере поясним введенные обозначения. Сеть состоит из пяти звеньев, следовательно $\mathscr{L} = \{1, 2, ..., 5\}$; на каждом звене надписана его емкость. На рис. 4.1, а показаны параметры многоадресных соединений сети. Сеть имеет два источника, изображенных на рисунке цилиндрами, т.есть $\mathscr{S} = \{1, 2\}$, и четыре узла подключения пользователей, отмеченных треугольниками. Около каждого источника на рисунке указано множество предоставляемых им услуг $\mathscr{M}_s$, а также необходимое для предоставления каждой услуги число единиц емкости, которую следует выделить услуге на каждом звене соответствующего физического пути. Физические пути (штрихпунктирная линия) к первому источнику информации образуют множество $\mathscr{P}_1 = \{1,2,3,4\}$, и множества их звеньев имеют вид $\mathscr{L}_{11} = \{1\}$, $\mathscr{L}_{21} = \{2\}$, $\mathscr{L}_{31} = \{3,4\}$ и $\mathscr{L}_{41} = \{3,5\}$. Ко второму источнику ведут три физических пути, так как можно считать, что пользователь 3 подсоединен ко второму источнику напрямую, а не через звенья рассматриваемой сети, и $\mathscr{P}_2 = \{1,2,3\}$, при этом $\mathscr{L}_{12} = \{1,3,4\}$, $\mathscr{L}_{22} = \{2,3,4\}$ и $\mathscr{L}_{32} = \{4,5\}$. Наконец, если рассматривать, например, третье звено, то через него проходят два физических пути к первому источнику: $\mathscr{P}_1^3 = \{3,4\}$ и два ко второму источнику: $\mathscr{P}_2^3 = \{1,2\}$.



а) многоадресные соединения

Рис. 4.1. Схема мультисервисной сети с двумя типами соединений



б) одноадресные соединения

Рис. 4.1 (продолжение). Схема мультисервисной сети с двумя типами соединений

На рис. 4.1,б пунктирными линиями изображены маршруты классов одноадресных соединений. Рядом с каждым маршрутом указано требуемое для соединения число единиц емкости звеньев. Легко видеть, что всего имеется восемь классов одноадресных соединений, $\mathscr{K} = \{1, 2, ..., 8\}$, с параметрами $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 = \{1, 2\}$, $\mathscr{L}_3 = \{2, 3, 5\}$ и т. д. и $d_2 = 10$, $d_8 = 15$ и $d_k = 5$, $k \in \mathscr{K} \setminus \{2, 8\}$. Вновь обратимся к звену 3: множество классов одноадресных соединений, маршруты которых проходят через это звено, имеет вид $\mathscr{K}^3 = \{3, 4, 5, 6\}$.

Вернемся к построению модели и сделаем предположения о характере запросов на установление соединений обоих типов и о продолжительности этих соединений. Состояние

(m, p, s)-пути обозначим $x_{mps} \in \{0,1\}$: $x_{mps} = 1$ (в этом случае говорят, что путь «включен»), если s-источник передает по p–пути данные, соответствующие m-услуге, и $x_{mps} = 0$ (говорят, что путь «выключен») в противном случае. Условием включения логического пути по запросу пользователя является наличие для этого ресурсов на всех звеньях соответствующего маршрута, а именно: на каждом звене $l \in \mathscr{L}_{ps}$ (m, s)-услуга либо уже предоставляется другому пользователю (свойство мультивещания), либо имеется b_{ms} свободных единиц емкости. При включении услуги на тех звеньях маршрута, через которые услуга ранее не предоставлялась, под передачу данных выделяется b_{ms} единиц емкости звена, освобождаемых после окончания предоставления услуги по всем проходящим через звено физическим путям. Если на момент поступления запроса хотя бы на одном из звеньев $\mathscr{L}_{ps}$ не оказывается свободных ресурсов, происходит блокировка установления соединения, (m, p, s)-путь остается в состоянии 0 и запрос пользователя теряется.

Запрос пользователя на установление одноадресного соединения k-класса удовлетворяется при условии наличия на каждом звене маршрута свободных d_k единиц емкости. В этом случае указанное число единиц ресурса предоставляется данному соединению до его разъединения, после чего освобождается. При нехватке необходимых ресурсов на момент поступления запроса хотя бы на одном звене маршрута происходит блокировка установления соединения и запрос пользователя теряется. Обозначим n_k .состояние k-класса одноадресных соединений, которое определяется числом установленных в сети соединений данного класса, $n_k \in \left\{ 0, 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{\min\limits_{l \in \mathscr{L}_k} C_l}{d_k} \right\rfloor \right\}$.

Будем предполагать, что логические пути и одноадресные соединения функционируют независимо друг от друга. Пусть запросы на использование (m, p, s)-пути образуют пуассоновский поток интенсивности λ_{mps}, а время занятия пути не зависит от процесса поступления запросов и распределено по экспоненциальному закону со средним μ_{mps}^{-1}, $\rho_{mps} = \lambda_{mps} / \mu_{mps}$. Аналогично, пусть запросы на установление соединений k-класса образуют пуассоновский поток интенсивности ν_k, а времена занятия таких соединений не зависят от моментов их установления и распределены по экспоненциальному закону со средним κ_k^{-1}, $a_k = \frac{\nu_k}{\kappa_k}$.

4.1.2. Пространство состояний и стационарное распределение

Легко показать, что в сети со звеньями неограниченной емкости, т.е. при $C_l = \infty$, $l \in \mathscr{L}$, ЦМ $\{X_{mps}(t), t \geq 0\}$, $m \in \mathscr{M}_s$, $p \in \mathscr{P}_s$, $s \in \mathscr{S}$, и ЦМ $\{N_k(t), t \geq 0\}$, $k \in \mathscr{K}$, описывающие соответственно поведение (m, p, s)-пути и k-класса одноадресных соединений, являются ОЦМ со стационарными распределениями:

$$\pi_{mps}(x_{mps}) = \mathrm{P}\{X_{mps}(t) = x_{mps}\} = \frac{\rho_{mps}^{x_{mps}}}{1 + \rho_{mps}}, x_{mps} \in \{0,1\}, \quad (4.1)$$

и

$$p_k(n_k) = \mathrm{P}\{N_k(t) = n_k\} = \frac{a_k^{n_k}}{n_k\,!}\mathrm{e}^{-a_k}, \; n_k \in \{0,1,2,\ldots\}. \qquad (4.2)$$

Состояние модели определяется совокупностью состояний всех логических путей и классов одноадресных соединений. Рассмотрим составную ЦМ

$$\left\{\tilde{Z}(t) = \left(\left(X_{mps}(t)\right)_{m\in\mathcal{M}_s,\, p\in\mathcal{P}_s,\, s\in\mathcal{S}},\, \left(N_k(t)\right)_{k\in\mathcal{K}}\right),\, t \ge 0\right\},$$

описывающую поведение всех соединений сети при условии неограниченных емкостей звеньев. По построению данная цепь является ОЦМ на множестве

$$\tilde{\mathcal{X}} = \tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{N}},\;\; \tilde{\mathcal{X}} = \{0,1\}^{\sum_{s\in\mathcal{S}} M_s P_s},\;\; \tilde{\mathcal{N}} = \{0,1,2,\ldots\}^K, \qquad (4.3)$$

и, как следует из формул (4.1) и (4.2), имеет стационарное распределение мультипликативного вида

$$\pi(\mathbf{z}) = \pi(\mathbf{x},\mathbf{n}) = G^{-1}(\tilde{\mathcal{X}})\prod_{s\in\mathcal{S}}\prod_{p\in\mathcal{P}_s}\prod_{m\in\mathcal{M}_s}\rho_{mps}^{x_{mps}}\prod_{k\in\mathcal{K}}\frac{a_k^{n_k}}{n_k\,!},\;\; \mathbf{z}\in\tilde{\mathcal{X}}, \qquad (4.4)$$

где функция $G(\Omega)$ для любого множества $\Omega \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$ определяется соотношением

$$G(\Omega) = \sum_{\mathbf{z}\in\Omega}\prod_{s\in\mathcal{S}}\prod_{p\in\mathcal{P}_s}\prod_{m\in\mathcal{M}_s}\rho_{mps}^{x_{mps}}\prod_{k\in\mathcal{K}}\frac{a_k^{n_k}}{n_k\,!}. \qquad (4.5)$$

Из (4.5) следует, что нормирующая константа $G(\tilde{\mathcal{X}})$ распределения ЦМ $\{\tilde{Z}(t),\, t \ge 0\}$ имеет вид

$$G(\tilde{\mathcal{X}}) = \prod_{s\in\mathcal{S}}\prod_{p\in\mathcal{P}_s}\prod_{m\in\mathcal{M}_s}(1+\rho_{mps})\,\mathrm{e}^{\sum_{k\in\mathcal{K}} a_k}.$$

Определим для каждого звена $l \in \mathscr{L}$, источников $s \in \mathscr{S}^l$ и состояний логических путей сети $\mathbf{x} \in \tilde{\mathscr{X}}$ функцию $y_{ms}^l(\boldsymbol{x}) = u\left(\sum_{p \in \mathscr{P}_s^l} x_{mps}\right)$, соответствующую состоянию (m, s)-услуги на l-звене, где $u(\cdot)$ - функция Хевисайда. Обозначим $\mathbf{y}^l(\mathbf{x}) = \left(y_{ms}^l(\mathbf{x})\right)_{m \in \mathscr{M}_s, s \in \mathscr{S}^l}$ состояние услуг на l-звене, когда логические пути сети находятся в состоянии $\mathbf{x} \in \tilde{\mathscr{X}}$, и $\mathbf{z}^l(\mathbf{z}) = \left(y^l(\mathbf{x}), \left(n_k\right)_{k \in \mathscr{K}^l}\right)$ – состояние всех соединений на l-звене, когда сеть находится в состоянии $\mathbf{z} \in \tilde{\mathscr{Z}}$ (везде, где это не оговорено особо, вектор $\mathbf{z} \in \tilde{\mathscr{Z}}$ состоит из двух векторных компонент $\mathbf{x} \in \tilde{\mathscr{X}}$ и $\mathbf{n} \in \tilde{\mathscr{N}}$, а именно: $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{n})$). Для $l \in \mathscr{L}$ введем величины

$$
\begin{gathered}
b_l(\mathbf{x}) = \sum_{s \in \mathscr{S}^l} \sum_{m \in \mathscr{M}_s} b_{ms} y_{ms}^l(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \tilde{\mathscr{X}}, \\
d_l(\mathbf{n}) = \sum_{k \in \mathscr{K}^l} d_k n_k, \ \mathbf{n} \in \tilde{\mathscr{N}},
\end{gathered}
\tag{4.6}
$$

и

$$
c_l(\mathbf{z}) = b_l(\mathbf{x}) + d_l(\mathbf{n}), \ \mathbf{z} \in \tilde{\mathscr{Z}}, \tag{4.7}
$$

представляющие собой число единиц емкости, занятых на l-звене соответственно многоадресными соединениями, одноадресными соединениями и соединениями обоих типов, когда сеть находится в состоянии $\mathbf{z} \in \tilde{\mathscr{Z}}$.

Пусть теперь $C_l < \infty$, $l \in \mathscr{L}$, и возможны блокировки установления многоадресных и одноадресных соединений. В этом случае пространство состояний модели примет вид

$$\mathscr{X} = \{\mathbf{z} \in \tilde{\mathscr{X}} : c_l(\mathbf{z}) \le C_l,\ l \in \mathscr{L}\}. \qquad (4.8)$$

Функционирование сети со звеньями ограниченной емкости описывает ЦМ $\{Z(t),\ t \ge 0\}$, являющаяся сужением ЦМ $\{\tilde{Z}(t),\ t \ge 0\}$ на множество $\mathscr{X}$, заданное формулой (4.8). Из свойства сужения ОЦМ вытекает утверждение следующей теоремы.

Теорема 4.1. ЦМ $\{Z(t),\ t \ge 0\}$ является обратимой со стационарным распределением мультипликативного вида

$$\pi(\mathbf{z}) = G^{-1}(\mathscr{X}) \prod_{s\in\mathscr{S}} \prod_{p\in\mathscr{P}_s} \prod_{m\in\mathscr{M}_s} \rho_{mps}^{x_{mps}} \prod_{k\in\mathscr{K}} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!},\ \mathbf{z} \in \mathscr{X}, \qquad (4.9)$$

где $G(\mathscr{X})$ – нормирующая константа:

$$G(\mathscr{X}) = \sum_{\mathbf{z}\in\mathscr{X}} \prod_{s\in\mathscr{S}} \prod_{p\in\mathscr{P}_s} \prod_{m\in\mathscr{M}_s} \rho_{mps}^{x_{mps}} \prod_{k\in\mathscr{K}} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}, \qquad (4.10)$$

и пространство состояний $\mathscr{X}$ задано формулой (4.8).

4.2. Модель отдельного звена сети

4.2.1. Постановка задачи

Предположим, что в модели сети, представленной в разделе 4.1, все звенья, кроме некоторого звена l^*, имеют неограниченные ресурсы для обслуживания запросов пользователей, т.е. $C_l = \infty$ для $l \in \mathscr{L} \setminus \{l^*\}$. Задача анализа блокировок в такой системе сводится к анализу сети, состоящей из одного звена l^*, с одним источником s^*, который предоставляет услуги из множества $\mathscr{M} = \bigcup_{s\in\mathscr{S}^{l^*}} \mathscr{M}_s$, и множеством классов одноадресных соединений $\mathcal{K}^{l^*}$. Далее для краткости индексы l^* и s^* будем опускать: $C = C_{l^*}$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{l^*}$.

Функционирование звена сети с двумя типами соединений будем описывать с помощью многопотоковой мультисервисной СМО без накопителя, изображенной на рис. 4.2.

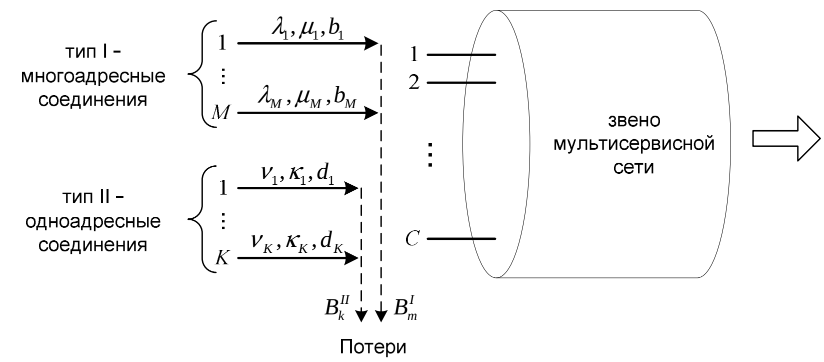


Рис. 4.2. Схема модели звена сети с многоадресными и одноадресными соединениями

На полнодоступную систему, состоящую из C приборов (единиц емкости звена сети), поступают $M = |\mathcal{M}|$ потоков заявок типа I и $K = |\mathcal{K}|$ потоков типа II. Будем считать, что все $M + K$ поступающих в систему потоков являются пуассоновскими и независимы в совокупности. Первая группа потоков (I-потоки) моделирует поступление запросов на установление многоадресных соединений. Если на момент поступления (I, m)-заявки в системе нет ни одной заявки этого потока, то поступившая заявка принимается при условии наличия b_m свободных приборов и занимает их на случайное время, распределенное экспоненциально с параметром μ_m и не зависящее ни от длительности обслуживания заявок других потоков, ни от процессов поступления. Все поступившие в течение этого интервала времени (I, m)-заявки принимаются на обслуживание без выделения дополнительных приборов, а по истечении указанного интервала одновременно покидают систему и b_m приборов освобождаются. Потеря заявки типа I происходит только в том случае, если при ее поступлении в системе нет заявок того же потока, а также нет достаточного количества свободных приборов. Обозначим $\rho_m = \dfrac{\lambda_m}{\mu_m}$, где $\lambda_1,...,\lambda_M$ – интенсивности входящих I-потоков. Заметим, что, аналогично модели звена сети мультивещания, параметры $\rho_1,...,\rho_M$ связаны с интенсивностями потоков запросов пользователей на включение соответствующих логических путей в сети соотношением

$$\rho_m = \prod_{p \in \mathscr{P}^{l^*}} (1+\rho_{mp}) - 1,\ \ m = 1,...,M\ . \qquad (4.11)$$

Потоки второй группы (II-потоки) соответствуют потокам запросов на установление через звено l^* одноадресных соединений. Поступившая (II, k)-заявка принимается на обслуживание, если на момент ее прихода в системе имеется d_k свободных приборов. Принятая заявка занимает это число приборов на случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром κ_k и также не зависящее ни от длительности обслуживания заявок других потоков, ни от процессов поступления, после чего заявка покидает систему, освобождая d_k приборов. Если на момент поступления заявки достаточного количества свободных приборов не оказывается, заявка теряется. Интенсивности $\nu_1,...,\nu_K$ входящих потоков этого типа совпадают с интенсивностями соответствующих потоков запросов пользователей, $a_k = \nu_k / \kappa_k$.

4.2.2. Пространство состояний и стационарное распределение

Положим $C = \infty$, в этом случае все поступившие в систему заявки принимаются на обслуживание и потери отсутствуют. Пусть ЦМ $\{Y_m(t),\, t \geq 0\}$, $m = 1,\dots,M$, находится в состоянии 1, если в момент времени $t \geq 0$ в системе обслуживается хотя бы одна (I, m)-заявка, и в состоянии 0 в противном случае. Как показано ранее в третьей главе, ЦМ $\{Y_m(t),\, t \geq 0\}$ является обратимой со стационарным распределением

$$\pi_m(y_m) = \mathrm{P}\{Y_m(t) = y_m\} = \frac{\rho_m^{y_m}}{1+\rho_m}, \; y_m \in \{0,1\}. \qquad (4.12)$$

Введем также ЦМ, характеризующую II-потоки. Пусть $N_k(t)$ – число (II, k)-заявок в системе в момент времени $t \geq 0$, $k = 1,\dots,K$. ЦМ $\{N_k(t),\, t \geq 0\}$ также обратима, а ее стационарное распределение имеет вид

$$p_k(n_k) = \mathrm{P}\{N_k(t) = n_k\} = \frac{a_k^{n_k}}{n_k!} \mathrm{e}^{-a_k}, \; n_k \in \{0,1,2,\dots\}. \qquad (4.13)$$

Рассмотрим составную ЦМ

$$\left\{\tilde{Z}(t) = \left(Y_1(t),\dots,Y_M(t), N_1(t),\dots,N_K(t)\right),\, t \geq 0\right\}.$$

По построению $\{\tilde{Z}(t),\, t \geq 0\}$ является ОЦМ на множестве $\tilde{\mathscr{X}} = \mathscr{Y} \times \tilde{\mathscr{N}} = \{0,1\}^M \times \{0,1,2,\dots\}^K$ и, как следует из формул (4.12) и (4.13), имеет стационарное распределение

$$\tilde{\pi}(\mathbf{z}) = G^{-1}(\tilde{\mathscr{X}}) \prod_{m=1}^{M} \rho_m^{y_m} \prod_{k=1}^{K} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}, \; \mathbf{z} = (\mathbf{y},\mathbf{n}) \in \tilde{\mathscr{X}}, \qquad (4.14)$$

где функция $G(\Omega)$ для любого множества $\Omega \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$ определяется соотношением

$$G(\Omega) = \sum_{\mathbf{z} \in \Omega} \prod_{m=1}^{M} \rho_m^{y_m} \prod_{k=1}^{K} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!} . \qquad (4.15)$$

Следовательно, нормирующая константа $G(\tilde{\mathcal{X}})$ распределения ЦМ $\{\tilde{Z}(t),\, t \ge 0\}$ равна

$$G(\tilde{\mathcal{X}}) = \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{K} a_k} \prod_{m=1}^{M} (1 + \rho_m) .$$

ЦМ $\{\tilde{Z}(t),\, t \ge 0\}$ с пространством состояний $\tilde{\mathcal{X}}$ и распределением (4.14) описывает состояние рассматриваемой системы для случая $C = \infty$.

Обозначим $c(\mathbf{z})$ число занятых приборов системы в состоянии $\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{X}}$ и заметим, что эта величина представима в виде

$$c(\mathbf{z}) = c(\mathbf{y}, \mathbf{n}) = b(\mathbf{y}) + d(\mathbf{n}) = \sum_{m=1}^{M} b_m y_m + \sum_{k=1}^{K} d_k n_k , \qquad (4.16)$$

где $b(\mathbf{y})$ и $d(\mathbf{n})$ – число приборов, занятых в состоянии $\mathbf{z} = (\mathbf{y}, \mathbf{n})$ заявками I- и II-потоков соответственно. Пусть теперь $C < \infty$ и, следовательно, возможны потери заявок. Будем считать, что потерянные заявки обоих типов не оказывают влияние на интенсивность породившего их потока. В этом случае функционирование системы описывает ЦМ $\{Z(t),\, t \ge 0\}$, являющаяся сужением цепи $\{\tilde{Z}(t),\, t \ge 0\}$ на множество

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{X}} : c(\mathbf{z}) \le C\} . \qquad (4.17)$$

Как сужение обратимой цепи она также обратима, и, следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.4. Стационарное распределение ЦМ $\{Z(t),\ t \ge 0\}$ имеет мультипликативный вид

$$\pi(\mathbf{z}) = G^{-1}(\mathscr{X}) \prod_{m=1}^{M} \rho_m^{y_m} \prod_{k=1}^{K} \frac{a_k^{n_k}}{n_k\,!},\ \ \mathbf{z} \in \mathscr{X}, \tag{4.18}$$

где $G(\mathscr{X})$ – нормирующая константа:

$$G(\mathscr{X}) = \sum_{\mathbf{z} \in \mathscr{X}} \prod_{m=1}^{M} \rho_m^{y_m} \prod_{k=1}^{K} \frac{a_k^{n_k}}{n_k\,!}. \tag{4.19}$$

4.2.3. Вероятностные характеристики

Как и для сети в целом, ряд макрохарактеристик отдельного звена могут быть выражены с использованием функции $G(\Omega)$ от соответствующего подмножества пространства состояний. К таким характеристикам, в частности, относятся вероятности потерь заявок потоков обоих типов, вероятность того, что (I, m)-заявка находится в системе и вероятность того, что (I, m)-заявок в системе нет, но если такая заявка поступит, то будет принята на обслуживание. Напомним, что условием потери заявки I-потока помимо недостаточного числа свободных приборов является отсутствие в системе заявок данного потока. Следовательно, множество потерь (I, m)-заявок имеет вид

$$\mathscr{B}_m^I = \{\mathbf{z} \in \mathscr{X} : c(\mathbf{z}) + b_m > C,\ y_m = 0\}. \tag{4.20}$$

Заявки II-потоков теряются в том случае, если в системе недостаточно свободных приборов для их обслуживания. Таким образом, множество потерь (II, k)-заявок имеет вид

$$\mathscr{B}_k^{II} = \{\mathbf{z} \in \mathscr{X} : c(\mathbf{z}) + d_k > C\}. \tag{4.21}$$

Значения вероятностей $B_m^I = \mathrm{P}\{\mathbf{z} \in \mathscr{B}_m^I\}$ и $B_k^{II} = \mathrm{P}\{\mathbf{z} \in \mathscr{B}_k^{II}\}$ можно получить по формулам (4.18), (4.19), они соответствуют вероятностям блокировки многоадресных и одноадресных соединений, а в рассматриваемой системе дают вероятности потерь заявок по времени.

Множество таких состояний, что (I, m)-заявка находится в системе (соответствующие m-услуге данные передаются через рассматриваемое звено), имеет вид

$$\mathscr{F}_m = \left\{ \mathbf{z} \in \mathscr{X} : y_m = 1 \right\}. \tag{4.22}$$

Множество таких состояний, что (I, m)-заявок в системе нет, но если такая заявка поступит, то будет принята на обслуживание (m-услуга через звено не предоставляется, но ресурсов достаточно, чтобы по запросу пользователя инициировать ее предоставление), принимает вид

$$\mathscr{H}_m = \left\{ \mathbf{z} \in \mathscr{X} : c(\mathbf{z}) + b_m \le C,\ y_m = 0 \right\}. \tag{4.23}$$

Как и для модели сети произвольной топологии, для рассматриваемой модели верны соотношение (4.24) и утверждения леммы 4.2 и следствия из нее:

$$B_m^I + F_m + H_m = 1. \tag{4.24}$$

<u>Лемма 4.2.</u> Для любого $m = 1, \ldots, M$ выполняется соотношение

$$F_m = \rho_m H_m. \tag{4.25}$$

<u>Следствие 4.1.</u> Для любого $m = 1, \ldots, M$ верно соотношение

$$F_m = \frac{\rho_m}{1 + \rho_m}\left(1 - B_m^I\right). \tag{4.26}$$

При анализе отдельного звена сети интерес представляют характеристики дискретных СВ β, δ и γ, которые принимают значения $b(\mathbf{z})$, $d(\mathbf{z})$ и $c(\mathbf{z})$ соответственно. Здесь γ является случайной величиной числа занятых приборов в рассматриваемой системе и соответствует случайному числу занятых единиц емкости звена мультисервисной сети. Аналогично интерпретируются СВ β и δ для многоадресных и одноадресных соединений соответственно. В частности, среднее число занятых приборов в рассматриваемой модели можно найти как математическое ожидание $c^{(1)}$ СВ γ, а именно

$$c^{(1)} = \sum_{\mathbf{z}\in\mathcal{X}} c(\mathbf{z})\pi(\mathbf{z}) . \tag{4.27}$$

Величина $c^{(1)}/C$ представляет собой коэффициент использования звена.

