ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «ОБРАЗОВАНИЕ»
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Р.В. ШАМИН

ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

Учебное пособие

Москва
2008

Инновационная образовательная программа
Российского университета дружбы народов

«Создание комплекса инновационных образовательных программ и формирование инновационной образовательной среды, позволяющих эффективно реализовывать государственные интересы РФ через систему экспорта образовательных услуг»

Экспертное заключение –

доктор физико-математических наук, профессор А.И. Прилепко

Шамин Р.В.

Полугруппы операторов: Учеб. пособие. – М.: РУДН, 2008. – 186 с.

Учебное пособие посвящено современной теории абстрактных параболических уравнений. Последовательно рассматриваются: теория полугрупп операторов, теория интерполяции гильбертовых пространств, абстрактные параболические задачи, нелокальные параболические уравнения. Помимо теоретического изложения в пособие включены разделы, посвященные вычислительным экспериментам и решению типовых задач. Учебное пособие адресовано студентам бакалавриата, обучающимся по направлениям «Информационные технологии», «Прикладная математика и информатика», «Физика», «Математика. Прикладная математика», «Автоматизация и управление».

Учебное пособие выполнено в рамках инновационной образовательной программы Российского университета дружбы народов, направление «Комплекс экспортоориентированных инновационных образовательных программ по приоритетным направлениям науки и технологий», и входит в состав учебно-методического комплекса, включающего описание курса, программу и электронный учебник.

Своему первому учителю — профессору
Александру Леонидовичу Скубачевскому
— я посвящаю эту книгу

Оглавление

Введение

Настоящее учебное пособие подготовлено на основе лекционных курсов, которые автор читал в течение нескольких лет в Московском авиационном институте и продолжает читать в Российском университете дружбы народов на кафедре дифференциальных уравнений и математической физики. Учебное пособие адресовано студентам старших курсов и аспирантам, специализирующимся в теории дифференциальных уравнений в частных производных, функциональном анализе и теории функционально-дифференциальных уравнений.

Основное внимание уделено абстрактным параболическим уравнениям в гильбертовых пространствах. Уравнения такого типа возникают во многих интересных задачах математики и физики. В то же время абстрактные дифференциальные уравнения справедливо занимают особое место в области функционального анализа, поскольку современные методы их исследования требуют применения различных разделов функционального анализа.

Разрешимость параболических задач во многом обеспечивается результатами теории эллиптических задач. Однако для эффективного применения эллиптической теории в параболических задачах необходимо использовать специальные методы. Наиболее эффективным средством для связи между эллиптическими и параболическими задачами является теория полугрупп операторов. Эта эффективность обеспечивается естественностью теории полугрупп в параболических задач. Действительно, как правило, если (автономное) параболическое уравнение является разрешимым, то его решения могут быть представлены через полугруппу операторов. Для наиболее эффективного применения теории полугрупп операторов для параболических задач необходимо использовать также теорию интерполяции банаховых пространств.

Параболические задачи обладают и специфическими «параболическими» проблемами. Одной из наиболее важных и трудных проблем является точное описание пространства начальных данных. Под пространством начальных данных мы понимаем те начальные значения, для которых существуют сильные решения. Эта проблема нетривиальна и для классических уравнений, но еще более принципиально сложной является проблема описания пространства начальных данных для функционально-дифференциальных уравнений. Описание пространств начальных данных может быть выполнено в терминах теории полугрупп (см. [21]). Однако исчерпывающее описание пространств начальных данных получается применением методов теории интерполяции гильбертовых пространств.

Большое место в настоящем пособии занимают нелокальные параболические задачи. При это мы рассматриваем как параболические функционально-дифференциальные уравнения, так и параболические уравнения с нелокальными условиями. С одной стороны, эти задачи имеют интересные приложения в естествознании, а с другой — являются хорошими примерами в трудных проблемах параболических задач. И хотя в пособии выбрана строгая и теоретическая манера изложения, мы включили главу, посвященную вычислительным экспериментам.

Рассмотрим содержимое глав пособия.

Глава 1 является вспомогательной. В этой главе рассматриваем без доказательств некоторые факты из функционального анализа, которые непосредственно используются в пособии.

Постановки параболических задач приведены в главе 2. В этой же главе мы вводим многократно использующееся в последующем изложении понятие сильной разрешимости параболических задач.

В главе 3 излагаются основы теории полугрупп операторов и показаны методы применения этой теории в параболических задачах. Хотя теория полугрупп получила развитие в 50-х годах прошлого столетия в работах Э. Хилле, К. Иосиды, Р. Филлипса, В. Феллера, Т. Като, С. Г. Крейна, П. Е. Соболевского и многих других, в учебниках, посвященных уравнениям в частных производных, изложение методов теории полугрупп — явление редкое. Удачным исключением является учебник [11]. Рассмотрение же сильных решений (с помощью теории полугрупп) еще более редкое явление даже в монографической литературе. Наиболее известным трудом, где изучаются сильные решения, является монография [22], в которой в полной мере последовательно изучены полугруппы и их применения. С современной точки зрения сильные решения рассматриваются в книге [21]. Заметим, что известные монографии [4–6, 20] по теории полугрупп полностью посвящены классическим операторным решениям.

В главе, посвященной теории полугрупп, рассматриваются не только сильно непрерывные полугруппы, но и аналитические (голоморфные) полугруппы операторов. Аналитические полугруппы значительно более тонко характеризуют сильные решения абстрактных параболических задач. Заметим, что в этой главе приводится единственная в пособии теорема без доказательства. Эта теорема 3.8 в дальнейшем изложении не используется, поэтому ее доказательство (весьма громоздкое) было нецелесообразным.

Глава 4 посвящена теории интерполяции гильбертовых пространств. Теория интерполяции гильбертовых (или, банаховых пространств) представляет собой абстрактную теорию на стыке функционального анализа, теории функций и функциональных пространств. Эта область математики, несмотря на свою абстрактность, а порой и изрядную сложность, является удивительным сочетанием различных разделов математики от теории экстремальных задач до комплексного анализа. Теория интерполяции пространств не только красивая и неожиданная теория, но и очень эффективное средство в современной математике. В частности, с использованием этой техники получено исчерпывающее описание пространств начальных данных. К сожалению, теория интерполяции представлена практически исключительно в монографиях (см. $[1, 7, 10, 18]$). К тому же это изложение зачастую перегружено общими случаями, что сильно затрудняет ее изучение студентами. В главе 4 мы следуем изложению в [10], где теория интерполяции рассматривается для случая гильбертовых пространств, что существенно доступнее для начального изучения.

В главе 5 после того, изложения теории полугрупп и теорией интерполяции, мы приступаем к получениею результатов о сильной разрешимости и описанию пространств начальных данных . Результаты, приведенные в разделе 5.4, получены автором в [19] и позволяют конструктивно описать пространства начальных данных.

В главе 6 рассматривается метод Галеркина для нахождения приближенных решений параболических функционально-дифференциальных уравнений. При этом мы также пользуемся методами теории полугрупп. Отметим, что в этой главе (в единственный раз) рассматриваются уравнения, содержащие нелинейность. Это уравнение оправдываем тем, что именно такие задачи (для параболических функционально-дифференциальных уравнений) имеют важные применения в нелинейной оптике.

В главе 7 приводятся примеры параболических задач, для которых использованы результаты раздела 5.4. Наиболее успешно эти результаты могут быть применены в теории функционально-дифференциальных уравнений. Функционально-дифференциальные уравнения представляют не только теоретический интерес в теории дифференциальных уравнений, но и имеют интересные приложения в таких разделах, как нелинейная оптика, нелокальные задачи и многих других.

Глава 8 посвящена параболическим уравнениям с нелокальными условиями. Также в этой главе показано, что параболические уравнения с нелокальными условиями тесно связаны с функционально-дифференциальными уравнениями.

Как отмечалось, нелокальные параболические задачи (функционально-дифференциальные уравнения и уравнения с нелокальными условиями) обладают рядом необычных свойств. В частности, гладкость сильных решений может нарушаться в области, где рассматривается уравнение. Поэтому глава 9 посвящена изучению гладкости нелокальных задач. В этой главе рассматриваются специальные весовые пространства, которые характеризуют нарушение гладкости сильных решений. Также приведены примеры сильных решений, у которых нарушается гладкость.

Глава 10 выполняет демонстрационную роль в настоящем пособии. Здесь мы рассматриваем вычислительные эксперименты, которые ставят своей целью продемонстрировать важнейший результат нашего курса — конструктивное определение пространств начальных данных. Приводится описание методики проведения вычислительных экспериментов, рассматривается текст программы для проведения вычислительных экспериментов, а также даются результаты типовых вычислительных экспериментов.

Наконец, последняя глава 11 посвящена небольшому практикуму по курсу. В этой главе рассматривается ряд типовых задач и дается их подробное решение.

Многие результаты, изложенные в данном пособии, принадлежат автору, часть результатов получена в совместных работах автора и профессора А.Л. Скубачевского.

С методическими и научными материалами, сопровождающими спецкурс, посвященный абстрактным параболическим задачам, можно ознакомиться на следующем сайте: `http://www.lector.ru`.

Автор с благодарностью примет любые замечания и пожелания по следующим адресам: `http://www.shamin.ru`, `roman@shamin.ru`.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А. Л. Скубачевскому за внимание к написанию пособия, а главное за многолетнюю совместную работу. Автор также благодарен М. А. Скрябину за неоценимую помощь при наборе пособия.

Глава 1

Элементы функционального анализа

1.1. Банаховы пространства

Линейное пространство L называется *нормированным*, если каждому его элементу f можно поставить в соответствие вещественное число $\|f\| = \|f\|_L$ (*норма* f), и это соответствие обладает следующими свойствами:

1) $\|f\| \geqslant 0$ причем $\|f\| = 0$ только для $f = 0$;

2) $\|cf\| = |c|\|f\|$ при произвольных комплексном c и $f \in L$;

3) $\|f_1 + f_2\| \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|$ для любых $f_1, f_2 \in L$ (неравенство треугольника).

Любое нормированное пространство является метрическим пространством с метрикой $\varrho(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|$, где $f_1, f_2 \in L$. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем рассматривать понятие сходимости в нормированном пространстве в смысле соответствующей метрики.

Последовательность $\{f_m\}$ элементов из L называется *сходящейся* к $f \in L$ ($f_m \to f$ при $m \to \infty$, или $\lim\limits_{m\to\infty} f_m = f$), если $\|f_m - f\| \to 0$ при $m \to \infty$.

Последовательность $\{f_n\}$ элементов из L называется *фундаментальной*, если $\|f_k - f_m\| \to 0$ при $k, m \to \infty$.

Если $f_m \to f$, то $\|f_m\| \to \|f\|$ (*непрерывность нормы*). Действительно, в силу неравенства треугольника $\|f_m\| \leqslant \|f_m - f\| + \|f\|$ и $\|f\| \leqslant \|f_m - f\| + \|f\|$. Поэтому $|\|f_m\| - \|f\|| \leqslant \|f_m - f\| \to 0$ при $m \to \infty$.

Линейное нормированное пространство называется *полным*, если для любой фундаментальной последовательности его элементов найдется элемент этого пространства, к которому она сходится.

Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым пространством*.

Банахово пространство B называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Приведем некоторые примеры *функциональных пространств*, т.е. таких пространств, элементами которых являются числовые функции.

Пример 1.1. Пространство $C[a,b]$ всех непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ является нормированным пространством с нормой

$$\|u\|_{C[a,b]} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |u(x)|.$$

Сходимость по этой норме означает равномерную сходимость. Фундаментальность (или условие Коши) означает, что $|u_k(x) - u_m(x)| \to 0$ равномерно на $[a,b]$. Из математического анализа известно, что отсюда следует равномерная сходимость $u_m(x)$ к непрерывной функции $u(x)$. Таким образом, $C[a,b]$ полно, и мы имеем пример банахова пространства.

Пример 1.2. Пространство $C^k[a,b]$ всех непрерывных функций, имеющих непрерывные производные вплоть до k-го порядка на отрезке $[a,b]$, является нормированным пространством с нормой

$$\|u\|_{C^k[a,b]} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |u(x)| + \sum_{i=1}^{k} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |u^{(i)}(x)|.$$

По аналогичным причинам, что и в предыдущем примере, пространство $C^k[a,b]$ является банаховым пространством.

Пример 1.3. Пример 1.3. В пространстве $C[a,b]$ введем интегральную норму и получим другое, нежели в примере 1.1, нормированное пространство:

$$\|u\|_{C[a,b]} = \left(\int\limits_a^b |u(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

где $p \geqslant 1$, а интеграл понимается в смысле Римана.

Покажем, что такое пространство не является банаховым. Пусть $[a,b] = [-1,1]$ для каждого $k > 1$ положим

$$u_k(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0, \\ kx & 0 \leqslant x \leqslant 1/k, \\ 1 & 1/k \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Видно, что $u_k(x) \in C[-1,1]$. Покажем, что последовательность $\{u_k\}$ фундаментальна. Возьмем произвольные $k, m > 0$ для определенности будем считать, что $k > m$. Имеем оценку нормы разности $\|u_k - u_m\| < 2/m$, следовательно, $\|u_k - u_m\| \to 0$ при $k, m \to \infty$, и наша последовательность фундаментальна. Однако эта последовательность сходится к функции $u(x) = \theta(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0, \\ 1 & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$, которая не является непрерывной и, следовательно, не принадлежит пространству $C[-1,1]$.

1.2. Интеграл Лебега

В современной математике и особенно в дифференциальных уравнениях интеграл Римана оказывается недостаточным. В начале XX в. была построена теория интеграла Лебега. Нам также потребуется понятие функций, интегрируемых в смысле Лебега. Конечно, существо интеграла Лебега не может быть понято без теории меры, однако изложение этой красивой теории требует значительного объема, которым мы не располагаем. Введем же понятие интеграла Лебега без использования меры, подходя к интегралу как замыканию в определенном смысле функций, интегрируемых по Риману.

Мы не можем дать определения меры множества, но можем описать множества, имеющие меру нуль. Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *множеством меры нуль*, если его можно покрыть счетной системой открытых интервалов со сколь угодно малой суммой длин, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую счетную систему интервалов $I_1, I_2, \ldots$, что $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$, а суммарная длина этих интервалов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$, где $|I_i|$ — длина интервала I_i $i = 1, 2, \ldots$

Непосредственно из определения вытекает, что множество, состоящее из счетного (и тем более конечного) числа точек, есть множество меры нуль. Пересечение и объединение счетного числа множеств меры нуль есть также множество меры нуль.

Если какое-либо свойство выполняется для всех точек x из некоторого множества G, за исключением, быть может, множества меры нуль, то говорят, что это свойство выполнено *для почти всех точек* $x \in G$, *почти везде в* G, *почти всюду в* G *(п.в. в* G*).* Так, функция Дирихле $\chi(x)$, равная 1 для точек, у которых все координаты рациональны, и 0 во всех остальных точках, равна нулю п.в. в $\mathbb{R}$.

Пусть Q — некоторый интервал. Наряду с функциями, определенными всюду в Q (т.е. имеющими в каждой точке Q конечное значение), будем рассматривать и функции, определенные почти всюду в Q, т.е. функции, значения которых не определены на множествах меры нуль.

С понятием интегрируемых функций тесно связано понятие измеримых функций. Пусть Q — некоторый интервал. Последовательность (определенных п.в. в Q) функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, называется *сходящейся п.в. в* Q, если для почти всех $x_0 \in Q$ числовая последовательность значений этих функций в точке x_0 имеет (конечный) предел. Функция $f(x)$ называется *пределом п.в. сходящейся последовательности* $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, $f_k(x) \to f(x)$ п.в. в Q при $k \to \infty$, если для п.в. $x_0 \in Q$ $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x_0) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется *измеримой* в Q, если она является пределом п.в. сходящейся последовательности функций из $C(\overline{Q})$.

Отметим некоторые свойства измеримых функций.

Из определения вытекает, что функция $f(x)$, принадлежащая $C(\overline{Q})$, измерима. Произвольная функция $f(x) \in C(Q)$ тоже измерима, так как ее можно представить в виде предела сходящейся в Q последовательности функций из $C(\overline{Q})$: $f(x) = \lim\limits_{\delta\to 0} f(x)\xi_\delta(x)$, где $\xi_\delta(x)$ — срезающая функция для Q.

Линейная комбинация измеримых функций есть измеримая функция. Для измеримых f_1 и f_2 функции $f_1 f_2$ и f_1/f_2 (последняя при дополнительном условии $f_2 \neq 0$ п.в.) также измеримы. Если функция f измерима, то такова же и функция $|f|$.

Введем в рассмотрение монотонные п.в. в Q последовательности, т.е. последовательности $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ измеримых функций, для которых при всех $k \geqslant 1$ п.в. в Q имеют место неравенства $f_{k+1}(x) \geqslant f_k(x)$ ($f_{k+1}(x) \leqslant f_k(x)$). Если такая последовательность п.в. ограничена, то она сходится п.в. к некоторой функции. Будем при этом использовать обозначения: $f_k \uparrow f$ п.в. при $k \to \infty$, если последовательность монотонно не убывает.

Обозначим через $\Lambda_1 = \Lambda_1(Q)$ множество всех функций, которые являются пределами п.в. сходящихся монотонно неубывающих последовательностей функций из $C(\overline{Q})$ с ограниченными сверху последовательностями интегралов Римана.

Пусть $f(x)$ — некоторая функция из Λ_1, а $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ — некоторая монотонно неубывающая последовательность непрерывных в $\overline{Q}$ функций с ограниченной последовательностью интегралов, п.в. сходящаяся к $f(x)$. Точная верхняя грань множества

$$\left\{ \int\limits_Q f_k(x) dx, k = 1, 2, \dots \right\}$$

называется интегралом Лебега функции $f(x) \in \Lambda_1(Q)$:

$$(L) \int\limits_Q f(x) dx = \sup_k \int\limits_Q f_k(x) dx = \lim_{k \to \infty} \int\limits_Q f_k(x) dx.$$

Можно показать, что интеграл Лебега от функции $f(x)$ не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности, а только от самой функции $f(x)$.

Пока мы определили интеграл Лебега только для функций из Λ_1, перейдем к определению интеграла Лебега для более общих функций. Заданная в интервале Q вещественнозначная функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Лебегу* по интервалу Q, если она представляется в виде

$$f(x) = f'(x) - f''(x),$$

где $f'(x)$ и $f''(x)$ — функции из $\Lambda_1(Q)$; при этом *интегралом Лебега* функции $f(x)$ по Q определяется равенством

$$(L) \int\limits_Q f(x) dx = (L) \int\limits_Q f'(x) dx - (L) \int\limits_Q f''(x) dx.$$

Интеграл Лебега также не зависит от того, разностью каких функций $f(x)$ из Λ_1 является функция $f(x)$.

Обозначим через $\Lambda(Q)$ множество всех функций, интегрируемых по Лебегу по интервалу Q. Функция, интегрируемая по Лебегу, абсолютно интегрируема.

Приведем теорему о «замкнутости» множества $\Lambda(Q)$ относительно монотонных предельных переходов.

Теорема 2.1 (Б. Леви). *Всякая монотонная п.в. последовательность $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, интегрируемых по Лебегу в Q функций с ограниченной последовательностью интегралов п.в., в Q сходится к некоторой интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$, и при этом*

$$\lim_{k\to\infty} (L) \int\limits_Q f_k dx = (L) \int\limits_Q f dx.$$

Рассмотрим вопрос об отношениях интеграла Римана и интеграла Лебега. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману (в собственном смысле), то она интегрируема и по Лебегу, и ее интегралы по Риману и по Лебегу совпадают. Множество ограниченных функций, входящих в $\Lambda(Q)$, шире множества функций, интегрируемых по Риману, поскольку, например, функция Дирихле $\chi(x) \in \Lambda(Q)$ ограничена и неинтегрируемая по Риману.