<u>Лемма 4.3.</u> Для нахождения среднего числа приборов системы, занятых I-заявками, применима формула

$$b^{(1)} = \sum_{m=1}^{M} b_m F_m . \tag{4.28}$$

<u>Лемма 4.4.</u> Среднее число занятых I-заявками приборов в системе выражается формулой

$$b^{(1)} = \sum_{m=1}^{M} b_m \frac{\rho_m}{1+\rho_m}\left(1-B_m^I\right). \tag{4.29}$$

4.2.4. Метод расчета вероятностных характеристик

Введем разбиение пространства состояний $\mathcal{X}$ по числу занятых в системе приборов

$$\mathcal{X}(n) = \left\{\mathbf{z}\in\mathcal{X} : c(\mathbf{z}) = n\right\},\ n = 0,\dots,C ,$$

$$\mathcal{X} = \bigcup_{n=0}^{C} \mathcal{X}(n),$$

$$\mathcal{X}(i) \cap \mathcal{X}(j) = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j = 0,...,C,$$

и маргинальное распределение числа занятых приборов

$$P(n) = \mathrm{P}\left(\mathcal{X}(n)\right),\ n = 0,...,C. \tag{4.30}$$

Тогда множество потерь (II, k)-заявок представимо в виде

$$\mathcal{B}_k^{II} = \bigcup_{n=C-d_k+1}^{C} \mathcal{X}(n),\quad k = 1,...,K,$$

а вероятность их потерь определяется формулой

$$B_k^{II} = \sum_{n=C-d_k+1}^{C} P(n),\quad k = 1,...,K.$$

Множество $\mathcal{B}_m^I$ потерь (I, m)-заявок имеет более сложную структуру по сравнению с множеством потерь заявок II-потоков. Введем систему событий

$$\mathcal{X}_m(n) = \left\{\mathbf{z} \in \mathcal{X} : c(\mathbf{z}) = n,\ y_m = 0\right\},\ n = 0,...,C,\ m = 1,...,M,$$

и соответствующее распределение вероятностей

$$P_m(n) = \mathrm{P}\left(\mathcal{X}_m(n)\right),\ n = 0,...,C,\ m = 1,...,M. \tag{4.31}$$

Теперь множество потерь заявок первого типа представимо в виде

$$\mathcal{B}_m^I = \bigcup_{n=C-b_m+1}^{C} \mathcal{X}_m(n),\quad m = 1,...,M,$$

а вероятности потерь (I, m)-заявок вычисляются по формуле

$$B_m^I = \sum_{n=C-b_m+1}^{C} P_m(n), \quad m=1,...,M .$$

Для случаев, когда в систему поступают заявки только одного типа, эффективные вычислительные алгоритмы для расчета распределений (4.30) и (4.31) нам уже известны. Так, если $M=0$, то для вычисления $P(n)$ можно использовать алгоритм Кауфмана – Робертса, если же $K=0$, то $P(n)$ и $P_M(n)$ можно найти с помощью алгоритма, представленного в разделе 3.2.3.

Для вычисления $P(n)$ в общем случае ($M>0$, $K>0$) естественно воспользоваться сочетанием этих двух алгоритмов на основе соотношения

$$\mathscr{X}(n) = \bigcup_{i=0}^{n} \left(\mathscr{Y}(i) \times \mathscr{C}(n-i) \right), \; n=0,...,C,$$

где

$$\mathscr{Y}(n) = \left\{ \mathbf{y} \in \tilde{\mathscr{Y}} : b(\mathbf{y}) = n \right\},$$

$$\mathscr{C}(n) = \left\{ \mathbf{n} \in \tilde{\mathscr{N}} : d(\mathbf{n}) = n \right\}.$$

Легко показать, что для любых множеств $\Omega \subseteq \tilde{\mathscr{Y}}$ и $\Upsilon \subseteq \tilde{\mathscr{N}}$

$$G(\Omega \times \Upsilon) = G(\Omega) G(\Upsilon).$$

Тогда в вероятностной форме для $n=0,...,C$ получим

$$P(n) = \frac{G(\mathscr{X}(n))}{G(\mathscr{X})} = G^{-1}(\mathscr{X}) \sum_{i=0}^{n} G(\mathscr{Y}(i)) G(\mathscr{C}(n-i)). \quad (4.32)$$

Аналогичное соотношение имеет место для $P_m(n)$:

$$\mathscr{X}_m(n) = \bigcup_{i=0}^{n} \left(\mathscr{Y}_m(i) \times \mathscr{C}(n-i) \right),\ n = 0,\dots,C ,$$

где

$$\mathscr{Y}_m(n) = \left\{ \mathbf{y} \in \tilde{\mathscr{Y}} : b(\mathbf{y}) = n,\ y_m = 0 \right\},\ n = 0,\dots,C ,$$

или в вероятностной форме для $m = 1,\dots,M$ и $n = 0,\dots,C$

$$P_m(n) = \frac{G\left(\mathscr{X}_m(n)\right)}{G\left(\mathscr{X}\right)} = G^{-1}\left(\mathscr{X}\right) \sum_{i=0}^{n} G\left(\mathscr{Y}_m(i)\right) G\left(\mathscr{C}(n-i)\right). \quad (4.33)$$

Лемма 4.5. Значение функции $f_m(i,n)$, удовлетворяющей для любого $n = 0,\dots,C$ соотношениям

$$G\left(\mathscr{X}(n)\right) = f_0(M,n),$$

$$G\left(\mathscr{X}_m(n)\right) = f_m(M,n),\ m = 1,\dots,M ,$$

вычисляется по формуле

$$f_m(i,n) = \begin{cases} 0,\ i = 0,\dots,M,\ n < 0; \\ h(n),\ i = 0,\ n = 0,\dots,C; \\ f_m(i-1,n) + (1-\delta_{im})\rho_i f_m(i-1,n-b_i), \\ \qquad\qquad\qquad i = 1,\dots,M, n = 0,\dots,C \end{cases} \quad (4.34)$$

где функция $h(n)$ задана формулой (2.14), а δ_{ij} – символ Кронекера.

Доказательство. Функция $f_0(i,n)$ представляет собой свертку функций $g(m,n)$ и $h(n)$, заданных соответственно соотношениями (3.32) и (2.14):

$$f_0(i,n) = \sum_{j=0}^{n} g(i,n-j)h(j). \quad (4.35)$$

Множитель $(1-\delta_{im})$ в третьей строке (4.34) позволяет при переборе опускать m-ю компоненту вектора $\mathbf{y}$, т.е. учитывать условие $y_m = 0$ при расчете $P_m(n)$. Поскольку для аналогичных систем с одним типом потоков заявок выполняются соотношения

$$G\left(\mathscr{C}(n)\right) = h(n),$$

$$G\left(\mathscr{Y}(n)\right) = g(M,n),$$

$$G\left(\mathscr{Y}_M(n)\right) = g(M-1,n),$$

то утверждение леммы следует из соотношений (4.32) и (4.33).■

Следующие утверждения формулируют метод вычисления вероятностных характеристик звена сети с двумя типами соединений.

<u>Предложение 4.1</u>. Нормирующая константа (4.19) вычисляется по формуле

$$G(\mathscr{X}) = \sum_{n=0}^{C} f_0(M,n). \tag{4.36}$$

<u>Предложение 4.2</u>. Вероятность потери (I, m)-заявки вычисляется по формуле

$$B_m^I = \frac{\sum\limits_{n=C-b_m+1}^{C} f_m(M,n)}{\sum\limits_{n=0}^{C} f_0(M,n)}, \quad m = 1,\dots,M. \tag{4.37}$$

Вероятность потери (II, k)-заявки вычисляется по формуле

$$B_k^{II} = \frac{\sum\limits_{n=C-d_k+1}^{C} f_0(M,n)}{\sum\limits_{n=0}^{C} f_0(M,n)}, \ k=1,...,K. \tag{4.38}$$

Вероятность того, что (I, m)-заявок в системе нет, но если такая заявка поступит, то будет принята на обслуживание, вычисляется по формуле

$$H_m = \frac{\sum\limits_{n=0}^{C-b_m} f_m(M,n)}{\sum\limits_{n=0}^{C} f_0(M,n)}, \ m=1,...,M. \tag{4.39}$$

Выражение для среднего числа занятых приборов имеет вид

$$c^{(1)} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{C} n \cdot f_0(M,n)}{\sum\limits_{n=0}^{C} f_0(M,n)}. \tag{4.40}$$

Полученные результаты позволяют реализовать эффективные алгоритмы для расчета вероятностных характеристик отдельного полнодоступного звена сети. Добавим, что при реализации алгоритма расчета функции $f_m(i,n)$ для сокращения времени вычислений целесообразно добавить условие $f_m(i,n)=1$ при $i=0,...,M$ и $n=0$. Пример численного анализа сети предложенным методом см. в главе 6 книги [33].

4.2.5. Алгоритм свертки для эрланговской модели мультивещания

Выше в данной главе, а также в главе 3 рассматривалась модель мультивещания, где период занятости прибора определяет первая из поступивших заявок, а в момент окончания ее обслуживания систему одновременно покидают все заявки, поступившие за время ее обслуживания, незамедлительно освобождая занятые ресурсы. В данном разделе мы рассмотрим еще одну дисциплину, при которой заявки, обслуживаясь одновременно на одном приборе, покидают систему независимо друг от друга. Такую модель мультивещания будем называть эрланговской, поскольку распределение числа заявок в соответствующей СМО $\mathrm{M}_{\lambda_m}|\mathrm{M}_{\mu_m}|1|0$ с «прозрачными» заявками имеет вид:

$$p_0 = e^{-\rho_m},\ \ p_k^{(2)} = \frac{{\rho_m}^k}{k!}e^{-\rho_m}, k \ge 1. \qquad (4.41)$$

В данном разделе на основании работ [36, 39] мы получим алгоритм свертки для модели сети с двумя типами соединений для случая эрланговской модели мультивещания.

Как и в разделе 4.2.1, функционирование модели звена сети описывается ЦМ $\left\{Z(t) = \left(Y_1(t),...,Y_M(t), N_1(t),..., N_K(t)\right),\ t \ge 0\right\}$, которая является ОЦМ на множестве $\mathcal{X} = \{\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{X}} : c(\mathbf{z}) \le C\}$, и, как следует из [39], имеет стационарное распределение

$$\pi(\mathbf{z}) = G^{-1}(\mathcal{X})\prod_{m=1}^{M}\left(e^{\rho_m} - 1\right)^{y_m}\prod_{k=1}^{K}\frac{a_k^{n_k}}{n_k!},\ \ \mathbf{z} = (\mathbf{y}, \mathbf{n}) \in \mathcal{X}, \qquad (4.42)$$

где нормирующая константа $G(\mathcal{X})$ распределения ЦМ $\{Z(t),\ t \ge 0\}$ равна

$$G(\mathscr{X}) = \sum_{\mathbf{z}\in\mathscr{X}} \prod_{m=1}^{M} \left(e^{\rho_m} - 1\right)^{y_m} \prod_{k=1}^{K} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}.$$

Следует обратить внимание, что формула (4.42) состоит из трех компонент: $G(\tilde{\mathscr{X}})$ − нормирующая константа, $\prod_{k=1}^{K} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}$ – ненормированная вероятность состояний одноадресных соединений и $\prod_{m\in\mathbf{M}} \left(e^{\rho_m} - 1\right)^{y_m}$ − ненормированная вероятность состояний услуг мультивещания. В [39] доказана инвариантность вероятностного распределения состояний услуг мультивещания от закона распределения длительности их обслуживания. В [36, 39] для двух разных моделей поведения пользователей услуг мультивещания были предложены рекуррентные алгоритмы для расчета основных вероятностных характеристик системы. В данном разделе, в отличие от [36], предложен алгоритм, снижающий вычислительную сложность расчетов при вычислении вероятностей блокировок.

Введем следующие обозначения, необходимые для описания рекуррентного алгоритма:

– $f(c,m)$ – ненормированная вероятность того, что услугами $(1,\ldots,m)$ мультивещания и одноадресными соединениями занято c единиц емкости звена;
– $f(c,M) = f(c)$;
– $f_{-m}(c)$ – ненормированная вероятность того, что услугами мультивещания и одноадресными соединениями занято c единиц емкости звена и m -услуга отключена.

В [39] показано, что нормирующая константа $G(\mathscr{X})$ и вероятности блокировок одноадресных B_k^{II} и многоадресных B_m^I соединений определены формулами

$$G(\mathscr{X}) = \sum_{c=0}^{C} f(c), \tag{4.43}$$

$$B_m^I = G^{-1}(\mathscr{X}) \sum_{c=C-b_m+1}^{C} f_{-m}(c),\ m \in \mathscr{M}, \tag{4.44}$$

$$B_k^{II} = G^{-1}(\mathscr{X}) \sum_{c=C-d_k+1}^{C} f(c),\ k \in \mathscr{K}, \tag{4.45}$$

а функции $f(c,m)$ и $f_{-m}(c)$ вычисляются рекурсивно:

$$f(c,m) = \begin{cases} 0, & c<0, \quad m = 0,1,\ldots,M, \\ 1, & c=0, \quad m = 0,1,\ldots,M, \\ \dfrac{1}{c}\sum_{k=1}^{K} a_k d_k f(c-d_k,0), & c=1,\ldots,C, \quad m=0, \\ f(c,m-1)+\varphi_m f(c-b_m,m-1), & c=1,\ldots,C, \quad m=1,\ldots,M, \end{cases} \tag{4.46}$$

$$f_{-m}(c) = \begin{cases} 0, & c<0, \\ 1, & c=0, \\ f(c)-\varphi_m f_{-m}(c-b_m), & c=1,\ldots,C, \end{cases} \tag{4.47}$$

где $\varphi_m = e^{\rho_m} - 1$.

Эффективная схема реализации алгоритма для расчета нормирующей константы $G(\mathscr{X})$ и вероятности B_k^{II} показаны на рис. 4.3, а на рис. 4.4 представлена схема расчета вероятности B_m^I.

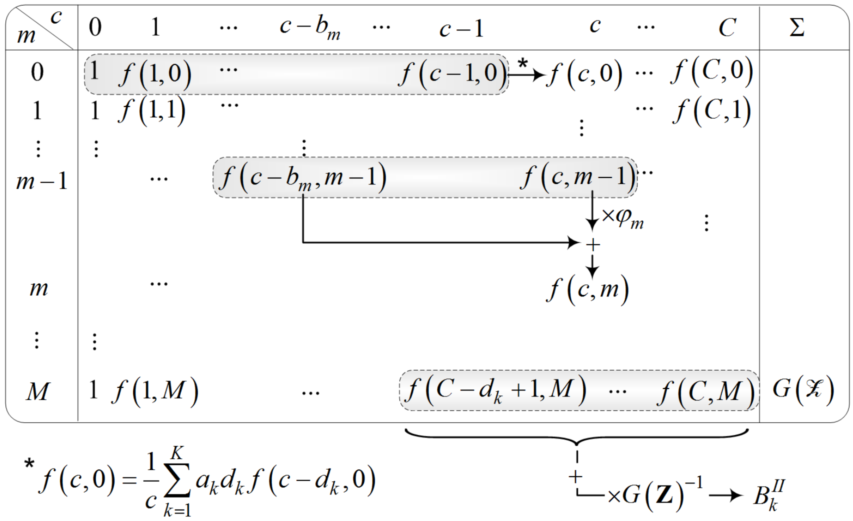


Рис. 4.3. Схема расчета нормирующей константы $G(\mathcal{X})$ и вероятности B_k^{II} блокировок одноадресных соединений

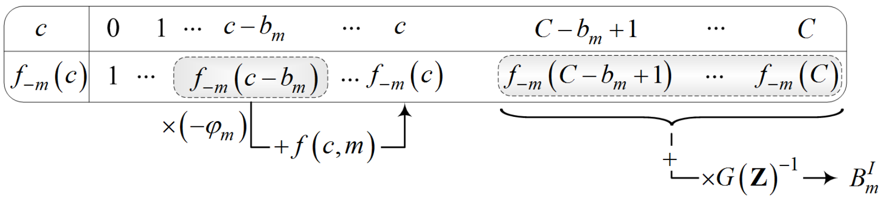


Рис. 4.4. Схема расчета вероятности блокировок B_m^{I} многоадресных соединений

5. Цепи Маркова с блочными матрицами

5.1. Блочные треугольные разложения

Пусть $n_0, n_1, ..., n_m$ – целые числа, такие, что $n_0, n_1, ..., n_m \ge 1$ и $n_0 + n_1 + ... + n_m = n$. Матрицу $\mathbf{Q}$ порядка n

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{01} & \cdots & \mathbf{Q}_{0m} \\ \mathbf{Q}_{10} & \mathbf{Q}_{11} & \cdots & \mathbf{Q}_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Q}_{m0} & \mathbf{Q}_{m1} & \cdots & \mathbf{Q}_{mm} \end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

разбитую на блоки так, что $\mathbf{Q}_{ij}$ есть матрица размера $n_i \times n_j$, называют *блочной* [7] или *клеточной* [10]. Блочная матрица A называется *верхней блочно-треугольной,* если $\mathbf{Q}_{ij} = 0$ для всех $i > j$ и *нижней блочно-треугольной*, если $\mathbf{Q}_{ij} = 0$ для всех $i < j$.

Блочное треугольное разложение матрицы $\mathbf{Q}$ – это ее представление в виде произведения $\mathbf{Q} = \mathbf{BC}$ двух матриц, одна из которых верхняя блочно-треугольная, а другая – нижняя блочно-треугольная. При этом размеры соответствующих блоков матриц $\mathbf{Q}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ должны совпадать. Блочное треугольное разложение $\mathbf{Q} = \mathbf{BC}$ называется *блочным LU-разложением,* если $\mathbf{B}$ – нижняя блочно-треугольная матрица, и называется *блочным UL-разложением,* если $\mathbf{B}$ – верхняя блочно-треугольная матрица.

Обозначим $\mathbf{Q}^{\Delta}$ блочную матрицу, получающуюся перестановкой центрально симметричных блоков матрицы $\mathbf{Q}$,

$$\mathbf{Q}^{\Delta} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{mm} & \mathbf{Q}_{mm-1} & \cdots & \mathbf{Q}_{m0} \\ \mathbf{Q}_{m-1m} & \mathbf{Q}_{m-1m-1} & \cdots & \mathbf{Q}_{m-10} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Q}_{0m} & \mathbf{Q}_{0m-1} & \cdots & \mathbf{Q}_{00} \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $(\mathbf{Q}^{\Delta})^{\Delta} = \mathbf{Q}$ и, если $\mathbf{Q} = \mathbf{BC}$ есть блочное LU-разложение матрицы $\mathbf{Q}$, то $\mathbf{Q}^{\Delta} = \mathbf{B}^{\Delta}\mathbf{C}^{\Delta}$ есть блочное UL-разложение матрицы $\mathbf{Q}^{\Delta}$. Используя эти свойства, результаты для блочных LU-разложений легко переформулировать для UL-разложений.

Пусть матрица $\mathbf{Q}_{00}$ невырождена, тогда имеет место блочное *LU*-разложение

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{01} \\ \mathbf{Q}_{10} & \mathbf{Q}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{Q}_{10}\mathbf{Q}_{00}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{01} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{11} - \mathbf{Q}_{10}\mathbf{Q}_{00}^{-1}\mathbf{Q}_{01} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Если же невырождена матрица $\mathbf{Q}_{11}$, то имеет место блочное UL-разложение

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{01} \\ \mathbf{Q}_{10} & \mathbf{Q}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Q}_{01}\mathbf{Q}_{11}^{-1} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{00} - \mathbf{Q}_{01}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{10} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_{10} & \mathbf{Q}_{11} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Отсюда вытекает полезное равенство

$$\det(\mathbf{Q}_{00})\det(\mathbf{Q}_{11} - \mathbf{Q}_{10}\mathbf{Q}_{00}^{-1}\mathbf{Q}_{01}) = \det(\mathbf{Q}_{11})\det(\mathbf{Q}_{00} - \mathbf{Q}_{01}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{10}),$$

справедливое в случае невырожденности обеих матриц $\mathbf{Q}_{00}$ и $\mathbf{Q}_{11}$. В частности, для любой невырожденной матрицы $\mathbf{Z}$ и матриц $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ подходящих размеров имеем равенство

$$\det(\mathbf{Z} + \mathbf{XY}) = \det(\mathbf{Z})\det(\mathbf{I} + \mathbf{YZ}^{-1}\mathbf{X}). \quad (5.4)$$

В общем случае, если матрицы

$$\mathbf{Q}_{00}, \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{01} \\ \mathbf{Q}_{10} & \mathbf{Q}_{11} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{01} & \cdots & \mathbf{Q}_{0l-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Q}_{l-10} & \mathbf{Q}_{l-11} & \cdots & \mathbf{Q}_{l-1l-1} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

невырождены, для матрицы (5.1) существует единственное блочное LU-разложение $\mathbf{Q} = \mathbf{BC}$ с матрицей $\mathbf{B}$, имеющей единичные диагональные блоки [10]. Если же невырождены матрицы

$$\mathbf{Q}_{ll}, \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{l-1l-1} & \mathbf{Q}_{l-1l} \\ \mathbf{Q}_{ll-1} & \mathbf{Q}_{ll} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \cdots & \mathbf{Q}_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Q}_{l1} & \mathbf{Q}_{l2} & \cdots & \mathbf{Q}_{ll} \end{bmatrix}, \qquad (5.6)$$

для матрицы (5.1) существует единственное блочное UL-разложение $\mathbf{Q} = \mathbf{BC}$ с матрицей $\mathbf{B}$, имеющей единичные диагональные блоки.

В дальнейшем мы будем рассматривать только блочные треугольные разложения $\mathbf{Q} = \mathbf{BC}$ с матрицами $\mathbf{B}$, имеющими единичные диагональные блоки, и записывать их в виде $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{T})\mathbf{C}$, где блочно-треугольная матрица $\mathbf{T}$ имеет нулевые диагональные блоки.

По теореме 1.8 матрицы (5.5) и (5.6) невырождены, если матрица $\mathbf{Q}$ является неразложимой матрицей интенсивностей переходов. Поэтому для таких матриц существуют единственное блочное LU-разложение $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})\boldsymbol{\Psi}$ и единственное блочное UL-разложение $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\boldsymbol{\Phi}$. Блочные треугольные разложения матрицы $\mathbf{Q}$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & \bigcirc \\ -\mathbf{S}_{10} & \mathbf{I} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -\mathbf{S}_{m0} & \cdots & -\mathbf{S}_{m-11} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{00} & \boldsymbol{\Psi}_{01} & \cdots & \boldsymbol{\Psi}_{0m} \\ & \boldsymbol{\Psi}_{11} & \cdots & \boldsymbol{\Psi}_{1m} \\ & \bigcirc & \ddots & \vdots \\ & & & \boldsymbol{\Psi}_{mm} \end{bmatrix}$$

− блочное LU-разложение,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{R}_{01} & \cdots & -\mathbf{R}_{0m} \\ & \mathbf{I} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -\mathbf{R}_{m-1m} \\ & \bigcirc & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{00} & & \bigcirc & \\ \boldsymbol{\Phi}_{10} & \boldsymbol{\Phi}_{11} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \boldsymbol{\Phi}_{m0} & \boldsymbol{\Phi}_{m1} & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{mm} \end{bmatrix}$$

− блочное UL-разложение.

Рассматривая блочные матрицы, будем обозначать $\mathbf{u}_i$ векторы из единиц длины n_i так, что $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$ − вектор из единиц длины n.

Лемма 5.1. Если

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{01}\\ \mathbf{Q}_{10} & \mathbf{Q}_{11}\end{bmatrix}$$

– неразложимая матрица интенсивностей переходов, тогда в блочных треугольных разложениях (5.2), (5.3) матрицы

$$\mathbf{R}_{01}=-\mathbf{Q}_{01}\mathbf{Q}_{11}^{-1}, \qquad \mathbf{S}_{10}=-\mathbf{Q}_{10}\mathbf{Q}_{00}^{-1}$$

неотрицательны, а матрицы

$$\mathbf{\Phi}_{00}=\mathbf{Q}_{00}-\mathbf{Q}_{01}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{10}, \qquad \mathbf{\Psi}_{11}=\mathbf{Q}_{11}-\mathbf{Q}_{10}\mathbf{Q}_{00}^{-1}\mathbf{Q}_{01}$$

являются неразложимыми матрицами интенсивностей переходов.

Доказательство. Мы докажем лишь утверждения для матриц $\mathbf{S}_{10}$ и $\mathbf{\Psi}_{11}$, поскольку для матриц $\mathbf{R}_{01}$ и $\mathbf{\Phi}_{00}$ доказательство аналогично.

По теореме 1.8 матрица $\mathbf{Q}_{00}$ является невырожденной матрицей интенсивностей пуреходов, а по теореме 1.3 $\mathbf{Q}_{00}^{-1}\le 0$. Поскольку все элементы матриц $\mathbf{Q}_{01},\mathbf{Q}_{10}$ и внедиагональные элементы матрицы $\mathbf{Q}_{11}$ неотрицательны, то все элементы матрицы $\mathbf{S}_{10}=-\mathbf{Q}_{10}\mathbf{Q}_{00}^{-1}$ и внедиагональные элементы матрицы $\mathbf{\Psi}_{11}$ также неотрицательны.

Запишем условие $\mathbf{Qu}\le\mathbf{0}$ в виде

$$\mathbf{Q}_{00}\mathbf{u}_0+\mathbf{Q}_{01}\mathbf{u}_1\le\mathbf{0}, \tag{5.7}$$

$$\mathbf{Q}_{10}\mathbf{u}_0+\mathbf{Q}_{11}\mathbf{u}_1\le\mathbf{0}. \tag{5.8}$$

Используя неотрицательность матрицы $-\mathbf{Q}_{00}^{-1}$ и неравенство (5.7), получаем $-\mathbf{Q}_{00}^{-1}\mathbf{Q}_{01}\mathbf{u}_1\le\mathbf{u}_0$. Отсюда и из неравенства (5.8) теперь следует, что

$$\mathbf{\Psi}_{11}\mathbf{u}_1=\mathbf{Q}_{11}\mathbf{u}_1-\mathbf{Q}_{10}\mathbf{Q}_{00}^{-1}\mathbf{Q}_{01}\mathbf{u}_1\le\mathbf{Q}_{11}\mathbf{u}_1+\mathbf{Q}_{10}\mathbf{u}_0\le\mathbf{0}.$$

Таким образом $\mathbf{\Psi}_{11}$ − матрица интенсивностей переходов.

Предположим, что матрица $\mathbf{\Psi}_{11}$ разложима и пусть в соответствии с теоремой 1.4 полуположительный вектор $\mathbf{x}$

таков, что $\mathbf{\Psi}_{11}\mathbf{x}(k)=0$, если $\mathbf{x}(k)=0$. Тогда вектор

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}-\mathbf{Q}_{00}^{-1}\mathbf{Q}_{01}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}\end{bmatrix}$$

полуположителен. Если некоторая координата этого вектора равна 0, то соответствующая координата вектора

$$\mathbf{Qy}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{\Psi}_{11}\mathbf{x}\end{bmatrix}$$

также равна 0. По теореме 1.4 это означает разложимость матрицы $\mathbf{Q}$ и противоречит условию леммы. Поэтому матрица $\mathbf{\Psi}_{11}$ неразложима. ■

Теорема 5.1. Пусть $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})\mathbf{\Psi}$ есть блочное LU-разложение неразложимой матрицы интенсивностей переходов. Тогда матрица $\mathbf{S}$ неотрицательна, а $\mathbf{\Psi}$ является матрицей интенсивностей переходов. Нижний диагональный блок матрицы $\mathbf{\Psi}$ неразложим, а остальные диагональные блоки невырождены.

Доказательство. Для матрицы $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_{00}$ с одним диагональным блоком теорема очевидна, поскольку в этом случае $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{\Psi} = \mathbf{Q}$. Предположим, что теорема верна для матриц, имеющих m диагональных блоков, и покажем, что она верна для матриц с $m+1$ диагональными блоками.

Запишем равенство $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})\mathbf{\Psi}$ в виде

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_{00} & \tilde{\mathbf{Q}}_{01}\\ \tilde{\mathbf{Q}}_{10} & \tilde{\mathbf{Q}}_{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ -\tilde{\mathbf{S}}_{10} & \mathbf{I}-\tilde{\mathbf{S}}_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{\Psi}_{00} & \tilde{\mathbf{\Psi}}_{01}\\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{\Psi}}_{11}\end{bmatrix},$$

где $\tilde{\mathbf{S}}_{11}$ – нижняя блочно-треугольная матрица с нулевыми диагональными блоками, и $\tilde{\mathbf{\Psi}}_{11}$ – верхняя блочно-треугольная матрица. Отсюда следует, что

$$\mathbf{\Psi}_{00} = \mathbf{Q}_{00}, \tilde{\mathbf{\Psi}}_{01} = \tilde{\mathbf{Q}}_{01}, \tilde{\mathbf{S}}_{10} = \tilde{\mathbf{Q}}_{01}\mathbf{Q}_{00}^{-1}, \tag{5.9}$$

$$(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}_{11})\tilde{\mathbf{\Psi}}_{11} = \tilde{\mathbf{Q}}_{11} + \tilde{\mathbf{S}}_{10}\mathbf{\Psi}_{01} = \tilde{\mathbf{Q}}_{11} + \tilde{\mathbf{Q}}_{10}\mathbf{Q}_{00}^{-1}\tilde{\mathbf{Q}}_{01}. \tag{5.10}$$

Равенство (5.10) есть блочное LU-разложение матрицы $\tilde{\mathbf{Q}}_{11} + \tilde{\mathbf{Q}}_{10}\mathbf{Q}_{00}^{-1}\tilde{\mathbf{Q}}_{01}$, имеющей l диагональных блоков. Согласно лемме 5.1 эта матрица является неразложимой матрицей интенсивностей переходов. По сделанному предположению $\tilde{\mathbf{S}}_{11}$ неотрицательна, $\tilde{\mathbf{\Psi}}_{11}$ является матрицей интенсивностей переходов, нижний её диагональный блок неразложим, а остальные диагональные блоки невырождены.

Из равенств (5.9)-(5.10) вытекает, что верхний диагональный блок матрицы $\mathbf{\Psi}$ невырожден, матрица $\tilde{\mathbf{\Psi}}_{11}$ неотрицательна, $\mathbf{\Psi}_{00}$ является матрицей интенсивностей переходов и справедливо неравенство

$$\mathbf{\Psi}_{00}\mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{\Psi}}_{01}\mathbf{u}_1 = \mathbf{Q}_{00}\mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{Q}}_{01}\mathbf{u}_1 \le \mathbf{0}.$$

Следовательно, $\mathbf{\Psi}$ является матрицей интенсивностей переходов. Поскольку $\tilde{\mathbf{Q}}_{01} \ge \mathbf{0}$ и $\mathbf{Q}_{00}^{-1} \le 0$, то из равенства (5.10) вытекает, что $\tilde{\mathbf{S}}_{10} \ge \mathbf{0}$, и, следовательно, матрица $\mathbf{S}$ неотрицательна. Таким образом, теорема 5.1 верна и для блочных матриц с $m+1$ диагональным блоком. ■

<u>Теорема 5.2.</u> Пусть $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})\mathbf{\Psi}$ есть блочное LU-разложение неразложимой консервативной матрицы интенсивностей переходов. Тогда вектор $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)$ является решением системы уравнений равновесия $\mathbf{x}^T\mathbf{Q} = \mathbf{0}^T$, если и только если

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_m^T\mathbf{\Psi}_{mm} = \mathbf{0}^T, \\ &\mathbf{x}_k^T = \sum_{i=k+1}^{m} \mathbf{x}_i^T\mathbf{S}_{ik}, \quad k = m-1, m-2, ..., 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

<u>Доказательство.</u> Положим $\mathbf{y}^T = \mathbf{x}^T(\mathbf{I} - \mathbf{S})$, т.е.

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{x}_m, \quad \mathbf{y}_k^T = \mathbf{x}_k^T - \sum_{i=k+1}^{m} \mathbf{x}_i^T\mathbf{S}_{ik}, \quad k = 0, 1, ..., m-1. \tag{5.12}$$

Вектор $\mathbf{x}$ является решением системы уравнений $\mathbf{x}^T\mathbf{Q} = \mathbf{0}^T$, если и только если вектор $\mathbf{y}$ удовлетворяет системе уравнений $\mathbf{y}^T\mathbf{\Psi} = \mathbf{0}^T$, т.е.

$$\mathbf{y}_0^T\mathbf{\Psi}_{00} = \mathbf{0}^T, \quad \mathbf{y}_k^T\mathbf{\Psi}_{kk} = -\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{y}_i^T\mathbf{\Psi}_{ik}, \quad k = 1, 2, ..., m.$$

Поскольку по теореме 5.1 при $k \neq m$ матрицы $\mathbf{\Psi}_{kk}$ невырождены, полученные равенства эквивалентны следующим:

$$\mathbf{y}_m^T\mathbf{\Psi}_{mm} = \mathbf{0}^T, \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, ..., m-1,$$

что с учетом равенств (5.12) приводит к формулам (5.11). ■

Согласно теореме 5.1, если $\mathbf{Q}$ − неразложимая консервативная матрица интенсивностей переходов, то и $\mathbf{\Psi}_{mm}$ является консервативной матрицей интенсивностей переходов. Используя блочное LU-разложение для решения системы уравнений равновесия с неразложимой матрицей $\mathbf{Q}$, мы сводим ее к другой системе уравнений равновесия с неразложимой матрицей $\mathbf{\Psi}_{mm}$, но уже меньшего порядка. Решение системы уравнений равновесия $\mathbf{x}_m^T\mathbf{\Psi}_{mm} = \mathbf{0}^T$ может быть выбрано положительным, например, удовлетворяющим условию $\mathbf{x}_m^T\mathbf{u}_m = 1$. Тогда, согласно теореме 1.10, положительным будет весь вектор $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)$. Найдя подвектор $\mathbf{x}_m$ вектора $\mathbf{x}$, по формулам (5.11) с неотрицательными матричными коэффициентами $\mathbf{S}_{ik}$ последовательно определяем остальные положительные векторы $\mathbf{x}_{m-1}, \mathbf{x}_{m-2}, ..., \mathbf{x}_0$. По завершении этого процесса остается нормализовать вектор $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)$, чтобы получить решение, удовлетворяющее условию $\mathbf{x}^T\mathbf{u} = 1$.

Результаты, аналогичные теоремам 5.1 и 5.2, справедливы и для UL-разложений.

Теорема 5.3. Пусть $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{\Phi}$ есть блочное UL-разложение неразложимой матрицы интенсивностей переходов. Тогда $\mathbf{R}$ неотрицательна, а $\mathbf{\Phi}$ является матрицей интенсивностей переходов. Верхний диагональный блок матрицы $\mathbf{\Phi}$ неразложим, а остальные диагональные блоки невырождены.

Теорема 5.4. Пусть $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{\Phi}$ есть блочное UL-разложение неразложимой консервативной матрицы интенсивностей переходов. Тогда вектор $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)$ является решением системы уравнений $\mathbf{x}^T\mathbf{Q} = \mathbf{0}^T$, если и только если

$$\mathbf{x}_0^T\mathbf{\Phi}_{00} = \mathbf{0}^T, \quad \mathbf{x}_k^T = \sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{x}_i^T\mathbf{R}_{ik}, \quad k = 1, 2, ..., m. \tag{5.13}$$

Приравняв блоки в левой и правой частях равенства $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})\mathbf{\Psi}$, получим для блоков LU-разложения следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Psi}_{rj} = \mathbf{Q}_{rj} + \sum_{k=0}^{r-1}\mathbf{S}_{rk}\mathbf{\Psi}_{kj}, \quad r \le j \le m, \\ &\mathbf{S}_{ir} = -(\mathbf{Q}_{ir} + \sum_{k=0}^{r-1}\mathbf{S}_{ik}\mathbf{\Psi}_{kr})\mathbf{\Psi}_{rr}^{-1}, \quad r < i \le m, \quad r = 0,1,...,m. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Аналогичные формулы справедливы для блоков UL-разложения $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{\Phi}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Phi}_{rj} = \mathbf{Q}_{rj} + \sum_{k=r+1}^{m}\mathbf{R}_{rk}\mathbf{\Phi}_{kj}, \qquad 0 \le j \le r, \\ &\mathbf{R}_{ir} = -(\mathbf{Q}_{ir} + \sum_{k=r+1}^{m}\mathbf{R}_{ik}\mathbf{\Phi}_{kr})\mathbf{\Phi}_{rr}^{-1}, \quad 0 \le i < r, \quad r = m, m-1, ..., 0. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Заметим, что в формулах (5.14), (5.15) матрицы $-\mathbf{\Psi}_{rr}^{-1}$ и $-\mathbf{\Phi}_{rr}^{-1}$, а также все слагаемые в суммах являются неотрицательными матрицами.

5.2. Блочные почти треугольные матрицы

Блочная матрица $\mathbf{Q}$ называется *блочной верхней почти треугольной*, если $\mathbf{Q}_{ij} = 0$ для $i > j+1$, и называется *блочной нижней почти треугольной*, если $\mathbf{Q}_{ij} = 0$ для $j > i+1$. В этом разделе мы рассмотрим системы уравнений равновесия с блочной верхней почти треугольной матрицей

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{01} & \cdots & \mathbf{Q}_{0m} \\ \mathbf{C}_0 & \mathbf{Q}_{11} & \cdots & \mathbf{Q}_{1m} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & \mathbf{C}_{m-1} & \mathbf{Q}_{mm} \end{bmatrix}. \qquad (5.16)$$

При этом будем использовать следующие обозначения:

$$\boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{C}_{i-1}\mathbf{u}_{i-1}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{ij} = \sum_{k=j}^{m} \mathbf{Q}_{ik}\mathbf{u}_k, \quad 0 \le i < j \le m .$$

Из формул (5.14) следует, что матрица $\mathbf{S}$ блочного LU-разложения $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})\boldsymbol{\Psi}$ неразложимой матрицы интенсивностей переходов (5.16) имеет следующий вид:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & \bigcirc \\ \mathbf{S}_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \bigcirc & & \mathbf{S}_m & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (5.17)$$

Отличные от $\mathbf{0}$ блоки матриц $\mathbf{S}$ и $\boldsymbol{\Psi}$ удовлетворяют равенствам:

$$\boldsymbol{\Psi}_{0j} = \mathbf{Q}_{0j},\ 0 \le j \le m; \qquad (5.18)$$

$$\mathbf{S}_r = -\mathbf{C}_{r-1}\boldsymbol{\Psi}_{r-1r-1}^{-1},$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{rj} = \mathbf{Q}_{rj} + \mathbf{S}_r\boldsymbol{\Psi}_{r-1j}, \quad r \le j \le m,\ r = 1,2,\dots,m, \qquad (5.19)$$

и формулы (5.11), дающие решение системы уравнений равновесия $\mathbf{x}^T\mathbf{Q} = \mathbf{0}^T$, существенно упрощаются. Вектор $\mathbf{x}^T = (\mathbf{x}_0^T, \mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_m^T)$ является решением системы уравнений

$\mathbf{x}^T\mathbf{Q}=\mathbf{0}^T$ с неразложимой консервативной матрицей интенсивностей переходов вида (5.16), если и только если

$$\mathbf{x}_m^T\mathbf{\Psi}_{mm}=\mathbf{0}^T, \quad \mathbf{x}_k^T=\mathbf{x}_{k+1}^T\mathbf{S}_{k+1}, \quad k=m-1,m-2,\dots,0. \quad (5.20)$$

Рассмотрим подробнее случай, когда все блоки матрицы $\mathbf{Q}$ имеют одинаковые размеры, а ее поддиагональные блоки невырождены.

Лемма 5.2. Пусть $\mathbf{Q}=(\mathbf{I}-\mathbf{S})\mathbf{\Psi}$ есть блочное LU-разложение неразложимой матрицы интенсивностей переходов вида (5.16). Невырожденность поддиагональных блоков матрицы $\mathbf{Q}$ необходима и достаточна для невырожденности поддиагональных блоков матрицы $\mathbf{S}$. В этом случае матрицы

$$\mathbf{H}_0=\mathbf{I}, \quad \mathbf{H}_k=(\mathbf{S}_k\mathbf{S}_{k-1}\dots\mathbf{S}_1)^{-1}, \quad 1\le k\le m, \quad (5.21)$$

удовлетворяют равенствам

$$\mathbf{H}_i\mathbf{W}_{ij}=\sum_{k=0}^{i}\mathbf{H}_k\mathbf{Q}_{kj}, \quad 0\le i\le j\le m, \quad (5.22)$$

$$\mathbf{H}_{j+1}=-\sum_{k=0}^{j}\mathbf{H}_k\mathbf{Q}_{kj}\mathbf{C}_j^{-1}, \quad 0\le j<m. \quad (5.23)$$

Доказательство. Первое утверждение леммы 5.2 следует из формул (5.19). Докажем равенства (5.22), (5.23). Нетрудно видеть, что блоки матрицы

$$\mathbf{Y}=(\mathbf{I}-\mathbf{S})^{-1}=\mathbf{I}+\mathbf{S}+\dots+\mathbf{S}^{m-1}, \quad (5.24)$$

имеют следующий вид:

$$\mathbf{Y}_{ij}=\begin{cases}\mathbf{S}_i\mathbf{S}_{i-1}\dots\mathbf{S}_{j+1}, & i>j,\\ \mathbf{I}, & i=j,\\ \mathbf{0}, & i<j.\end{cases} \quad (5.25)$$

Поскольку $\mathbf{\Psi}=(\mathbf{I}-\mathbf{S})^{-1}\mathbf{Q}=\mathbf{YQ}$, то, приравняв соответствующие блоки матриц $\mathbf{YQ}$ и $\mathbf{\Psi}$, получим

$$\sum_{k=0}^{i} \mathbf{Y}_{ik}\mathbf{Q}_{kj} = \mathbf{\Psi}_{ij}, \quad i \le j, \tag{5.26}$$

$$\sum_{k=0}^{j} \mathbf{Y}_{lk}\mathbf{Q}_{kj} + \mathbf{Y}_{lj+1}\mathbf{C}_{j} = 0, \quad j < m. \tag{5.27}$$

Из определения матриц $\mathbf{H}_k$ и формул (5.25) вытекает справедливость равенств

$$\mathbf{H}_i\mathbf{Y}_{ij} = \mathbf{H}_j, \quad i \ge j. \tag{5.28}$$

Умножив обе части равенств (5.26) и (5.27) слева соответственно на $\mathbf{H}_i$ и $\mathbf{H}_l$ и воспользовавшись соотношениями (5.28), получим равенства (5.22) и (5.23). ■

Следствие 5.1. Пусть $\mathbf{Q}$ – неразложимая матрица интенсивностей переходов вида (5.16) с невырожденными поддиагональными блоками и

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{H}_{j+1} = -\sum_{k=0}^{j} \mathbf{H}_k\mathbf{Q}_{kj}\mathbf{C}_j^{-1}, \quad j = 0,1,...,m-1. \tag{5.29}$$

Тогда матрицы $\mathbf{H}_k$ невырождены и неотрицательно обратимы, $\mathbf{H}_k^{-1} \ge 0$.

Действительно, по лемме 5.2 рекуррентные формулы (5.29) определяют матрицы $\mathbf{H}_k = (\mathbf{S}_k\mathbf{S}_{k-1}...\mathbf{S}_1)^{-1}$, где согласно теореме 5.1 все сомножители $\mathbf{S}_i$ неотрицательны.

Теорема 5.5. Пусть $\mathbf{Q}$ – неразложимая консервативная матрица интенсивностей переходов вида (5.16) с невырожденными поддиагональными блоками, матрицы $\mathbf{H}_k$ определяются формулами (5.29) и

$$\mathbf{G} = \sum_{k=0}^{m} \mathbf{H}_k\mathbf{Q}_{kl}. \tag{5.30}$$

Тогда $\mathbf{Gu}_l = \mathbf{0}$ и вектор $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)$ является решением системы уравнений равновесия $\mathbf{x}^T\mathbf{Q} = \mathbf{0}^T$, если и только если

$$\mathbf{x}_0^T\mathbf{G} = \mathbf{0}^T, \quad \mathbf{x}_k^T = \mathbf{x}_0^T\mathbf{H}_k,\ 1 \le k \le m. \qquad (5.31)$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})\mathbf{\Psi}$ есть блочное LU-разложение матрицы $\mathbf{Q}$. Согласно лемме 5.2 $\mathbf{H}_k = (\mathbf{S}_k\mathbf{S}_{k-1}...\mathbf{S}_1)^{-1}$ и $\mathbf{G} = \mathbf{H}_m\mathbf{\Psi}_{mm}$. Из равенства $\mathbf{Qu} = \mathbf{0}$ вытекает $\mathbf{\Psi u} = \mathbf{0}$ и, в частности, $\mathbf{\Psi}_{mm}\mathbf{u}_m = \mathbf{0}$. Поэтому $\mathbf{Gu}_m = \mathbf{0}$.

Согласно формулам (5.20) вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет системе уравнений равновесия $\mathbf{x}^T\mathbf{Q} = \mathbf{0}^T$, если и только если $\mathbf{x}_m^T\mathbf{\Psi}_{mm} = \mathbf{0}^T$ и $\mathbf{x}_0^T = \mathbf{x}_k^T\mathbf{S}_k\mathbf{S}_{k-1}...\mathbf{S}_1$, $k = 1, 2, ..., m$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{x}_k^T = \mathbf{x}_0^T\mathbf{H}_k$, $k = 1, 2, ..., m$, и $\mathbf{x}_0^T\mathbf{G} = \mathbf{x}_0^T\mathbf{H}_m\mathbf{\Psi}_{mm} = \mathbf{x}_m^T\mathbf{\Psi}_{mm} = \mathbf{0}^T$. ■

Алгоритм решения систем уравнений равновесия, основанный на теореме 5.5, является вариантом обобщенного (блочного) алгоритма Гаусса [7]. Он был применён к блочным трехдиагональным матрицам интенсивностей переходов в [3], а затем и к блочным почти треугольным матрицам в [27].

Из формул (5.15) следует, что матрица $\mathbf{\Phi}$ блочного UL-разложения $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{\Phi}$ неразложимой матрицы (5.16) имеет вид

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_0 & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_0 & \mathbf{\Phi}_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{C}_{m-1} & \mathbf{\Phi}_m \end{bmatrix}, \qquad (5.32)$$

причем поддиагональные блоки матриц $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{\Phi}$ совпадают. Диагональные блоки матрицы $\mathbf{\Phi}$ и блоки матрицы $\mathbf{R}$ могут быть определены по следующим формулам:

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Phi}_m = \mathbf{Q}_{mm}, \quad \mathbf{R}_{im} = -\mathbf{Q}_{im}\mathbf{\Phi}_m^{-1}, \quad 0 \le i < m; \\ &\mathbf{\Phi}_r = \mathbf{Q}_{rr} + \mathbf{R}_{rr+1}\mathbf{C}_r, \end{aligned} \qquad (5.33)$$

$$\mathbf{R}_{ir} = -(\mathbf{Q}_{ir} + \mathbf{R}_{ir+1}\mathbf{C}_r)\mathbf{\Phi}_r^{-1}, \quad 0 \le i < r, \quad r = m-1, m-2, ..., 0.$$

Из этих формул вытекают следующие полезные равенства.

Лемма 5.3. Пусть $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{\Phi}$ есть блочное UL-разложение неразложимой консервативной матрицы интенсивностей переходов вида (5.16). Тогда

$$\mathbf{\Phi}_0\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Phi}_r\mathbf{u}_r = -\boldsymbol{\mu}_r, \quad 1 \le r \le m, \tag{5.34}$$

$$\mathbf{R}_{ir}\boldsymbol{\mu}_r = \boldsymbol{\lambda}_{ir}, \quad i < r, \quad 1 \le r \le m. \tag{5.35}$$

Доказательство. Действительно, из равенства $\mathbf{Qu} = \mathbf{0}$ следует $\mathbf{\Phi u} = \mathbf{0}$. Поскольку матрица $\mathbf{\Phi}$ имеет вид (5.32), справедливы равенства (5.34). Из соотношений (5.33) вытекает, что

$$\mathbf{R}_{im}\mathbf{\Phi}_m = -\mathbf{Q}_{im}, \quad i < m,$$

$$\mathbf{R}_{ir}\mathbf{\Phi}_r = -(\mathbf{Q}_{ir} + \mathbf{R}_{ir+1}\mathbf{C}_r), \quad i < r, \quad r = m-1, m-2, ..., 0.$$

Умножая обе части этих равенств справа на векторы $\mathbf{u}_r$ и воспользовавшись равенствами (5.34), получим

$$\mathbf{R}_{im}\boldsymbol{\mu}_m = \mathbf{Q}_{im}\mathbf{u}_m, \quad i < m,$$

$$\mathbf{R}_{ir}\boldsymbol{\mu}_r = \mathbf{Q}_{ir}\mathbf{u}_r + \mathbf{R}_{ir+1}\boldsymbol{\mu}_{r+1}, \quad i < r, \quad r = m-1, m-2, ..., 0.$$

Из этих рекуррентных формул и следуют равенства (5.35). ■

Пусть поддиагональные блоки блочной почти треугольной матрицы $\mathbf{Q}$ имеют ранг 1. В [14] было получено решение систем линейных уравнений с блочными трехдиагональными матрицами $\mathbf{Q}$, обладающими таким свойством. Равенства (5.33) позволяют выписать явные выражения для блоков матриц $\mathbf{R}$ и $\mathbf{\Phi}$ UL-разложения блочной почти треугольной матрицы $\mathbf{Q}$.