Далее при построении интеграла Лебега от функции $f(x)$ не предполагалась ее ограниченность; например, неограниченная функция $|x|^{-\alpha}$ при $0 < \alpha < 1$ принадлежит $\Lambda(-1, 1)$. В курсе математического анализа рассматривается обобщение интеграла Римана на некоторые неограниченные функции (несобственный интеграл). Не трудно показать, что абсолютно интегрируемая по Риману (в несобственном смысле) функция $f(x)$ принадлежит $\Lambda(Q)$ и ее интеграл Лебега совпадает с несобственным интегралом Римана.

Однако если функция не абсолютно интегрируема, но интегрируема по

Риману, то такая функция может быть не интегрируема по Лебегу, примером такой функции является заданная на $(0,1)$ функция $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

Перейдем теперь к установлению связи между измеримостью и интегрируемостью функции. По определению интегрируемая функция измерима. Однако не всякая измеримая функция, как показывает пример заданной на $(-1,1)$ функции $|x|^{-\alpha}$, $0<\alpha<1$, интегрируема. Приведем некоторые достаточные условия интегрируемости по Лебегу.

Теорема 2.2 (лемма Фату). *Если последовательность $f_k(x)$, $k = 1,2,\ldots$ интегрируемых п.в. неотрицательных функций сходится п.в. к функции $f(x)$ и $\int\limits_Q f_k dx \leqslant A$, $k=1,2,\ldots$, то $f(x)$ интегрируема и*

$$\int\limits_Q f dx \leqslant A.$$

Одним из центральных результатов теории лебеговского интегрирования является следующая теорема Лебега о возможности перехода к пределу под знаком интеграла.

Теорема 2.3 (теорема Лебега). *Если последовательность измеримых функций $f_k(x)$, $k=1,2,\ldots$ сходится п.в. в Q к некоторой функции $f(x)$ и $|f_k(x)| \leqslant g(x)$ п.в. $k=1,2,\ldots$, где $g(x)$ интегрируема, то $f(x)$ тоже интегрируема и*

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_Q f_k dx = \int\limits_Q f dx.$$

В конце приведем определение меры множества с использованием интеграла Лебега. Рассмотрим некоторое подмножество $E \subset Q$. Функция $\chi_E(x)$, равная 1 для $x \in E$ и 0 для $x \in Q \setminus E$, называется *характеристической функцией множества* E или *индикатором* E.

Множество E называется *измеримым* если измерима его характеристическая функция. *Мера* измеримого множества E определяется следующим образом:

$$\operatorname{mes} E = \int\limits_{Q} \chi_E(x) dx.$$

Определенные ранее множества меры нуль измеримы, и они и только они имеют меру, равную нулю.

1.3. Гильбертовы пространства

Будем говорить, что в линейном пространстве H введено *скалярное произведение*, если любой паре элементов $h_1, h_2 \in H$ поставлено в соответствие комплексное число $(h_1, h_2)_H = (h_1, h_2)$ (скалярное произведение этих элементов), и это соответствие обладает следующими свойствами:

i) $(h, h) \geqslant 0$, причем $(h, h) = 0$ только для $h = 0$,

ii) $(h_1, h_2) = \overline{(h_2, h_1)}$ (в частности, (h, h) — вещественное число),

iii) $(ch_1, h_2) = c(h_1, h_2)$ для любого комплексного c,

iv) $(h_1 + h_2, h) = (h_1, h) + (h_2, h)$.

Установим следующее важное *неравенство Коши-Буняковского*:

$$|(h_1, h_2)|^2 \leqslant (h_1, h_1)(h_2, h_2), \tag{3.1}$$

имеющее место для любых h_1 и h_2 из H. Если $h_2 = 0$, то неравенство (3.1) очевидно. Пусть $h_2 \neq 0$. При произвольном комплексном t $0 \leqslant (h_1 + th_2, h_1 + th_2) = (h_1, h_1) + t\overline{(h_1, h_2)} + \bar{t}(h_1, h_2) + |t|^2(h_2, h_2)$. Если $t = -\frac{(h_1,h_1)}{(h_2,h_2)}$, то это неравенство принимает вид $(h_1, h_1) - \frac{|(h_1,h_2)}{(h_2,h_2)} \geqslant 0$, эквивалентный (3.1).

Скалярное произведение *порождает* в пространстве H норму $\|h\| = \sqrt{(h, h)}$. Тогда неравенство (3.1) запишется в виде:

$$|(h_1, h_2)|^2 \leqslant \|h_1\|\|h_2\|.$$

Все свойства нормы, кроме неравенства треугольника, очевидны. Для доказательства неравенства треугольника воспользуемся неравенством Коши-Буняковского

$$\|h_1+h_2\|^2 = \|h_1\|^2 + (h_1,h_2) + (h_2,h_1) + \|h_2\|^2 \leqslant$$

$$\|h_1\|^2 + 2\|h_1\|\|h_2\| + \|h_2\|^2 = (\|h_1\| + \|h_2\|)^2.$$

Линейное пространство со скалярным произведением, полное в норме, порождаемой этим скалярным произведением (т.е. являющееся банаховым в этой норме), называется *гильбертовым пространством.*

Наличие в H скалярного произведения позволяет ввести в этом пространстве не только норму (т.е. длину) элемента, но и угол между элементами в вещественном гильбертовом пространстве: именно угол φ между векторами h_1 и h_2 определяется формулой:

$$\cos\varphi = \frac{(h_1,h_2)}{\|h_1\|\|h_2\|}. \tag{3.2}$$

При этом из неравенства Коши-Буняковского вытекает, что выражение для косинуса по модулю не превосходит 1, и, следовательно, формула (2) действительно для любых ненулевых h_1 и h_2 определяет некоторый угол $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Если $(h_1,h_2) = 0$, то из (3.2) получаем, что $\varphi = \pi/2$; в этом случае векторы h_1 и h_2 называются *ортогональными.*

Для нас наиболее важным является пример гильбертова пространства измеримых функций с интегрируемым (по Лебегу) квадратом модуля. Обозначим через $L_2(a,b)$ множество всех измеримых функций $f(x)$ на (a,b) таких, что существует (и конечный) интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|^2dx$. Очевидно, что это линейное пространство. Введем теперь в нем скалярное произведение по формуле:

$$(f,g)_{L_2(a,b)} = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx.$$

Одним из самых важных свойств сепарабельных гильбертовых пространств является существование ортонормированного базиса. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Для определенности будем считать, что H является бесконечномерным пространством. Множество элементов $\{x_n\}$ из пространства H называется ортонормированной системой, если выполнено:

$$(x_n, x_m)_H = 0, \quad n \neq m,$$

$$(x_n, x_n)_H = 1.$$

Любая ортонормированная система является и линейно независимой системой. При этом из любой линейно независимой системы (конечной или счетной) можно построить ортонормированную систему с помощью процедуры ортогонализации Гильберта-Шмидта. Пусть $\{y_n\}$ линейно независимая система элементов пространства H, тогда существует такая ортонормированная система $\{x_n\}$, которая выражается через y_n линейным образом:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} y_k, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Ортонормированная система e_n называется ортонормированным базисом в пространстве H, если любой элемент $\varphi \in H$ представляется в виде

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n,$$

где ряд сходится в пространстве H. Этот ряд называется рядом Фурье в пространстве H, а коэффициенты c_n называются коэффициентами Фурье.

Для фиксированного базиса разложение в ряд Фурье является единственным. При этом коэффициенты Фурье вычисляются по формуле:

$$c_n = (\varphi, e_n)_H.$$

Для ортонормированного базиса и любого элемента φ верно равенство Парсеваля

$$\|\varphi\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

Пример 1.4. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(0, \pi)$. В этом множество функций

$$e_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$$

является ортонормированным базисом.

Мы рассматривали в качестве гильбертовых пространств пространство Лебега L_2. Другим примером пространства Гильберта является пространство l_2, состоящее из числовых последовательностей $a = (a_1, a_2, \dots)$ таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

В пространстве l_2 можно ввести скалярное произведение по формуле

$$(a, b)_{l_2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{b}_n.$$

С нормой, индуцированной этим скалярным произведением, пространство l_2 является гильбертовым.

Рассмотрим теперь произвольное сепарабельное (бесконечномерное) пространство H с ортонормированным базисом e_n. Тогда для любого элемента $\varphi \in H$ коэффициенты Фурье, которые мы обозначим через $c = (c_1, c_2, \dots)$, являются элементом пространства l_2, причем в силу равенства Парсеваля мы имеем

$$\|\varphi\|_H = \|c\|_{l_2}.$$

Можно показать, что все сепарабельные бесконечномерные пространства изоморфны пространству l_2 и соответственно между собой.

1.4. Ограниченные линейные операторы

Пусть X и Y суть линейные пространства. Под оператором, действующим из пространства X в пространство Y, будем понимать однозначное отображение, заданное для элементов пространства X, со значениями в пространстве Y. Для оператора A будем использовать обозначение

$$A : X \to Y.$$

Определение 1.1. Оператор $A : X \to Y$ называется линейным, если для любых $x_1, x_2 \in X$ и любого числа λ выполнено равенство:

$$A(\lambda x_1 + x_2) = \lambda A x_1 + A x_2.$$

Если будем рассматривать операторы, действующие в нормируемых (банаховых) пространствах, то можно ввести понятия непрерывности и ограниченности операторов. В дальнейшем будем считать X и Y банаховыми пространствами.

Определение 1.2. Оператор $A : X \to Y$ называется непрерывным, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$, сходящейся в пространстве X, существует предел в пространстве Y последовательности Ax_n.

Определение 1.3. Оператор $A : X \to Y$ называется ограниченным, если существует такое число $M > 0$, что для всех элементов $x \in X$ выполнено неравенство

$$\|Ax\|_Y \leqslant M \|x\|_X.$$

Для линейных операторов непрерывность и ограниченность эквивалентные понятия. Более того, для ограниченного линейного оператора можно ввести норму оператора согласно следующему определению.

Определение 1.4. Для линейного ограниченного оператора нормой называется число $\|A\|_{X\to Y}$

$$\|A\|_{X\to Y} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y.$$

Если это не приводит к путанице, будем обозначать норму оператора просто $\|A\|$.

Пусть X, Y, Z — суть банаховы пространства. Рассмотрим линейный ограниченный оператор $A : Y \to Z$ и линейный ограниченный оператор $B : X \to Y$. Тогда можно определить линейный оператор $C = AB : X \to Z$, являющийся композицией операторов A и B. Оператор C будет также ограниченным, и имеет место оценка для нормы:

$$\|C\|_{X\to Z} \leqslant \|A\|_{Y\to Z}\|B\|_{X\to Y}.$$

Через $\mathcal{L}(X, Y)$ обозначим множество всех линейных непрерывных операторов $A : X \to Y$. Очевидно, множество $\mathcal{L}(X, Y)$ является линейным пространством. Более того, это пространство само является банаховым с операторной нормой. Пространство $\mathcal{L}(X, X)$ будем обозначать $\mathcal{L}(X)$. В пространстве $\mathcal{L}(X)$ можно определить операцию умножения, соответствующую операции композиции операторов. В этом случае пространство $\mathcal{L}(X)$ является банаховой алгеброй. Отметим еще, что для оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ можно определить степень $A^n = AA^{n-1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. При этом имеет место следующая оценка:

$$\|A^n\| \leqslant \|A\|^n.$$

Важными линейными операторами являются операторы из пространства $\mathcal{L}(X, \mathbb{C})$, т.е. операторы с числовыми значениями.

Определение 1.5. Оператор $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ называется линейным функционалом.

Определение 1.6. Пространство $\mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ называется сопряженным к X пространством и обозначается X'.

Используя понятие функционалов, можно определить понятие слабой сходимости в пространстве X.

Определение 1.7. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\} \subset X$ имеет слабым пределом элемент $x \in X$, если

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x)| = 0,$$

для всех функционалов $f \in X'$.

В силу непрерывности функционалов сильно сходящиеся последовательность сходятся и слабо к тому же пределу. Однако обратное не верно — слабо сходящиеся последовательности, вообще говоря, не имеют сильного предела.

Рассмотрим гильбертово пространство H. Легко видеть, что произвольный элемент $f \in H$ задает линейный ограниченный функционал по формуле:

$$f[u] = (u, f)_H, \quad u \in H.$$

При этом норма функционала f совпадает с нормой элемента f. Согласно теореме Рисса верно и обратное — для любого функционала $g \in H'$ существует единственный элемент g пространства H такой, что

$$g[u] = (u, g)_H, \quad u \in H,$$

и имеет место равенство норм. Таким образом, пространство, сопряженное к гильбертову пространству H, может быть отождествлено с самим пространством H.

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $A : H_1 \to H_2$, где H_i, $i = 1, 2$ гильбертовы пространства. Оператор $A^* : H_2 :\to H_1$ называется сопряженным (к оператору A) оператором, если

$$(Au, v)_{H_2} = (u, A^*v)_{H_1},$$

для всех $u \in H_1$, $v \in H_2$.

Приведем некоторые примеры ограниченных операторов в различных пространствах.

Пример 1.5. Любой линейный оператор в конечных пространствах $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является числовой матрицей $n \times m$.

Пример 1.6. Рассмотрим оператор дифференцирования $D_1 : C^k[a, b] \to C^{k-1}[a, b]$, $k \geqslant 1$. Этот оператор является непрерывным оператором.

Пример 1.7. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим интегральный оператор

$$Jf(x) = \int\limits_0^1 K(x, y)f(y)dy,$$

где $K(x, y)$ — непрерывная функция двух переменных, называемая ядром оператора J.

Пример 1.8. Рассмотрим оператор $A : C[0, 1] \to C^1[0, 1]$, заданный по формуле:

$$Af(x) = \int\limits_0^x f(y)dy.$$

Пример 1.9. Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство H с ортонормированным базисом e_n. Тогда любой элемент $\varphi \in H$ представляется единственным образом в виде ряда Фурье: $\varphi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n e_n$. Определим оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ следующим образом:

$$A\left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n e_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \varphi_n e_n,$$

где $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $|\lambda_n| \leqslant C$.

Рассмотрим несколько примеров линейных непрерывных функционалов.

Пример 1.10. Рассмотрим функционалы в пространстве $L_2(a, b)$. В силу теоремы Рисса все линейные ограниченные функционалы в этом пространстве исчерпываются функционалами вида:

$$f[u] = \int\limits_a^b u(x)f(x)dx,$$

где функция $f(x)$ сама принадлежит пространству $L_2(a, b)$.

Функционалы в пространстве $C[a, b]$ более разнообразны.

Пример 1.11. Рассмотрим функционал в пространстве $C[0, 1]$, заданный по формуле:

$$f[u] = \int\limits_0^1 u(x)dx.$$

Пример 1.12. Рассмотрим функционал в пространстве $C[-1, 1]$, заданный по формуле:

$$f[u] = f(0).$$

Рассмотрим еще пример шкалы гильбертовых пространств H_s, $s \geqslant 0$. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H фиксирован ортонормированный базис e_n. Пространства H_s определим как такие гильбертовы пространства, состоящие из элементов вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n,$$

где коэффициенты c_n удовлетворяют условию:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 e^{2sn} < \infty.$$

В пространстве H_s скалярное пространство вводится следующим образом

$$(u, v)_{H_s} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \overline{v}_n e^{2sn}.$$

1.5. Неограниченные операторы

В настоящем разделе будем рассматривать неограниченные операторы. Эти операторы, в отличие от ограниченных, могут быть заданы не на всем пространстве. Пусть X, Y — банаховы пространства, рассмотрим линейный оператор A, заданный на линейном подпространстве $\mathcal{D}(A) \subset X$. Линейное пространство $\mathcal{D}(A)$ называется областью определения оператора A. Будем пользоваться следующим обозначением: $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$. При работе с неограниченными операторами следует соблюдать определенную осторожность. В частности, для двух неограниченных операторов $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$ и $B : \mathcal{D}(B) \subset X \to Y$ сумма определяется следующем образом:

$$(A + B)u = Au + Bu, \quad u \in \mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B).$$

Определение 1.8. Если множество $\mathcal{D}(A)$ плотно в пространстве X, то оператор A называется плотно определенным.

Важным свойством для неограниченных операторов является замкнутость оператора.

Определение 1.9. Оператор A называется замкнутым, если для любой последовательности $\{x_n\} \in D(A)$ такой, что

$$x_n \to x, \quad Ax_n \to y,$$

элемент $x \in \mathcal{D}(A)$ и $y = Ax$.

Для замкнутого оператора A область определения $\mathcal{D}(A)$ можно сделать банаховым пространством с нормой графика:

$$\|u\|_{\mathcal{D}(A)} = \left(\|u\|_X^2 + \|Au\|_Y^2\right)^{1/2}.$$

В этом случае можно рассматривать ограниченный оператор

$$A : \mathcal{D}(A) \to Y.$$

Рассмотрим неограниченный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A)$. Если оператор A является плотно определенным, то можно определить сопряженный оператор A^*. Сопряженный оператор A^* определяется как максимальный оператор с областью определения $\mathcal{D}(A^*)$, для которого верно соотношение:

$$(Au, v)_H = (u, A^*v)_H, \quad u \in \mathcal{D}(A),\ v \in \mathcal{D}(A^*).$$

Если линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$ является биективным отображением пространства X на пространство Y, то существует линейный ограниченный обратный оператор $A^{-1} : Y \to X$ и

$$A^{-1}Au = u, \quad u \in X,$$

$$AA^{-1}u = u, \quad u \in Y.$$

Рассмотрим замкнутый неограниченный оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ в гильбертовом пространстве H. Оператор A называется обратимым, если оператор A взаимно однозначно отображает область определения $\mathcal{D}(A)$ на пространство H.

Резольвентным множеством оператора A будем называть множество всех комплексных чисел λ таких, что оператор $A - \lambda I$ ограниченно обратим. Соответственно семейство ограниченных операторов, зависящее от комплексных чисел из резольвентного множества,

$$R(A, \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$$

называется резольвентой оператора A. Резольвентное множество будем обозначать через $\varrho(A)$.

Важнейшим в теории операторов является понятие спектра операторов. Дополнением к резольвентному множеству в комплексной плоскости называется спектр оператора A, который обозначается $\sigma(A)$. Можно показать, что спектр (если он не пуст) является замкнутым множеством.

Определение 1.10. Оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ называется самосопряженным, если $A = A^*$.

Спектр самосопряженного оператора принадлежит вещественной оси.

1.6. Полуторалинейные формы

Будем рассматривать гильбертово пространство H. На прямом произведении пространств $H \times H$ зададим полуторалинейную комплекснозначную форму $t[u, v]$, определенную при $u, v \in \mathcal{D}(t)$. Полуторалинейность означает, что эта форма линейна по u при фиксированном v и полулинейна по v при фиксированном u. Множество, на котором определена полуторалинейная форма, называется областью определения этой формы. Форма $t[u] = t[u, u]$ называется квадратичной формой. В дальнейшем будем опускать слово «полуторалинейная» и пользоваться определением просто форма.

Определение 1.11. Форма t называется симметричной, если

$$t[u, v] = \overline{t[v, u]},$$

для всех $u, v \in \mathcal{D}(t)$.

Определение 1.12. Форма t^* называется сопряженной к форме t, если

$$t^*[u, v] = \overline{t[v, u]}$$

и $\mathcal{D}(t^*) = \mathcal{D}(t)$.

Множество значений, которые принимает функция $t[u]$, когда $u \in \mathcal{D}(t)$ и $\|u\|_H = 1$, называется числовой областью значений формы t и обозначается $\Theta(t)$. Будем говорить, что форма t ограничена слева, если $\Theta(t)$ является подмножеством полуплоскости: $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \gamma$. Будем говорить, что форма t является секториальной, если множество $\Theta(t)$ есть подмножество сектора

$$|\arg(\lambda - \gamma)| \leqslant \theta, \quad 0 \leqslant \theta < \pi/2.$$

Определение 1.13. Секториальная форма t называется замкнутой, если для последовательности $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(t)$ такой, что

$$u_n \to u, \quad n \to \infty$$

и

$$t[u_n - u_m] \to 0, \quad n, m \to \infty,$$

верно, что $u \in \mathcal{D}(t)$ и $t[u_n - u] \to 0$, $n \to \infty$.

Пусть форма t является полно определенной и замкнутой секториальной полуторалинейной формой в H, тогда существует оператор $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ такой, что:

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(t)$$

и

$$t[u, v] = (Tu, v)$$

для всех $u \in \mathcal{D}(T)$ и $v \in \mathcal{D}(t)$. Этот оператор определяется единственным образом. Будем говорить в этом случае, что оператор T порождается секториальной формой t, а сам оператор будем называть максимальным секториальным оператором.

Если форма t является симметричной, то оператор T будет самосопряженным оператором.

Глава 2

Постановка параболических задач

2.1. Абстрактные параболические задачи

Пусть V и H — сепарабельные гильбертовы пространства и V плотно и непрерывно вложено в H. Отождествим пространство H с его сопряженным, тогда получим

$$V \subset H \subset V',$$

где каждое пространство плотно в последующем.

Рассмотрим непрерывный оператор $A : V \to V'$.

Определение 2.1. Оператор A называется V*-коэрцитивным*, если для любого $v \in V$ выполняется неравенство:

$$\mathrm{Re}\langle Av, v\rangle \geqslant c_1 \|v\|_V^2, \tag{2.1}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от v.

В дальнейшем будем предполагать, что оператор A является V-коэрцитивным.

Замечание 2.1. В силу теоремы 9.1 [10, глава 2] оператор A взаимнооднозначно отображает V на V'.

Рассмотрим полуторалинейную форму $a[u, v]$ в H, определенную по формуле:

$$a[u, v] = \langle Au, v \rangle$$

с областью определения $\mathcal{D}(a) = V$. В силу (2.1) форма a является замкнутой секториальной формой в V. Действительно, для произвольного $u \in V$ имеем

$$|\operatorname{Im} a[u, u]| \leqslant |a[u, u]| \leqslant c_2 \|u\|_V^2.$$

Из последнего неравенства и из (2.1) следует, что числовая область значения $\Theta(a)$ лежит в секторе

$$\Theta(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \theta_1, \operatorname{Re} \lambda > 0\}, \tag{2.2}$$

где $\theta_1 = \operatorname{arctg}(c_2/c_1) < \pi/2$.

В силу теоремы о представлении (см. теорему 2.1 [5, глава 6]) существует замкнутый, плотно определенный, секториальный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset H \to H$, порожденный формой $a[\cdot]$, такой, что $(\mathcal{A}u, v)_H = a[u, v]$, $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $v \in V$. Очевидно, $\mathcal{A}u = Au$, когда $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in V : Au \in H\}$.

Будем рассматривать область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ как гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = (\mathcal{A}u, \mathcal{A}v)_H + (u, v)_H. \tag{2.3}$$

Через I обозначим связное подмножество вещественной оси, а через Y — гильбертово пространство. Обозначим через $L_2(I; Y)$ пространство функций f со значениями в Y, измеримых на I относительно меры Лебега и таких, что

$$\int\limits_I \|f(t)\|_Y^2 dt < \infty.$$

Как обычно, отождествляя функции равные почти всюду, введем в пространстве $L_2(I;Y)$ скалярное произведение по формуле:

$$(f,g)_{L_2(I;Y)} = \int\limits_I (f(t),g(t))_Y dt.$$

Стандартным методом можно показать, что пространство $L_2(I;Y)$ является гильбертовым пространством.

Введем еще пространство $C^k(\overline{I};Y)$ — непрерывно дифференцируемых вплоть до порядка k на $\overline{I}$ функций со значениями в гильбертовом пространстве Y. Пространство $C^k(\overline{I};Y)$ является банаховым пространством с нормой:

$$\|u\|_{C(\overline{I};Y)} = \sum_{\alpha=0}^{k} \sup_{t\in\overline{I}} \|u^{(\alpha)}(t)\|_Y.$$

Будем рассматривать дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве H:

$$u'(t) + \mathcal{A}u(t) = f(t) \qquad (t \in (0,T)) \tag{2.4}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi, \tag{2.5}$$

где $0 < T < \infty$, $f \in L_2(0,T;H)$ и $\varphi \in H$.

Определение 2.2. Функция $u \in L_2(0,T;V)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.4)–(2.5), если для любой функции $v \in C^1([0,T];V)$ такой, что $v(T) = 0$ выполнено интегральное равенство:

$$\int\limits_0^T (-(u(t),v'(t))_H + a[u(t),v(t)])dt = (\varphi, v(0))_H + \int\limits_0^T (f(t),v(t))_H dt.$$

Пример 2.1 (уравнение теплопроводности). Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область. Пусть в нашем примере $H = L_2(Q)$, $V = \mathring{H}^1(Q)$, тогда

$V' = H^{-1}(Q)$. Можно показать (см. [10]), что пространство $H^{-1}(Q)$ состоит из обобщенных производных первого порядка функций из $L_2(Q)$, более того $\|u_{x_i}\|_{H^{-1}(Q)} \leqslant c\|u\|_{L(Q)}$, $i = 1, \ldots, n$. В качестве оператора $\mathcal{A}$ возьмем оператор Лапласа с условиями Дирихле. Для этого введем оператор $A = -\Delta : \mathring{H}^1(Q) \to H^{-1}(Q)$, действующий в смысле обобщенных производных. Очевидно, что этот оператор будет непрерывным. Покажем, что оператор A является $\mathring{H}^1(Q)$-коэрцитивным. Для произвольной $u \in \mathring{H}^1(Q)$ возьмем последовательность $\{u_k\} \subset \dot{C}^\infty(Q)$ такую, что $\|u_k - u\|_{\mathring{H}^1(Q)} \to 0$ при $k \to \infty$. Для функции u_k имеем:

$$\langle Au_k, u_k\rangle = (-\Delta u_k, u_k)_{L_2(Q)} = (\nabla u_k, \nabla u_k)_{L_2(Q)} \geqslant c_1\|u_k\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}.$$

В силу плотности пространства $\dot{C}^\infty(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$ отсюда следует, что

$$\langle Au, u\rangle \geqslant c_1\|u_k\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}.$$

Задача (2.4)–(2.5) в нашем примере представляет собой первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности, а обобщенное решение совпадает с обобщенным решением из класса $L_2(0,T;\mathring{H}^1(Q)) \subset H^{1,0}(Q \times (0,T))$.

Упражнение 2.1. Рассмотреть пример 2.1 при наличии младших членов, т.е. в качестве оператора A взять оператор

$$Au = \Delta + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + c_0 u.$$

Выяснить, при каких условиях на коэффициенты b_i, c_0 оператор A будет $\mathring{H}^1(Q)$-коэрцитивным.

2.2. Сильные решения

Обобщенные решения имеют важное значение в исследовании разрешимости задач, в обосновании численных методов и в ряде других важных вопросов. Однако по сути обобщенные решения не удовлетворяют собственно уравнению (2.4) и условию (2.5). Рассмотрение же классических решений сужает класс, в котором ищется решение, и налагает излишние ограничения на правые части и коэффициенты уравнения. При этом многие задачи математической физики требуют рассмотрения разрывных правых частей. Удобным компромиссом является рассмотрение сильных решений. Сильные решения удовлетворяют уравнению (2.4) «почти всюду» при минимальных ограничениях на правую часть, начальную функцию и коэффициенты. Для определения сильных решений нам потребуется определить операцию дифференцирования в смысле обобщенных функций со значениями в гильбертовом пространстве.

Введем пространство основных функций $\mathcal{D}(I;H)$ как множество бесконечно дифференцируемых функций на I со значениями в H, с компактным в I носителем. Пространство $\mathcal{D}(I;H)$ является пространством Фреше с топологией, заданной системой полунорм:

$$p_{K_i,m}(\varphi) = \sup_{t\in K_i, \alpha\leqslant m} \|D^\alpha \varphi(t)\|_H,$$

где K_i — последовательность компактов в I, такая что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i = I$. Через $\mathcal{D}'(I;H)$ обозначим линейное пространство всех линейных ограниченных функционалов над пространством $\mathcal{D}(I;H)$. Пространство $\mathcal{D}'(I;H)$ будем называть *пространством распределений*, а элементы $\mathcal{D}'(I;H)$ будем называть *распределениями* или обобщенными функциями.

Пусть $T \in \mathcal{D}'(I;H)$, $\varphi \in \mathcal{D}(I;H)$, тогда через $\langle T, \varphi\rangle$ будем обозначать значение функционала T на φ. Для любого $T \in \mathcal{D}'(I;H)$ определим обобщенную производную $\dfrac{dT}{dt}$ равенством:

$$\left\langle \frac{dT}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \qquad \text{для всех } \varphi \in \mathcal{D}(I;H).$$

Итерируя, можно определить производную любого порядка от распределения.

Поскольку любая функция из $L_2(I; H)$ определяет некоторый линейный ограниченный функционал на $\mathcal{D}(I; H)$ по формуле:

$$\langle f, \varphi \rangle = (f, \varphi)_{L_2(I;H)}, \tag{2.6}$$

то имеют место следующие вложения:

$$\mathcal{D}(I; H) \subset L_2(I; H) \subset \mathcal{D}'(I; H).$$

Те элементы пространства $\mathcal{D}'(I; H)$, которые допускают представление в виде формулы (2.6), будем называть *регулярными функциями*.

Определение 2.3. Обобщенное решение $u(t)$ задачи (2.4)–(2.5) называется *сильным решением*, если $u' \in L_2(0, T; H)$, где производная по t понимается в смысле обобщенных функций.

При рассмотрении сильных решений удобно ввести пространство сильных решений. Определим гильбертово пространство

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) = \{w \in L_2(0, T; \mathcal{D}(\mathcal{A})) : w' \in L_2(0, T; H)\}$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathcal{W}(\mathcal{A})} = \int_0^T (u', v')_H \, dt + \int_0^T (\mathcal{A}u, \mathcal{A}v)_H dt + \int_0^T (u, v)_H dt,$$

где производные по t понимаются в смысле распределений со значениями в $L_2(0, T; H)$.

Предоставляем читателю показать, что обобщенное решение u является сильным решением тогда и только тогда, когда $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A})$.

2.3. Пространства начальных данных

Как отмечалось, для существования сильных решений на правые части и начальную функцию необходимо налагать дополнительные условия. Что касается функции из правой части уравнения (2.4), то необходимым условием существования сильного решения является принадлежность этой функции пространству $L_2(0, T; H)$. Это условие является естественным и легко проверяемым. С другой стороны, условия на начальную функцию являются довольно сложными (в нетривиальных случаях) и зачастую неконструктивными. Уже в простом случае уравнения теплопроводности из примера 2.1 необходимо накладывать условия на начальную функцию φ. Для случая параболических дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами в гладких областях (соответственно, допускающих гладкие решения) условия существования сильных решений были получены в работах О.А. Ладыженской, Л.Н. Слободецкого и других авторов.

Пример 2.2 (первая смешанная задача для уравнения теплопроводности)**.** Продолжим рассмотрение примера 2.1, считая границу области достаточно гладкой либо считая, что область Q является прямоугольником. В этом случае обобщенное решение является сильным, если принадлежит пространству $H^{2,1}(Q\times(0,T))$. Хорошо известно (см. [12]), что если $\varphi \in \mathring{H}^1(Q)$, то обобщенное решение первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности принадлежит $H^{2,1}(Q \times (0,T))$. Можно показать, что условие $\varphi \in \mathring{H}^1(Q)$ является и необходимым для существования сильного решения.

Введем определение пространства начальных данных.

Определение 2.4. *Пространством начальных данных* для задачи (2.4)–(2.5) называется множество:

$$\Phi(\mathcal{A}) = \{\varphi \in H : \text{существует сильное решение задачи (2.4)–(2.5)}\}.$$

Определение 2.4 является неконструктивным, однако, применяя методы теории интерполяции, можно дать описание пространств начальных данных в терминах интерполяционных пространств. Для эффективного применения теории интерполяции необходимо использовать аппарат теории аналитических полугрупп. В то же время аналитические полугруппы естественным образом возникают в параболических задачах и являются одним из самых мощных средств исследования параболических задач и особенно абстрактных параболических задач.

Глава 3

Полугруппы операторов в гильбертовом пространстве

3.1. Сильно непрерывные полугруппы

Пусть в гильбертовом пространстве H задано однопараметрическое семейство T_t $(t \geqslant 0)$ ограниченных операторов.

Определение 3.1. Семейство T_t $(t \geqslant 0)$ называется C_0-*полугруппой*, или *сильно непрерывной полугруппой*, или просто *полугруппой*, если выполнены следующие условия:

1. $T_{t+s} = T_t T_s$ при $t, s \geqslant 0$, $T_0 = I$.

2. Функция $T_t\varphi$ непрерывна в пространстве H на $[0, \infty)$ при каждом фиксированном $\varphi \in H$.

Из определения полугруппы следует оценка нормы полугруппы.

Теорема 3.1. *Пусть T_t $(t \geqslant 0)$ — C_0-полугруппа. Тогда существуют такие константы β и $M \geqslant 1$, что выполнено неравенство:*

$$\|T_t\| \leqslant Me^{\beta t}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Положим $c_1 = \sup\limits_{t\in[0,1]} \|T_t\|$. Обозначая через $[t]$ целую часть t, имеем

$$T_t = T_{[t]}T_{t-[t]} = (T_1)^{[t]}T_{t-[t]}$$

для любого $t \geqslant 0$. Отсюда следует, что

$$\|T_t\| \leqslant c_1 e^{\beta[t]},$$

где $\beta = \ln\|T_1\|$. Следовательно,

$$\|T_t\| \leqslant Me^{\beta t}, \quad t \geqslant 0,$$

где $M = c_1$, если $\beta \geqslant 0$, и $M = c_1 e^{-\beta}$, если $\beta < 0$. $\square$

Определение 3.2. Точная нижняя грань всех чисел β, для которых верно неравенство (3.1), называется *порядком роста полугруппы.*

Определение 3.3. В случае, когда порядок роста равен нулю, а $M = 1$, то есть имеет место оценка

$$\|T_t\| \leqslant 1,$$

полугруппа называется *сжимающей.*

Пусть T_t $(t \geqslant 0)$ — C_0- полугруппа. Введем линейный, вообще говоря, неограниченный оператор G по формуле:

$$G\varphi = \lim_{h\to+0} \frac{T_h\varphi - \varphi}{h},$$

определенный на таких элементах $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, для которых этот предел существует.

Определение 3.4. Определенный таким образом оператор G называется *генератором полугруппы* или *инфинитезимальным производящим оператором полугруппы* T_t $(t \geqslant 0)$.

Пример 3.1 (случай ограниченного генератора)**.** Пусть $B : H \to H$ — произвольный ограниченный оператор. Тогда можно определить семейство операторов T_t по формуле

$$T_t = I + tB + \frac{t^2}{2!}B^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}B^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}B^n. \tag{3.2}$$

Этот ряд сходится по норме операторов при всех $t \geqslant 0$, так как его члены мажорируются членами разложения в степенной ряд функции $e^{\|B\|t}$. Непосредственно можно видеть, что определенное таким образом семейство операторов является C_0-полугруппой с оператором B в качестве генератора.

Упражнение 3.1. Найти все непрерывные числовые функции, заданные на $[0, \infty)$, которые удовлетворяют условию:

$$f(x)f(y) = f(x + y),$$

для всех $x, y \geqslant 0$.

Упражнение 3.2. Рассмотреть все возможные полугруппы в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$.

3.2. Генераторы полугрупп

Из примера 3.1 видно, что любой ограниченный оператор является генератором C_0-полугруппы. Однако далеко не каждый неограниченный оператор будет генератором.

Теорема 3.2. *Генератор C_0-полугруппы имеет плотную в H область определения.*

Доказательство. Пусть G — генератор полугруппы T_t. Сначала покажем, что для всех $\varepsilon > 0$ и $\varphi_0 \in H$ элементы вида:

$$\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\varepsilon T_t\varphi_0 dt, \tag{3.3}$$

принадлежат $\mathcal{D}(G)$. Элементы (3.3) образуют плотное в H множество, так как для любого $\varphi_0 \in H$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\varphi_\varepsilon - \varphi_0\|_H \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\varepsilon \|T_t\varphi_0 - \varphi_0\|_H dt = 0.$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{T_h - I}{h}\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon h}\int\limits_0^\varepsilon (T_{t+h}\varphi_0 - T_t\varphi_0)dt =$$

$$\frac{1}{\varepsilon h}\left\{\int\limits_h^{\varepsilon+h} T_t\varphi_0 dt - \int\limits_0^\varepsilon T_t\varphi_0 dt\right\} = \frac{1}{\varepsilon h}\left\{\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon+h} T_t\varphi_0 dt - \int\limits_0^h T_t\varphi_0 dt\right\},$$

откуда

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{T_h - I}{h}\varphi_\varepsilon - \frac{T_\varepsilon - I}{\varepsilon}\varphi_0\right\|_H = 0.$$

Мы показали, что $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(G)$ и

$$G\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(T_\varepsilon\varphi_0 - \varphi_0).$$

□

Теорема 3.3. *Пусть T_t и G — соответственно C_0-полугруппа и генератор этой полугруппы. Тогда оператор-функция T_t преобразует область определения $\mathcal{D}(G)$ в себя и имеет место равенство:*

$$\frac{d}{dt}(T_t\varphi) = GT_t\varphi = T_tG\varphi, \tag{3.4}$$

для любого $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, $t \geqslant 0$.

Доказательство теоремы следует из очевидного равенства:

$$\frac{T_h - I}{h} T_t \varphi = T_t \frac{T_h - I}{h} \varphi$$

путем предельного перехода. □

Теорема 3.4. *Генератор C_0-полугруппы является замкнутым оператором.*

Доказательство. Пусть G — генератор полугруппы T_t. Возьмем произвольную последовательность $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(G)$ такую, что φ_k и $G\varphi_k$ сходятся в H к пределам φ_0 и y_0 соответственно. Из (3.4) следует, что при $h > 0$ имеем

$$\frac{1}{h}(T_h \varphi_k - \varphi_k) = \frac{1}{h} \int\limits_0^h (T_t)' \varphi_k dt = \frac{1}{h} \int\limits_0^h T_t G \varphi_k dt.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $k \to \infty$ (и фиксированном h), получаем

$$\frac{1}{h}(T_h \varphi_0 - \varphi_0) = \frac{1}{h} \int\limits_0^h T_t y_0 dt.$$

Устремим теперь h к нулю. Передел в правой части существует и равен y_0, следовательно, $\varphi_0 \in \mathcal{D}(G)$ и $G\varphi_0 = y_0$. □

3.3. Спектральные свойства генераторов полугрупп

Через $R(\lambda, G)$ будем обозначать резольвенту оператора G, то есть

$$R(\lambda, G) = (\lambda I - G)^{-1},$$

для тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых существует ограниченный оператор $(\lambda I - G)^{-1}$. Когда это не приводит к путанице, будем сокращать запись: $R(\lambda) = R(\lambda, G)$.