Теорема 5.6. Пусть $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{\Phi}$ есть блочное UL-разложение неразложимой консервативной матрицы интенсивностей переходов вида (5.16), поддиагональные блоки которой имеют ранг 1:

$$\mathbf{C}_k = \boldsymbol{\mu}_{k+1}\boldsymbol{\beta}_k^T, \quad k = 0, 1, ..., m-1,$$

где $\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{u}_k = 1$.Тогда

$$\boldsymbol{\Phi}_m = \mathbf{Q}_{mm}, \quad \boldsymbol{\Phi}_r = \mathbf{Q}_{rr} + \boldsymbol{\lambda}_{rr+1}\boldsymbol{\beta}_r^T, \quad 0 \le r < m;$$
$$\mathbf{R}_{im} = -\mathbf{Q}_{im}\boldsymbol{\Phi}_m^{-1}, \quad i < m, \tag{5.36}$$
$$\mathbf{R}_{ir} = -(\mathbf{Q}_{ir} + \boldsymbol{\lambda}_{ir+1}\boldsymbol{\beta}_r^T)\boldsymbol{\Phi}_r^{-1}, \quad i < r, \quad 0 \le r < m.$$

5.3. Блочные трехдиагональные матрицы

Матрица $\mathbf{Q}$ называется *блочной трехдиагональной*, если $\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{0}$ при $|i - j| > 1$. В этом разделе мы рассмотрим системы уравнений равновесия с блочной трехдиагональной матрицей

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_1 & & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_0 & \mathbf{B}_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mathbf{A}_m \\ \mathbf{0} & & \mathbf{C}_{m-1} & \mathbf{B}_m \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

и будем использовать следующие обозначения:

$$\boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{C}_{i-1}\mathbf{u}_{i-1}, \quad \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{A}_{i+1}\mathbf{u}_{i+1}.$$

При этом для матриц, удовлетворяющих условию $\mathbf{Qu} = \mathbf{0}$, будем иметь

$$\mathbf{B}_i\mathbf{u}_i = -(\boldsymbol{\lambda}_i + \boldsymbol{\mu}_i).$$

Если неразложимая матрица интенсивностей переходов является блочной трехдиагональной, то её блочные треугольные разложения имеют следующий вид:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & \mathbf{0} \\ -\mathbf{S}_1 & \mathbf{I} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & -\mathbf{S}_m & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_0 & \mathbf{A}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \boldsymbol{\Psi}_{m-1} & \mathbf{A}_m \\ \mathbf{0} & & & \boldsymbol{\Psi}_m \end{bmatrix}$$

− LU-разложение,

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & -\mathbf{R}_0 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \mathbf{I} & -\mathbf{R}_{m-1}\\ \mathbf{0} & & & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{\Phi}_0 & & & \mathbf{0}\\ \mathbf{C}_0 & \mathbf{\Phi}_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{C}_{m-1} & \mathbf{\Phi}_m\end{bmatrix}$$

− UL-разложение.

Такой простой вид блочных треугольных разложений следует из формул (5.14), (5.15). Из этих же формул вытекают следующие рекуррентные формулы:

$$\mathbf{\Psi}_0=\mathbf{B}_0,$$
$$\mathbf{S}_r=-\mathbf{C}_{r-1}\mathbf{\Psi}_{r-1}^{-1},\quad \mathbf{\Psi}_r=\mathbf{B}_r+\mathbf{S}_r\mathbf{A}_r,\quad r=1,2,...,m; \tag{5.38}$$

$$\mathbf{\Phi}_m=\mathbf{B}_m,$$
$$\mathbf{R}_r=-\mathbf{A}_{r+1}\mathbf{\Phi}_{r+1}^{-1},\quad \mathbf{\Phi}_r=\mathbf{B}_r+\mathbf{R}_r\mathbf{C}_r,\quad r=m-1,m-2...,0. \tag{5.39}$$

Пусть $\mathbf{Q}$ − неразложимая консервативная матрица интенсивностей переходов. В этом случае матрицы $\mathbf{\Psi}$ и $\mathbf{\Phi}$ в блочных треугольных разложениях также являются консервативными матрицами интенсивностей переходов. Поэтому для диагональных блоков этих матриц справедливы равенства

$$\mathbf{\Psi}_m\mathbf{u}_m=\mathbf{0},\quad \mathbf{\Psi}_r\mathbf{u}_r=-\boldsymbol{\lambda}_r,\quad 0\le r\le m-1, \tag{5.40}$$
$$\mathbf{\Phi}_0\mathbf{u}_0=\mathbf{0},\quad \mathbf{\Phi}_r\mathbf{u}_r=-\boldsymbol{\mu}_r,\quad 1\le r\le m. \tag{5.41}$$

Отсюда и из формул (5.2), (5.3) вытекает, что

$$\mathbf{S}_r\boldsymbol{\lambda}_{r-1}=\boldsymbol{\mu}_r,\quad 1\le r\le m, \tag{5.42}$$
$$\mathbf{R}_r\boldsymbol{\mu}_{r+1}=\boldsymbol{\lambda}_r,\quad 0\le r\le m-1. \tag{5.43}$$

Рассмотрим систему уравнений равновесия с блочной трехдиагональной матрицей:

$$\mathbf{x}_0\mathbf{B}_0+\mathbf{x}_1\mathbf{C}_0=\mathbf{0}, \tag{5.44}$$
$$\mathbf{x}_{k-1}\mathbf{A}_k+\mathbf{x}_k\mathbf{B}_k+\mathbf{x}_{k+1}\mathbf{C}_k=\mathbf{0},\ 1\le k\le m-1, \tag{5.45}$$
$$\mathbf{x}_{m-1}\mathbf{A}_m+\mathbf{x}_m\mathbf{B}_m=\mathbf{0}. \tag{5.46}$$

Используя блочные треугольные раложения и теоремы 5.2 и 5.4, её решение можно записать в матрично-мультипликативном виде

$$\mathbf{x}_k^T = \mathbf{x}_0^T \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1 \cdots \mathbf{R}_{k-1}, \quad 1 \le k \le m, \tag{5.47}$$

где матрицы $\mathbf{R}_k$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\mathbf{R}_m = \mathbf{0},\ \mathbf{R}_{r-1} = -\mathbf{A}_r(\mathbf{B}_r + \mathbf{R}_r\mathbf{C}_r)^{-1}, \ \ r = m, m-1, ..., 1, \tag{5.48}$$

либо в другом матрично-мультипликативном виде

$$\mathbf{x}_k^T = \mathbf{x}_m^T \mathbf{S}_m \mathbf{S}_{m-1} \cdots \mathbf{S}_{k+1}, \quad 0 \le k \le m-1, \tag{5.49}$$

где матрицы $\mathbf{S}_k$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{0},\ \mathbf{S}_{r+1} = -\mathbf{C}_r(\mathbf{B}_r + \mathbf{S}_r\mathbf{A}_r)^{-1}, \quad r = 0, 1, ..., m-1. \tag{5.50}$$

При этом векторы $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_m$ являются единственными, с точностью до постоянного множителя, решениями систем уравнений равновесия

$$\mathbf{x}_0^T(\mathbf{B}_0 + \mathbf{R}_0\mathbf{C}_0) = \mathbf{0}^T, \quad \mathbf{x}_m^T(\mathbf{B}_m + \mathbf{S}_m\mathbf{A}_m) = \mathbf{0}^T. \tag{5.51}$$

Оказывается, если в рекуррентных формулах (5.48) и (5.50) в качестве начальных матриц $\mathbf{R}_m$ и $\mathbf{S}_0$ взяты матрицы, отичные от нулевой, то вычисленные матрицы $\mathbf{R}_k$ и $\mathbf{S}_k$ всё же можно использовать для решения системы уравнений равновесия. Мы обсудим это в следующем разделе.

5.4. Векторные разностные уравнения

В этом разделе, следуя работе [9], мы исследуем систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{x}_{k-1}\mathbf{A}_k + \mathbf{x}_k\mathbf{B}_k + \mathbf{x}_{k+1}\mathbf{C}_k = \mathbf{b}_k, \quad 1 \le k \le m-1, \tag{5.52}$$

с произвольными матрицами $\mathbf{A}_k$ размера $n_{k-1} \times n_k$, $\mathbf{B}_k$ размера $n_k \times n_k$, $\mathbf{C}_k$ размера $n_{k+1} \times n_k$ и векторами $\mathbf{b}_k$ длины n_k. При этом будем использовать следующие обозначения для произведений матриц:

$$\prod_{i=k}^{n}\mathbf{H}_i=\begin{cases}\mathbf{H}_k\mathbf{H}_{k+1}\cdots\mathbf{H}_n, & k\le n,\\ \mathbf{I} & k>n,\end{cases}$$

$$\coprod_{i=k}^{n}\mathbf{H}_i=\begin{cases}\mathbf{H}_n\mathbf{H}_{n-1}\cdots\mathbf{H}_k, & k\le n,\\ \mathbf{I} & k>n.\end{cases}$$

Лемма 5.4. Пусть некоторые матрицы $\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_2,\ldots,\mathbf{S}_m$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\mathbf{S}_{k+1}=-\mathbf{C}_k(\mathbf{B}_k+\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k)^{-1},\quad k=1,2,...,m-1. \tag{5.53}$$

Тогда векторы $\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m$ образуют решение системы уравнений (5.52), если и только если существует вектор $\mathbf{b}_0$ длины n_0, при котором справедливы равенства:

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{x}_{k+1}\mathbf{S}_{k+1}-\sum_{i=0}^{k}\mathbf{b}_i\mathbf{W}_i\prod_{j=i+1}^{k}(\mathbf{A}_j\mathbf{W}_j),\ 0\le k<m, \tag{5.54}$$

где

$$\mathbf{W}_0=\mathbf{I},\ \mathbf{W}_k=-(\mathbf{B}_k+\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k)^{-1},\ 0<k<m. \tag{5.55}$$

При этом всегда $\mathbf{b}_0=\mathbf{x}_1\mathbf{S}_1-\mathbf{x}_0$.

Доказательство. Пусть векторы $\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m$ образуют решение системы уравнений (5.52). Тогда для всех $0<k<m$ справедливо равенство

$$(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_{k+1}\mathbf{S}_{k+1})(\mathbf{B}_k+\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k)+(\mathbf{x}_{k-1}-\mathbf{x}_k\mathbf{S}_k)\mathbf{A}_k=\mathbf{b}_k,$$

из которого вытекает следующее рекуррентное соотношение:

$$\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_{k+1}\mathbf{S}_{k+1}=(\mathbf{x}_{k-1}-\mathbf{x}_k\mathbf{S}_k)\mathbf{A}_k\mathbf{W}_k-\mathbf{b}_k\mathbf{W}_k,\quad 0<k<m.$$

Отсюда, в свою очередь, следуют равенства (5.54), в которых $\mathbf{b}_0=\mathbf{x}_1\mathbf{S}_1-\mathbf{x}_0$.

С другой стороны, если векторы $\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m$ удовлетворяют равенствам (5.54), тогда для всех $0<k<m$ справедливы равенства

$$\mathbf{x}_{k-1}=\mathbf{x}_k\mathbf{S}_k-\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{b}_i\mathbf{W}_i\prod_{j=i+1}^{k-1}(\mathbf{A}_j\mathbf{W}_j)=$$

$$= \mathbf{x}_{k+1}\mathbf{S}_{k+1}\mathbf{S}_k - \left(\sum_{i=0}^{k} \mathbf{b}_i \mathbf{W}_i \prod_{j=i+1}^{k} (\mathbf{A}_j \mathbf{W}_j) \right) \mathbf{S}_k - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{b}_i \mathbf{W}_i \prod_{j=i+1}^{k-1} (\mathbf{A}_j \mathbf{W}_j).$$

Поэтому имеем

$$\mathbf{x}_{k-1}\mathbf{A}_k + \mathbf{x}_k\mathbf{B}_k + \mathbf{x}_{k+1}\mathbf{C}_k =$$

$$= \left(\mathbf{x}_{k+1}\mathbf{S}_{k+1}\mathbf{S}_k - \left(\sum_{i=0}^{k} \mathbf{b}_i \mathbf{W}_i \prod_{j=i+1}^{k} (\mathbf{A}_j \mathbf{W}_j) \right) \mathbf{S}_k - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{b}_i \mathbf{W}_i \prod_{j=i+1}^{k-1} (\mathbf{A}_j \mathbf{W}_j) \right) \mathbf{A}_k +$$

$$+ \left(\mathbf{x}_{k+1}\mathbf{S}_{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \mathbf{b}_i \mathbf{W}_i \prod_{j=i+1}^{k} (\mathbf{A}_j \mathbf{W}_j) \right) \mathbf{B}_k + \mathbf{x}_{k+1}\mathbf{C}_k =$$

$$= \mathbf{x}_{k+1}(\mathbf{S}_{k+1}\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k + \mathbf{S}_{k+1}\mathbf{B}_k + \mathbf{C}_k) - \mathbf{b}_k\mathbf{W}_k(\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k) -$$

$$- \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{b}_i \mathbf{W}_i \left(\prod_{j=i+1}^{k-1} (\mathbf{A}_j \mathbf{W}_j) \right) \mathbf{A}_k [\mathbf{I} + \mathbf{W}_k(\mathbf{B}_k + \mathbf{S}_k\mathbf{A}_k)] = \mathbf{b}_k.$$

Кроме того, из равенств (5.54) при $k = 0$ вытекает равенство $\mathbf{b}_0 = \mathbf{x}_1\mathbf{S}_1 - \mathbf{x}_0$. ■

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 5.5. Пусть некоторые матрицы $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_{m-1}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\mathbf{R}_{k-1} = -\mathbf{A}_k(\mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k\mathbf{C}_k)^{-1}, \quad k = m-1, m-2, \ldots, 1. \quad (5.56)$$

Тогда векторы $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ образуют решение системы уравнений (5.52), если и только если существует вектор $\mathbf{b}_m$ длины n_m, при котором справедливы равенства:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1} - \sum_{i=k}^{m} \mathbf{b}_i \mathbf{V}_i \prod_{j=k}^{i-1} (\mathbf{C}_j \mathbf{V}_j), \; 0 < k < m, \quad (5.57)$$

где

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{0}, \quad \mathbf{V}_k = -(\mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k\mathbf{C}_k)^{-1}, \; 0 < k < m. \quad (5.58)$$

При этом всегда $\mathbf{b}_m = \mathbf{x}_{m-1}\mathbf{R}_{m-1} - \mathbf{x}_m$.

Нетрудно проверить, что для любых матриц $\mathbf{S}_k$ и $\mathbf{R}_k$, удовлетворяющих соотношениям (5.53) и (5.56), выполняются следующие равенства:

$$\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k+\mathbf{B}_k+\mathbf{R}_k\mathbf{C}_k=(\mathbf{I}-\mathbf{R}_k\mathbf{S}_{k+1})(\mathbf{B}_k+\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k)= \tag{5.59}$$

$$=(\mathbf{I}-\mathbf{S}_k\mathbf{R}_{k-1})(\mathbf{B}_k+\mathbf{R}_k\mathbf{C}_k),\quad 0<k<m.$$

Отсюда вытекает, что при невырожденной матрице $\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k+\mathbf{B}_k+\mathbf{R}_k\mathbf{C}_k$ невырожденными также будут матрицы $\mathbf{I}-\mathbf{R}_k\mathbf{S}_{k+1}$ и $\mathbf{I}-\mathbf{S}_k\mathbf{R}_{k-1}$.

Теорема 5.7. Пусть матрицы $\mathbf{S}_1,\ldots,\mathbf{S}_m$ и $\mathbf{R}_0,\ldots,\mathbf{R}_{m-1}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям (5.53) и (5.56). Тогда векторы

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{g}_k+\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{g}_i\prod_{j=i}^{k-1}\mathbf{R}_j+\sum_{i=k+1}^{m}\mathbf{g}_i\prod_{j=k+1}^{i}\mathbf{S}_j,\ 0\le k\le m, \tag{5.60}$$

удовлетворяют системе уравнений (5.52) тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\ldots,\mathbf{g}_{m-1}$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k+\mathbf{B}_k+\mathbf{R}_k\mathbf{C}_k)=\mathbf{f}_k,\ 0<k<m. \tag{5.61}$$

Если матрицы $\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k+\mathbf{B}_k+\mathbf{R}_k\mathbf{C}_k,\ 0<k<m$, невырождены, то для любого решения $\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m$ системы уравнений (5.52) векторы $\mathbf{g}_0,\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_m$ представления (5.60) определяются единственным образом:

$$\mathbf{g}_0=(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1\mathbf{S}_1)(\mathbf{I}-\mathbf{R}_0\mathbf{S}_1)^{-1}, \tag{5.62}$$

$$\mathbf{g}_k=\mathbf{f}_k(\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k+\mathbf{B}_k+\mathbf{R}_k\mathbf{C}_k)^{-1},\ 0<k<m, \tag{5.63}$$

$$\mathbf{g}_m=(\mathbf{x}_m-\mathbf{x}_{m-1}\mathbf{R}_{m-1})(\mathbf{I}-\mathbf{S}_m\mathbf{R}_{m-1})^{-1}. \tag{5.64}$$

Доказательство. Пусть векторы $\mathbf{x}_k$ определены равенствами (5.60). Тогда

$$\mathbf{x}_{k-1}\mathbf{A}_k+\mathbf{x}_k\mathbf{B}_k+\mathbf{x}_{k+1}\mathbf{C}_k=\mathbf{g}_k(\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k+\mathbf{B}_k+\mathbf{R}_k\mathbf{C}_k)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{g}_i\left(\prod_{j=i}^{k-2}\mathbf{R}_j\right)(\mathbf{A}_k+\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{B}_k+\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{R}_k\mathbf{C}_k)+$$

$$+\sum_{i=k+1}^{m}\mathbf{g}_i\left(\prod_{j=k+2}^{i}\mathbf{S}_j\right)(\mathbf{S}_{k+1}\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k+\mathbf{S}_{k+1}\mathbf{B}_k+\mathbf{C}_k)=\mathbf{g}_k(\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k+\mathbf{B}_k+\mathbf{R}_k\mathbf{C}_k)$$

для $0<k<m$. Следовательно, векторы $\mathbf{x}_k$ удовлетворяют линейной системе (5.52) тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,...,\mathbf{g}_{m-1}$ из (5.60) удовлетворяют уравнениям (5.61).

Пусть $\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_m$ – решение линейной системы (5.52) и матрицы $\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k+\mathbf{B}_k+\mathbf{R}_k\mathbf{C}_k, 0<k<m$, невырождены. Тогда в силу равенств (5.59) для $0<k<m$ невырожденными будут и матрицы $\mathbf{I}-\mathbf{R}_k\mathbf{S}_{k+1}$ и $\mathbf{I}-\mathbf{S}_k\mathbf{R}_{k-1}$. Матрицы $\mathbf{I}-\mathbf{R}_0\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{I}-\mathbf{S}_m\mathbf{R}_{m-1}$ также невырождены, поскольку

$$(\mathbf{I}-\mathbf{R}_0\mathbf{S}_1)^{-1}=\mathbf{I}+\mathbf{R}_0(\mathbf{I}-\mathbf{S}_1\mathbf{R}_0)^{-1}\mathbf{S}_1,$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{S}_m\mathbf{R}_{m-1})^{-1}=\mathbf{I}+\mathbf{S}_m(\mathbf{I}-\mathbf{R}_{m-1}\mathbf{S}_m)^{-1}\mathbf{R}_{m-1}.$$

Пусть матрицы $\mathbf{V}_k$ и $\mathbf{W}_k$ определяются равенствами (5.55) и (5.58),тогда

$$\mathbf{R}_{k-1}=\mathbf{A}_k\mathbf{V}_k,\quad \mathbf{S}_{k+1}=\mathbf{C}_k\mathbf{W}_k,\quad 0<k<m,$$

и имеют место следующие соотношения

$$(\mathbf{I}-\mathbf{S}_{k+1}\mathbf{R}_k)\mathbf{C}_k\mathbf{V}_k=\mathbf{C}_k\mathbf{V}_k+\mathbf{S}_{k+1}(\mathbf{I}+\mathbf{B}_k\mathbf{V}_k)=$$

$$=\mathbf{C}_k\mathbf{V}_k+\mathbf{S}_{k+1}-(\mathbf{C}_k+\mathbf{S}_{k+1}\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k)\mathbf{V}_k=\mathbf{S}_{k+1}(\mathbf{I}-\mathbf{S}_k\mathbf{R}_{k-1}),$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{S}_k)\mathbf{A}_k\mathbf{W}_k=\mathbf{A}_k\mathbf{W}_k+\mathbf{R}_{k-1}(\mathbf{I}+\mathbf{B}_k\mathbf{W}_k)=$$

$$=\mathbf{A}_k\mathbf{W}_k+\mathbf{R}_{k-1}-(\mathbf{A}_k+\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{R}_k\mathbf{C}_k)\mathbf{W}_k=\mathbf{R}_{k-1}(\mathbf{I}-\mathbf{R}_k\mathbf{S}_{k+1}).$$

Поэтому для $0<k<m$ имеем

$$\mathbf{C}_k\mathbf{V}_k=(\mathbf{I}-\mathbf{S}_{k+1}\mathbf{R}_k)^{-1}\mathbf{S}_{k+1}(\mathbf{I}-\mathbf{S}_k\mathbf{R}_{k-1}),$$

$$\mathbf{A}_k\mathbf{W}_k=(\mathbf{I}-\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{S}_k)^{-1}\mathbf{R}_{k-1}(\mathbf{I}-\mathbf{R}_k\mathbf{S}_{k+1}).$$

Следовательно, равенства (5.54) и (5.57) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{x}_{k+1}\mathbf{S}_{k+1}+\sum_{i=0}^{k}\mathbf{g}_i\prod_{j=i}^{k-1}\mathbf{R}_j(\mathbf{I}-\mathbf{R}_k\mathbf{S}_{k+1}),\quad 0\le k<m,$$

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{x}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1}+\sum_{i=k}^{m}\mathbf{g}_i\prod_{j=k+1}^{i}\mathbf{S}_j(\mathbf{I}-\mathbf{S}_k\mathbf{R}_{k-1}),\quad 0<k\le m,$$

где векторы $\mathbf{g}_k$ задаются соотношениями (5.62)-(5.64).

Из вышесказанного вытекают равенства

$$\mathbf{x}_k = (\mathbf{x}_k\mathbf{R}_k + \sum_{i=k+1}^{m}\mathbf{g}_i \coprod_{j=k+2}^{i}\mathbf{S}_j(\mathbf{I}-\mathbf{S}_{k+1}\mathbf{R}_k))\mathbf{S}_{k+1} + \sum_{i=0}^{k}\mathbf{g}_i\prod_{j=i}^{k-1}\mathbf{R}_j(\mathbf{I}-\mathbf{R}_k\mathbf{S}_{k+1}) =$$

$$= (\mathbf{x}_k\mathbf{R}_k\mathbf{S}_{k+1} + (\sum_{i=0}^{k}\mathbf{g}_i\prod_{j=i}^{k-1}\mathbf{R}_j + \sum_{i=k+1}^{m}\mathbf{g}_i\coprod_{j=k+1}^{i}\mathbf{S}_j)(\mathbf{I}-\mathbf{R}_k\mathbf{S}_{k+1})$$

для $0 \le k < m$ и

$$\mathbf{x}_m = (\mathbf{x}_m\mathbf{S}_m + \sum_{i=o}^{m-1}\mathbf{g}_i\prod_{j=i}^{m-2}\mathbf{R}_j(\mathbf{I}-\mathbf{R}_{m-1}\mathbf{S}_m))\mathbf{R}_{m-1} + \mathbf{g}_m(\mathbf{I}-\mathbf{S}_m\mathbf{R}_{m-1}) =$$

$$= \mathbf{x}_m\mathbf{S}_m\mathbf{R}_{m-1} + \sum_{i=0}^{m}\mathbf{g}_i\prod_{j=i}^{m-1}\mathbf{R}_j(\mathbf{I}-\mathbf{S}_m\mathbf{R}_{m-1}).$$

Поскольку матрицы $\mathbf{I}-\mathbf{S}_m\mathbf{R}_{m-1}$ и $\mathbf{I}-\mathbf{R}_k\mathbf{S}_{k+1}$, $0 \le k < m$, невырождены, отсюда вытекает справедливость представления (5.60) для всех $0 \le k < m$.

Для любых векторов $\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_m$ мы можем найти векторы $\mathbf{g}_0,...,\mathbf{g}_m$, дающие представление (5.60), поскольку эти векторы являются решением линейной системы $\mathbf{g}^T\mathbf{T} = \mathbf{x}^T$, где $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_0,...,\mathbf{g}_m)$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_m)$, а матрица $\mathbf{T}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_0\mathbf{R}_1 & \cdots & \prod_{i=0}^{m-1}\mathbf{R}_i \\ \mathbf{S}_1 & \mathbf{I} & \mathbf{R}_1 & \cdots & \prod_{i=1}^{m-1}\mathbf{R}_i \\ \mathbf{S}_2\mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{I} & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \mathbf{R}_{m-1} \\ \coprod_{i=1}^{m}\mathbf{S}_i & \coprod_{i=2}^{m}\mathbf{S}_i & \cdots & \mathbf{S}_m & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{R}_0 & & \\ & \mathbf{I} & \ddots & \\ & & \ddots & -\mathbf{R}_{m-1} \\ & & & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$
\times\begin{bmatrix} \mathbf{I}-\mathbf{R}_0\mathbf{S}_1 & & & & \\ & \mathbf{I}-\mathbf{R}_1\mathbf{S}_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{I}-\mathbf{R}_{m-1}\mathbf{S}_m & \\ & & & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & \\ -\mathbf{S}_1 & \mathbf{I} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\mathbf{S}_m & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1}.
$$

Здесь матрица $\mathbf{T}$ невырождена, так как невырождены все сомножители этого разложения. Следовательно, при заданных векторах $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m$ векторы $\mathbf{g}_0, ..., \mathbf{g}_m$, удовлетворяющие (5.60), определяются единственным образом. ■

<u>Следствие 5.2.</u> Пусть матрицы $\mathbf{S}_1, ..., \mathbf{S}_m$ и $\mathbf{R}_0, ..., \mathbf{R}_{m-1}$ удовлетворяют условиям (5.53) и (5.56). Тогда векторы $\mathbf{x}_k$, определяемые равенствами (9), удовлетворяют однородной линейной системе

$$
\mathbf{x}_{k-1}\mathbf{A}_k + \mathbf{x}_k\mathbf{B}_k + \mathbf{x}_{k+1}\mathbf{C}_k = \mathbf{0}, \quad 0 < k < m, \qquad (5.65)
$$

тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_{m-1}$ удовлетворяют уравнениям

$$
\mathbf{g}_k(\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k\mathbf{C}_k) = \mathbf{0}, \quad 0 < k < m. \qquad (5.66)
$$

Если матрицы $\mathbf{S}_k\mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k\mathbf{C}_k$, $0 < k < m$, невырождены, то для любого решения $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m$ линейной системы (5.65) существуют единственные векторы

$$
\mathbf{g}_0 = (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\mathbf{S}_1)(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0\mathbf{S}_1)^{-1}, \qquad \mathbf{g}_k = \mathbf{0}, \quad 0 < k < m, \qquad (5.67)
$$

$$
\mathbf{g}_m = (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}\mathbf{R}_{m-1})(\mathbf{I} - \mathbf{S}_m\mathbf{R}_{m-1})^{-1},
$$

удовлетворяющие равенствам (5.60). В этом случае решение линейной системы (5.65) имеет вид

$$
\mathbf{x}_k = \mathbf{g}_0\prod_{j=0}^{k-1}\mathbf{R}_j + \mathbf{g}_m\coprod_{j=k+1}^{m}\mathbf{S}_j, \quad 0 \le k \le m. \qquad (5.68)
$$

5.5. Однородные векторные разностные уравнения

Здесь мы рассмотрим систему уравнений с блочной трехдиагональной матрицей

$$\mathbf{x}_{k-1}^T\mathbf{A} + \mathbf{x}_k^T\mathbf{B} + \mathbf{x}_{k+1}^T\mathbf{C} = \mathbf{f}_k^T, \quad k = 1, 2, ..., m-1. \qquad (5.69)$$

При этом будем считать, что существует корень $\mathbf{R}$ уравнения

$$\mathbf{A} + \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{X}^2\mathbf{C} = \mathbf{0}, \qquad (5.70)$$

для которого матрица $\mathbf{B}+\mathbf{R}\mathbf{C}$ невырождена, и корень $\mathbf{S}$ уравнения

$$\mathbf{X}^2\mathbf{A} + \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0}, \qquad (5.71)$$

для которого невырождена матрица $\mathbf{B}+\mathbf{S}\mathbf{A}$.