Оказывается, на спектр генераторов полугрупп необходимо налагаются существенные условия. В частности, эти условия связаны с порядком роста полугруппы.

Теорема 3.5. *Пусть* T_t *—* C_0*-полугруппа, а* β_0 *есть ее порядок роста. Тогда множество* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \beta_0\}$ *принадлежит резольвентному множеству оператора* G*. Причем*

$$R(\lambda)\varphi = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T_t \varphi dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > \beta_0. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \beta > \beta_0$. Тогда существует такое $M(\beta)$, что выполнено неравенство (3.1), поэтому интеграл

$$J(\lambda)\varphi = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T_t \varphi dt$$

равномерно и абсолютно сходится и определяет ограниченный оператор.

Поскольку оператор G замкнут, то для доказательства теоремы достаточно доказать, что

$$(\lambda I - G)J(\lambda)\varphi = J(\lambda)(\lambda I - G)\varphi = \varphi$$

для любого $\varphi \in \mathcal{D}(G)$.

Фиксируем λ ($\operatorname{Re}\lambda \geqslant \beta$) и $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. Из равенства

$$(\lambda I - G)T_t\varphi = T_t(\lambda I - G)\varphi \tag{3.6}$$

следует, что функция $e^{-\lambda t}(\lambda I - G)T_t\varphi$ интегрируема на $[0, \infty)$. Далее, в силу замкнутости оператора $\lambda I - G$ имеем

$$(\lambda I - G)J(\lambda)\varphi = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(\lambda I - G)T_t\varphi dt = \lambda J(\lambda)\varphi - \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(T_t)'\varphi dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$(\lambda I - G)J(\lambda)\varphi = \lambda J(\lambda)\varphi + \varphi - \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T_t \varphi dt =$$

$$= \lambda J(\lambda)\varphi + \varphi - \lambda J(\lambda)\varphi = \varphi.$$

Из (3.6) следует, что

$$J(\lambda)(\lambda I - G)\varphi = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T_t (\lambda I - G)\varphi dt = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} (\lambda I - G) T_t \varphi dt = \varphi.$$

□

Следствие 3.1. *В условиях теоремы* 3.5 *имеют место следующие формулы:*

$$\frac{d^k R(\lambda)}{d\lambda^k} = (-1)^k \int\limits_0^\infty t^k e^{-\lambda t} T_t \varphi dt, \tag{3.7}$$

при $\operatorname{Re}\lambda > \beta_0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Формулы (3.7) следуют из того, что все интегралы в (3.7) абсолютно сходятся. □

3.4. Теорема Хилле—Иосиды и ее обобщения

Ранее мы получили ряд необходимых свойств генераторов полугрупп. Сейчас рассмотрим вопрос о критериях для генераторов C_0-полугрупп.

Теорема 3.6. *Замкнутый оператор* G*, имеющий плотную область определения, является генератором* C_0*-полугруппы тогда и только тогда, когда существует такое число* λ_0*, что все числа* λ, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \lambda_0$ *являются резольвентными для оператора* G*, и для этих чисел выполнено неравенство:*

$$\|(R(\lambda))^k\| \leqslant \frac{c_1}{(\operatorname{Re}\lambda - \lambda_0)^k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.8}$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит от k.

Доказательство. Необходимость. Пусть G — генератор полугруппы T_t. Тогда из теоремы 3.5 следует, что если $\operatorname{Re}\lambda > \beta_0$, где β_0 — порядок роста, то λ принадлежит резольвентному множеству. Поскольку резольвента является аналитической оператор-функцией на резольвентном множестве, то в силу вида коэффициентов ряда Тейлора и формулы (3.7) имеем формулу:

$$(R(\lambda))^k\varphi = \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^\infty t^{k-1}e^{-\lambda t}T_t\varphi dt.$$

Оценивая отсюда $(R(\lambda))^k$ с помощью оценки (3.1), получаем при любом фиксированном $\beta > \beta_0$ и $\operatorname{Re}\lambda > \beta$:

$$\|(R(\lambda))^k\| \leqslant \frac{M}{(k-1)!}\int\limits_0^\infty t^{k-1}e^{(\beta-\operatorname{Re}\lambda)t}dt = \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda-\beta)^k}.$$

Достаточность. Пусть оператор G удовлетворяет условиям теоремы. Построим полугруппу, производящим оператором которой является оператор G.

Введем ограниченные операторы (аппроксимации Иосиды):

$$G_n = nGR(n),$$

где n принимает целые значения, большие, чем λ_0. Покажем, что операторы G_n на элементах $\mathcal{D}(G)$ сходятся к G:

$$\lim_{n\to\infty}\|G_n\varphi - G\varphi\|_H = 0. \tag{3.9}$$

Для этого сначала докажем, что для любого $\varphi \in H$

$$\lim_{n\to\infty}\|n(nI-G)^{-1}\varphi - \varphi\|_H = 0. \tag{3.10}$$

В случае, когда $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ имеем

$$\|n(nI-G)^{-1}\varphi - \varphi\|_H = \|R(n)G\varphi\|_H \leqslant \frac{c_1}{n-\lambda_0}\|G\varphi\|_H.$$

Откуда (3.10) следует для $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. Для других элементов $\varphi \in H$ справедливость (3.10) вытекает из плотности $\mathcal{D}(G)$ в H и равномерной ограниченности норм операторов $nR(n)$:

$$\|nR(n)\| \leqslant |n|\|R(n)\| \leqslant \frac{c_1|n|}{n-\lambda_0}.$$

Из (3.10) и соотношения

$$G_n\varphi - G\varphi = nR(n)G\varphi - G\varphi$$

следует (3.9).

Поскольку операторы G_n ограничены, то, используя ряд (3.2) из примера 3.1, определим операторы $e^{G_h t}$. Так как

$$G_n = n^2(nI-G)^{-1} - nI,$$

то

$$e^{G_n t} = e^{-nt}e^{n^2(nI-G)^{-1}t} = e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k n^{2k}}{k!}(R(n))^k.$$

С помощью неравенств (3.8) оцениваем

$$\|e^{G_n t}\| \leqslant e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k n^{2k}}{k!}\|(R(n))^k\| \leqslant c_1 e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{tn^2}{n-\lambda_0}\right)^k \leqslant c_1 e^{\left(-n+\frac{n^2}{n-\lambda_0}\right)t}.$$

Таким образом, при достаточно больших n имеем

$$\|e^{G_n t}\| \leqslant e^{\frac{n\lambda_0 t}{n-\lambda_0}} \leqslant c_2 e^{(\lambda_0+\varepsilon)t}, \tag{3.11}$$

где $\varepsilon > 0$ — любое фиксированное число.

Покажем теперь, что последовательность ограниченных операторов $e^{G_n t}$ сходится на всем H равномерно относительно t из каждого ограниченного отрезка $[0, t_0]$. В силу (3.11) этот факт достаточно установить для элементов φ из плотного в H множества $\mathcal{D}(G)$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. Тогда при достаточно больших m и n

$$e^{G_m t} - e^{G_n t} = \int\limits_0^t \frac{d}{ds} e^{G_n(t-s)+G_m s}\varphi ds = \int\limits_0^t e^{G_n(t-s)+G_m s}(G_m - G_n)\varphi ds,$$

откуда в силу (3.11) получаем

$$\|(e^{G_m t} - e^{G_n t})\varphi\|_H \leqslant c_2 e^{(\lambda_0+\varepsilon)t} t\|(G_m - G_n)\varphi\|_H \leqslant c_3\|(G_m - G_n)\varphi\|_H$$

и в силу (3.9)

$$\lim_{n,m\to\infty} \|(e^{G_m t} - e^{G_n t})\varphi\|_H = 0.$$

Следовательно, операторы $e^{G_n t}$ сходятся к пределу, который обозначим через T_t.

Поскольку оператор-функции $e^{G_n t}$ непрерывны и функции $e^{G_n t}$ сходятся равномерно по t, то оператор-функция T_t будет также непрерывной. Переходя к пределу в равенстве

$$e^{G_n(t+s)}\varphi = e^{G_n t} e^{G_n s},$$

получим полугрупповое соотношение $T_{t+s} = T_t T_s$. Очевидно, $T_0 = I$. Следовательно, T_t является сильно непрерывной полугруппой.

Остается показать, что генератором полугруппы T_t будет оператор G. Обозначим через $\tilde{G}$ генератор полугруппы T_t. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. Переходя к пределу в равенстве

$$e^{G_n t}\varphi - \varphi = \int\limits_0^t e^{G_n s} G_n \varphi ds,$$

получим соотношение

$$T_t\varphi - \varphi = \int\limits_0^t T_s G\varphi ds, \tag{3.12}$$

из которого следует, что $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{G})$, причем $\tilde{G}\varphi = G\varphi$ при $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. В силу теоремы 3.5 при достаточно большом $\lambda > 0$ образ оператора $(\lambda I -$

$\tilde{G}$) совпадает со всем H, а значит, и с образом оператора $(\lambda I - G)$, что доказывает совпадение операторов $\tilde{G}$ и G. □

Непосредственная проверка условия (3.8) затруднительна. Однако существует более сильное и простое условие, из которого следует условие (3.8).

Следствие 3.2. *Теорема* 3.6 *остается верной, если условие* (3.8) *заменить условием*

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \lambda_0}. \tag{3.13}$$

В случае, когда и $\lambda_0 = 0$, это следствие носит название теоремы Хилле—Иосиды. Приведем полную формулировку.

Теорема 3.7 (Хилле—Иосида)**.** *Замкнутый оператор G, имеющий плотную область определения, является генератором сжимающей C_0-полугруппы тогда и только тогда, когда все числа $\lambda > 0$ являются резольвентными для оператора G, и для этих чисел выполнено неравенство:*

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{\lambda}. \tag{3.14}$$

Доказательство. Остается доказать, что получаемая полугруппа будет сжимающей. Действительно, из неравенства (3.11) вытекает, что

$$\|e^{G_n t}\varphi\|_H \leqslant e^{\frac{1}{n}}\|\varphi\|_H,$$

откуда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\|T_t\| \leqslant 1.$$

□

3.5. Аналитические полугруппы

При рассмотрении сильных решений неоднородных параболических задач возникают аналитические полугруппы.

Определение 3.5. Сильно непрерывная полугруппа T_t называется *аналитической*, если она может быть аналитически продолжена в некоторый сектор:

$$\Delta_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \delta, \operatorname{Re} \lambda > 0\}, \quad 0 < \delta \leqslant \pi/2,$$

таким образом, что T_λ непрерывна в $\overline{\Delta}_\delta$.

Определение 3.5 не очень удобно в приложениях. К счастью, есть удобный критерий для аналитических полугрупп.

Определение 3.6. Сильно непрерывная полугруппа называется *аналитической*, если существуют такие числа ω и $q \geqslant 0$, что множество $\Omega_{q,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \omega, |\lambda| > q\}$ свободно от спектра ее генератора G, и выполнено неравенство

$$\|(\lambda I - G)^{-1}\| \leqslant \frac{c_1}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Omega_{q,\omega}. \tag{3.15}$$

Теорема 3.8. *Определения* 3.5 *и* 3.6 *эквивалентны.*

Поскольку мы не будем пользоваться теоремой 3.8, то за доказательством мы отсылаем читателя к [4, глава 9, раздел 10].

Покажем, что аналитические полугруппы необходимо возникают при рассмотрении сильных решений параболических задач. Пусть G — генератор C_0-полугруппы T_t. Рассмотрим задачу:

$$u'(t) - Gu(t) = f(t), \quad t \in [0, 1], \tag{3.16}$$

$$u(0) = 0. \tag{3.17}$$

Сильное решение задачи (3.16)–(3.17) понимаем в смысле определения 2.3.

Теорема 3.9. *Пусть для любого* $f \in C([0,1];H)$ *задача* (3.16)–(3.17) *имеет сильное решение и такое, что*

$$\|Gu(\cdot)\|_{C([0,1];H)} \leqslant c_1 \|f\|_{C([0,1];H)}, \tag{3.18}$$

тогда полугруппа T_t *является аналитической полугруппой.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ и сконструируем функцию $v(t) = tT_t\varphi$. Легко проверить, что v является сильным решением задачи (3.16)–(3.17) с $f(t) = T_t\varphi$. В силу неравенств (3.18) и (3.1) следует

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|tT_t\varphi\|_H \leqslant c_2 \|\varphi\|_H.$$

Отсюда, учитывая плотность области определения G в H, получаем для $t > 0$ оценку

$$\|GT_t\| \leqslant c_2 t^{-1}. \tag{3.19}$$

Из (3.19) следует, что для любого $\psi \in H$ и $t > 0$ имеем $T_t\psi \in \mathcal{D}(G)$. Покажем, что

$$\frac{d^k}{dt^k} T_t\psi = \left(\frac{d}{dt} T_{t/k}\right)^k \psi. \tag{3.20}$$

Действительно, учитывая замкнутость оператора G, получаем

$$\frac{d^2}{dt^2} T_t\psi = \frac{d}{dt}(GT_t)\psi = G \lim_{n\to\infty} n(T_{t+1/n} - T_t)\psi =$$

$$G(GT_t)\psi = GT_{t/2}GT_{t/2}\psi = \left(\frac{d}{dt} T_{t/2}\right)^2 \psi.$$

Повторяя эти рассуждения, получаем (3.20).

Следовательно, оператор-функция T_t, дифференцируемая при $t > 0$, и имеют место оценки для производных

$$\left\|\frac{d^k T_t}{dt^k}\right\| = \|G^k T_t\| \leqslant c^k k^k t^{-k}. \tag{3.21}$$

Из этих оценок следует, что существует такая константа c_2, что при $|t-t_0| < c_2 t_0$ ряд Тейлора

$$T_t = \sum_{k=0}^{\infty}(t-t_0)^k \frac{1}{k!}\frac{d^k T_{t_0}}{dt^k}$$

сходится. А это означает, что T_t может быть аналитически продолжена в сектор Δ_δ при определенном $\delta > 0$. □

Замечание 3.1. Можно показать, что условие (3.19) является не только достаточным для аналитичности полугруппы, но и необходимым.

Из теоремы 3.9 следует следующая важная теорема.

Теорема 3.10. *Пусть T_t есть аналитическая полугруппа в пространстве H, а оператор G является ее генератором, тогда для любого $t_0 > 0$ оператор*

$$T_{t_0} : H \to \mathcal{D}(G) \tag{3.22}$$

является ограниченным.

Замечание 3.2. Теорема 3.10 не верна для для C_0-полугрупп.

Упражнение 3.3. Привести пример C_0-полугруппы, для которой (3.22) не верно.

Глава 4

Теория интерполяции гильбертовых пространств

4.1. Вспомогательные утверждения

Пусть X и Y — сепарабельные гильбертовы пространства. Предположим, что вложение $X \subset Y$ плотное и непрерывное. Для целого $m \geqslant 1$ введем гильбертово пространство:

$$W^m(I; X, Y) = \{u \in L_2(I; X) : u^{(m)} \in L_2(I; Y)\}$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_{W^m(I;X,Y)} = (u, v)_{L_2(I;X)} + (u^{(m)}, v^{(m)})_{L_2(I;Y)}, \tag{4.1}$$

где $u^{(m)}$ — производная порядка m в смысле теории распределений. Покажем, что пространство $W^m(I; X, Y)$ действительно полно относительно нормы, порожденной скалярным произведением (4.1). Пусть u_k — фундаментальная последовательность в $W^m(I; X, Y)$. Тогда в силу полноты пространства $L_2(I; X)$ последовательность сходится к $u \in L_2(I; X)$, соответственно последовательность производных $u_k^{(m)}$ сходится к функции $v \in L_2(I; Y)$. Поскольку операция $\dfrac{d^m}{dt^m}$ непрерывна в пространстве распределений $\mathcal{D}'(I; X)$, то имеет место равенство $v = u^{(m)}$.

Методами, применяемыми в теории пространств Соболева, можно доказать теоремы о плотности пространства $D(\overline{I};X)$ в $W^m(I;X,Y)$ и о продолжении функций из пространства $W^m(I;X,Y)$ на все $\mathbb{R}$.

4.2. Определение интерполяционных пространств

Определим в пространстве Y замкнутую, симметричную, положительную форму $t[u,v] = (u,v)_X$, $\mathcal{D}(t) = X$. Пусть T — ассоциированный с ней самосопряженный положительный оператор. Тогда оператор $\Lambda = T^{1/2}$ есть также положительный оператор в Y, и в силу теоремы 2.23 [5, глава 6] область определения $\mathcal{D}(\Lambda) = \mathcal{D}(t) = X$, причем $t[u,v] = (\Lambda u, \Lambda v)_Y$.

Определим теперь пространства $[X;Y]_\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$ следующим образом. Положим $[X;Y]_\theta = \mathcal{D}(\Lambda^{1-\theta})$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$, где дробная степень $\Lambda^{1-\theta}$ определена для положительного оператора Λ. Пространство $[X;Y]_\theta$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением:

$$(u,v)_{[X;Y]_\theta} = (\Lambda^{1-\theta}u, \Lambda^{1-\theta}v)_Y + (u,v)_Y.$$

Введем понятие непрерывных прямых сумм гильбертовых пространств (см. [2]). Пусть D некоторое множество, на котором задана положительная мера μ. Пусть каждой точке λ этого множества сопоставлено сепарабельное гильбертово пространство $h(\lambda)$ размерности $n(\lambda)$, где $n(\lambda)$ может принимать значения $1, 2, \ldots$ или значение ∞, причем функция $n(\lambda)$ измерима по мере μ. Разобьем множество D на измеримые подмножества $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$, в каждом из которых имеет место равенство $n(\lambda) = n$. Для $\lambda \in D_n$ отождествим пространства $h(\lambda)$ с одним и тем же гильбертовым пространством h_n размерности n. Построим пространство $\mathcal{H}_n$, состоящее из таких вектор-функций $f(\lambda)$ на множестве D_n, принимающих значения в пространстве h_n, что:

1) для любого элемента $g \in h_n$ числовая функция $(f(\lambda), g)_{h_n}$ измерима по мере μ,

2) числовая функция $\|f(\lambda)\|_{h_n}$ имеет интегрируемый квадрат по мере μ

$$\int\limits_{D_n} \|f(\lambda)\|^2_{h_n} d\mu(\lambda) < \infty.$$

Определим в пространстве $\mathcal{H}_n$ линейные операции и введем скалярное произведение, положив

$$(f, g)_{\mathcal{H}_n} = \int\limits_{D_n} (f(\lambda), g(\lambda))_{h_n} d\mu(\lambda).$$

Можно показать, что $\mathcal{H}_n$ является гильбертовым пространством (см. [2]).

Обозначим теперь через $\mathcal{H}$ ортогональную прямую сумму гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n, \ldots$:

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \bigoplus \mathcal{H}_n.$$

Это гильбертово пространство и будем называть *непрерывной прямой суммой пространств* $h(\lambda)$ *относительно меры* μ и обозначать

$$\mathcal{H} = \int\limits_{D} \bigoplus h(\lambda) d\mu(\lambda).$$

В силу теоремы $4'$ [2, глава 1, раздел 4] о спектральном разложении самосопряженных операторов в гильбертовых пространствах существует такая положительная мера μ на вещественной оси и такое изометрическое вложение U пространства H в непрерывную прямую сумму $\mathcal{H}$ гильбертовых пространств относительно меры μ, что оператору Λ соответствует при этом оператор умножения на λ. Поскольку оператор Λ является положительно определенным, то существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $\mu(-\infty, \lambda_0) = 0$. Поэтому для любого $s \in \mathbb{R}$ введем гильбертово пространство $\mathcal{H}^s = \{v \in$

$\mathcal{H} : \lambda^s v \in \mathcal{H}\}$ со скалярным произведением:

$$(u, v)_{\mathcal{H}^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{D_n} \lambda^{2s} (u, v)_{h_n} d\mu(\lambda).$$

При этом пространство $X = \mathcal{D}(\Lambda)$ отобразится на гильбертово пространство $\mathcal{H}^1 = \{v \in \mathcal{H} : \lambda v \in \mathcal{H}\}$. Причем

$$U(\Lambda u) = \lambda(Uu)$$

для любой $u \in \mathcal{D}(\Lambda)$. С другой стороны, $[X; Y]_\theta = \mathcal{D}(\Lambda^{1-\theta})$ отобразится на гильбертово пространство $\mathcal{H}^{1-\theta} = \{v \in \mathcal{H} : \lambda^{1-\theta} v \in \mathcal{H}\}$.

4.3. Теоремы о следах

Начнем с теоремы, называемой *теоремой о промежуточных производных.*

Теорема 4.1. *Пусть $u \in W^m(I; X, Y)$. Тогда*

$$u^{(k)} \in L_2(I; [X, Y]_{k/m})$$

для $1 \leqslant k \leqslant m - 1$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $I = \mathbb{R}$. В этом случае можно дать другое (эквивалентное) определение пространства $W^m(\mathbb{R}; X, Y)$. Для функций из $L_2(\mathbb{R}; H)$ определим преобразование Фурье формулой:

$$F[u](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-it\xi) u(t) dt.$$

Тогда $u \in W^m(\mathbb{R}; X, Y)$ эквивалентно тому, что $F[u] \in L_2(\mathbb{R}; X)$ и $\xi^m F[u] \in L_2(\mathbb{R}; Y)$.

Покажем, что

$$\xi^k F[u] \in L_2(\mathbb{R}; [X; Y]_{k/m}). \tag{4.2}$$

Для $u \in L_2(\mathbb{R}; Y)$ определим Uu равенством $(Uu)(t) = U(u(t))$ почти всюду. Тогда U будет изоморфизм $L_2(\mathbb{R}; [X; Y]_\theta)$ на $L_2(\mathbb{R}; \mathcal{H}^{1-\theta})$. Положим $v(\lambda, \xi) = U(F[u])$.

Поэтому (4.2) эквивалентно требованию:

$$\lambda^{1-k/m}|\xi|^k v(\lambda, \xi) \in L_2(\mathbb{R}; \mathcal{H}) \tag{4.3}$$

Используя неравенство Гельдера, получаем оценку:

$$\lambda^{1-k/m}|\xi|^k \leqslant \frac{1}{p}\lambda^{(1-k/m)p} + \frac{1}{p'}|\xi|^{kp'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

где p выбираем таким образом, что $(1 - k/m)p = 1$ (тогда $kp' = m$). Из последнего неравенства следует оценка

$$\lambda^{1-k/m}|\xi|^k \leqslant c_1(\lambda + |\xi|^m).$$

Следовательно, мы можем оценить

$$\|\lambda^{1-k/m}|\xi|^k v(\lambda, \xi)\|_{L_2(\mathbb{R};\mathcal{H})} \leqslant c_2\|(\lambda + |\xi|^m)v(\lambda, \xi)\|_{L_2(\mathbb{R};\mathcal{H})}.$$

В силу того, что $u \in W^m(\mathbb{R}; X, Y)$, имеем $(\lambda + |\xi|^m)v(\lambda, \xi) \in L_2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$, поэтому из последнего неравенства следует (4.3).

В случае, когда $I \neq \mathbb{R}$, нужно воспользоваться теоремой о продолжении в $\mathbb{R}$. $\square$

Теорема 4.1 устанавливает суммируемость в квадрате производных функций из $W^m(I; X, Y)$. Однако, как показывает следующая теорема, в более широком пространстве производные непрерывны.

Теорема 4.2. *Пусть $u \in W^m(I; X, Y)$. Тогда*

$$u^{(k)} \in C(\overline{I}_1; [X, Y]_{(k+1/2)/m}),$$

где $I_1 \subset I$ — произвольный ограниченный интервал, $0 \leqslant k \leqslant m - 1$. Возможно, после изменения функции $u^{(k)}$ на множестве меры нуль.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 4.1, без ограничения общности можно считать, что $I = \mathbb{R}$.

Возьмем произвольную $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}; X)$. Вновь положим $v(\lambda, \xi) = U(F[u])$. Рассмотрим функцию $z(\xi) = \||\xi|^k \lambda^{1-(k+1/2)/m} v(\lambda, \xi)\|_{\mathcal{H}}$. Тогда имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |z(\xi)| d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \||\xi|^k \lambda^{1-(k+1/2)/m} v(\lambda, \xi)\|_{\mathcal{H}} d\xi =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{|\xi|^k \lambda^{1-(k+1/2)/m}}{(|\xi|^m + \lambda)} (|\xi|^m + \lambda) v(\lambda, \xi) \right\|_{\mathcal{H}} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|\xi|^k \lambda^{1-(k+1/2)/m}}{(|\xi|^m + \lambda)} \right)^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \|(|\xi|^m + \lambda) v(\lambda, \xi)\|^2_{\mathcal{H}} d\xi \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \|(|\xi|^m + \lambda) v(\lambda, \xi)\|^2_{\mathcal{H}} d\xi \right)^{1/2} \leqslant c_2 \|u\|_{W^m(\mathbb{R}; X, Y)},$$

поскольку, делая замену $\xi = \lambda^{1/m} \eta$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|\xi|^k \lambda^{1-(k+1/2)/m}}{(|\xi|^m + \lambda)} \right)^2 d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|\eta|^k}{(1 + |\eta|^m)} \right)^2 d\eta < \infty.$$

Следовательно, $z \in L_1(\mathbb{R})$. Поскольку функция, образ Фурье который принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$, непрерывна (см., например, теорему 7.5 [14, глава 7]), то имеем

$$\|u^{(k)}\|_{C(\mathbb{R}; [X;Y]_{(k+1/2)/k})} \leqslant c_3 \|u\|_{W^m(\mathbb{R}; X, Y)}.$$

В силу того, что $\mathcal{D}(\mathbb{R}; X)$ плотно в $W^m(\mathbb{R}; X, Y)$, последнее неравенство имеет место и для $u \in W^m(\mathbb{R}; X, Y)$ $\square$

С теоремой 4.2 тесно связана следующая важная теорема о следах.

Теорема 4.3. *Для любого* $m \geqslant 1$ *существует ограниченное отображение (вообще говоря, неоднозначное) поднятия* $\mathcal{R} : \prod\limits_{k=0}^{m-1} [X; Y]_{(k+1/2)/m} \to$

$W^m(0,\infty;X,Y)$, восстанавливающее по произвольному набору $\{a_k\}_{k=0}^{m-1}$, $a_k \in [X;Y]_{(k+1/2)/m}$ функцию $u \in W^m(0,\infty;X,Y)$ такую, что $u^{(k)}(0) = a_k$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$.

Доказательство. Сначала покажем, что для любого $a \in \mathcal{H}^{1-(k+1/2)/m}$ существует функция $w \in W^m(0,\infty;\mathcal{H}^1,\mathcal{H})$ такая, что $w^{(k)}(0) = a$ и имеет место неравенство:

$$\|w\|_{W^m(0,\infty;\mathcal{H}^1,\mathcal{H})} \leqslant c_1\|a\|_{\mathcal{H}^{1-(k+1/2)/m}}. \tag{4.4}$$

Возьмем функцию $\varphi \in \mathcal{D}([0,\infty),\mathbb{R})$ такую, что $\varphi^{(k)}(0) = 1$. Построим функцию w по формуле:

$$w(\lambda,t) = \lambda^{-k/m}a(\lambda)\varphi(\lambda^{1/m}t).$$

Так как функция φ финитная и бесконечно дифференцируемая, то функция w принадлежит пространству $W^m(0,\infty;\mathcal{H}^1,\mathcal{H})$. Поскольку, $w^{(k)} = a(\lambda)\varphi^{(k)}(\lambda^{1/m}t)$, то $w^{(k)}(0) = a$. Покажем, что верно (4.4). Действительно,

$$\|w\|^2_{W^m(0,\infty;\mathcal{H}^1,\mathcal{H})} = \|w\|^2_{L_2(0,\infty;\mathcal{H}^1)} + \|w^{(m)}\|^2_{L_2(0,\infty;\mathcal{H})} =$$
$$= \left(\int\limits_0^\infty \|\lambda^{1-k/m}a(\lambda)\varphi(\lambda^{1/m}t)\|^2_{\mathcal{H}}dt\right)^2 + \left(\int\limits_0^\infty \|a(\lambda)\varphi^{(m)}(\lambda^{1/m}t)\|^2_{\mathcal{H}}dt\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant c_2(\|a\|^2_{\mathcal{H}^{1-(k+1/2)/m}} + \|a\|^2_{\mathcal{H}}) \leqslant c_3\|a\|^2_{\mathcal{H}^{1-(k+1/2)/m}}.$$

Функция $u(t) = U^{-1}(w(t))$ принадлежит пространству $W^m(0,\infty;X,Y)$ и удовлетворяет условию $u^{(m)}(0) = U^{-1}a \in [X,Y]_{(k+1/2)/m}$.

Построим функцию $V_k \in W^m(0,\infty;X,Y)$ такую, что $V_k^{(l)}(0) = 0$ при $0 \leqslant l \leqslant m-1$, $l \neq k$ и $V_k^{(k)}(0) = a_k$, где $a_k \in [X,Y]_{(k+1/2)/m}$. В силу предыдущих рассуждений существует $u_k \in W^m(0,\infty;X,Y)$ такая, что $u_k^{(k)}(0) = a_k$. Положим

$$V_k(t) = \sum_{r=1}^m c_r u_k(rt),$$

где константы c_r определяются из условий:

$$\sum_{r=1}^{m} r^l c_r = \delta_{lk}, \qquad 0 \leqslant l \leqslant m-1. \tag{4.5}$$

Условия (4.5) действительно определяют константы c_r, поскольку определитель Вандермонда в системе (4.5) не равен нулю.

Функция $V = \sum\limits_{k=0}^{m-1} V_k \in W^m(0,\infty; X, Y)$ удовлетворяет условиям $V^{(k)}(0) = a_k$. И можно положить $V = \mathcal{R}\{a_k\}_{k=0}^{m-1}$ ограниченность отображения $\mathcal{R}$ обеспечивается неравенствами (4.4). $\square$

Замечание 4.1. В теореме 4.3 предположение $I = (0,\infty)$ является несущественным. Утверждение и доказательство остаются в силе для любого I и любой точки $t_0 \in \overline{I}$, в которой определяются следы.

Как уже отмечалось, пространство $W^m(\mathbb{R}; X, Y)$ допускает эквивалентное определение через преобразование Фурье. При таком определении условие, что m является целым, не является существенным, и сейчас дадим определение пространства $W^s(\mathbb{R}; X, Y)$ для любого вещественного $s > 0$. Для целых s пространства $W^s(\mathbb{R}; X, Y)$ совпадают с $W^m(\mathbb{R}; X, Y)$, $s = m$.

Определим $W^s(\mathbb{R}; X, Y) = \{u \in L_2(\mathbb{R}; X) : |\xi|^s F[u] \in L_2(\mathbb{R}, Y)\}$. Введем в $W^s(\mathbb{R}; X, Y)$ скалярное произведение:

$$(u,v)_{W^s(\mathbb{R};X,Y)} = (u,v)_{L_2(\mathbb{R};X)} + (|\xi|^s F[u], |\xi|^s F[v])_{L_2(\mathbb{R};Y)}.$$

Доказанные теоремы 4.1, 4.2 и 4.3 допускают обобщение на пространства $W^s(\mathbb{R}; X, Y)$.

Пространства следов допускают другое определение с использованием фактор-нормы.

Теорема 4.4. *Пространство $[X, Y]_\theta$ может быть определено как пространство следов $u(0)$ функций из $W^s(\mathbb{R}; X, Y)$, где $s = \dfrac{1}{2\theta}$ с эквивалент-*

ной нормой следующим образом:

$$\|\!|a|\!\|_{[X,Y]_\theta} = \inf_{u(0)=a} \|u\|_{W^s(\mathbb{R};X,Y)}, \tag{4.6}$$

для любого $a \in [X,Y]_\theta$.

Доказательство. Возможность определения через пространства следов следует из теорем 4.2 и 4.3. Покажем эквивалентность норм. В самом деле, пространство $[X,Y]_\theta$, снабженное нормой (4.6), есть фактор-пространство гильбертова пространства $W^s(\mathbb{R};X,Y)$ по замкнутому подпространству таких функций $v(t)$, для которых $v(0)=0$, и, следовательно, снова гильбертово пространство. Поскольку операция взятия следа является непрерывным отображением $W^s(\mathbb{R};X,Y) \to [X,Y]_\theta$, то

$$\|a\|_{[X,Y]_\theta} \leqslant c_1 \|u\|_{W^s(\mathbb{R};X,Y)} \leqslant c_1 \|\!|a|\!\|_{[X,Y]_\theta}.$$

Обратное неравенство следует из ограниченности оператора поднятия $\mathcal{R}$.

□

4.4. Интерполяционная теорема

Наряду с парой пространств $\{X,Y\}$, рассмотрим аналогичную пару $\{X_1,Y_1\}$ сепарабельных гильбертовых пространств. Аналогично предположим, что вложение $X_1 \subset Y_1$ плотное и непрерывное.

Имеет место следующая основная в теории интерполяции теорема.

Теорема 4.5. *Пусть T — линейный оператор, удовлетворяющий условиям:*

$$T\colon Y \to Y_1 \text{ — ограниченный оператор},$$

$$T\colon X \to X_1 \text{ — ограниченный оператор}.$$

Тогда

$$T\colon [X;Y]_\theta \to [X_1;Y_1]_\theta \text{ — ограниченный оператор}$$

для всех $\theta \in (0,1)$.

Доказательство. Возьмем произвольное $a \in [X,Y]_\theta$, тогда согласно теореме 4.4 положим $s = \dfrac{1}{2\theta}$, тогда существует такая функция $u \in W^s(\mathbb{R}; X, Y)$, что $u(0) = a$. Введем функцию $v(t) = Tu(t)$, при почти всех t. В силу свойств оператора T имеем

$$v \in L_2(\mathbb{R}; X_1), \quad |\xi|^s F[v] = T(|\xi|^s F[u]) \in L_2(\mathbb{R}; Y_1).$$

Тогда имеют место оценки:

$$\|v\|_{L_2(\mathbb{R};X_1)} \leqslant c_1 \|u\|_{L_2(\mathbb{R};X)}$$
$$\||\xi|^s v\|_{L_2(\mathbb{R};Y_1)} \leqslant c_2 \||\xi|^s F[u]\|_{L_2(\mathbb{R};Y)}.$$

Следовательно, $v \in W^s(\mathbb{R}; X_1, Y_1)$ и

$$\|v\|_{W^s(\mathbb{R};X_1,Y_1)} \leqslant c_3 \|u\|_{W^s(\mathbb{R};X,Y)}. \tag{4.7}$$

Тогда $v(0) \in [X_1, Y_1]_\theta$ и $v(0) = Ta$, и имеет место оценка

$$\|Ta\|_{[X_1,Y_1]_\theta} \leqslant c_4 \|v\|_{W^s(\mathbb{R};X_1,Y_1)},$$

откуда, используя (4.7), получаем

$$\|Ta\|_{[X_1,Y_1]_\theta} \leqslant c_5 \inf_{u(0)=a} \|u\|_{W^s(\mathbb{R};X,Y)}.$$

Отсюда, учитывая теорему 4.4, следует утверждение теоремы. □

Упражнение 4.1. Рассмотреть пример теоремы 4.5 для дифференциального оператора в шкале гильбертовых пространств.

4.5. Повторная интерполяция и двойственность

Пусть $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ такие, что $\theta_1 < \theta_2$. Из определения интерполяционных пространств следует вложение:

$$[X,Y]_{\theta_1} \subset [X,Y]_{\theta_2}. \tag{4.8}$$

Теорема 4.6. *Вложение* (4.8) *является плотным.*

Доказательство. Для доказательства будем использовать изоморфизм U, определенный в разделе 4.2. Мы видим, что U есть изоморфизм пространств $[X;Y]_\theta$ и $\mathcal{H}^{1-\theta}$. При этом $\mathcal{H}^{1-\theta_1}$ плотно в $\mathcal{H}^{1-\theta_2}$. □

В силу теоремы 4.6 к паре пространств $\{[X,Y]_{\theta_1}, [X,Y]_{\theta_2}\}$ можно снова применить теорию интерполяции.

Теорема 4.7. *Для любого* $\theta \in (0,1)$ *имеет место*

$$[[X,Y]_{\theta_1}, [X,Y]_{\theta_2}]_\theta = [X,Y]_{(1-\theta)\theta_1+\theta\theta_2}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы эквивалентно равенству

$$[\mathcal{H}^{1-\theta_1}, \mathcal{H}^{1-\theta_2}]_\theta = \mathcal{H}^{(1-\theta)\theta_1+\theta\theta_2}. \tag{4.9}$$

С другой стороны, пространство $\mathcal{H}^{1-\theta_1}$ есть область определения оператора умножения на $\lambda^{\theta_2-\theta_1}$ в пространстве $\mathcal{H}^{1-\theta_2}$. Следовательно, пространство $[\mathcal{H}^{1-\theta_1}, \mathcal{H}^{1-\theta_2}]_\theta$ есть область определения оператора умножения на $\lambda^{(1-\theta)(\theta_2-\theta_1)}$ в пространстве $\mathcal{H}^{1-\theta_2}$. Таким образом, $[\mathcal{H}^{1-\theta_1}, \mathcal{H}^{1-\theta_2}]_\theta$ совпадает со всеми $v \in \mathcal{H}$ такими, что $\lambda^{1-\theta}(\lambda^{(1-\theta)(\theta_2-\theta_1)}v) \in \mathcal{H}$, что и означает (4.9). □

Теорема 4.8. *Для любого* $\theta \in (0,1)$ *справедливо равенство*

$$([X,Y]_\theta)' = [Y', X']_{1-\theta}. \tag{4.10}$$

Доказательство. При доказательстве вновь используем изоморфизм U. Гильбертовы пространства Y и Y' мы можем отождествить, соответственно отождествим $\mathcal{H}'$ и $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0$. Поскольку U есть изоморфизм из X' на $\mathcal{H}^{-1}$, а также из $[X;Y]'_\theta$ на $\mathcal{H}^{\theta-1}$, то свойство (4.10) эквивалентно равенству $\mathcal{H}^{\theta-1} = [\mathcal{H}, \mathcal{H}^{-1}]_{1-\theta}$, которое само является следствием определения пространств $[X,Y]_\theta$, поскольку $\mathcal{H}$ может быть описано как область определения оператора умножения на λ в пространстве $\mathcal{H}^{-1}$. $\square$

Глава 5

Разрешимость параболических задач

5.1. Единственность сильных решений

В постановке задачи (2.4)–(2.5) участвует оператор A. Чтобы воспользоваться теорией полугрупп для исследования разрешимости этой задачи, докажем следующую теорему.

Теорема 5.1. *Пусть оператор A является V-коэрцитивным. Тогда оператор $-\mathcal{A}$ является генератором аналитической полугруппы.*

Доказательство. Так как оператор $\mathcal{A}$ является секториальным, то мы можем применить теорему 3.2 [5, глава 5] и получить выполнение условия определения 3.6. $\square$

Замечание 5.1. В силу (2.2) спектр оператора $\mathcal{A}$ лежит в левой полуплоскости, и мнимая ось принадлежит резольвентному множеству.