Полагая

$$\mathbf{U} = -(\mathbf{B} + \mathbf{R}\mathbf{C})^{-1}, \quad \mathbf{V} = -(\mathbf{B} + \mathbf{S}\mathbf{A})^{-1},$$

будем иметь

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{U}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{C}\mathbf{V}. \qquad (5.72)$$

Следовательно, матрицы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{U} = -(\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{C})^{-1}, \quad \mathbf{V} = -(\mathbf{B} + \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{A})^{-1}. \qquad (5.73)$$

Нетрудно проверить справедливость следующих равенств.

Лемма 5.6. Пусть матрицы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ удовлетворяют уравнениям (5.73). Тогда

1)

$$\begin{aligned}&\mathbf{I} + \mathbf{UB} + \mathbf{UAUC} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{I} + \mathbf{VB} + \mathbf{VCVA} = \mathbf{0},\\ &\mathbf{I} + \mathbf{BU} + \mathbf{AUCU} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{I} + \mathbf{BV} + \mathbf{CVAV} = \mathbf{0};\end{aligned} \qquad (5.74)$$

2)

$$\begin{aligned}&\mathbf{AU}(\mathbf{I} - \mathbf{AUCV}) = (\mathbf{I} - \mathbf{AUCV})\mathbf{AV},\\ &\mathbf{CV}(\mathbf{I} - \mathbf{CVAU}) = (\mathbf{I} - \mathbf{CVAU})\mathbf{CU};\end{aligned} \qquad (5.75)$$

3)

$$\begin{aligned}&\mathbf{CVAU} - \mathbf{I} = \mathbf{\Phi U}, \quad \mathbf{AUCV} - \mathbf{I} = \mathbf{\Phi V},\\ &\mathbf{UCVA} - \mathbf{I} = \mathbf{U\Phi}, \quad \mathbf{VAUC} - \mathbf{I} = \mathbf{V\Phi},\end{aligned} \qquad (5.76)$$

где

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{AUC} + \mathbf{B} + \mathbf{CVA} = -(\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{B} + \mathbf{V}^{-1}); \qquad (5.77)$$

4)

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + s\mathbf{B} + s^2\mathbf{C} &= \mathbf{U}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{UA})(s\mathbf{UC} - \mathbf{I}) = \\ &= (s\mathbf{I} - \mathbf{AU})\mathbf{U}^{-1}(s\mathbf{UC} - \mathbf{I}) = \\ &= (s\mathbf{I} - \mathbf{AU})(s\mathbf{CU} - \mathbf{I})\mathbf{U}^{-1},\end{aligned} \qquad (5.78)$$

$$\begin{aligned}s^2\mathbf{A} + s\mathbf{B} + \mathbf{C} &= \mathbf{V}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{VC})(s\mathbf{VA} - \mathbf{I}) = \\ &= (s\mathbf{I} - \mathbf{CV})\mathbf{V}^{-1}(s\mathbf{VA} - \mathbf{I}) = \\ &= (s\mathbf{I} - \mathbf{CV})(s\mathbf{AV} - \mathbf{I})\mathbf{V}^{-1}.\end{aligned} \qquad (5.79)$$

Условие невырожденности матрицы $\mathbf{SA} + \mathbf{B} + \mathbf{RC}$ является более сильным, чем условие невырожденности матриц $\mathbf{B} + \mathbf{SA}$ и $\mathbf{B} + \mathbf{RC}$. Действительно, справедливы равенства

$$(\mathbf{I} - \mathbf{SR})(\mathbf{B} + \mathbf{R}C) = (\mathbf{I} - \mathbf{RS})(\mathbf{B} + \mathbf{SA}) = \mathbf{SA} + \mathbf{B} + \mathbf{RC}. \qquad (5.80)$$

Поэтому из невырожденности матрицы $\mathbf{SA} + \mathbf{B} + \mathbf{RC}$ вытекает невырожденность всех четырех матриц $\mathbf{B} + \mathbf{RC}$, $\mathbf{B} + \mathbf{SA}$, $\mathbf{I} - \mathbf{SR}$ и $\mathbf{I} - \mathbf{RS}$. Полагая $\mathbf{\Psi} = -(\mathbf{SA} + \mathbf{B} + \mathbf{RC})^{-1}$, из равенств (5.80) получим следующие выражения для матриц **U** и **V:**

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Psi}(\mathbf{I} - \mathbf{SR}), \quad \mathbf{V} = \mathbf{\Psi}(\mathbf{I} - \mathbf{RS}). \qquad (5.81)$$

Следующий результат вытекает из теоремы 5.7 .

<u>Теорема 5.8.</u> Пусть матрицы **S** и **R** являются решениями матричных уравнений

$$\mathbf{S} = -\mathbf{C}(\mathbf{B} + \mathbf{SA})^{-1}, \ \mathbf{R} = -\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{RC})^{-1}. \qquad (5.82)$$

Тогда векторы

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{g}_k + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{g}_i \mathbf{R}^{k-i} + \sum_{i=k+1}^{m} \mathbf{g}_i \mathbf{S}^{i-k}, \quad 0 \le k \le m, \qquad (5.83)$$

удовлетворяют линейной системе (5.69) тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_{m-1}$ удовлетворяют линейным системам

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{SA} + \mathbf{B} + \mathbf{RC}) = \mathbf{f}_k, \quad 0 < k < m. \qquad (5.84)$$

Если матрица $\mathbf{SA}+\mathbf{B}+\mathbf{RC}$ невырождена, то для любого решения $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m$ линейной системы (5.69) существуют единственные векторы

$$\mathbf{g}_0 = (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{RS})^{-1}, \quad \mathbf{g}_m = (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}\mathbf{R})(\mathbf{I} - \mathbf{SR})^{-1}, \quad (5.85)$$

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{f}_k(\mathbf{SA}+\mathbf{B}+\mathbf{RC})^{-1}, \quad 0 < k < m, \quad (5.86)$$

удовлетворяющие равенствам (5.83).

<u>Следствие 5.3.</u> Пусть матрицы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{R}$ являются решениями матричных уравнений (5.82). Тогда векторы $\mathbf{x}_k$, определяемые равенствами (5.83), удовлетворяют линейной системе

$$\mathbf{x}_{k-1}\mathbf{A} + \mathbf{x}_k\mathbf{B} + \mathbf{x}_{k+1}\mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad 0 < k < m, \quad (5.87)$$

тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_{m-1}$ удовлетворяют линейным системам

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{SA}+\mathbf{B}+\mathbf{RC}) = \mathbf{0}, \quad 0 < k < m. \quad (5.88)$$

Если матрица $\mathbf{SA}+\mathbf{B}+\mathbf{RC}$ невырождена, то для любого решения $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m$ линейной системы (5.82) существуют единственные векторы

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}_0 = (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{RS})^{-1}, \quad \mathbf{g}_k = \mathbf{0}, \quad 0 < k < m, \\ &\mathbf{g}_m = (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}\mathbf{R})(\mathbf{I} - \mathbf{SR})^{-1}, \end{aligned} \quad (5.89)$$

удовлетворяющие равенствам (5.83). В этом случае решение представимо в следующем виде:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{g}_0\mathbf{R}^k + \mathbf{g}_m\mathbf{S}^{m-k}, \quad 0 \le k \le m. \quad (5.90)$$

В заключение отметим, что матрично-геометрические решения можно применять и для решения кусочно однородных линейных систем вида

$$\mathbf{x}_{k-1}\mathbf{A}_i + \mathbf{x}_k\mathbf{B}_i + \mathbf{x}_{k+1}\mathbf{C}_i = \mathbf{0}, \quad m_{i-1} < k < m_i, \; i = 1, 2, \ldots, l,$$

где $m_1 < m_2 < \ldots < m_l$ [19].

6. Обобщенные процессы размножения и гибели

6.1. Вспомогательные результаты

Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ − некоторая матричная функция матричного аргумента. Неотрицательную матрицу $\mathbf{X}_*$, удовлетворяющую уравнению $\mathbf{F}(\mathbf{X})=\mathbf{0}$, будем называть минимальным неотрицательным решением этого уравнения, если для всякого неотрицательного решения $\mathbf{Y}$ уравнения $\mathbf{F}(\mathbf{X})=\mathbf{0}$ справедливо неравенство $\mathbf{Y}\le\mathbf{X}_*$.

В этом разделе, основанном на работе [23], мы детально рассмотрим квадратные матричные уравнения, используемые в матрично-геометрических решениях систем уравнений равновесия с блочными трехдиагональными матрицами. На протяжении всего раздела $\mathbf{P}_{-1},\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1$ − квадратные неотрицательные матрицы.

Пусть $\mathcal{J}=\{-1,0,1\}$, и для $n\ge 1$ определим множества

$$K_n=\{(k_1,...,k_n)\in \mathcal{J}^n \mid k_1\le 0,\quad k_1+k_2\le 0,..., \\ k_1+...+k_{n-1}\le 0,\ \ k_1+...+k_n=0\}.$$

Нам понадобятся неотрицательные матрицы $\mathbf{U}_n$, определяемые следующим образом:

$$\mathbf{U}_0=\mathbf{I},\quad \mathbf{U}_n=\sum_{k\in K_n}\mathbf{P}_{k_1}\mathbf{P}_{k_2}\cdots\mathbf{P}_{k_n},\quad n=1,2,... \tag{6.1}$$

Из этого определения вытекает справедливость равенств

$$\mathbf{U}_n=\mathbf{U}_{n-1}\mathbf{P}_0+\sum_{r=0}^{n-2}\mathbf{U}_r\mathbf{P}_{-1}\mathbf{U}_{n-r-2}\mathbf{P}_1,\quad n=1,2,..., \tag{6.2}$$

$$\mathbf{U}_n=\mathbf{P}_0\mathbf{U}_{n-1}+\sum_{r=0}^{n-2}\mathbf{P}_{-1}\mathbf{U}_r\mathbf{P}_1\mathbf{U}_{n-r-2},\quad n=1,2,.... \tag{6.3}$$

Мы также будем использовать матрицы

$$\mathbf{V}=\sum_{n=0}^{k}\mathbf{U}_n,\quad k=0,1,...,$$

связанные неравенствами

$$\mathbf{0} \le \mathbf{V}_0 \le \mathbf{V}_1 \le \cdots \le \mathbf{V}_k \le \mathbf{V}_{k+1} \le \cdots$$

Из равенств (6.2), (6.3) вытекает, что

$$\mathbf{V}_{k+1} \le \mathbf{I} + \mathbf{V}_k\mathbf{P}_0 + \mathbf{V}_k\mathbf{P}_{-1}\mathbf{V}_k\mathbf{P}, \quad k = 0,1,..., \tag{6.4}$$

$$\mathbf{V}_{k+1} \le \mathbf{I} + \mathbf{P}_0\mathbf{V}_k + \mathbf{P}_{-1}\mathbf{V}_k\mathbf{P}_1\mathbf{V}_k, \quad k = 0,1,... \tag{6.5}$$

Действительно, суммируя левую и правую части равенства (6.2) по *n* от 1 до $k+1$, получим

$$\mathbf{V}_{k+1} = \mathbf{I} + \mathbf{V}_k\mathbf{P}_0 + \sum_{r=0}^{k-1}\mathbf{U}_r\mathbf{P}_{-1}\mathbf{V}_{k-r-1}\mathbf{P}_1 \le$$

$$\le \mathbf{I} + \mathbf{V}_k\mathbf{P}_0 + \sum_{r=0}^{k-1}\mathbf{U}_r\mathbf{P}_{-1}\mathbf{V}_k\mathbf{P}_1 \le \mathbf{I} + \mathbf{V}_k\mathbf{P}_0 + \mathbf{V}_k\mathbf{P}_{-1}\mathbf{V}_k\mathbf{P}_1.$$

Аналогично доказывается неравенство (6.5).

Лемма 6.1. Необходимым и достаточным условием существования неотрицательного решения уравнения

$$\mathbf{I} + \mathbf{X}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{I}) + \mathbf{X}\mathbf{P}_{-1}\mathbf{X}\mathbf{P}_1 = \mathbf{0}\,, \tag{6.6}$$

а также необходимым и достаточным условием существования неотрицательного решения уравнения

$$\mathbf{I} + (\mathbf{P}_0 - \mathbf{I})\mathbf{X} + \mathbf{P}_{-1}\mathbf{X}\mathbf{P}_1\mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{6.7}$$

является сходимость ряда

$$\mathbf{U} = \sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{U}_i\ . \tag{6.8}$$

При этом матрица $\mathbf{U}$ является минимальным неотрицательным решением этих уравнений.

Доказательство. Если ряд (6.8) сходится, то, суммируя левую и правую части равенств (6.2) и (6.3) по *n* от 1 до ∞, получим, что неотрицательная матрица U удовлетворяет уравнениям (6.6) и (6.7).

Пусть $\mathbf{Y}$ – неотрицательное решение уравнения (6.6), тогда

$$\mathbf{Y} = \mathbf{I} + \mathbf{Y}\mathbf{P}_0 + \mathbf{Y}\mathbf{P}_{-1}\mathbf{Y}\mathbf{P}_1 \ge \mathbf{V}_0\,,$$

и из неравенств (6.4) и $\mathbf{V}_k \le \mathbf{Y}$ следует, что

$$\mathbf{V}_{k+1} \le \mathbf{I} + \mathbf{Y}\mathbf{P}_0 + \mathbf{Y}\mathbf{P}_{-1}\mathbf{Y}\mathbf{P}_1 = \mathbf{Y}\,.$$

Поэтому $\mathbf{V}_k \le \mathbf{Y}$ для всех *k*. Поскольку последовательность матриц $\mathbf{V}_k$ неубывающая, отсюда следует существование предела $\lim_{k\to\infty} \mathbf{V}_k = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{U}_i \le \mathbf{Y}$. ■

Аналогично доказывается, что в случае существования неотрицательного решения $\mathbf{Y}$ уравнения (6.7) ряд (6.8) сходится, и справедливо неравенство $\mathbf{U} \le \mathbf{Y}$.

Следствие 6.1. Необходимым и достаточным условием существования неотрицательного решения уравнения

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_{-1}\mathbf{X}\mathbf{P}_1)^{-1} \tag{6.9}$$

является сходимость ряда (6.8). При этом матрица $\mathbf{U}$ является минимальным неотрицательным решением этого уравнения.

Лемма 6.2. Неотрицательное решение уравнения

$$\mathbf{P}_{-1} + \mathbf{X}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{I}) + \mathbf{X}^2\mathbf{P}_1 = \mathbf{0} \tag{6.10}$$

существует тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\mathbf{R} = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{P}_{-1}\mathbf{U}_i), \tag{6.11}$$

при этом матрица $\mathbf{R}$ является минимальным неотрицательным решением этого уравнения.

Доказательство. Если ряд (6.11) сходится, то, умножив обе части равенства (6.2) слева на $\mathbf{P}_{-1}$ и затем суммируя по *n*, получим, что неотрицательная матрица $\mathbf{R}$ удовлетворяет уравнению (6.1).

Пусть $\mathbf{Y}$ – неотрицательное решение уравнения (6.10). Тогда $\mathbf{P}_{-1}\mathbf{V}_0 \le \mathbf{P}_{-1} + \mathbf{Y}\mathbf{P}_0 + \mathbf{Y}^2\mathbf{P}_1 = \mathbf{Y}$, и из неравенств (6.4) и $\mathbf{P}_{-1}\mathbf{V}_k \le \mathbf{Y}$ вытекает, что

$$\mathbf{P}_{-1}\mathbf{V}_{k+1} \le \mathbf{P}_{-1} + (\mathbf{P}_{-1}\mathbf{V}_k)\mathbf{P}_0 + (\mathbf{P}_{-1}\mathbf{V}_k)^2\mathbf{P}_1 \le \mathbf{P}_{-1} + \mathbf{Y}\mathbf{P}_0 + \mathbf{Y}^2\mathbf{P}_1 = \mathbf{Y}.$$

Следовательно, $\mathbf{P}_{-1}\mathbf{V}_k \le \mathbf{Y}$ для всех *k*. Поскольку последовательность матриц $\mathbf{P}_{-1}\mathbf{V}_k$ неубывающая, отсюда вытекает существование предела

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}_{-1}\mathbf{V}_k = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{P}_{-1}\mathbf{U}_i) \le \mathbf{Y}. ■$$

Аналогично, используя равенство (6.3) и неравенство

(6.5), доказывается следующий результат.

Лемма 6.3. Неотрицательное решение уравнения

$$\mathbf{P}_{-1}\mathbf{X}^2+(\mathbf{P}_0-\mathbf{I})\mathbf{X}+\mathbf{P}_1=\mathbf{0} \qquad (6.12)$$

существует тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\mathbf{F}=\sum_{i=0}^{\infty}(\mathbf{U}_i\mathbf{P}_{1)}\,. \qquad (6.13)$$

При этом матрица $\mathbf{F}$ является минимальным неотрицательным решением этого уравнения.

Лемма 6.4. Пусть существует неотрицательное решение уравнения (6.12), $\mathbf{F}$ – его минимальное неотрицательное решение, матрица $\mathbf{I}-\mathbf{P}_0-\mathbf{P}_{-1}\mathbf{F}$ невырождена и $\mathbf{U}=(\mathbf{I}-\mathbf{P}_0-\mathbf{P}_{-1}\mathbf{F})^{-1}\geq\mathbf{0}$. Тогда неотрицательное решение уравнения (6.10) также существует, и матрица $\mathbf{R}=\mathbf{P}_{-1}\mathbf{U}$ является его минимальным неотрицательным решением.

Доказательство. Из равенства $(\mathbf{I}-\mathbf{P}_0-\mathbf{P}_{-1}\mathbf{F})\mathbf{F}=\mathbf{P}_1$ вытекает, что $\mathbf{F}=\mathbf{U}\mathbf{P}_1$. Поэтому матрица $\mathbf{U}$ является неотрицательным решением уравнения (6.9). Пусть $\mathbf{V}$ – любое неотрицательное решение этого уравнения, тогда

$$\mathbf{I}+(\mathbf{P}_0-\mathbf{I})\mathbf{V}+\mathbf{P}_{-1}\mathbf{V}\mathbf{P}_1\mathbf{V}=\mathbf{0}\,.$$

Умножив обе части этого равенства справа на $\mathbf{P}_1$, получим, что неотрицательная матрица $\mathbf{V}\mathbf{P}_1$ удовлетворяет уравнению (6.12). Поскольку $\mathbf{F}=\mathbf{U}\mathbf{P}_1$ является минимальным неотрицательным решением этого уравнения, справедливо неравенство $\mathbf{U}\mathbf{P}_1\leq\mathbf{V}\mathbf{P}_1$ и значит

$$\mathbf{V}-\mathbf{U}=(\mathbf{I}-\mathbf{P}_0-\mathbf{P}_{-1}\mathbf{V}\mathbf{P}_1)^{-1}[(\mathbf{I}-\mathbf{P}_0-\mathbf{P}_{-1}\mathbf{U}\mathbf{P}_1)-$$
$$-(\mathbf{I}-\mathbf{P}_0-\mathbf{P}_{-1}\mathbf{V}\mathbf{P}_1)](\mathbf{I}-\mathbf{P}_0-\mathbf{P}_{-1}\mathbf{U}\mathbf{P}_1)^{-1}=\mathbf{V}\mathbf{P}_{-1}(\mathbf{V}\mathbf{P}_1-\mathbf{U}\mathbf{P}_1)\mathbf{U}\geq\mathbf{0}.$$

Следовательно, матрица $\mathbf{U}$ является минимальным неотрицательным решением уравнения (6.9). Согласно следствию 6.1 из леммы 6.1

$$\mathbf{U}=\sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{U}_i\,,$$

поэтому ряд (6.11) сходится, и матрица $\mathbf{R} = \mathbf{P}_{-1}\mathbf{U}$ является минимальным неотрицательным решением уравнения (6.10). ■

Лемма 6.5. Пусть существуют неотрицательные решения уравнений (6.10) и (6.12), $\mathbf{R}$ – минимальное неотрицательное решение уравнения (6.10) и $\mathbf{F}$ – минимальное неотрицательное решение уравнения (6.12). Тогда $\mathbf{RP}_1 = \mathbf{P}_{-1}\mathbf{F}$, и для любого числа s справедливо разложение

$$\mathbf{P}_{-1} + s(\mathbf{P}_0 - \mathbf{I}) + s^2\mathbf{P}_1 = (s\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{T}(\mathbf{I} - s\mathbf{F}), \tag{6.14}$$

где

$$\mathbf{T} = \mathbf{RP}_1 + \mathbf{P}_0 - \mathbf{I} = \mathbf{P}_{-1}\mathbf{F} + \mathbf{P}_0 - \mathbf{I}.$$

Доказательство. Действительно, согласно леммам 6.2 и 6.3 справедливы равенства

$$\mathbf{RP}_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}_{-1}\mathbf{U}_i\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_{-1}\mathbf{F}.$$

Далее имеем

$$\mathbf{RT} = \mathbf{R}^2\mathbf{P}_1 + \mathbf{R}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{I}) = -\mathbf{P}_{-1}, \ \mathbf{TF} = \mathbf{P}_{-1}\mathbf{F}^2 + (\mathbf{P}_0 - \mathbf{I})\mathbf{F} = -\mathbf{P}_1,$$

поэтому

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{T}(\mathbf{I} - s\mathbf{F}) = (s\mathbf{T} + \mathbf{P}_{-1})(\mathbf{I} - s\mathbf{F}) =$$

$$= s(\mathbf{P}_{-1}\mathbf{F} + \mathbf{P}_0 - \mathbf{I}) + \mathbf{P}_{-1} + s^2\mathbf{P}_1 - s\mathbf{P}_{-1}\mathbf{F} = \mathbf{P}_{-1} + s(\mathbf{P}_0 - \mathbf{I}) + s^2\mathbf{P}_1. \ ■$$

Следствие 6.2. В условиях леммы 6.5 матрица $\mathbf{T}$ невырождена, если и только если для некоторого числа s матрица $\mathbf{P}_{-1} + s(\mathbf{P}_0 - \mathbf{I}) + s^2\mathbf{P}_1$ невырождена.

Лемма 6.6. Пусть

$$\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{P}_{-1} + \mathbf{R}_k\mathbf{P}_0 + \mathbf{R}_k^2\mathbf{P}_1, \quad k = 0,1,... \tag{6.15}$$

Тогда $\mathbf{R}_k \le \mathbf{R}_{k+1}$ для всех $k = 0,1,...$. Неотрицательное решение уравнения (6.10) существует тогда и только тогда, когда существует предел $\mathbf{R} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{R}_k$. В этом случае матрица $\mathbf{R}$ является минимальным неотрицательным решением уравнения (6.10).

Доказательство. Очевидно, $\mathbf{R}_1 \ge \mathbf{R}_0$, а из неравенства

$\mathbf{R}_k \geq \mathbf{R}_{k-1}$ вытекает, что $\mathbf{R}_{k+1} \geq \mathbf{P}_{-1} + \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P}_0 + \mathbf{R}_{k-1}^2\mathbf{P}_1 = \mathbf{R}_k$. Поэтому $\mathbf{R}_k \leq \mathbf{R}_{k+1}$ для всех $k = 0,1,\ldots$.

Если последовательность матриц $\mathbf{R}_k$ сходится, то, переходя в равенстве (6.15) к пределу, получим, что неотрицательная матрица $\mathbf{R}$ удовлетворяет уравнению (6.10).

Пусть $\mathbf{Y}$ – некоторое неотрицательное решение уравнения (6.10). Тогда $\mathbf{R}_0 \leq \mathbf{Y}$, а из неравенства $\mathbf{R}_k \leq \mathbf{Y}$ следует, что $\mathbf{R}_{k+1} \leq \mathbf{P}_{-1} + \mathbf{Y}\mathbf{P}_0 + \mathbf{Y}^2\mathbf{P}_1 = \mathbf{Y}$. Поэтому $\mathbf{R}_k \leq \mathbf{Y}$ для всех k. Поскольку последовательность матриц $\mathbf{R}_k$ неубывающая, отсюда следует, что существует предел $\mathbf{R} \leq \mathbf{Y}$. ■

Аналогично доказывается следующее утверждение, которое, впрочем, можно рассматривать как следствие леммы 6.6.