Чтобы показать единственность сильных решений задачи (2.4)–(2.5), получим формулу для решений в терминах теории полугрупп.

Теорема 5.2. *Пусть оператор $-\mathcal{A}$ является генератором аналитической полугруппы T_t $(t \geqslant 0)$, и пусть $u(t)$ — сильное решение задачи* (2.4)–(2.5), *тогда имеет место формула:*

$$u(t) = T_t\varphi + \int\limits_0^t T_{t-s}f(s)ds. \tag{5.1}$$

Доказательство. Для произвольных $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ имеем

$$\frac{d}{ds}\big(T_{t-s}\mathcal{A}^{-1}u(s)\big) = T_{t-s}\mathcal{A}^{-1}f(s).$$

Интегрируя это равенство по s от 0 до t, получаем

$$\mathcal{A}^{-1}u(t) = T_t\mathcal{A}^{-1}\varphi + \int\limits_0^t T_{t-s}\mathcal{A}^{-1}f(s)ds.$$

Отсюда в силу замкнутости оператора $\mathcal{A}$ и соотношения (3.4) получаем (5.1) □

Теорема 5.3. *При выполнении условий теоремы* 5.2 *задача* (2.4)–(2.5) *может иметь не более одного сильного решения.*

Доказательство теоремы следует из формулы (5.1). □

Заметим еще раз, что теорема не утверждает существования сильного решения.

5.2. Неоднородные уравнения

В этом разделе будем рассматривать неоднородную задачу (2.4)–(2.5) в случае нулевых начальных условиях (2.5).

Теорема 5.4. *Пусть оператор A является V-коэрцитивным оператором. Тогда для любого $f \in L_2(0,T;H)$ и $\varphi = 0$ задача* (2.4)–(2.5) *имеет сильное решение.*

Доказательство. Продолжим функцию f нулем на $\mathbb{R}$. Это продолжение также обозначим через f. Очевидно, что $f \in L_2(\mathbb{R}, H)$. Введем оператор-функцию

$$K(t) = \begin{cases} T_t, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

Через $\mathcal{K}$ обозначим интегральный оператор с ядром $K(t)$. Покажем, что оператор $B : L_2(\mathbb{R}, H) \to L_2(\mathbb{R}, H)$, определенный по формуле:

$$Bf(t) = \mathcal{A}\mathcal{K}f(t) = \mathcal{A}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t-s)f(s)ds,$$

ограничен. Используя преобразование Фурье, имеем

$$F[Bf](\lambda) = F[\mathcal{A}\mathcal{K}](\lambda)F[f](\lambda).$$

В силу теоремы 3.5 и замечания 5.1 имеем

$$F[\mathcal{A}\mathcal{K}](\lambda) = \mathcal{A}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)e^{-i\lambda t}dt = \mathcal{A}\int\limits_{0}^{\infty} T_t e^{-i\lambda t}dt = \mathcal{A}(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}.$$

В силу равенства Парсеваля получаем

$$\|Bf\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)} = \|F[Bf]\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)} \leqslant \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|\mathcal{A}(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|^2 \|F[f]\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)} =$$
$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|\mathcal{A}(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)} \leqslant c_1 \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)}.$$

Здесь использовано соотношение $\mathcal{A}(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1} = i\lambda(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1} - I$ и оценка (3.15).

Покажем теперь, что

$$u(t) = \int\limits_0^t T_{t-s}f(s)ds$$

является сильным решением задачи (2.4)–(2.5). Достаточно убедиться, что $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A})$. Действительно, имеем

$$u'(t) = f(t) - \int\limits_0^t \mathcal{A}T_{t-s}f(s)ds.$$

В силу ограниченности оператора B и замкнутости оператора $\mathcal{A}$ получаем, что $u', \mathcal{A}u \in L_2(0,T;H)$. $\square$

Упражнение 5.1. Привести конкретную реализацию оператора B для конечномерного случая.

5.3. Уравнения с начальными условиями

С помощью теории полугрупп легко получить разрешимость однородных параболических задач по формуле (3.4). Однако применение этой формулы накладывает излишние условия на начальную функцию. Использование теории интерполяции позволяет получить точные условия на начальную функцию, гарантирующие сильную разрешимость. Используя теоремы о следах 4.3 сведем однородное уравнение к неоднородному уравнению с нулевыми начальными условиями.

Теорема 5.5. *Пусть оператор A является V-коэрцитивным оператором, тогда для любого $f \in L_2(0,T;H)$ задача (2.4)–(2.5) имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in [H, \mathcal{D}(\mathcal{A})]_{1/2}$.*

Доказательство. Предположим, что начальная функция φ принадлежит интерполяционному пространству $[\mathcal{D}(\mathcal{A}), H]_{1/2}$. Покажем, что задача (2.4)–(2.5) имеет сильное решение. Действительно, в силу теоремы 4.3 существует такая функция $v \in \mathcal{W}(\mathcal{A})$, что $u(0) = \varphi$. Рассмотрим следующую задачу для функции w:

$$w'(t) + \mathcal{A}w(t) = F(t), \quad (t \in (0,T)) \tag{5.2}$$

$$w(0) = 0, \tag{5.3}$$

где $F(t) = f(t) - v' - \mathcal{A}v(t)$. Поскольку $F \in L_2(0,T;H)$, то к задаче (5.2)–(5.3) применима теорема 5.4, и существует функция $w \in \mathcal{W}(\mathcal{A})$, являющаяся сильным решением задачи (5.2)–(5.3). Следовательно, функция $u = w + v$ является сильным решением задачи (2.4)–(2.5).

Пусть теперь функция $u \in \mathcal{W}(A)$ есть сильное решение задачи (2.4)–(2.5), тогда $\varphi = u(0)$ принадлежит интерполяционному пространству $[\mathcal{D}(\mathcal{A}), H]_{1/2}$ в силу теоремы 4.2. $\square$

Теорема 5.5 имеет существенный недостаток в большинстве приложений, поскольку условие $\varphi \in [\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2}$ является неконструктивным. Действительно, описание интерполяционных пространств, за исключением редких случаев, задача очень трудная. Кроме того, во многих случаях мы не имеем конструктивного описания области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Подобная ситуация особенно характерна в теории функционально-дифференциальных уравнений.

5.4. Конструктивное описание пространств начальных данных

Рассмотрим в H форму $\overline{a}$, сопряженную к форме a. Форма $\overline{a}$ определяется по формуле $\overline{a}[u, v] = \langle A^* u, v \rangle$, где оператор A^* — сопряженный к A оператор. В силу теоремы 2.5 [5, глава 6] форма $\overline{a}$ порождает оператор $\mathcal{A}^*$, сопряженный к оператору $\mathcal{A}$. Область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ будем рассматривать как гильбертово пространство со скалярным произведением, аналогичным (2.3).

Теорема 5.6. *Пусть оператор A является V-коэрцитивным. Предположим, что имеют место непрерывные вложения $V \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2}$ и $V \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}^*); H]_{1/2}$.*

Тогда $V = [\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2} = [\mathcal{D}(\mathcal{A}^*); H]_{1/2}$.

Доказательство. Для произвольного $u \in H$ форма $(\mathcal{A}w, u)_H$ определяет линейный непрерывный функционал f на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ по формуле $\langle w, f\rangle = (\mathcal{A}w, u)_H$. Действительно,

$$\sup_{w\in\mathcal{D}(\mathcal{A})} \frac{|(\mathcal{A}w, u)_H|}{\|w\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}} \leqslant \sup_{w\in\mathcal{D}(\mathcal{A})} \frac{\|\mathcal{A}w\|_H \|u\|_H}{(\|\mathcal{A}w\|_H^2 + \|w\|_H^2)^{1/2}} \leqslant \|u\|_H.$$

Функционал f можно представить в виде $f = \mathrm{A}_0' u$, где оператор A_0' ограничен как оператор

$$\mathrm{A}_0' : H \to (\mathcal{D}(\mathcal{A}))', \tag{5.4}$$

поскольку $\|f\|_{(\mathcal{D}(\mathcal{A}))'} \leqslant \|u\|_H$.

Покажем, что $\mathcal{A}^* \subset \mathrm{A}_0'$, т.е. $\mathrm{A}_0' u = \mathcal{A}^* u$ для $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$. Пусть $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ и $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Обозначим $\mathrm{A}_0' u = f_1$ и $\mathcal{A}^* u = f_2$. Тогда

$$\langle w, f_1\rangle = (\mathcal{A}w, u)_H = (w, \mathcal{A}^* u)_H = \langle w, f_2\rangle.$$

В силу произвольности $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ имеем $\mathcal{A}^* u = \mathrm{A}_0' u$ в $(\mathcal{D}(\mathcal{A}))'$, но $\mathcal{A}^* u \in H$ и $H \subset (\mathcal{D}(\mathrm{A}^*))'$, следовательно, $\mathcal{A}^* u = \mathrm{A}_0' u \in H$ для $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$. Поскольку оператор $\mathcal{A}^*$ ограниченно отображает $\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ в H, то и оператор A_0' ограничен как оператор

$$\mathrm{A}_0' : \mathcal{D}(\mathcal{A}^*) \to H. \tag{5.5}$$

Из (5.4) и (5.5) в силу интерполяционной теоремы 4.5 оператор A_0' ограничен как оператор

$$\mathrm{A}_0' : [\mathcal{D}(\mathcal{A}^*), H]_{1/2} \to [H, (\mathcal{D}(\mathcal{A}))']_{1/2}.$$

Однако согласно теореме 4.8 о двойственности справедливо равенство

$$[H; (\mathcal{D}(\mathcal{A}))']_{1/2} = ([\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2})'.$$

Поэтому ограничен оператор

$$\mathrm{A}_0' : [\mathcal{D}(\mathcal{A}^*), H]_{1/2} \to ([\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2})'. \tag{5.6}$$

Покажем, что $\mathrm{A}_0'u = \mathrm{A}^*u$, если $u \in V$. Возьмем $u \in V$ и $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Пусть $\mathrm{A}_0'u = f_1$ и $\mathrm{A}^*u = f_2$. Тогда

$$\langle w, f_1 \rangle = (\mathcal{A}w, u)_H = \langle Aw, u \rangle = \langle w, \mathrm{A}^*u \rangle = \langle w, f_2 \rangle.$$

В силу произвольности $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ получаем равенство $\mathrm{A}^*u = \mathrm{A}_0'u$ в $(\mathcal{D}(\mathcal{A}))'$, но $\mathrm{A}^*u \in V'$ и $V' \subset (\mathcal{D}(\mathcal{A}))'$. Следовательно, $\mathrm{A}^*u = \mathrm{A}_0'u \in V'$.

Возьмем произвольное $f \in V'$. Тогда $u = (\mathrm{A}^*)^{-1}f \in V$ и

$$\|u\|_V \leqslant c_1 \|f\|_{V'}, \tag{5.7}$$

где $c_1 > 0$ от f не зависит. По предположению теоремы $u \in [\mathcal{D}(\mathcal{A}^*); H]_{1/2}$ и

$$\|u\|_{[\mathcal{D}(\mathcal{A}^*); H]_{1/2}} \leqslant c_2 \|u\|_V, \tag{5.8}$$

где $c_2 > 0$ от f не зависит.

В силу (5.6) получаем $\mathrm{A}_0'u = f \in ([\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2})'$. Учитывая (5.7), (5.8), получаем

$$\|f\|_{([\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2})'} \leqslant c_3 \|u\|_{[\mathcal{D}(\mathcal{A}^*); H]_{1/2}} \leqslant c_3 c_2 \|u\|_V \leqslant c_3 c_2 c_1 \|f\|_{V'}.$$

В силу произвольности $f \in V'$ получаем, что $V' \subset ([\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2})'$. Переходя к сопряженным пространствам, получаем, что $[\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2} \subset V$. Вместе с предположением теоремы это означает, что $V = [\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2}$ с точностью до эквивалентности норм.

Равенство $V = [\mathcal{D}(\mathcal{A}^*); H]_{1/2}$ устанавливается аналогично. □

Глава 6

Приближенные методы

В настоящей главе рассматривается первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения со сдвигами по пространственным переменным, содержащего ограниченную нелинейность. Доказано существование и единственность решений этой задачи, а также обоснован метод построения приближенных решений. Именно такие задачи возникают в приложениях нелинейной оптики.

6.1. Постановка задачи

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q = \bigcup\limits_i \overline{M_i}$ $(i = 1, ..., N_\circ)$, где M_i — (n-1)-мерные многообразия класса C^∞, которые являются открытыми и связными в топологии ∂Q. Пусть в окрестности каждой точки $g \in \partial Q \setminus \bigcup\limits_i M_i$ область Q — диффеоморфна n-мерному двугранному углу, если $n \geqslant 3$, и плоскому углу, если $n = 2$.

Будем обозначать через $H^k(Q)$ пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(Q)$, с нормой

$$\|u\|_{H^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int\limits_Q |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Через $\mathring{H}^k(Q)$ обозначим замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $\dot{C}^\infty(Q)(Q)$ в $H^k(Q)$, а через $H^{-1}(Q)$ обозначим пространство, сопряженное к $\mathring{H}^1(Q)$.

Введем ограниченный дифференциально-разностный оператор $A_R : \mathring{H}^1(Q)(Q) \to H^{-1}(Q)$ по формуле:

$$A_R u = \sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijQ} u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} R_{iQ} u_{x_i} + R_{0Q} u.$$

Здесь $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q,\ R_{iQ} = P_Q R_i I_Q$,

$$R_{ij} u(x) = \sum_{h \in M} a_{ijh}(x) u(x+h) \ (i,j = 1, \ldots, h),$$

$$R_i u(x) = \sum_{h \in M} a_{ih}(x) u(x+h) \ (i = 0, 1, \ldots, n),$$

$M \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество векторов с целочисленными координатами, $a_{ijh},\ a_{ih} \in\ C^\infty(\overline{Q})$; $I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \backslash Q$; $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q.

Определение 6.1. Оператор $-A_R$ будем называть сильно эллиптическим, если существует константа $c_1 > 0$ такая, что для всех $u \in \dot{C}^\infty(Q)(Q)$

$$-\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{6.1}$$

Необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности в алгебраической форме будут сформулированы в конце этого параграфа.

Будем рассматривать дифференциально-разностное уравнение

$$u_t(x,t) - A_R u(x,t) = f(u(x,t)) \qquad ((x,t) \in Q_T) \tag{6.2}$$

с краевым условием

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \qquad ((x,t) \in \Gamma_T) \tag{6.3}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \psi(x) \qquad (x \in Q), \tag{6.4}$$

где $f : \mathbb{R} \to [-M, M]$, $0 < M < \infty$ — непрерывно дифференцируемая функция, $Q_T = Q \times (0,T)$, $\Gamma_T = \partial Q \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, $\psi \in L_2(Q)$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что оператор $-A_R$ — сильно эллиптический.

Для того чтобы сформулировать условия сильной эллиптичности оператора $-A_R$, введем некоторые вспомогательные обозначения. Обозначим через G аддитивную абелеву группу, порожденную множеством M, а через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q \setminus \left(\bigcup\limits_{h\in G}(\partial Q + h)\right)$.

Определение 6.2. Множества Q_r будем называть подобластями, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r — разбиением множества Q.

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на непересекающиеся классы : будем считать, что подобласти Q_{r_1}, $Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если существует $h \in G$ такое, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Обозначим подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса ($s = 1, 2, ...$), а l — порядковый номер подобласти в s-ом классе. В силу ограниченности области Q каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и $N(s) \leqslant ([diamQ] + 1)^n$.

Для того чтобы сформулировать необходимые условия сильной эллиптичности в алгебраической форме, введем матрицы $R_{ijs}(x)$ $(x \in \overline{Q}_{s1})$ порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами:

$$r_{kl}^{ijs}(x) = \begin{cases} a_{ijh}(x + h_{sk}) & , \quad (h = h_{sl} - h_{sk} \in M) \\ 0 & , \quad (h_{sl} - h_{sk} \notin M). \end{cases} \tag{6.5}$$

В силу теоремы 9.1, [23], если оператор $-A_R$ сильно эллиптический, то для всех $s = 1, 2, \dots,\ x \in \overline{Q}_{s1}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijs}(x) + R_{ijs}^*(x))\xi_i\xi_j$$

положительно определены.

Пусть теперь $x \in \overline{Q}_{s1}$ — произвольная точка. Рассмотрим все точки $x^l \in \overline{Q}$ такие, что $x^l - x \in G$. Поскольку область Q ограниченная, множество $\{x^l\}$ состоит из конечного числа точек $I = I(s, x) \quad (I \geqslant N(s))$. Перенумеруем точки x^l так, что $x^l = x + h_{sl}$ для $l = 1, \dots, N = N(s)$, $x^1 = x$, где h_{sl} удовлетворяет условию $Q_{sl} = Q_{s1} + h_{sl}$. Введем матрицы $A_{ijs}(x)$ порядка $I \times I$ с элементами $a_{lk}^{ijs}(x)$ по формуле:

$$a_{lk}^{ijs}(x) = \begin{cases} a_{ijh}(x^l) & , \quad (h = x^k - x^l \in M), \\ 0 & , \quad (x^k - x^l \notin M). \end{cases}$$

В силу теоремы 9.2, [23], если для всех $s = 1, 2, \dots,\ x \in \overline{Q}_{s1}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{i,j=1}^{n} (A_{ijs}(x) + A_{ijs}^*(x))\xi_i\xi_j$$

положительно определены, то оператор $-A_R$ — сильно эллиптический.

Очевидно, если $I = N$, то матрица $R_{ijs}(x)$ равна матрице $A_{ijs}(x)$. Если $N < I$, то матрица $R_{ijs}(x)$ получается из матрицы A_{ijs} вычеркиванием последних $I - N$ строк и столбцов.

Определим решение задачи (6.2)–(6.4).

Определение 6.3. Будем называть функцию $u \in L_2(0, T; \mathring{H}^1(Q)(Q))$ обобщенным решением задачи (6.2)–(6.4), если для любой функции $v \in \{\mathcal{H}(Q_T) :$

$v|_{\Gamma_T} = 0, v|_{t=T} = 0\}$ выполнено интегральное тождество:

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T} (-u\overline{v}_t + \sum_{i,j=1}^{n} R_{ijQ} u_{x_j} \overline{v}_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} R_{iQ} u_{x_i} \overline{v} - R_{0Q} u\overline{v}) dxdt = \\ \int\limits_{Q_T} f(u)\overline{v}dxdt + \int\limits_{Q} \psi\overline{v}|_{t=0} dx.\end{gathered} \tag{6.6}$$

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{R}} : D(\mathcal{A}_{\mathcal{R}}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий в пространстве распределений $D'(Q)$ по формуле: $\mathcal{A}_{\mathcal{R}} u = A_R u$ $(u \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{R}}) = \{u \in \mathring{H}^1(Q)(Q) : \mathcal{A}_{\mathcal{R}} u \in\ L_2(Q)\})$.

Определение 6.4. Обобщенное решение задачи (6.2)–(6.4) u будем называть классическим операторным решением, если $u \in C([0,T]; L_2(Q)) \cup C^1((0,T); L_2(Q))$, $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{R}})$ для всех $0 < t < T$.

6.2. Существование и единственность

Для доказательства существования и единственности воспользуемся методами теории полугрупп. Приведем соответствующие определения.

Теорема 6.1. *Пусть оператор* $-A_R$ *сильно эллиптический,* $f \in C^1(R^1)$*,* $|f(y)| \leqslant M$*,* $|f'(y)| \leqslant M$*,* $0 < M < \infty$*,* $\psi \in D(A_R)$*. Тогда задача* (6.2)–(6.4) *имеет единственное классическое операторное решение.*

Доказательство. В силу теоремы 3.2 из [15] оператор A_R является генератором аналитической полугруппы. Следовательно, по теореме 1.5 гл.6 [22] задача (6.2)–(6.4) имеет единственное классическое операторное решение. □

6.3. Приближенные решения

Введем полуторалинейную форму в пространстве $\mathring{H}^1(Q)$:

$$a[u,v] = \sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijQ} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} - \sum_{i=1}^{n} (R_{iQ} u_{x_i}, v)_{L_2(Q)} - (R_{0Q} u, v)_{L_2(Q)}.$$

В силу сильной эллиптичности оператора $-A_R$ для формы a выполнено неравенство:

$$\operatorname{Re} a[u,u] \geqslant c_1 \|u\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}. \tag{6.7}$$

для любой $u \in \mathring{H}^1(Q)(Q)$.

Пусть u — классическое операторное решение задачи (6.2)–(6.4). Тогда u удовлетворяет задаче:

$$(u_t, v)_{L_2(Q)} + a[u,v] = (f(u), v)_{L_2(Q)}, \tag{6.8}$$

$$(u|_{t=0}, v)_{L_2(Q)} = (\psi, v)_{L_2(Q)} \tag{6.9}$$

для любой $v \in \mathring{H}^1(Q)$.

В пространстве $\mathring{H}^1(Q)$ выберем базис φ_k. Множество линейных комбинаций $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k$ образует конечномерное подпространство $H^N \subset \mathring{H}^1(Q)$. Приближенное решение будем искать в виде:

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(t) \varphi_k(x),$$

где коэффициенты α_k определяются из задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k^{'}(t)\varphi_k, \varphi_i)_{L_2(Q)} + a[\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(t)\varphi_k, \varphi_i] = (f(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(t)\varphi_k), \varphi_i)_{L_2(Q)}, \tag{6.10}$$

$$(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(0)\varphi_k - \psi, \varphi_i)_{L_2(Q)} = 0, \tag{6.11}$$

$$i = 1, \ldots, N.$$

Задачу Коши (6.10)–(6.11) можно переписать в матричном виде:

$$B\vec{\alpha}' + A\vec{\alpha} = F(\vec{\alpha}), \tag{6.12}$$

$$B\vec{\alpha}(0) = \vec{\alpha}_0, \tag{6.13}$$

где

$$\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_N(t))^T,$$
$$F(\vec{\alpha}) = ((f(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k)\varphi_1), \ldots, (f(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k)\varphi_N))^T,$$
$$\vec{\alpha}_0 = ((\psi, \varphi_1), \ldots, (\psi, \varphi_N))^T,$$
$$B = ((\varphi_i, \varphi_j)_{L_2(Q)}),$$
$$A = (a[\varphi_i, \varphi_j]).$$

Поскольку φ_k являются базисом, матрица B невырождена. А в силу предположения относительно f правая часть уравнения (6.12) ограничена. Следовательно, задача Коши (6.12)–(6.13) имеет единственное решение при $t \in [0, T]$.

Получим априорную оценку для приближенного решения $u^N(x,t)$. Для этого умножим каждое уравнение (6.10) на $\alpha_i(t)$ и сложим результаты по $i = 1, \ldots, N$. Получим

$$(u_t^N, u^N)_{L_2(Q)} + a[u^N, u^N] = (f(u^N), u^N)_{L_2(Q)}. \tag{6.14}$$

Интегрируя по t, имеем

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\|u^N\|^2_{L_2(Q)}(t) + \int\limits_0^t a[u^N, u^N]dt' = \\ \int\limits_0^t (f(u^N), u^N)dt' + \tfrac{1}{2}\|u^N\|^2_{L_2(Q)}(0). \end{gathered} \tag{6.15}$$

Используя неравенство (6.7) и неравенство Гельдера, получаем

$$\|u^N\|^2_{L_2(Q)}(t) + \int\limits_0^t \|u^N\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}(t')dt' \leqslant$$

$$c_2((\int\limits_0^t f(u^N)dt')^{1/2} \cdot (\int\limits_0^t \|u^N\|^2_{L_2(Q)}(t')dt')^{1/2} + \|\psi\|^2_{L_2(Q)}).$$

Из последнего соотношения в силу неравенства

$$|ab| \leqslant a^2(4\varepsilon)^{-1} + \varepsilon b^2$$

получаем

$$\|u^N\|^2_{L_2(Q)}(t) + \int\limits_0^t \|u^N\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)(Q)}(t')dt' \leqslant c_3(1 + \|\psi\|^2_{L_2(Q)}).$$

Таким образом, имеем следующую априорную оценку:

$$\max_{t\in[0,T]} \|u^N\|^2_{L_2(Q)}(t) + \int\limits_0^T \|u^N\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)(Q)}(t')dt' \leqslant c_4(1 + \|\psi\|^2_{L_2(Q)}). \qquad (6.16)$$

В силу (6.16) из последовательности $\{u^N\}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к u слабо в $L_2(0, T; \overset{\circ}{H}{}^1(Q))$.

Замечание 6.1. В дальнейшем покажем, что u есть единственное решение задачи (6.2)–(6.4), следовательно, и сама u^N будет сходиться к u.

В силу (6.14) для любой функции $v \in \{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)(Q),\ v|_{\Gamma_T} = 0,\ v|_{t=T} = 0\}$ верно следующее равенство:

$$\int\limits_0^T(-(u^N, v_t)_{L_2(Q)} + a[u^N, v])dt =$$
$$\int\limits_0^T(f(u^N), v)_{L_2(Q)}dt + (\psi^N, v|_{t=0})_{L_2(Q)}, \qquad (6.17)$$

где $\psi^N = \sum\limits_{k=1}^{N} (\psi, \varphi_k)_{L_2(Q)} \varphi_k$.

Покажем, что в (6.17) можно перейти к пределу при $N \to \infty$. В силу слабой сходимости в $L_2(0, T; \mathring{H}^1(Q))$ последовательности u^N к u, нетривиальным является предельный переход только в нелинейном члене. В силу предположений относительно функции f имеем

$$\|f(u^N)\|_{L_2(Q_T)} \leqslant (\operatorname{mes} Q_T M)^{1/2}.$$

Поэтому из $\{f(u^N)\}$ можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся в $L_2(Q_T)$. Без ограничения общности можно считать, что и сама $f(u^N)$ слабо сходится к $f(u)$.

Переходя к пределу в (6.10) при $N \to \infty$, получаем, что u^N сходится к обобщенному решению задачи (6.2)–(6.4) слабо в $L_2(0, T; \mathring{H}^1(Q))$.

Пример 6.1. Пусть $Q = (0, 2) \times (0, 1)$. Рассмотрим дифференциально-разностный оператор:

$$A_R = \Delta R u,$$

$$R = u(x_1, x_2) + \alpha u(x_1 + 1, x_2) + \beta u(x_1 - 1, x_2),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Предположим, что выполнено соотношение $|\alpha + \beta| < 2$, тогда оператор $-A_R$ будет сильно эллиптическим. Рассмотрим задачу:

$$u_t(x, t) - \Delta R u(x, t) = \cos(u(x, t)), \quad ((x, t) \in Q_T)$$

$$u|_{\Gamma_T} = 0,$$

$$u|_{t=0} = (x_1 x_2 (2 - x_1)(1 - x_2))^2, \quad (x \in Q).$$

Поскольку начальная функция $u|_{t=0}$ принадлежит пространству $\mathring{H}^2(Q)$, следовательно, согласно лемме 3.2 [24] принадлежит и $D(\mathcal{A}_{\mathcal{R}})$. Таким образом, для рассматриваемого примера существует классическое операторное решение, и приближенные решения получаемые по методу, предложенному в настоящей работе, сходятся к обобщенному решению.

Упражнение 6.1. Реализовать предложенную процедуру для получения численных решений задачи (6.2)–(6.4) на ЭВМ.

Упражнение 6.2. Используя программу, разработанную в упражнении 6.1, получить приближенные решения для примера 6.1 и оценить погрешность.

Глава 7

Функционально-дифференциальные уравнения

7.1. Уравнение теплопроводности

Первым примером рассмотрим простейшее уравнение — уравнение теплопроводности.

Нам понадобится одна лемма о вложении интерполяционных пространств. Рассмотрим гильбертово пространство H_2, относительного которого будем предполагать, что вложение $H_2 \subset H$ плотно и непрерывно.

Лемма 7.1. *Предположим, что пространство H_2 непрерывно вложено в пространство H_1. Тогда имеет место непрерывное вложение $[H_2, H]_{1/2} \subset [H_1; H]_{1/2}$.*

Доказательство. Для любых $t > 0$ и $\psi \in H$ определим функционал

$$K(t, \psi; H_1, H) = \inf_{\substack{\psi_0 + \psi_1 = \psi, \\ \psi_0 \in H_1,\ \psi_1 \in H}} (\|\psi_0\|_{H_1} + t\|\psi_1\|_H).$$

В силу теоремы 15.1 [10, глава 1] имеет место равенство:

$$[H_1; H]_{1/2} = \left\{ \psi \in H : \int\limits_0^\infty t^{-2} K^2(t, \psi; H_1, H) dt < \infty \right\}.$$

В силу вложения $H_2 \subset H_1$ имеет место оценка функции $K(t, \varphi; H_1, H)$ при $t > 0$

$$K(t, \varphi; H_1, H) \leqslant K(t, \varphi; H_2, H).$$

Поэтому, если $t^{-1}K(t, \varphi; H_2, H) \in L_2(0, \infty)$, то и $t^{-1}K(t, \varphi; H_1, H) \in L_2(0, \infty)$. Следовательно, $[H_2, H]_{1/2} \subset [H_1; H]_{1/2}$. $\square$

Рассмотрим в качестве примера уравнение теплопроводности. Необходимые и достаточные условия сильной разрешимости первой смешанной задачи для такого уравнения изучались в работах [8, 9, 16].

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей. Через Q_T обозначим ограниченный цилиндр $Q_T = Q \times (0, T)$. Мы будем обозначать через $W_2^k(Q)$ пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(Q)$ с нормой

$$\|u\|_{W_2^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int\limits_Q |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Через $\mathring{W}_2^k(Q)$ обозначим замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $\dot{C}^\infty(Q)$ в $W_2^k(Q)$, а через $W_2^{-k}(Q)$ обозначим пространство, сопряженное к $\mathring{W}_2^k(Q)$.

Рассмотрим первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности:

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad ((x, t) \in Q_T) \tag{7.1}$$

с краевым условием

$$u|_{\partial Q\times(0,T)} = 0 \tag{7.2}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (x \in Q). \tag{7.3}$$

В качестве пространства H возьмем пространство $L_2(Q)$, за пространство V примем пространство $\mathring{W}_2^1(Q)$, соответственно $V' = W_2^{-1}(Q)$. Оператор $A : \mathring{W}_2^1(Q) \to W_2^{-1}(Q)$ определим по формуле $Au = -\Delta u$, где производные понимаются в смысле обобщенные производных.

Оператор A будет $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным. Действительно, для любой $u \in \dot{C}^\infty(Q)$ имеет место

$$\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle = -\operatorname{Re}(\Delta u, u)_{L_2(Q)} = \|\nabla u\|^2_{L_2(Q)} \geqslant c_1\|u\|^2_{\mathring{W}_2^1(Q)}.$$

Задачу (7.1)–(7.3) можно переформулировать, как задачу (2.4), (2.5).

Очевидно, $\mathring{W}_2^2(Q)$ непрерывно вложено в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — неограниченный оператор, построенный по оператору A. В силу теоремы 11.6 [10, глава 1] имеет место равенство:

$$[\mathring{W}_2^2(Q); L_2(Q)]_{1/2} = \mathring{W}_2^1(Q). \tag{7.4}$$

Следовательно, согласно лемме 7.1 имеем $\mathring{W}_2^1(Q) \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}); L_2(Q)]_{1/2}$, и это вложение непрерывно. В силу теоремы 5.5 имеем следующий результат. Задача (7.1)–(7.3) имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.

Аналогично можно исследовать первую краевую задачу и для параболического уравнения с сильно эллиптическим оператором $2m$-го порядка.

Упражнение 7.1. Получить аналогичные результаты для параболического уравнения бигармоническим оператором в качестве эллиптической части.

7.2. Операторно-дифференциальные уравнения

Рассмотрим применение теоремы 5.5 для параболических функционально-дифференциальных уравнений. Как уже отмечалось, такие уравнения обладают рядом принципиально новых свойств, например, гладкость сильных решений может нарушаться внутри цилиндрической области. Тем не менее оказывается, что необходимое и достаточное условие сильной разрешимости для параболических функционально-дифференциальных уравнений совпадает с критерием сильной разрешимости уравнения теплопроводности.

Рассмотрим ограниченный оператор $A_B : \mathring{W}_2^1(Q) \to W_2^{-1}(Q)$, действующий по формуле $A_B u = -\operatorname{div}(B\nabla u)$, где $B : L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$ ограниченный оператор. Мы обозначили $L_2^n(Q) = \prod\limits_{k=1}^{n} L_2(Q)$, $\mathring{W}_2^{1,n}(Q) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathring{W}_2^1(Q)$, $W_2^{1,n}(Q) = \prod\limits_{k=1}^{n} W_2^1(Q)$. Относительно оператора B будем предполагать, что выполнены следующие условия.

Условие 7.1. Оператор B ограниченно отображает пространство $\mathring{W}_2^{1,n}(Q)$ в пространство $W_2^{1,n}(Q)$.

Условие 7.2. Оператор A_B является $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным.

Через $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ обозначим неограниченный оператор, построенный по оператору A_B.

Рассмотрим первую смешанную задачу для параболического операторно-дифференциального уравнения:

$$u_t(x,t) + \mathcal{A}_\mathcal{B} u(x,t) = f(x,t) \qquad ((x,t) \in Q_T) \tag{7.5}$$

с краевым условием

$$u|_{\partial Q \times (0,T)} = 0 \tag{7.6}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (x \in Q). \tag{7.7}$$

Задачу (7.5)–(7.7) можно рассматривать, как задачу (2.4), (2.5).

Заметим, что из выполнения условия 7.2 для оператора B следует выполнение условия 7.2 и для оператора B^*. Сопряженным к оператору $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ будет оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*}$. Действительно, для любых $u, v \in \dot{C}^\infty(Q)$

$$(\mathcal{A}_{\mathcal{B}} u, v)_{L_2(Q)} = -(B\nabla u, \nabla v)_{L_2^n(Q)} = (u, \mathcal{A}_{\mathcal{B}^*} v)_{L_2(Q)}. \tag{7.8}$$

Так как $\dot{C}^\infty(Q)$ всюду плотно в $\mathring{W}_2^1(Q)$, тождества (7.8) справедливы для любых $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}})$, $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*})$. Следовательно, $\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*} \subset (\mathcal{A}_{\mathcal{B}})^*$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{B}} \subset (\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*})^*$. Однако в силу $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности операторов $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*}$, $0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}) \cup \sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*})$, то по лемме 13 [3, глава 14, раздел 6] о сопряженных операторах $(\mathcal{A}_{\mathcal{B}})^* = \mathcal{A}_{\mathcal{B}^*}$.

Поскольку оператор B ограниченно отображает $\mathring{W}_2^{1,n}(Q)$ в $W_2^{1,n}(Q)$, имеет место непрерывное вложение $\mathring{W}_2^2(Q) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}})$. Соответственно $\mathring{W}_2^2(Q)$ непрерывно вложено в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*})$. В силу леммы 7.1 имеют место непрерывные вложения $\mathring{W}_2^1(Q) \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}); L_2(Q)]_{1/2}$ и $\mathring{W}_2^1(Q) \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*});\ L_2(Q)]_{1/2}$.

Таким образом, для задачи (7.5)–(7.7) выполнены условия теоремы 5.5, и мы имеем следующий результат.

Теорема 7.1. *Пусть оператор B удовлетворяет условиям* 7.1 *и* 7.2*, а оператор B^* удовлетворяет условию* 7.1*.*

Тогда для любого $f \in L_2(Q \times (0,T))$ задача (7.5)–(7.7) *имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.*

7.3. Дифференциально-разностные уравнения

Приведем примеры операторов B, для которых выполнены условия 7.1 и 7.2. Покажем, что для важных классов функционально-дифференциальных уравнений применима теорема 7.1.

Сделаем дополнительные предположения относительно области Q. Пусть граница области Q представляется следующим объединением: $\partial Q = \bigcup\limits_i \overline{M_i}$ $(i = 1, \dots, N_0)$, где M_i — $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, которые являются открытыми и связными в топологии ∂Q. Пусть в окрестности каждой точки $g \in \partial Q \setminus \bigcup\limits_i M_i$ область Q диффеоморфна n-мерному двугранному углу, если $n \geqslant 3$, и плоскому углу, если $n = 2$.

Введем ограниченные разностные операторы $R_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ и $R_{ijQ} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ по формулам:

$$R_{ij}u(x) = \sum_{h \in M} a_{ijh}(x)u(x+h), \quad R_{ijQ}v = P_Q R_{ij} I_Q v.$$

Здесь $M \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество векторов с целочисленными координатами; $a_{ijh} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции; I_Q — оператор продолжения функций из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$; P_Q — оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q.

В качестве оператора B возьмем оператор $R : L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$, введенный по формуле:

$$(Ru)_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ijQ} u_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)^T$.

Будем рассматривать дифференциально-разностный оператор A_R по формуле:

$$A_R = -\operatorname{div}(R \nabla u).$$

Соответственно введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_\mathcal{R} : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$.

Для того чтобы сформулировать условия $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности оператора A_R, следуя [23], введем некоторые вспомогательные обозначения. Обозначим через G аддитивную абелеву группу, порожденную множеством M, а через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q \setminus \left(\bigcup\limits_{h \in G} (\partial Q + h) \right)$.

Определение 7.1. Множества Q_r будем называть *подобластями*, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r — *разбиением* множества Q.

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на непересекающиеся классы: будем считать, что подобласти Q_{r_1}, $Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если существует $h \in G$ такое, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Обозначим подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса ($s = 1, 2, ...$), а l — порядковый номер подобласти в s-ом классе. В силу ограниченности области Q каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и $N(s) \leqslant ([\operatorname{diam} Q] + 1)^n$.

Для того чтобы сформулировать необходимые условия $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности в алгебраической форме, введем матрицы $R_{ijs}(x)$ $(x \in \overline{Q}_{s1})$ порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами:

$$r_{kl}^{ijs}(x) = \begin{cases} a_{ijh}(x + h_{sk}), & h = h_{sl} - h_{sk} \in M, \\ 0, & h_{sl} - h_{sk} \notin M. \end{cases}$$

В силу теоремы 9.1 [23, глава 2], если оператор A_R является $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным, то для всех $s = 1, 2, \ldots,$ $x \in \overline{Q}_{s1}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijs}(x) + R_{ijs}^*(x))\xi_i \xi_j$$

положительно определены.

Пусть теперь $x \in \overline{Q}_{s1}$ — произвольная точка. Рассмотрим все точки $x^l \in \overline{Q}$ такие, что $x^l - x \in G$. Поскольку область Q ограниченная, множество $\{x^l\}$ состоит из конечного числа точек $I = I(s, x) \quad (I \geqslant N(s))$. Перенумеруем точки x^l так, что $x^l = x + h_{sl}$ для $l = 1, \ldots, N = N(s)$, $x^1 = x$, где h_{sl} удовлетворяет условию $Q_{sl} = Q_{s1} + h_{sl}$.