Лемма 6.7. Пусть $\mathbf{F}_0 = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{F}_{k+1} = \mathbf{P}_{-1}\mathbf{F}_k^2 + \mathbf{P}_0\mathbf{F}_k + \mathbf{P}_1, \quad k = 0,1,\ldots \tag{6.16}$$

Тогда $\mathbf{F}_k \leq \mathbf{F}_{k+1}$ для всех $k = 0,1,\ldots$. Неотрицательное решение уравнения (6.12) существует тогда и только тогда, когда существует предел $\mathbf{F} = \lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{F}_k$. В этом случае матрица $\mathbf{F}$ является минимальным неотрицательным решением уравнения (6.12).

Лемма 6.8. Пусть $\mathbf{g}^T(\mathbf{P}_{-1} + \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1) \leq \varepsilon \mathbf{g}^T$, где $0 \leq \varepsilon \leq 1$ и $\mathbf{g}$ – положительный вектор. Тогда минимальное неотрицательное решение $\mathbf{R}$ уравнения (6.10) существует и справедливо неравенство $\mathbf{g}^T\mathbf{R} \leq \varepsilon \mathbf{g}^T$.

Доказательство. Определим последовательность матриц $\mathbf{R}_k$ по формуле (6.15). Очевидно, $\mathbf{g}^T\mathbf{R}_0 \leq \varepsilon \mathbf{g}^T$, а из неравенства $\mathbf{g}^T\mathbf{R}_k \leq \varepsilon \mathbf{g}^T$ следует, что $\mathbf{g}^T\mathbf{R}_k \leq \mathbf{g}^T$ и

$$\mathbf{g}^T\mathbf{R}_{k+1} \leq \mathbf{g}^T(\mathbf{P}_{-1} + \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1) \leq \varepsilon \mathbf{g}^T.$$

Поэтому $\mathbf{g}^T\mathbf{R}_k \leq \varepsilon \mathbf{g}^T$ для всех k. Поскольку вектор $\mathbf{g}$ положителен, а последовательность матриц $\mathbf{R}_k$ монотонна, отсюда вытекает существование предела $\mathbf{R} = \lim \mathbf{R}_k$ и справедливость неравенства $\mathbf{g}^T \mathbf{R} \le \varepsilon \mathbf{g}^T$. По лемме 6.6 матрица является минимальным неотрицательным решением уравнения (6.10). ■

<u>Следствие 6.3.</u> В условиях леммы 6.8 максимальное собственное число $\sigma(\mathbf{R})$ матрицы **R** не превосходит ε.

Следующий результат доказывается аналогично лемме 6.8.

<u>Лемма 6.9.</u> Пусть $(\mathbf{P}_{-1} + \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1)\mathbf{f} \le \varepsilon \mathbf{f}$, где $0 \le \varepsilon \le 1$ и $\mathbf{f}$ – положительный вектор. Тогда минимальное неотрицательное решение **F** уравнения (6.12) существует и справедливо неравенство $\mathbf{F}\mathbf{f} \le \varepsilon \mathbf{f}$.

<u>Следствие 6.4.</u> В условиях леммы 6.9 максимальное собственное число $\sigma(\mathbf{F})$ матрицы **F** не превосходит ε.

<u>Лемма 6.10.</u> Пусть матрица $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{-1} + \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1$ неразложима, $\mathbf{g}^T \mathbf{P} = \mathbf{g}^T$ и $\mathbf{P}\mathbf{f} = \mathbf{f}$, где $\mathbf{g}$ и $\mathbf{f}$ – положительные векторы, **R** – минимальное неотрицательное решение уравнения (6.10) и матрица $\mathbf{R}\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_0 - \mathbf{I}$ невырождена. Тогда $\sigma(\mathbf{R}) = 1$, если и только если $\mathbf{g}^T \mathbf{P}_{-1} \mathbf{f} \ge \mathbf{g}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{f}$. При этом любой собственный вектор матрицы $\mathbf{R}^T$, соответствующий собственному числу 1, пропорционален **g**.

<u>Доказательство.</u> Согласно леммам 6.8 и 6.9, в сделанных предположениях минимальные неотрицательные решения **R** и **F** уравнений (6.10) и (6.12) существуют и справедливы неравенства

$$\mathbf{g}^T \mathbf{R} \le \mathbf{g}^T, \quad \mathbf{F}\mathbf{f} \le \mathbf{f}. \tag{6.17}$$

По лемме 6.5 $\mathbf{R}\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_{-1}\mathbf{F}$ и справедливо разложение

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{F}), \tag{6.18}$$

где $\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_0 - \mathbf{I} = \mathbf{P}_{-1}\mathbf{F} + \mathbf{P}_0 - \mathbf{I}$. Заметим, что $\mathbf{T}\mathbf{F} = -\mathbf{P}_1$.

Предположим, что матрица $\mathbf{I} - \mathbf{R}$ невырождена, тогда $\mathbf{h}^T = \mathbf{g}^T(\mathbf{I} - \mathbf{R}) > \mathbf{0}^T$, и из разложения (6.18) следует, что

$$(\mathbf{R}\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 - \mathbf{I})\mathbf{f} = \mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{F})\mathbf{f} = \mathbf{0}. \tag{6.19}$$

Из этого же разложения вытекает, что

$$\mathbf{h}^T(\mathbf{T}+\mathbf{P}_1)=\mathbf{h}^T\mathbf{T}(\mathbf{I}-\mathbf{F})=\mathbf{g}^T\mathbf{P}=\mathbf{0}^T .$$

Поскольку матрица $\mathbf{T}$ невырождена, это означает, что $\mathbf{h}^T\mathbf{P}_1 \neq \mathbf{0}^T$ и, следовательно, $\mathbf{h}^T\mathbf{P}_1\mathbf{f} > 0$. Используя равенство (6.19), получаем

$$\mathbf{g}^T\mathbf{P}_{-1}\mathbf{f}=\mathbf{g}^T(\mathbf{I}-\mathbf{P}_0-\mathbf{P}_1)\mathbf{f}=\mathbf{g}^T\mathbf{R}\mathbf{P}_1\mathbf{f}=$$
$$=\mathbf{g}^T\mathbf{P}_1\mathbf{f}-\mathbf{g}^T(\mathbf{I}-\mathbf{R})\mathbf{P}_1\mathbf{f}=\mathbf{g}^T\mathbf{P}_1\mathbf{f}-\mathbf{h}^T\mathbf{P}_1\mathbf{f}<\mathbf{g}^T\mathbf{P}_1\mathbf{f}.$$

Предположим теперь, что матрица $\mathbf{I}-\mathbf{R}$ вырождена и $\mathbf{r}^T(\mathbf{I}-\mathbf{R})=\mathbf{0}^T$. Как следует из разложения (6.18), в этом случае $\mathbf{r}^T\mathbf{P}=\mathbf{0}^T$. Поскольку максимальное собственное число неразложимой матрицы $\mathbf{P}$ является простым, $\mathbf{r}^T=c\mathbf{g}^T$, где c – некоторая константа. Используя неравенства (6.17), получаем

$$\mathbf{g}^T\mathbf{P}_{-1}\mathbf{f}=\mathbf{g}^T\mathbf{R}\mathbf{P}_1\mathbf{f}+\mathbf{g}^T\mathbf{P}_{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{F})\mathbf{f}=\mathbf{g}^T\mathbf{P}_1\mathbf{f}+\mathbf{g}^T\mathbf{P}_{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{F})\mathbf{f}\geq\mathbf{g}^T\mathbf{P}_1\mathbf{f}. \ \blacksquare$$

Лемма 6.11. Пусть матрица $\mathbf{P}=\mathbf{P}_{-1}+\mathbf{P}_0+\mathbf{P}_1$ неразложима, $\mathbf{g}^T\mathbf{P}=\mathbf{g}^T$ и $\mathbf{P}\mathbf{f}=\mathbf{f}$, где $\mathbf{g}$ и $\mathbf{f}$ – положительные векторы, $\mathbf{F}$ – минимальное неотрицательное решение уравнения (6.12) и матрица $\mathbf{P}_{-1}\mathbf{F}+\mathbf{P}_0-\mathbf{I}$ невырождена. Тогда $\sigma(\mathbf{F})=1$, если и только если $\mathbf{g}^T\mathbf{P}_1\mathbf{f}\geq\mathbf{g}^T\mathbf{P}_{-1}\mathbf{f}$. При этом любой собственный вектор матрицы $\mathbf{F}$, соответствующий собственному числу 1, пропорционален **f.**

Этот результат доказывается аналогично лемме 6.10.

6.2. Существование решений

Здесь и в последующих разделах этой главы мы предполагаем, что $\mathbf{\Lambda}\geq\mathbf{0}$, $\mathbf{M}\geq\mathbf{0}$, а матрицы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{H}=\mathbf{\Lambda}+\mathbf{M}+\mathbf{N}$ являются матрицами интенсивностей переходов. Будем обозначать $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{\Lambda}\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\mu}=\mathbf{M}\mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ – вектор из единиц, и α некоторое положительное число, для которого $\mathbf{N}+\alpha\mathbf{I}\geq\mathbf{0}$.

В этом разделе мы докажем существование

минимальных неотрицательных решений $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$ уравнений $\mathbf{\Lambda} + \mathbf{RN} + \mathbf{R}^2\mathbf{M} = \mathbf{0}$, $\mathbf{S}^2\mathbf{\Lambda} + \mathbf{SN} + \mathbf{M} = 0$ и получим условия невырожденности матриц $\mathbf{N} + \mathbf{RM}$, $\mathbf{N} + \mathbf{S\Lambda}$ и $\mathbf{S\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{RM}$. Следующее условие D играет важную роль в дальнейшем анализе:

(D) Определитель $\det(\mathbf{\Lambda} + s\mathbf{N} + s^2\mathbf{M})$ не равен тождественно 0.

Пример, когда это условие нарушено, дают матрицы:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{bmatrix}.$$

Если условие D выполнено, то определитель $\det(\mathbf{\Lambda} + s\mathbf{N} + s^2\mathbf{M})$ имеет конечное число k нулей, $1 \le k \le 2m$. В этом случае определитель $\det(s^2\mathbf{\Lambda} + s\mathbf{N} + s\mathbf{M})$ также не равен тождественно 0.

Согласно следствию из теоремы 1.16, максимальное собственное число $\sigma(\mathbf{H})$ матрицы $\mathbf{H}$ неположительно. Условие D выполняется, если матрица $\mathbf{\Lambda}$ или матрица $\mathbf{M}$ невырождены, а также, если $\sigma(\mathbf{H}) < 0$, так как в этом случае $\det(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{M} + \mathbf{N}) \ne 0$. Следующая теорема дает простое достаточное условие выполнимости условия D при неразложимой консервативной матрице $\mathbf{H}$.

Теорема 6.1. Пусть матрица $\mathbf{H}$ неразложима и $\mathbf{p}^T\mathbf{H} = \mathbf{0}^T$, где $\mathbf{p} \ne \mathbf{0}$. Условие D выполняется, если $\mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda} \ne \mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu}$.

Доказательство. Согласно теореме 1.10 вектор $\mathbf{p}$ имеет все координаты одного знака, так что $\mathbf{p}^T\mathbf{u} \ne 0$. Без ограничения общности можно считать $\mathbf{p}^T\mathbf{u} = 1$.

Так как собственное число $\sigma(\mathbf{H})$ неразложимой матрицы $\mathbf{H}$ является простым, то собственные векторы $\mathbf{g}(s)$ и $\mathbf{f}(s)$ матриц $(\mathbf{\Lambda} + s\mathbf{N} + s^2\mathbf{M})^T$ и $\mathbf{\Lambda} + s\mathbf{N} + s^2\mathbf{M}$, $s \ge 0$, соответствующие их максимальному собственному числу $\gamma(s)$, можно выбрать так, чтобы их координаты являлись непрерывно дифференцируемыми функциями в некоторой окрестности точки $s=1$, и выполнялись равенства $\mathbf{g}(1)=\mathbf{p}$, $\mathbf{f}(1)=\mathbf{u}$, $\mathbf{g}^T(s)\mathbf{f}(s)=1$ [17]. Дифференцируя равенство

$$\gamma(s)=\mathbf{g}^T(s)(\mathbf{\Lambda}+s\mathbf{N}+s^2\mathbf{M})\mathbf{f}(s),$$

получим

$$\frac{d}{ds}\gamma(s)=\gamma(s)(\frac{d}{ds}\mathbf{g}^T(s))\mathbf{f}(s)+\gamma(s)\mathbf{g}^T(s)(\frac{d}{ds}\mathbf{f}(s))+\mathbf{g}^T(s)(\mathbf{N}+2s\mathbf{M})\mathbf{f}(s).$$

Устремляя в этом равенстве s к 1, получим

$$\frac{d}{ds}\gamma(s)\Big|_{s=1}=\mathbf{p}^T\mathbf{M}\mathbf{u}-\mathbf{p}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{u}.$$

Поэтому при $\mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda}\neq\mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu}$ для некоторого s, близкого к 1, будем иметь $\gamma(s)<\gamma(1)=0$. В этом случае матрица $\mathbf{\Lambda}+s\mathbf{N}+s^2\mathbf{M}$ будет невырожденной. ■

Теорема 6.2. Пусть матрица $\mathbf{H}$ неразложима, и $\mathbf{p}$ – положительный собственный вектор матрицы $\mathbf{H}^T$, соответствующий $\sigma(\mathbf{H})$. Тогда

1°. Минимальное неотрицательное решение $\mathbf{R}$ уравнения

$$\mathbf{\Lambda}+\mathbf{R}\mathbf{N}+\mathbf{R}^2\mathbf{M}=\mathbf{0} \tag{6.20}$$

существует.

2°. Справедливо неравенство

$$\mathbf{p}^T\mathbf{R}\leq(1+\frac{\sigma(\mathbf{H})}{a})\mathbf{p}^T. \tag{6.21}$$

В частности, максимальное собственное число $\sigma(\mathbf{R})$ матрицы $\mathbf{R}$ не превосходит $1+\frac{\sigma(\mathbf{H})}{a}$.

3°. Матрица $\mathbf{N}+\mathbf{R}\mathbf{M}$ невырождена, если и только если выполняется условие D.

4°. При выполнении условия D, $\sigma(\mathbf{R})=1$, если и только если $\sigma(\mathbf{H})=0$ и $\mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda}\geq\mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu}$. В этом случае собственный вектор матрицы $\mathbf{R}^T$, соответствующий собственному числу 1, пропорционален **p**.

Доказательство. Полагая

$$\mathbf{P}_{-1} = \frac{1}{a}\mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{P}_0 = I + \frac{1}{a}\mathbf{N}, \quad \mathbf{P}_1 = \frac{1}{a}\mathbf{M},$$

получим неотрицательные матрицы, для которых

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{P}_{-1} + \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1) = \varepsilon \mathbf{p}^T, \quad (\mathbf{P}_{-1} + \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1)\mathbf{u} \le \mathbf{u},$$

где $\varepsilon = 1 + \dfrac{\sigma(\mathbf{H})}{a}$. Нетрудно видеть, что $0 \le \varepsilon \le 1$. Согласно леммам 6.8 и 6.9 существуют минимальные неотрицательные решения **R** и **F** уравнений $\mathbf{\Lambda} + \mathbf{RN} + \mathbf{R}^2\mathbf{M} = \mathbf{0}$, $\mathbf{\Lambda F}^2 + \mathbf{NF} + \mathbf{M} = \mathbf{0}$ и справедливо неравенство (6.21). Согласно следствию из леммы 6.5, условие *D* необходимо и достаточно для невырожденности матрицы $\mathbf{N} + \mathbf{RM}$.

По следствию из теоремы 1.16 максимальное собственное число матрицы $\mathbf{R}^T$, а значит, и матрицы **R**, не превосходит $1 + \dfrac{\sigma(\mathbf{H})}{a}$. В частности, $\sigma(\mathbf{R}) < 1$, если $\sigma(\mathbf{H}) < 0$. Если $\sigma(\mathbf{H}) = 0$, то из теоремы 1.7 вытекает равенство $\mathbf{Hu} = \mathbf{0}$, а из леммы 6.10 следует, что при выполнении условия *D*, $\sigma(\mathbf{R}) = 1$, если и только если $\mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda} \ge \mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu}$. При этом собственный вектор матрицы $\mathbf{R}^T$, соответствующий единичному собственному числу, пропорционален вектору **g**. ■

Следующая теорема вытекает из теоремы 6.2.

Теорема 6.3. Пусть матрица **H** неразложима и **p** – положительный собственный вектор матрицы $\mathbf{H}^T$, соответствующий $\sigma(\mathbf{H})$. Тогда

1°. Минимальное неотрицательное решение ***S*** уравнения

$$\mathbf{S}^2\mathbf{\Lambda} + \mathbf{SN} + \mathbf{M} = \mathbf{0} \qquad (6.22)$$

существует.

2°. Справедливо неравенство

$$\mathbf{p}^T\mathbf{S} \le (1+\frac{\sigma(\mathbf{H})}{a})\mathbf{p}^T . \qquad (6.23)$$

В частности, максимальное собственное число $\sigma(\mathbf{S})$ матрицы $\mathbf{S}$ не превосходит $1+\dfrac{\sigma(\mathbf{H})}{a}$.

3°. Матрица $\mathbf{N}+\mathbf{S\Lambda}$ невырождена, если и только если выполняется условие D.

4°. При выполнении условия D, $\sigma(\mathbf{S})=1$, если и только если $\sigma(\mathbf{H})=0$ и $\mathbf{g}^T\boldsymbol{\lambda} \le \mathbf{g}^T\boldsymbol{\mu}$. В этом случае собственный вектор матрицы $\mathbf{S}^T$, соответствующий собственному числу 1, пропорционален $\mathbf{p}$.

Следствие 6.5. Пусть матрица $\mathbf{H}$ неразложима и $\sigma(\mathbf{H})<0$. Тогда матрицы $\mathbf{N}+\mathbf{RM}$, $\mathbf{N}+\mathbf{S\Lambda}$ и $\mathbf{S\Lambda}+\mathbf{N}+\mathbf{RM}$ невырождены.

Действительно, если $\sigma(\mathbf{H})<0$, то условие D выполняется и матрицы $\mathbf{N}+\mathbf{RM}$ и $\mathbf{N}+\mathbf{S\Lambda}$ невырождены. Кроме того, из неравенств (6.21), (6.23) вытекает, что

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{S\Lambda}+\mathbf{N}+\mathbf{RM}) \le \mathbf{p}^T(\mathbf{\Lambda}+\mathbf{M}+\mathbf{N}) = \sigma(\mathbf{H})\mathbf{p}^T .$$

Согласно следствию 1.6 из теоремы 1.6

$$\sigma(\mathbf{S\Lambda}+\mathbf{N}+\mathbf{RM}) \le \sigma(\mathbf{H}) .$$

Поэтому матрица $\mathbf{S\Lambda}+\mathbf{N}+\mathbf{RM}$ невырождена, если $\sigma(\mathbf{H})<0$. ■

Теорема 6.4. Пусть матрица $\mathbf{H}$ неразложима, $\mathbf{p}^T\mathbf{H}=\mathbf{0}^T$ $\mathbf{p}^T\mathbf{u}=1$, а $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ – минимальные неотрицательные решения уравнений (6.20) и (6.22). Для невырожденности матрицы $\mathbf{S\Lambda}+\mathbf{N}+\mathbf{RM}$ необходимо выполнение условия $\mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda} \ne \mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu}$. Если $\mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda} \ne \mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu}$ и матрица $\mathbf{S\Lambda}+\mathbf{N}+\mathbf{RM}$ неразложима, то она невырождена.

Доказательство. Заметим сначала, что при выполнении условия D имеем:

$$\mathbf{p}^T\mathbf{R} < \mathbf{p}^T, \quad \mathbf{p}^T\mathbf{S} = \mathbf{p}^T, \text{ если } \mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda} < \mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu},$$

$$\mathbf{p}^T\mathbf{R} = \mathbf{p}^T, \quad \mathbf{p}^T\mathbf{S} = \mathbf{p}^T, \text{ если } \mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu},$$
$$\mathbf{p}^T\mathbf{R} = \mathbf{p}^T, \quad \mathbf{p}^T\mathbf{S} < \mathbf{p}^T, \text{ если } \mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu}.$$

Это вытекает из пунктов 2° и 4° теорем 6.2 и 6.3.

Из равенств (6.20), (6.22) следует справедливость разложений

$$\mathbf{S\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{RM} = (\mathbf{I} - \mathbf{SR})(\mathbf{N} + \mathbf{RM}) = (\mathbf{I} - \mathbf{RS})(\mathbf{N} + \mathbf{S\Lambda}). \quad (6.24)$$

Пусть матрица $\mathbf{S\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{RM}$ невырождена. Тогда матрица $\mathbf{N} + \mathbf{RM}$ невырождена, и по теореме 6.2 выполняется условие *D*. Кроме того, невырождена матрица $\mathbf{I} - \mathbf{SR}$, и с учетом сделанного заключения, приходим к выводу, что $\mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu}$.

Пусть $\mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu}$. Тогда по теореме 6.1 условие *D* выполняется и, согласно теоремам 6.2, 6.3, матрицы $\mathbf{N} + \mathbf{RM}$ и $\mathbf{N} + \mathbf{S\Lambda}$ невырождены. Если $\mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda} < \mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu}$, то $\mathbf{p}^T(\mathbf{I} - \mathbf{SR}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{I} - \mathbf{R}) \neq \mathbf{0}^T$, и из равенств (6.24) следует, что $\mathbf{p}^T(\mathbf{S\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{RM}) \neq \mathbf{0}^T$. Если $\mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu}$, то $\mathbf{p}^T(\mathbf{S\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{RM}) \neq \mathbf{0}^T$, и из равенств (6.24) следует, что $\mathbf{p}^T(\mathbf{I} - \mathbf{RS}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{I} - \mathbf{S}) \neq \mathbf{0}^T$. Таким образом $\mathbf{p}^T(\mathbf{S\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{RM}) \neq \mathbf{0}^T$, если $\mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu}$. Кроме того,

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{S\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{RM}) \leq \mathbf{p}^T(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{M}) = \mathbf{0}^T.$$

Поэтому матрица $\mathbf{S\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{RM}$ является неконсервативной матрцей интенсивностей переходов. В соответствии с теоремой 1.7 она невырождена, если неразложима. ■

Пусть далее матрица $\mathbf{H}$ имеет нормальную форму

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & & & & & & \\ & \mathbf{H}_{22} & & & & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & & \ddots & & & & \\ & & & & & & \\ \mathbf{H}_{r+11} & \mathbf{H}_{r+12} & \cdots & \mathbf{H}_{r+1r} & \mathbf{H}_{r+1r+1} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ \mathbf{H}_{l1} & \mathbf{H}_{l2} & \cdots & \mathbf{H}_{lr} & \mathbf{H}_{lr+1} & \cdots & \mathbf{H}_{ll} \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

где $\mathbf{H}_{ii}$ – неразложимые матрицы интенсивностей переходов, и для $l > r$ в каждой строке $\mathbf{H}_{i1}, \mathbf{H}_{i2}, ..., \mathbf{H}_{ii-1}$, $i = r+1, r+2, ..., l$, есть ненулевая матрица.

Разобьем матрицы $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{N}, \mathbf{M}$ на блоки в соответствии с разбиением на блоки матрицы $\mathbf{H}$. Поскольку все матрицы $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{N}, \mathbf{M}$ имеют неотрицательные внедиагональные элементы, и $\mathbf{H} = \mathbf{\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{M}$, то там, где у матрицы $\mathbf{H}$ стоят нулевые блоки, у матриц $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{N}, \mathbf{M}$ также будут стоять нулевые блоки. Следовательно, матрицы $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{N}, \mathbf{M}$ являются нижними блочно-треугольными:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{11} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \\ \mathbf{\Lambda}_{l1} & \cdots & \mathbf{\Lambda}_{ll} \end{bmatrix}, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \\ \mathbf{N}_{l1} & \cdots & \mathbf{N}_{ll} \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \\ \mathbf{M}_{l1} & \cdots & \mathbf{M}_{ll} \end{bmatrix}.$$

<u>Теорема 6.5.</u> Всегда существует минимальное неотрицательное решение $\mathbf{F}$ уравнения $\mathbf{\Lambda F}^2 + \mathbf{NF} + \mathbf{M} = \mathbf{0}$, причем $\mathbf{Fu} \le (1 + \frac{\sigma(\mathbf{H})}{a})\mathbf{u}$.

Если выполняется условие *D*, то существует также минимальное неотрицательное решение $\mathbf{R}$ уравнения $\mathbf{\Lambda} + \mathbf{RN} + \mathbf{R}^2\mathbf{M} = \mathbf{0}$ и $\sigma(\mathbf{R}) \le 1 + \frac{\sigma(\mathbf{H})}{a}$. В этом случае $\mathbf{RM} = \mathbf{\Lambda F}$, матрица $\mathbf{N} + \mathbf{RM}$ невырождена и справедливо разложение

$$\mathbf{\Lambda} + s\mathbf{N} + s^2\mathbf{M} = (s\mathbf{I} - \mathbf{R})(\mathbf{N} + \mathbf{RM})(\mathbf{I} - s\mathbf{F}).$$

<u>Доказательство.</u> Положим

$$\mathbf{P}_{-1} = \frac{1}{a}\mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{I} + \frac{1}{a}\mathbf{N}, \quad \mathbf{P}_1 = \frac{1}{a}\mathbf{M}.$$

Используя лемму 6.9, приходим к выводу, что существует минимальное неотрицательное решение $\mathbf{F}$ уравнения

$$\mathbf{\Lambda F}^2 + \mathbf{NF} + \mathbf{M} = \mathbf{0}, \qquad (6.26)$$

и справедливо неравенство

$$\mathbf{Fu} \le (1 + \frac{\sigma(\mathbf{H})}{a})\mathbf{u}. \qquad (6.27)$$

Рассмотрим последовательность матриц $\mathbf{F}_0 = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{F}_{k+1} = \mathbf{F}_k + \frac{1}{a}(\mathbf{\Lambda F}_k^2 + \mathbf{NF}_k + \mathbf{M}), \quad k = 0,1,... \qquad (6.28)$$

Согласно лемме 6.7 эта последовательность сходится к матрице $\boldsymbol{F}$. Поскольку матрицы $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{N}, \mathbf{M}$ являются нижними блочно треугольными, все матрицы $\mathbf{F}_k$, а значит, и матрица $\mathbf{F}$ являются нижними блочно треугольными. Из равенств (6.28) и леммы 6.7 также следует, что диагональные блоки $\mathbf{F}_{ii}$ матрицы $\mathbf{F}$ являются минимальными неотрицательными решениями уравнений $\mathbf{\Lambda}_{ii}\mathbf{F}_{ii}{}^2 + \mathbf{N}_{ii}\mathbf{F}_{ii} + \mathbf{M}_{ii} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, ..., l$. Здесь $\mathbf{\Lambda}_{ii} \geq 0$, $\mathbf{M}_{ii} \geq 0$, а $\mathbf{N}_{ii}$, $\mathbf{H}_{ii} = \mathbf{\Lambda}_{ii} + \mathbf{N}_{ii} + \mathbf{M}_{ii}$ – матрицы интенсивностей переходов, причем $\mathbf{H}_{ii}$ неразложимы. По теореме 6.2 существуют минимальные неотрицательные решения $\mathbf{R}_{ii}$ уравнений

$$\mathbf{\Lambda}_{ii} + \mathbf{R}_{ii}\mathbf{N}_{ii} + \mathbf{R}_{ii}^2\mathbf{M}_{ii} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, ..., l.$$

Поскольку определитель $\det(\mathbf{\Lambda} + s\mathbf{N} + s^2\mathbf{M})$ не равен тождественно 0, то все определители $\det(\mathbf{\Lambda}_{ii} + s\mathbf{N}_{ii} + s^2\mathbf{M}_{ii})$, $i = 1, 2, ..., l$, также не равны тождественно 0. Согласно следствию 6.2 из леммы 6.5, матрицы $\mathbf{N}_{ii} + \mathbf{\Lambda}_{ii}\mathbf{F}_{ii}$, а вместе с ними и блочно-треугольная матрица $\mathbf{N} + \mathbf{\Lambda F}$ невырождены.

Из неравенства (6.27) вытекает, что $(\mathbf{N} + \mathbf{\Lambda F})\mathbf{u} \leq \mathbf{Hu} \leq \mathbf{0}$. Кроме того, невырожденная матрица $\mathbf{N} + \mathbf{\Lambda F}$ имеет неотрицательные внедиагональные элементы. Согласно теореме 1.3 $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_{-1}\mathbf{F})^{-1} = -a(\mathbf{N} + \mathbf{\Lambda F})^{-1} \geq \mathbf{0}$.

На основании леммы 6.4 приходим к выводу, что существует минимальное неотрицательное решение $\mathbf{R}$ уравнения $\mathbf{\Lambda} + \mathbf{RN} + \mathbf{R}^2\mathbf{M} = \mathbf{0}$. По лемме 6.5 $\mathbf{RM} = \mathbf{\Lambda F}$, и справедливо разложение

$$\mathbf{\Lambda} + s\mathbf{N} + s^2\mathbf{M} = (s\mathbf{I} - \mathbf{R})(\mathbf{N} + \mathbf{RM})(\mathbf{I} - s\mathbf{F}).$$

Аналогично тому, как мы установили, что матрица $\mathbf{F}$ является нижней блочно треугольной, используя лемму 6.6, приходим к выводу, что матрица $\mathbf{R}$ также является нижней блочно треугольной. На основании теоремы 6.2 справедлива следующая оценка максимального собственного числа $\sigma(\mathbf{R})$ матрицы **R:**

$$\sigma(\mathbf{R}) = \max_i \sigma(\mathbf{R}_{ii}) \le \max_i (1 + \frac{\sigma(\mathbf{H}_{ii})}{a}) = 1 + \frac{\sigma(\mathbf{H})}{a}. \blacksquare$$

Из доказанной теоремы вытекает следующий результат.

Теорема 6.6. Всегда существует минимальное неотрицательное решение $\mathbf{G}$ уравнения $\mathbf{\Lambda} + \mathbf{NG} + \mathbf{MG}^2 = \mathbf{0}$, причем $\mathbf{Gu} \le (1 + \frac{\sigma(\mathbf{H})}{a})\mathbf{u}$.

Если выполняется условие *D*, то существует также минимальное неотрицательное решение $\mathbf{S}$ уравнения $\mathbf{S}^2\mathbf{\Lambda} + \mathbf{SN} + \mathbf{M} = \mathbf{0}$ и $\sigma(\mathbf{S}) \le 1 + \frac{\sigma(\mathbf{H})}{a}$. В этом случае $\mathbf{S\Lambda} = \mathbf{MG}$, матрица $\mathbf{N} + \mathbf{S\Lambda}$ невырождена и справедливо разложение

$$s^2\mathbf{\Lambda} + s\mathbf{N} + \mathbf{M} = (s\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{N} + \mathbf{S\Lambda})(\mathbf{I} - s\mathbf{G}).$$

Матрица $\mathbf{\Lambda} + s\mathbf{N} + s^2\mathbf{M}$ является нижней блочно треугольной и условие *D* выполняется, если оно выполняется для всех ее диагональных блоков $\mathbf{\Lambda}_{ii} + s\mathbf{N}_{ii} + s^2\mathbf{M}_{ii}, \quad i = 1, 2, ..., l$. Поскольку матрицы $\mathbf{H}_{ii} = \mathbf{\Lambda}_{ii} + \mathbf{N}_{ii} + \mathbf{M}_{ii}$ неразложимы, для этого по теореме 6.1 достаточно, чтобы для каждого *i* выполнялось одно из двух условий:

1) $\sigma(\mathbf{H}_{ii}) < 0$,

2) $\sigma(\mathbf{H}_{ii}) = 0$ и $\mathbf{p}_i^T \mathbf{\Lambda}_{ii} \mathbf{u}_i \ne \mathbf{p}_i^T \mathbf{M}_{ii} \mathbf{u}_i$,

где $\mathbf{p}_i$ - положительный вектор, $\mathbf{p}_i^T \mathbf{H}_{ii} = \mathbf{0}^T$, и $\mathbf{u}_i$ - вектор из единиц.

Согласно лемме 6.7, минимальные неотрицательные решения **R** и **S** уравнений (6.20), (6.22) являются пределами последовательностей матриц

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_k + \frac{1}{a}(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{R}_k\mathbf{N} + \mathbf{R}_k^2\mathbf{M}), \quad k = 0,1,..., \quad (6.29)$$

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{S}_k + \frac{1}{a}(\mathbf{S}_k^2\mathbf{\Lambda} + \mathbf{S}_k\mathbf{N} + \mathbf{M}), \quad k = 0,1,.... \quad (6.30)$$

Поскольку матрицы $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{N}, \mathbf{M}$ являются нижними блочно треугольными, такими же будут все матрицы $\mathbf{R}_k$ и $\mathbf{S}_k$, а значит, и матрицы $\mathbf{R},\mathbf{S}$ и $\mathbf{S\Lambda}+\mathbf{N}+\mathbf{RM}$. Из равенств (6.29), (6.30) и леммы 6.7 вытекает, что диагональные блоки матриц $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$ являются минимальными неотрицательными решениями уравнений

$$\mathbf{\Lambda}_{ii}+\mathbf{R}_{ii}\mathbf{N}_{ii}+\mathbf{R}_{ii}^2\mathbf{M}_{ii}=\mathbf{0},$$

$$\mathbf{S}_{ii}^2\mathbf{\Lambda}_{ii}+\mathbf{S}_{ii}\mathbf{N}_{ii}+\mathbf{M}_{ii}=\mathbf{0}, \; i=1,2,...,l,$$

причем матрицы интенсивностей переходов $\mathbf{H}_{ii}=\mathbf{\Lambda}_{ii}+\mathbf{M}_{ii}+\mathbf{N}_{ii}$ неразложимы. Согласно следствию 6.5 из теоремы 6.3 матрицы $\mathbf{S}_{ii}\mathbf{\Lambda}_{ii}+\mathbf{N}_{ii}+\mathbf{R}_{ii}\mathbf{M}_{ii}$, являющиеся диагональными блоками матрицы $\mathbf{S\Lambda}+\mathbf{N}+\mathbf{RM}$, будут невырождены, если $\sigma(\mathbf{H}_{ii})<0$. Поэтому при $\sigma(\mathbf{H})<0$ матрица $\mathbf{S\Lambda}+\mathbf{N}+\mathbf{RM}$ невырождена.

Если же $\sigma(\mathbf{H}_{ii})=0$ для некоторых диагональных блоков матрицы **H**, то по теореме 6.4 для невырожденности матрицы $\mathbf{S\Lambda}+\mathbf{N}+\mathbf{RM}$ необходимо, чтобы для таких блоков выполнялось условие $\mathbf{p}_i^T\mathbf{\Lambda}_{ii}\mathbf{u}_i \neq \mathbf{p}_i^T\mathbf{M}_{ii}\mathbf{u}_i$, где $\mathbf{p}_i$ – положительный вектор, $\mathbf{p}_i^T\mathbf{H}_{ii}=\mathbf{0}^T$. Если для каждого *i*, для которого $\sigma(\mathbf{H}_{ii})=0$, выполняется это условие, и матрица $\mathbf{S}_{ii}\mathbf{\Lambda}_{ii}+\mathbf{N}_{ii}+\mathbf{R}_{ii}\mathbf{M}_{ii}$ неразложима, то матрица $\mathbf{S\Lambda}+\mathbf{N}+\mathbf{RM}$ невырождена.

Наиболее просто определить, для каких диагональных блоков $\sigma(\mathbf{H}_{ii})=0$, а для каких $\sigma(\mathbf{H}_{ii})<0$, если матрица интенсивностей переходов $\mathbf{H}$ консервативна. В этом случае

$$\mathbf{H}_{ii}\mathbf{u}_i=0, \quad i=1,2,...,r,$$

$$\mathbf{H}_{ii}\mathbf{u}_i \le -\sum_{j=1}^{i-1}\mathbf{H}_{ij}\mathbf{u}_j<\mathbf{0}, \quad i=r+1,r+2,...,l.$$

По теореме 1.7 матрицы $\mathbf{H}_{ii}$, $i>r$, невырождены. Следовательно, $\sigma(\mathbf{H}_{ii})=0$ для $i=1,2,...,r$ и $\sigma(\mathbf{H}_{ii})<0$ для $i=r+1,...,l$.

Суммируем вышесказанное в двух теоремах.

Теорема 6.7. Пусть $\sigma(\mathbf{H}) < 0$. Тогда условие D выполняется. Если $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$ – минимальные неотрицательные решения уравнений (6.20) и (6.22), то матрица $\mathbf{S\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{RM}$ невырождена.

Теорема 6.8. Пусть $\mathbf{Hu} = \mathbf{0}$, $\mathbf{p}_i^T \mathbf{\Lambda}_{ii} \mathbf{u}_i \neq \mathbf{p}_i^T \mathbf{M}_{ii} \mathbf{u}_i$ и $\mathbf{p}_i^T \mathbf{H}_{ii} = \mathbf{0}^T$, $i = 1, 2, ..., r$, где $\mathbf{p}_i$ – положительные векторы. Тогда условие D выполняется. Если $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$ – минимальные неотрицательные решения уравнений (6.20) и (6.22), то матрица $\mathbf{S\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{RM}$ невырождена, когда ее диагональные блоки $\mathbf{S}_{ii}\mathbf{\Lambda}_{ii} + \mathbf{N}_{ii} + \mathbf{R}_{ii}\mathbf{M}_{ii}$, $i = 1, 2, ..., r$, неразложимы.

В заключение раздела отметим, что матрицы $\mathbf{S\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{RM}$ и $\mathbf{MG} + \mathbf{N} + \mathbf{\Lambda F}$ являются матрицами интенсивностей переходов, поскольку их внедиагональные элементы неотрицательны и

$$(\mathbf{S\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{RM})\mathbf{u} = (\mathbf{MG} + \mathbf{N} + \mathbf{\Lambda F})\mathbf{u} \leq \mathbf{Hu} \leq \mathbf{0}.$$

6.3. Вычисление минимальных неотрицательных решений

Здесь, как и в предыдущем разделе, предполагаем, что $\mathbf{\Lambda} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{M} \geq \mathbf{0}$, а матрицы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{\Lambda} + \mathbf{M} + \mathbf{N}$ являются матрицами интенсивностей переходов. Дополнительно предположим выполненным условие D раздела 6.2, а также условие $\mathbf{\Lambda} + \mathbf{M} > \mathbf{0}$.

Пусть матрица $\mathbf{E}$ имеет неотрицательные внедиагональные элементы, и $\mathbf{E} \leq \mathbf{N}$. Тогда $\mathbf{Eu} \leq \mathbf{Nu} < \mathbf{Hu} \leq \mathbf{0}$ и, следовательно, $\mathbf{Eu} < \mathbf{0}$. По теореме 1.7 матрица $\mathbf{E}$ невырождена, а по теореме 1.3 $\mathbf{E}^{-1} \leq \mathbf{0}$. Положим

$$\mathbf{P}_{-1}(\mathbf{E}) = -\mathbf{\Lambda E}^{-1}, \quad P_0(\mathbf{E}) = (\mathbf{E} - \mathbf{N})\mathbf{E}^{-1}, \quad P_1(\mathbf{E}) = -\mathbf{ME}^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что матрицы $\mathbf{P}_{-1}(\mathbf{E})$, $\mathbf{P}_0(\mathbf{E})$ и $\mathbf{P}_1(\mathbf{E})$ являются неотрицательными, а решения уравнения

$$\mathbf{P}_{-1}(\mathbf{E}) + \mathbf{X}(\mathbf{P}_0(\mathbf{E}) - \mathbf{I}) + \mathbf{X}^2\mathbf{P}_1(\mathbf{E}) = \mathbf{0} \qquad (6.31)$$

являются решениями уравнения $\mathbf{\Lambda} + \mathbf{XN} + \mathbf{X}^2\mathbf{M} = \mathbf{0}$ и наоборот.

Определим рекуррентно последовательность матриц

$$\mathbf{R}_0(\mathbf{E}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_{k+1}(\mathbf{E}) = \mathbf{P}_{-1}(\mathbf{E}) + \mathbf{R}_k(\mathbf{E})\mathbf{P}_0(\mathbf{E}) + \mathbf{R}_k^2(\mathbf{E})\mathbf{P}_1(\mathbf{E}), \quad k = 0,1,... \tag{6.32}$$

<u>Теорема 6.9.</u> Для любой матрицы $\mathbf{E} \le \mathbf{N}$ с неотрицательными внедиагональными элементами последовательность матриц $\mathbf{R}_k(\mathbf{E})$ монотонно сходится к минимальному неотрицательному решению $\mathbf{R}$ уравнения

$$\mathbf{\Lambda} + \mathbf{RN} + \mathbf{R}^2\mathbf{M} = \mathbf{0}. \tag{6.33}$$

Если матрица $\mathbf{G}$ имеет неотрицательные внедиагональные элемены и $\mathbf{E} \le \mathbf{G} \le \mathbf{N}$, то $\mathbf{R}_k(\mathbf{E}) \le \mathbf{R}_k(\mathbf{G})$ для всех $k = 0,1,...$

<u>Доказательство.</u> При сделанных в начале этого раздела предположениях по теореме 6.5 существует минимальное неотрицательное решение $\mathbf{R}$ уравнения $\mathbf{\Lambda} + \mathbf{RN} + \mathbf{R}^2\mathbf{M} = \mathbf{0}$. Матрица $\mathbf{R}$ является также минимальным неотрицательным решением уравнения (6.20). Согласно лемме 6.6 последовательность матриц $\mathbf{R}_k(\mathbf{E})$ монотонно сходится к матрице $\mathbf{R}$.

Пусть $\mathbf{G}$ имеет неотрицательные внедиагональные элементы и $\mathbf{E} \le \mathbf{G} \le \mathbf{N}$. Тогда $\mathbf{R}_0(\mathbf{G}) = \mathbf{R}_0(\mathbf{E})$ и из неравенства $\mathbf{R}_k(\mathbf{G}) \ge \mathbf{R}_k(\mathbf{E})$ следует:

$$\begin{aligned}
&-\mathbf{R}_{k+1}(\mathbf{G})\mathbf{G} = \mathbf{\Lambda} + \mathbf{R}_k(\mathbf{G})(\mathbf{N} - \mathbf{G}) + \mathbf{R}_k^2(\mathbf{G})\mathbf{M} \ge \\
&\ge \mathbf{\Lambda} + \mathbf{R}_k(\mathbf{E})(\mathbf{N} - \mathbf{G}) + \mathbf{R}_k^2(\mathbf{E})\mathbf{M} = \\
&= \mathbf{\Lambda} + \mathbf{R}_k(\mathbf{E})(\mathbf{N} - \mathbf{E}) + \mathbf{R}_k^2(\mathbf{E})\mathbf{M} + \mathbf{R}_k(\mathbf{E})(\mathbf{E} - \mathbf{G}) = \\
&= -\mathbf{R}_{k+1}(\mathbf{E})\mathbf{G} + (\mathbf{R}_{k+1}(\mathbf{E}) - \mathbf{R}_k(\mathbf{E}))(\mathbf{G} - \mathbf{E}) \ge -\mathbf{R}_{k+1}(\mathbf{E})\mathbf{G}.
\end{aligned}$$

Поскольку $(-\mathbf{G})^{-1} \ge \mathbf{0}$, из полученного неравенства вытекает, что $\mathbf{R}_{k+1}(\mathbf{G}) \ge \mathbf{R}_{k+1}(\mathbf{E})$. Таким образом, $\mathbf{R}_k(\mathbf{E}) \le \mathbf{R}_k(\mathbf{G})$ при любом $k = 0,1,...$ ■

С помощью доказанной теоремы можно построить серию последовательностей матриц, сходящихся к минимальному неотрицательному решению уравнения (6.33). Наиболее просто вычисляется последовательность $\mathbf{R}_k(\gamma\mathbf{I})$, где $\gamma < 0$ – минимальный диагональный элемент матрицы *N*. Наиболее быстро к матрице **R** сходится последовательность $\mathbf{R}_k(\mathbf{N})$. Однако при этом требуется обращение матрицы *N*. Компромиссным вариантом является последовательность $\mathbf{R}_k(\mathbf{E})$, в которой **E** – треугольная матрица, ненулевые элементы которой совпадают с соответствующими элементами матрицы **N**.

В основе другого метода вычисления минимального неотрицательного решения **R** уравнения (6.33) лежит равенство

$$\mathbf{R} = -\mathbf{\Lambda}(\mathbf{N} + \mathbf{RM})^{-1}.$$

Определим последовательность матриц $\bar{\mathbf{R}}_k$ следующим образом:

$$\bar{\mathbf{R}}_{k+1} = -\mathbf{\Lambda}(\mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}_k\mathbf{M})^{-1}, \quad k = 0,1,... \tag{6.34}$$

Докажем корректность этого определения и сходимость матриц $\bar{\mathbf{R}}_k$ к матрице **R**.

Теорема 6.10. Последовательность матриц $\bar{\mathbf{R}}_k$ монотонно сходится к минимальному неотрицательному решению **R** уравнения (6.33). При этом $\mathbf{R}_k(\mathbf{N}) \le \bar{\mathbf{R}}_k$ для всех $k = 0,1,...$

Доказательство. По теореме 6.2 матрица $\mathbf{N} + \mathbf{RM}$ невырождена. Очевидно, $\mathbf{0} = \bar{\mathbf{R}}_0 \le \mathbf{R}$, а из неравенства $\bar{\mathbf{R}}_k \le \mathbf{R}$, согласно следствию из теоремы 1.6, вытекают невырожденность матрицы $\mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}_k\mathbf{M}$ и справедливость неравенства

$$\bar{\mathbf{R}}_{k+1} = -\mathbf{\Lambda}(\mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}_k\mathbf{M})^{-1} \le -\mathbf{\Lambda}(\mathbf{N} + \mathbf{RM})^{-1} = \mathbf{R}.$$

Таким образом, определение (6.34) корректно, и $\bar{\mathbf{R}}_k \le \mathbf{R}$ для всех $k = 0,1,...$.

Далее имеем $\bar{\mathbf{R}}_1 = -\mathbf{\Lambda}\mathbf{N}^{-1} \ge \bar{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{0}$, а из неравенства $\bar{\mathbf{R}}_k \ge \bar{\mathbf{R}}_{k-1}$, согласно следствию из теоремы 1.6, вытекает, что

$$\bar{\mathbf{R}}_{k+1} = -\mathbf{\Lambda}(\mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}_k\mathbf{M})^{-1} \geq -\mathbf{\Lambda}(\mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{M})^{-1} = \bar{\mathbf{R}}_k .$$

Поэтому последовательность матриц $\bar{\mathbf{R}}_k$ монотонна и ограниченна сверху матрицей $\mathbf{R}$. Следовательно, она сходится к некоторой неотрицательной матрице $\mathbf{Y} \leq \mathbf{R}$, которая, как вытекает из равенства (6.34), удовлетворяет уравнению $\mathbf{\Lambda} + \mathbf{YN} + \mathbf{Y}^2\mathbf{M} = \mathbf{0}$. Поскольку $\mathbf{R}$ – минимальное неотрицательное решение этого уравнения, то $\mathbf{Y} = \mathbf{R}$.

Покажем, что последовательность $\bar{\mathbf{R}}_k$ сходится к матрице $\mathbf{R}$ быстрее, чем последовательность $\mathbf{R}_k(\mathbf{N})$. Ясно, что $\bar{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{R}_0(\mathbf{N})$, а из неравенства $\bar{\mathbf{R}}_k \geq \mathbf{R}_k(\mathbf{N})$, с учетом монотонности последовательности $\bar{\mathbf{R}}_k$, получаем

$$\bar{\mathbf{R}}_{k+1} = -\mathbf{\Lambda N}^{-1} - \bar{\mathbf{R}}_{k+1}\bar{\mathbf{R}}_k\mathbf{MN}^{-1} = \mathbf{P}_{-1}(\mathbf{N}) + \bar{\mathbf{R}}_{k+1}\mathbf{R}_k\mathbf{P}_1(\mathbf{N}) \geq$$
$$\geq \mathbf{P}_{-1}(\mathbf{N}) + \bar{\mathbf{R}}_k^2\mathbf{P}_1(\mathbf{N}) \geq \mathbf{P}_{-1}(\mathbf{N}) + \mathbf{R}_k^2(\mathbf{N})\mathbf{P}_1(\mathbf{N}) = \mathbf{R}_{k+1}(\mathbf{N}).$$

Следовательно, $\bar{\mathbf{R}}_k \geq \mathbf{R}_k(\mathbf{N})$ для всех $k = 0,1,\ldots$ ■

Уравнения (6.20) и (6.22) могут быть решены различными методами, однако самым быстрым является метод логарифмического понижения [20, 21]. К тому же оказалось, что он позволяет за один проход найти решения обоих уравнений [18].

6.4. Проверка неразложимости матрицы $\mathbf{S\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{RM}$

Здесь, как и в предыдущем разделе, предполагаем, что $\mathbf{\Lambda} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{M} \geq \mathbf{0}$, а матрицы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{\Lambda} + \mathbf{M} + \mathbf{N}$ являются матрицами интенсивностей переходов. Дополнительно предположим выполненным условие *D* раздела 6.2.

Пусть $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$ – минимальные неотрицательные решения уравнений $\mathbf{\Lambda} + \mathbf{RN} + \mathbf{R}^2\mathbf{M} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{S}^2\mathbf{\Lambda} + \mathbf{SN} + \mathbf{M} = \mathbf{0}$. Проверку того, является ли матрица $\mathbf{S\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{RM}$ неразложимой, можно провести, не зная самих решений $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$, а обследовав граф $G(\mathbf{A})$ бесконечной в обе стороны блочной трехдиагональной матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & \mathbf{0} \\ \ddots & \mathbf{N} & \mathbf{\Lambda} & & \\ & \mathbf{M} & \mathbf{N} & \mathbf{\Lambda} & \\ & & \mathbf{M} & \mathbf{N} & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Граф $G(\mathbf{A})$ имеет множество вершин

$$X_* = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} X_k ,$$

где $X_k = \{(k,i) \mid i \in X\}$, $X = \{1,2,...,m\}$, и m – порядок матриц $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$. Подмножества вершин X_k будем называть слоями. В графе $G(\mathbf{A})$ дуги могут соединять лишь вершины из одного слоя или вершины из соседних слоев. Из вершины (k,i) есть дуга в вершину (k,j), если $N(i,j) > 0$, есть дуга в вершину $(k+1,j)$, если $\Lambda(i,j) > 0$, и есть дуга в вершину $(k-1,j)$, если $M(i,j) > 0$.

Теорема 6.11. Матрица $\mathbf{S\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{RM}$ неразложима тогда и только тогда, когда в графе $G(\mathbf{A})$ из любой вершины слоя X_0 существует путь в любую другую вершину этого слоя.

Доказательство. Согласно теореме 6.5 матрица $\mathbf{N} + \mathbf{RM}$ невырождена, а по теореме 1.3 $(\mathbf{N} + \mathbf{RM})^{-1} \le \mathbf{0}$. Положим $\mathbf{U} = -(\mathbf{N} + \mathbf{RM})^{-1}$, тогда из равенства $\mathbf{\Lambda} + \mathbf{R(N} + \mathbf{RM)} = \mathbf{0}$ вытекает, что $\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda U}$. Следовательно, матрица $\mathbf{U}$ является неотрицательным решением уравнения

$$\mathbf{U} = -(\mathbf{N} + \mathbf{\Lambda UM})^{-1} . \tag{6.35}$$

Если $\mathbf{Y}$ – другое неотрицательное решение этого уравнения, то неотрицательная матрица $\mathbf{\Lambda Y}$ удовлетворяет уравнению $\mathbf{\Lambda} + \mathbf{XN} + \mathbf{X}^2\mathbf{M} = \mathbf{0}$ и, значит, $\mathbf{\Lambda Y} \ge \mathbf{R}$. Согласно следствию 1.1 из теоремы 1.6

$$\mathbf{Y} = -(\mathbf{N} + \mathbf{\Lambda YM})^{-1} \ge -(\mathbf{N} + \mathbf{RM})^{-1} = \mathbf{U} ,$$

т.е. матрица $\mathbf{U}$ является минимальным неотрицательным решением уравнения (6.35).

Пусть $\alpha > 0$ – некоторое число, для которого $\mathbf{N} + \alpha\mathbf{I} \geq \mathbf{0}$, и $\mathbf{P}_{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha}\mathbf{N}$, $\mathbf{P}_1 = \frac{1}{\alpha}\mathbf{M}$. Тогда матрица $\mathbf{U}$ является минимальным неотрицательным решением уравнения $\mathbf{U} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_{-1}\mathbf{U}\mathbf{P}_1)^{-1}$ и согласно следствию 6.1 из леммы 6.1 матрица $\mathbf{U}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in K_n} \mathbf{P}_{k_1}\mathbf{P}_{k_2} \cdots \mathbf{P}_{k_n} \ ,$$

где

$$K_n = \{(k_1, k_2, ..., k_n) \in \{-1, 0, 1\}^n \mid k_1 \leq 0, k_1 + k_2 \leq 0, ...$$
$$..., k_1 + ... + k_{n-1} \leq 0, k_1 + ... + k_n = 0\}, \quad n = 1, 2, ...$$

Отсюда вытекает, что $U(i, j) \neq 0$ тогда и только тогда, когда в графе $G(\mathbf{A})$ существует путь из вершины $(1, i)$ в вершину $(1, j)$, проходящий через вершины, принадлежащие слоям $X_1, X_2, ...$, и не содержащий вершин из слоев $X_0, X_{-1}, X_{-2}, ...$

Аналогично, если $\mathbf{S}$ – минимальное неотрицательное решение уравнения $\mathbf{S}^2\mathbf{\Lambda} + \mathbf{S}\mathbf{N} + \mathbf{M} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{S} = \mathbf{M}\mathbf{V}$, где матрица $\mathbf{V} = -(\mathbf{N} + \mathbf{S}\mathbf{\Lambda})^{-1}$ является минимальным неотрицательным решением уравнения

$$\mathbf{V} = -(\mathbf{N} + \mathbf{M}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda})^{-1}. \qquad (6.36)$$

Для того чтобы $V(i, j) \neq 0$, необходимо и достаточно существование в графе $G(\mathbf{A})$ пути из вершины $(-1, i)$ в вершину $(-1, j)$, проходящего через вершины, принадлежащие слоям $X_{-1}, X_{-2}, ...$, и не содержащего вершин из слоев $X_0, X_1, X_2, ...$. и

Положим

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{R}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{U}\mathbf{M}$$

и рассмотрим граф $G(\mathbf{\Phi})$. Ясно, что $i \neq j$ и $\Phi(i, j) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $N(i, j) \neq 0$, либо $(\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}\mathbf{M})(i, j) \neq 0$, либо $(\mathbf{M}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda})(i, j) \neq 0$. С учетом вышесказанного, это равносильно тому, что в графе $G(\mathbf{A})$ существует путь, начинающийся в вершине $(0,i)$, заканчивающийся в вершине $(0,j)$ и не содержащий других вершин слоя X_0. В частности, если в графе $G(\mathbf{\Phi})$ существует путь из вершины *i* в вершину *j*, то в графе $G(\mathbf{A})$ существует путь $(i,0)$ в вершину $(j,0)$.

Если в графе $G(\mathbf{A})$ есть путь из $(i,0)$ в $(j,0)$, то этот путь состоит из одного или нескольких участков, каждый из которых начинается и заканчивается в вершинах из слоя X_0 и не содержит других вершин этого слоя. Таким участкам соответствуют дуги графа $G(\mathbf{\Phi})$, образующие в нем путь из вершины *i* в вершину *j*. Таким образом, условие теоремы 6.11 эквивалентно сильной связности графа $G(\mathbf{\Phi})$. ■

6.5. Собственные числа матриц R и S

Здесь мы предполагаем, что $\mathbf{\Lambda} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{M} \geq \mathbf{0}$, а матрицы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{\Lambda} + \mathbf{M} + \mathbf{N}$ являются матрицами интенсивностей переходов. Будем обозначать $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{\Lambda u}$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{Mu}$, где $\mathbf{u}$ – вектор из единиц, и α некоторое положительное число, для которого $\mathbf{N} + \alpha\mathbf{I} \geq \mathbf{0}$. Предполагается также выполненным условие *D* раздела 6.3.

Пусть $\mathbf{S}, \mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ – минимальные неотрицательные решения уравнений

$$\begin{gathered} \mathbf{S}^2\mathbf{\Lambda} + \mathbf{SN} + \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Lambda} + \mathbf{RN} + \mathbf{R}^2\mathbf{M} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{\Lambda F}^2 + \mathbf{NF} + \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Lambda} + \mathbf{NG} + \mathbf{MG}^2 = \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{6.37}$$

Согласно теоремам 6.5 и 6.6 все собственные числа матриц $\mathbf{S}, \mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ лежат в круге $|s| \leq 1 + \dfrac{\sigma(\mathbf{H})}{\alpha}$, матрицы $\mathbf{N} + \mathbf{RM}$ и $\mathbf{N} + \mathbf{S\Lambda}$ невырождены и справедливы разложения

$$\mathbf{\Lambda} + s\mathbf{N} + s^2\mathbf{M} = (s\mathbf{I} - \mathbf{R})(\mathbf{N} + \mathbf{RM})(\mathbf{I} - s\mathbf{F}), \tag{6.38}$$

$$\mathbf{\Lambda} + s\mathbf{N} + s^2\mathbf{M} = (\mathbf{I} - s\mathbf{S})(\mathbf{N} + \mathbf{S\Lambda})(s\mathbf{I} - \mathbf{G}). \tag{6.39}$$

Рассмотрим первое из этих разложений. Степень многочлена $\det(s\mathbf{I}-\mathbf{R})$ равна m, а степень r многочлена $\det(\mathbf{I}-\mathbf{sF})$ заключена в интервале $0 \le r \le m$. Поэтому степень $k = m + r$ многочлена $\Delta(s) = \det(\mathbf{\Lambda} + s\mathbf{N} + s^2\mathbf{M})$ заключена в интервале $m \le k \le 2m$. Нулями многочлена $\Delta(s)$ являются m собственных чисел матрицы **R**, которые лежат в круге $|s| \le 1 + \dfrac{\sigma(\mathbf{H})}{\alpha}$, $r = k - m$ чисел, обратных ненулевым собственным числам матрицы **F**. Эти последние r нулей многочлена $\Delta(s)$ имеют модули не меньше, чем $(1 + \dfrac{\sigma(\mathbf{H})}{\alpha})^{-1}$.

Если степень r многочлена $\det(\mathbf{I} - s\mathbf{F})$ меньше m, то характеристический многочлен матрицы ***F*** можно записать в виде $\det(s\mathbf{I}-\mathbf{F}) = s^{m-r}[s^r \det(\mathbf{I} - \frac{1}{s}\mathbf{F})]$, где в квадратных скобках стоит многочлен степени r, свободный член которого равен коэффициенту при s^r у многочлена $\det(\mathbf{I} - s\mathbf{F})$ и поэтому отличен от 0. Следовательно, при $r < m$ матрица **F** имеет нулевое собственное число кратности $m - r = 2m - k$.

Из разложения (6.39) следует, что степень многочлена $\det(\mathbf{I} - s\mathbf{S})$ равна $k - m = r$. Нулями многочлена $\Delta(s)$ являются m собственных чисел матрицы **G**, лежащие в круге $|s| < 1 + \dfrac{\sigma(\mathbf{H})}{\alpha}$, и r чисел, обратных ненулевым собственным числам матрицы **S**, для которых $|s| \ge (1 + \dfrac{\sigma(\mathbf{H})}{\alpha})^{-1}$. При $r < m$ матрица **S** имеет нулевое собственное число кратности $m - r$.

Пусть $\sigma(\mathbf{H}) < 0$, тогда в области $|s| < 1$ лежат ровно m нулей многочлена $\Delta(s)$, являющихся собственными числами матрицы **R** и одновременно собственными числами матрицы **G**. Поэтому характеристические многочлены матриц **R** и **G** совпадают. В области $|s| > 1$ лежат ровно r нулей многочлена $\Delta(s)$, являющихся числами, обратными ненулевым собственным числам матрицы **F,** и одновременно числами, обратными ненулевым собственным числам матрицы **S**. Если $r < m$, то обе матрицы **F** и **S** имеют нулевые собственные числа кратности $m - r$. Поэтому характеристические многочлены матриц **S** и **F** также совпадают.

Если $\sigma(\mathbf{H}) = 0$, то рассмотрим минимальные неотрицательные решения $\mathbf{S}_\varepsilon, \mathbf{R}_\varepsilon, \mathbf{F}_\varepsilon, \mathbf{G}_\varepsilon$ уравнений

$$\mathbf{S}_\varepsilon^2 \mathbf{\Lambda} + \mathbf{S}_\varepsilon (\mathbf{N} - \varepsilon \mathbf{I}) + \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Lambda} + \mathbf{R}_\varepsilon (\mathbf{N} - \varepsilon \mathbf{I}) + \mathbf{R}_\varepsilon^2 \mathbf{M} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{\Lambda} \mathbf{F}_\varepsilon^2 + (\mathbf{N} - \varepsilon \mathbf{I}) \mathbf{F}_\varepsilon + \mathbf{M} = 0, \quad \mathbf{\Lambda} + (\mathbf{N} - \varepsilon \mathbf{I}) \mathbf{G}_\varepsilon + \mathbf{M} \mathbf{G}_\varepsilon^2 = \mathbf{0},$$

где $\varepsilon > 0$. Поскольку $\sigma(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{N} - \varepsilon \mathbf{I} + \mathbf{M}) = -\varepsilon < 0$, то характеристические многочлены матриц $\mathbf{R}_\varepsilon$ и $\mathbf{G}_\varepsilon$, а также матриц $\mathbf{S}_\varepsilon$ и $\mathbf{F}_\varepsilon$ совпадают. При $\varepsilon \to 0$ матрицы $\mathbf{S}_\varepsilon, \mathbf{R}_\varepsilon, \mathbf{F}_\varepsilon$ и $\mathbf{G}_\varepsilon$ сходятся к матрицам $\mathbf{S}, \mathbf{R}, \mathbf{F}$ и **G**. Поэтому характеристические многочлены матриц **R** и **G**, а также матриц **S** и **F** совпадают и при $\sigma(\mathbf{H}) = 0$.

Из вышесказанного вытекает, что в предположениях, сделанных в начале этого раздела, справедлив следующий результат.

Теорема 6.12. Пусть $\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ – минимальные неотрицательные решения уравнений (6.37). Тогда характеристические многочлены матриц **R** и **G** и характеристические многочлены матриц ***S*** и **F** совпадают. Степень k многочлена $\Delta(s) = \det(\mathbf{\Lambda} + s\mathbf{N} + s^2 \mathbf{M})$ заключена в интервале $m \le k \le 2m$. Этот многочлен имеет m нулей, являющихся собственными числами матриц **R** и **G**, и $k - m$ нулей, являющихся величинами, обратными ненулевым собственным числам матриц **S** и **F**. Если $k < 2m$, то матрицы **S** и **F** имеют нулевое собственное число кратности $2m - k$.

С помощью этой теоремы можно определить все собственные числа матриц **R** и **S**, если известны два непересекающихся подмножества комплексной плоскости, в одном из которых лежат собственные числа матрицы **R**, а в другом – числа, обратные ненулевым собственным числам матрицы **S**. В рассмотренном выше случае, когда $\sigma(\mathbf{H})<0$, такими подмножествами являлись внутренняя и внешняя части круга $|s|<1$.

Пусть $\sigma(\mathbf{H})=0$, матрица H неразложима и $\mathbf{p}^T\mathbf{H}=0^T$, где **p** – положительный вектор. Если $\mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda}<\mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu}$, то согласно теоремам 6.2 и 6.3 $\sigma(\mathbf{R})<1$, а $\sigma(\mathbf{S})=1$. Поэтому собственные числа матрицы **R** принадлежат области $|s|<1$, а величины, обратные ненулевым собственным числам матрицы *S*, лежат вне ее. Если $\mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda}>\mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu}$, то $\sigma(\mathbf{R})=1$, а $\sigma(\mathbf{S})<1$. Поэтому $|s|\le 1$ для собственных чисел матрицы **R** и $|s|>1$ для величин, обратных ненулевым собственным числам матрицы **S**.

6.6. Пример

Пусть требуется решить систему уравнений равновесия $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}=\mathbf{0}^T$ с неразложимой блочной трехдиагональной консервативной матрицей интенсивностей переходов, имеющей вид

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 & \boldsymbol{\Lambda}_0 & & & & \\ \mathbf{M}_1 & \mathbf{N} & \boldsymbol{\Lambda} & & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{M} & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \boldsymbol{\Lambda} & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{M} & \mathbf{N} & \boldsymbol{\Lambda}_{l-1} \\ & & & & \mathbf{M}_l & \mathbf{N}_l \end{bmatrix}, \qquad (6.40)$$

где число диагональных клеток не меньше 5. Предположим для простоты, что матрица **H** неразложима, и пусть **p** – положительное решение системы уравнений равновесия $\mathbf{p}^T\mathbf{H}=\mathbf{0}^T$. В этом случае по теоремам 6.2 и 6.3 существуют минимальные неотрицательные решения **R** и **S** уравнений $\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{RN}+\mathbf{R}^2\mathbf{M}=\mathbf{0}$ и $\mathbf{S}^2\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{SN}+\mathbf{M}=\mathbf{0}$. Для применения к решению системы уравнений $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}=\mathbf{0}^T$ результатов, изложенных в настоящей главе, требуется невырожденность матрицы $\mathbf{\Phi} = \mathbf{S\Lambda} + \mathbf{N} + \mathbf{RM}$. Для этого по теореме 6.4 необходимо, чтобы $\mathbf{p}^T \boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{p}^T \boldsymbol{\mu}$.

Пусть $\mathbf{p}^T \boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{p}^T \boldsymbol{\mu}$. Построив граф $G(\mathbf{A})$, проверяем, является ли матрица $\mathbf{\Phi}$ неразложимой. Если да, то по теореме 6.4 матрица $\mathbf{\Phi}$ невырождена. Если же матрица $\mathbf{\Phi}$ разложима, то уверенности в том, что она невырождена, нет, и можно либо прекратить дальнейшие действия и поискать другой метод решения, либо просто проверить определитель матрицы $\mathbf{\Phi}$ после вычисления матриц $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ и самой матрицы $\mathbf{\Phi}$. Вычисление матриц $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$ можно провести одним из итерационных методов, изложенных в разделе 6.4.

Если матрица $\mathbf{\Phi}$ невырождена, приступаем к формированию матрицы для определения векторв $\mathbf{x}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}_l$ из системы уравнений

$$[\mathbf{x}_0^T, \mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T \mathbf{x}_l^T] \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 & \mathbf{\Lambda}_0 & 0 & 0 \\ \mathbf{M}_1 & \mathbf{N} + \mathbf{RM} & -\mathbf{R}^{l-1}\mathbf{M} & \mathbf{R}^{l-2}\mathbf{\Lambda}_{l-1} \\ \mathbf{S}^{l-2}\mathbf{M}_1 & -\mathbf{S}^{l-1}\mathbf{\Lambda} & \mathbf{N} + \mathbf{S\Lambda} & \mathbf{\Lambda}_{l-1} \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_l & \mathbf{N}_l \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (6.41)$$

Поскольку исходная система уравнений $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} = \mathbf{0}^T$ имеет единственное с точностью до постоянного множителя решение, то согласно следствию 5.3 из теоремы 5.8 система уравнений (6.41) также имеет решение, единственное с точностью до постоянного множителя. Следовательно, ранг матрицы системы уравнений (6.41) на 1 меньше ее порядка.

После определения векторов $\mathbf{x}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}_l$ остальные векторы $\mathbf{x}_i$ вычисляются в два приема. Сначала выполняем обратный ход: $\mathbf{x}_{l-1} := \mathbf{b}$,

$$\mathbf{x}_i^T := \mathbf{x}_{i+1}^T \mathbf{S}, \quad i = l-2, \ldots, 2, 1,$$

а затем прямой ход: $\mathbf{y} := \mathbf{a}$,

$$\mathbf{x}_i := \mathbf{x}_i + \mathbf{y}, \quad \mathbf{z}^T := \mathbf{y}^T \mathbf{R}, \quad \mathbf{y} := \mathbf{z}, \quad i = 1, 2, \ldots, l-1.$$

В результате получим решение системы (6.40)

$$\mathbf{x}_i^T = \mathbf{a}^T \mathbf{R}^{i-1} + \mathbf{b}^T \mathbf{S}^{l-1-i}, \quad i = 1, 2, \ldots, l-1 .$$

Аналогично, используя следствие из теоремы 5.8, решается система уравнений равновесия с матрицей вида (6.40), у которой $\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{M}_l = \mathbf{M}$. В этом случае система уравнений для определения неизвестных векторов **a** и **b** является 2×2 -блочной и решение имеет вид

$$\mathbf{x}_i^T = \mathbf{a}^T \mathbf{R}^i + \mathbf{b}^T \mathbf{S}^{l-i}$$

для всех $i = 0, 1, \ldots, l$.

Литература

1. *Башарин Г.П.* Один прибор с конечной очередью и заявки нескольких видов // Теория вероятностей и её применения, 1965. 10(2), 282–296.

2. *Башарин Г.П., Харкевич А.Д., Шнепс М.А.* Массовое обслуживание в телефонии. – М.: Наука, 1968.

3. *Башарин Г.П., Громов А.И.* Матричный метод нахождения стационарного распределения для некоторых нестандартных систем массового обслуживания // Автоматика и телемеханика, 1978. №1, 29-38.

4. *Башарин Г.П.* Лекции по математической теории телетрафика: Учеб. пособие, изд-е 3-е испр. и доп. – М.: РУДН, 2009.

5. *Бочаров П.П., Наумов В.А.* О некоторых системах массового обслуживания конечной емкости // Проблемы передачи информации, 1977. 13(4), 96–104.

6. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984.

7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967.

8. *Наумов В.А.* Численные методы анализа марковских систем. Москва, Изд-во УДН, 1985.

9. *Наумов В.А.* К решению разностных векторных уравнений второго порядка // Модели информационно-вычислительных систем – М.: Изд-во УДН, 1994. 57-61.

10. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М. – Л.:Физматгиз, 1963.

11. *Akar N., Sohraby K.* A New Paradigm in Teletraffic Analysis of Communication Networks // Proc. IEEE Infocom’96, 1996. 1318-1326.

12. *Akar N., Sohraby K.* Finite and infinite QBD chains: a simple and unifying algorithmic approach // *Proc. IEEE Infocom’97*, 1997, 1105-1113.

13. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977.

14. *Basharin G.P., Naumov V.A.* Losungsmethoden fur lineare algebraishe Gleichungssysteme stationarer charakteristiken // Handbuch der Bedienungstheorie, B. I (B.W. Gnedenko and D. Konig eds.). – Berlin:, Academie-Verlag, 1983.

15. *Berman A., Plemmons R.J.* Nonnegative matrices in the mathematical sciences. – New York: Academic Press, 1979.

16. *Evans R.V.* Geometric distribution in some two-dimentional queueing systems // Operatons Research, 1967. 15, 830-846.

17. Като Т. Теория возмущений линейных операторов, М.: Мир. 1972.

18. *Krieger U., Naumov V., Wagner D.* Analysis of a finite FIFO buffer in an advanced packet-switched network // IEICE Transactions on Communications, 1998. E81-B (5), 937-947.

19. *Krieger U., Naumov V.* Analysis of a delay-loss system with a superimposed Markovian arrival process and state-dependent service times // Numerical Solution of Markov Chains (B. Plateau, W.J. Stewart and M. Silva eds), Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza, 1999, 261-279.

20. *Latouche G., Ramaswami V.* A logarithmic reduction algorithm for quasi birth and death processes // Journal of Applied Probability, 1993. 30, 650-674.

21. *Latouche G., Ramaswami* V. Introduction to matrix geometric methods in stochastic modeling. – SIAM: Philadelphia, 1999.

22. *Meyer C.D. Jr.* The role of the group generalised inverse in the theory of finite Markov chains // SIAM Review,17, 1975, 443-464.

23. *Naumov V.* Matrix-multiplicative approach to quasi-birth-and-death processes analysis, Matrix-analytic methods in stochastic models (A.S. Alfa and S.R. Chakravarthyeds) // Lecture notes in pure and applied mathematics, 1996. v. 183, Marcel Dekker, New York, 87-106.

24. *Neuts M.F.* Matrix-geometric solutions in stochastic models: algorithmic approach. Baltimore – London:The Johns

Hopkins University Press, 1981.

25. *Paige C.C., Styan G.P.H., Wachter P.G.* Computation of the stationary distribution of a Markov chain // J. Statist. Comp. and Simulation, 4 (1975), pp. 173–186.

26. *Wallace V.L.* The solution of quasi birth and death processes arising from multiple access computer systems – Ph.D Thesis, University of Michigan, 1969.

27. *Wikarski D.* An algorithm for the solution of linear equation systems with block structure // ElektronischeInformationsverarbeitung und Kybernetik, 1980. 16, 615-620.

28. *Iversen V.B.* Teletraffic engineering handbook – ITU-T: June 2006.. (www.com.dtu.dk/teletraffic/handbook/telenook.pdf).

29. *Степанов С.Н.* Основы телетрафика мультисервисных сетей – М.: Эко-Трендз, 2010.

30. *Kelly F.P.* Blocking probabilities in large circuit-switched networks // Advances in Applied Probability, 1986. V. 18. P. 473–505.

31. *Kelly F.P.* Mathematical models of multiservice networks // Complex Stochastic Systems and Engineering, Oxford University Press, 1995. pp 221–234.

32. *Ross K.W.* Multiservice loss models for broadband telecommunication networks. Springer, 1995.

33. *Наумов В.А., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В.* Теория телетрафика мультисервисных сетей: Монография – М.: РУДН, 2007.

34. *Karvo J., Martikainen O., Virtamo J.T., Aalto S.* Blocking of dynamic multicast connections // Telecommunication Systems, 2001. V. 16, No. 3–4. pp. 467–481.

35. *Gaidamaka Y., Samouylov K.* Analytical model of multicast network and single link performance analysis // Proc. of the 6-th International Conf. on Telecommunications. Zagreb, Croatia, 2001. pp. 169-175.

36. *Boussetta K., Beylot A.-L.* Multirate Resource Sharing for Unicast and Multicast Connections // Proc. of 5th FIP Broad-band

Communications (BC'99, Hong Kong), November, 1999.

37. *Samouylov K., Yarkina N.* Blocking probabilities in multiservice networks with unicast and multicast connections // Proc. of the 7-th International Conf. on Telecommunications, Zagreb, Croatia, 2005. pp. 423–429.

38. *Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е.* Математическая теория телетрафика и ее приложения к анализу мультисервисных сетей связи следующих поколений // Автоматика и вычислительная техника. - №2. - Латвия, Рига., 2013. - С. 11 – 21.

39. *Самуйлов К.Е., Гайдамака Ю.В., Щукина О.Н.* О применении модели Эрланга к расчету вероятностей блокировок в мультисервисной сети с одноадресными и многоадресными соединениями // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. - №7. М.: ИД «Медиа Паблишер». - 2011. - С. 45-48.

40. *Рыков В. В., Самуйлов К. Е.* К анализу вероятностей блокировок ресурсов сети с динамическими многоадресными соединениями // Электросвязь. – 2000. – № 10. – С. 27-30.

Оглавление

Научное издание

Валерий Арсеентьевич Наумов
Константин Евгеньевич Самуйлов
Юлия Васильевна Гайдамака

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Редактор *Ж.В. Медведева*
Технический редактор *Н.А. Ясько*
Дизайн обложки *М.В. Рогова*

Тематический план изданий учебной и научной литературы
2014 г., № 15

Подписано в печать 18.03.2015 г. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 9,3. Тираж 500 экз. Заказ 1863.

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41