Введем матрицы $A_{ijs}(x)$ порядка $I \times I$ с элементами $a_{lk}^{ijs}(x)$ по формуле:

$$a_{lk}^{ijs}(x) = \begin{cases} a_{ijh}(x^l), & h = x^k - x^l \in M, \\ 0, & x^k - x^l \notin M. \end{cases}$$

В силу теоремы 9.2 [23, глава 2], если для всех $s = 1, 2, \ldots,\ x \in \overline{Q}_{s1}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{i,j=1}^{n} (A_{ijs}(x) + A_{ijs}^*(x))\xi_i\xi_j$$

положительно определены, то оператор A_R является $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным.

Очевидно, если $I = N$, то матрица $R_{ijs}(x)$ равна матрице $A_{ijs}(x)$. Если $N < I$, то матрица $R_{ijs}(x)$ получается из матрицы A_{ijs} вычеркиванием последних $I - N$ строк и столбцов.

Рассмотрим параболическое дифференциально-разностное уравнение:

$$u_t(x,t) + \mathcal{A}_{\mathcal{R}} u(x,t) = f(x,t) \qquad ((x,t) \in Q_T) \tag{7.9}$$

с краевым условием

$$u|_{\partial Q \times (0,T)} = 0 \tag{7.10}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (x \in Q). \tag{7.11}$$

Теорема 7.2. *Пусть выполнено условие $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности для оператора $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$.*

Тогда задача (7.9)–(7.11) имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.

Доказательство. Покажем, что оператор R удовлетворяет условиям 7.1 и 7.2. Действительно, в силу леммы 8.13 [23, глава 2] оператор R непрерывно отображает $\mathring{W}_2^{1,n}(Q)$ в $W_2^{1,n}(Q)$. А по условию теоремы оператор $\mathcal{A}_\mathcal{R}$ является $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным. Аналогично R^* удовлетворяет условию 7.1.

Таким образом, к задаче (7.9)–(7.11) применима теорема 7.1: $\square$

Пример 7.1. Рассмотрим задачу (7.9)–(7.11), предполагая, что $Q = (0, \frac{4}{3}) \times (0, \frac{4}{3})$,

$$A_R = -\operatorname{div}(R_Q \nabla u),$$

$R_Q = P_Q R I_Q$, $Ru(x) = u(x) + au(x_1+1, x_2+1) + au(x_1-1, x_2-1)$, $0 < a < 1$. Очевидно, разбиение $\mathcal{R}$ области Q состоит из двух классов подобластей:

1. $Q_{11} = \left(0, \dfrac{1}{3}\right) \times \left(0, \dfrac{1}{3}\right)$, $Q_{12} = \left(1, \dfrac{4}{3}\right) \times \left(1, \dfrac{4}{3}\right)$
2. $Q_{21} = Q \setminus (\overline{Q}_{11} \cup \overline{Q}_{12})$.

Введем множество $\mathcal{K} \subset \partial Q$, состоящее из из четырех точек:

$$g^1 = \left(\frac{1}{3}, 0\right), \qquad g^2 = \left(\frac{4}{3}, 1\right),$$

$$g^3 = \left(0, \frac{1}{3}\right), \qquad g^4 = \left(1, \frac{4}{3}\right).$$

Матрицы $A_s(x)$ $(x \in \overline{Q}_{s1},\ s = 1, 2)$ имеют вид:

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \qquad (x \in \overline{Q}_{11}),$$

$$A_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \ (x \in \overline{Q}_{21} \cap \mathcal{K}),$$

$$A_2(x) = (1) \ (x \in \overline{Q}_{21} \setminus \mathcal{K}).$$

Таким образом, матрицы $A_s(x)(\xi_1^2 + \xi_2^2)$ $(x \in \overline{Q}_{s1}; s = 1, 2)$ положительно определены. Следовательно, оператор A_R является $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным.

Согласно теореме 7.2 задача (7.9)–(7.11) имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.

Однако в [23] доказано, что $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R}) \not\subset W_2^2(Q)$. Используя этот результат, в работе [15] было показано, что имеет место нарушение гладкости сильных решений на границе соседних подобластей $Q_{s_1 l_1} \times (0, T)$ и $Q_{s_2 l_2} \times (0, T)$ и вблизи множества $\mathcal{K} \times (0, T)$. В этом примере область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$ не может быть описана в терминах пространств Соболева. Тем не менее, используя подходы, предложенные в настоящей статье, имеем описание пространства начальных данных в виде пространства Соболева.

7.4. Уравнения с растяжением и сжатием аргументов

Введем теперь операторы растяжения и сжатия $T_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ и $T_{ijQ} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ по формулам:

$$T_{ij}u(x) = \sum_{l \in N} a_{ijl} u(q^{-l}x), \quad T_{ijQ}v = P_Q T_{ij} I_Q v,$$

где $N \subset \mathbb{N}$ — конечное множество целых чисел; $a_{ijl} \in \mathbb{C}$; $q > 1$; операторы I_Q и P_Q определены так же, как и в разделе 7.3.

Введем оператор $T : L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$ по формуле:

$$(Tu)_i = \sum_{j=1}^{n} T_{ijQ} u_j \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)^T$. Возьмем в качестве оператора B оператор T и рассмотрим функционально-дифференциальный оператор A_T с растяжением и сжатием аргументов. Соответственно введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_\mathcal{T} : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{T}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$.

Обозначим $t_{ij}(\lambda) = \sum\limits_{l \in N} a_{ijl}\lambda^l$. В силу теоремы 1, [13], условие

$$\sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}(\lambda)\xi_i\xi_j > 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = q^{n/2}, 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n) \tag{7.12}$$

является достаточным для $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности оператора $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$. Если дополнительно предположить, что область Q удовлетворяет условию

$$\overline{Q} \subset qQ, \tag{7.13}$$

то в силу теоремы 2 [13] условие (7.12) является и необходимым для $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности оператора $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$.

Упражнение 7.2. Привести примеры областей, удовлетворяющих условию 7.13.

Рассмотрим параболическое функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и сжатием аргументов:

$$u_t(x,t) + \mathcal{A}_{\mathcal{T}}u(x,t) + Cu(x,t) = f(x,t) \qquad ((x,t) \in Q_T) \tag{7.14}$$

с краевым условием

$$u|_{\partial Q \times (0,T)} = 0 \tag{7.15}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (x \in Q). \tag{7.16}$$

Теорема 7.3. *Пусть для оператора T выполнено условие* (7.12). *Тогда задача* (7.14)–(7.16) *имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.*

Доказательство. Покажем, что операторы T, T^* удовлетворяют условию 7.1. Легко видеть, что операторы T, T^* ограниченно отображают $\mathring{W}_2^{1,n}(Q)$ в $W_2^{1,n}(Q)$. По условию теоремы $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{T}^*}$ будут $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивными.

Таким образом, к задаче (7.14)–(7.16) применима теорема 7.1. $\square$

Пример 7.2. Пусть $Q = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу:

$$u_t(x,t) - \Delta(u(x,t) + a_1 u(q^{-1}x,t)) = f(x,t) \quad ((x,t) \in Q_T), \tag{7.17}$$

$$u|_{\partial Q \times (0,T)} = 0, \tag{7.18}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (x \in Q), \tag{7.19}$$

где $q > 1$, $a_1 \in \mathbb{R}$.

В данном примере условие (7.12) означает $|a_1| \leqslant q^{1-n/2}$. По теореме 7.3 задача (7.17)–(7.19) имеет сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.

Глава 8

Нелокальные задачи

8.1. Нелокальные условия без подхода носителей нелокальных членов к границе

Рассмотрим нелокальную задачу для параболического уравнения:

$$u_t(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t)\right) + A_1 u(\cdot,t) = f(x,t), \quad ((x,t)\in Q_T) \tag{8.1}$$

с нелокальным условием

$$(u(x,t) + B_1 u(\cdot,t))_{|_{\Gamma_T}} + B_2 u(\cdot,t) = 0, \quad ((x,t)\in \Gamma_T) \tag{8.2}$$

и начальным условием

$$u_{|_{t=0}} = \varphi(x), \qquad (x\in Q). \tag{8.3}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$; $Q_T = Q \times (0,T)$, $\Gamma_T = \partial Q \times (0,T)$, $0 < T < \infty$; $a_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ — вещественные функции; $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0$, для $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$; оператор $A_1 : H^1(Q) \to L_2(Q)$ ограничен. Операторы B_1 и B_2 удовлетворяют следующим условиям.

Условие 8.1. $B_1 : L_2(Q) \to L_2(Q)$ — линейный ограниченный оператор, а его сужение $B_1 : H^2(Q) \to H^2(Q)$ — также ограниченный оператор, при этом существует $\delta > 0$ такое, что

$$\|B_1 u\|_{L_2(Q)} \leqslant c_1 \|u\|_{L_2(Q_\delta)}, \qquad (u \in L_2(Q))$$

$$\|B_1 u\|_{H^2(Q)} \leqslant c_2 \|u\|_{H^2(Q_\delta)}, \qquad (u \in H^2(Q))$$

где $Q_\delta = \{x \in Q : \varrho(x, \partial Q) > \delta\}$; $c_1, c_2 > 0$ не зависят от u.

Условие 8.2. $B_2 : L_2(Q) \to L_2(\partial Q)$ — линейный ограниченный оператор, а его сужение $B_2 : H^{3/2}(Q) \to H^{3/2}(\partial Q)$ — также ограниченный оператор.

Введем неограниченный оператор $\mathcal{L}_\gamma : \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, по формуле $\mathcal{L}_\gamma u = (A_0 + A_1)u$, $(u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma))$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma) = \{u \in H^2(Q) : Bu = 0\}$, где $A_0 u = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)\right)$, $Bu = (u + B_1 u)_{|\partial Q} + B_2 u$.

В работе [23] получен следующий результат о спектре оператора $\mathcal{L}_\gamma$.

Теорема 8.1. *Пусть выполнены условия 8.1 и 8.2, тогда:*

(a) Спектр оператора $\mathcal{L}_\gamma$ дискретный, и для для $\lambda \notin \sigma(\mathcal{L}_\gamma)$ резольвента $R(\lambda; \mathcal{L}_\gamma)$ компактный оператор.

(b) Для каждого $0 < \varepsilon < \pi$ существует $q > 0$ такое, что $\sigma(\mathcal{L}_\gamma) \subset \Omega_{\varepsilon,q} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < q, |\arg \lambda| < \varepsilon\}$.

(c) Для $\lambda \notin \Omega_{\varepsilon,q}$ имеет место оценка на резольвенту

$$\|R(\lambda; \mathcal{L}_\gamma)\| \leqslant \frac{c_3}{|\lambda|}, \tag{8.4}$$

где $c_3 > 0$ не зависит от λ.

Доказательство. Утверждения (a) и (b) следуют из теоремы 21.3, гл. 5, [23]. Пусть $f \in L_2(Q)$, из теоремы 21.2, гл. 5, [23] следует, что для $\lambda \notin \Omega_{\varepsilon,q}$

имеет место следующая оценка:

$$\left(\|R(\lambda;\mathcal{L}_\gamma)f\|^2_{H^2(Q)} + |\lambda|^2\|R(\lambda;\mathcal{L}_\gamma)f\|^2_{L_2(Q)}\right)^{1/2} \leqslant c_4\|f\|_{L_2(Q)}.$$

Из этой оценки следует оценка (8.4). $\square$

Для исследования сильной разрешимости задачи (8.1)–(8.3) воспользуемся теорией полугрупп.

В силу теоремы 8.1 и критерия п.1, гл 1 [21] получаем следующий результат.

Теорема 8.2. *Пусть выполнены условия 8.1 и 8.2. Тогда оператор* $-\mathcal{L}_\gamma$ *порождает аналитическую полугруппу* $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$.

Перепишем задачу (8.1)–(8.3) в виде абстрактной задачи Коши в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$:

$$u'(t) + \mathcal{L}_\gamma u(t) = f(t), \quad t \in (0,T) \tag{8.5}$$

$$u(0) = \varphi, \tag{8.6}$$

где $f \in L_2(0,T;L_2(Q))$, $\varphi \in L_2(Q)$.

Определение 8.1. Функция $u \in \mathcal{W}(\mathcal{L}_\gamma)$ называется сильным решением задачи (8.1)–(8.3), если u удовлетворяет почти всюду уравнению (8.1) и удовлетворяет условию (8.3).

Теорема 8.3. *Пусть выполнены условия 8.1 и 8.2. Тогда для всех* $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma)$ *задача (8.1)–(8.3) имеет единственное сильное решение* $u \in \mathcal{W}(\mathcal{L}_\gamma)$. *Более того, это решение представляется по формуле:*

$$u(x,t) = T_t\varphi(x) + \int\limits_0^t T_{t-s}f(x,s)ds, \tag{8.7}$$

где $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ *— аналитическая полугруппа, порожденная оператором* $-\mathcal{L}_\gamma$.

Доказательство. В силу теоремы 3.7, гл. 1 [21] задача (8.5), (8.6) имеет единственное сильное решение, представленное формулой (8.7) тогда и только тогда, когда выполнено следующее неравенство:

$$\int\limits_0^T \|\mathcal{L}_\gamma T_t \varphi\|^2_{L_2(Q)} dt < \infty. \tag{8.8}$$

Поскольку $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma)$, то $\mathcal{L}_\gamma T_t \varphi = T_t \mathcal{L}_\gamma \varphi$, и имеем

$$\int\limits_0^T \|\mathcal{L}_\gamma T_t \varphi\|^2_{L_2(Q)} dt = \int\limits_0^T \|T_t \mathcal{L}_\gamma \varphi\|^2_{L_2(Q)} dt \leqslant {}_5\|\mathcal{L}_\gamma \varphi\|^2_{L_2(Q)} < \infty.$$

□

Вопрос о гладкости сильных решений задачи (8.1)–(8.3) рассмотрим в § 9.1.

Пример 8.1. Рассмотрим уравнение:

$$u_t(x,t) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t)\right) +$$

$$\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t) + c(x)u(x,t) = f(x,t), \quad ((x,t) \in Q_T) \tag{8.9}$$

с нелокальными условиями

$$\sum_{s=0}^S \gamma_s(x) u(\omega_s(x),t)|_{\partial Q \times (0,T)} = 0 \tag{8.10}$$

и с начальным условием

$$u_{|_{t=0}} = \varphi(x), \qquad (x \in Q) \tag{8.11}$$

где $a_{ij}, b_i, c, \gamma_s \in C^\infty(\overline{Q})$ — вещественные функции; ω_s — бесконечно дифференцируемое невырожденное отображение некоторой окрестности Γ границы ∂Q на $\omega_s(\Gamma)$ так, что $\overline{\omega_s(\Gamma)} \subset Q$ при $s > 0$, а $\omega_0(x) = x$, $\gamma_0(x) = 1$.

Как показано в примере 21.1, гл. 5 [23], нелокальные условия (8.10) можно представить в виде (8.2) с $B_2 = 0$.

Определим оператор A_1 по формуле $A_1 u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + c(x)u(x)$. Таким образом, можем рассматривать задачу (8.9)–(8.11) как частный случай задачи (8.1)–(8.3). В силу теоремы 8.3 задача (8.9)–(8.11) имеет единственное сильное решение для всех $f \in L_2(Q_T)$ и $\varphi \in H^2(Q)$ таких, что $\sum\limits_{s=0}^{S} \gamma_s(x)\varphi(\omega_s(x))|_{\partial Q} = 0$.

Упражнение 8.1. Привести примеры конкретных уравнений, соответствующих примеру 8.1.

8.2. Нелокальные условия в цилиндре

Рассмотрим нелокальную задачу для параболического уравнения:

$$u_t(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x,t) \right) + A_1 u(\cdot, t) = f(x,t), \quad ((x,t) \in Q_T) \tag{8.12}$$

с нелокальными условиями

$$(u(x,t) + B_1^\mu u(\cdot,t))|_{\{x_1 = s_\mu\} \times G \times (0,T)} + B_2^\mu(\cdot,t)u = 0,$$

$$((x',t) \in G \times (0,T); \mu = 1, 2) \tag{8.13}$$

$$u|_{[0,d] \times \partial G \times (0,T)} = 0$$

и начальным условием

$$u_{|_{t=0}} = \varphi(x). \qquad (x \in Q) \tag{8.14}$$

Здесь $Q = (0,d) \times G$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$; $Q_T = Q \times (0,T)$ $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x' =$

$(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $s_1 = 0$, $s_2 = d$; $a_{ij} = a_{ji} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественные функции; $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0$, для $x \in \overline{Q}$, $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$; оператор $A_1 : H^1(Q) \to L_2(Q)$ ограничен; операторы B_1^μ, B_2^μ удовлетворяют условиям 8.3, 8.4. Обозначим через $H_0^k(Q)$ и $H_0^k(G)$ $k \geqslant 1$ подпространства функций из $H^k(Q)$ и $H^k(G)$ таких, что следы соответственно на $[0, d] \times \partial Q$ и на ∂G равны нулю.

Условие 8.3. $B_1^\mu : L_2(Q) \to L_2(Q)$ — линейные ограниченные операторы, а сужения $B_1^\mu : H_0^2(Q) \to H_0^2(Q)$ — также ограниченные операторы, при этом существует $\delta > 0$ такое, что

$$\|B_1^\mu u\|_{L_2(Q)} \leqslant c_1 \|u\|_{L_2(\tilde{Q}_\delta)}, \qquad (u \in L_2(Q))$$

$$\|B_1^\mu u\|_{H^2(Q)} \leqslant c_2 \|u\|_{H^2(\tilde{Q}_\delta)}, \qquad (u \in H^2(Q))$$

где $\tilde{Q}_\delta = (\delta; d - \delta) \times G$ $\delta > 0$; $c_1, c_2 > 0$ не зависят от u.

Условие 8.4. $B_2^\mu : L_2(Q) \to L_2(G)$ — линейные ограниченные операторы, а сужения $B_2^\mu : H_0^{3/2}(Q) \to H_0^{3/2}(G)$ — также ограниченные операторы.

Введем неограниченный оператор $\mathcal{L}_\gamma : \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, по формуле $\mathcal{L}_\gamma u = (A_0 + A_1)u$, $(u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma))$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma) = \{u \in H_0^2(Q) : B^\mu u = 0\}$, где $A_0 u = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)\Big)$, $B^\mu u = (u + B_1^\mu u)_{|x_1 = s_\mu} + B_2^\mu u$.

В работе [23] получен следующий результат о спектре оператора $\mathcal{L}_\gamma$.

Теорема 8.4. *Пусть выполнены условия 8.3 и 8.4, тогда:*

(a) Спектр оператора $\mathcal{L}_\gamma$ дискретный, и для для $\lambda \notin \sigma(\mathcal{L}_\gamma)$ резольвента $R(\lambda; \mathcal{L}_\gamma)$ компактный оператор.

(b) Для каждого $0 < \varepsilon < \pi$ существует $q > 0$ такое, что $\sigma(\mathcal{L}_\gamma) \subset \Omega_{\varepsilon,q} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < q, |\arg \lambda| < \varepsilon\}$.

(c) Для $\lambda \notin \Omega_{\varepsilon,q}$ имеет место оценка на резольвенту

$$\|R(\lambda;\mathcal{L}_\gamma)\| \leqslant \frac{c_3}{|\lambda|}, \tag{8.15}$$

где $c_3 > 0$ не зависит от λ.

Доказательство. Утверждения (a) и (b) следуют из теоремы 22.2, гл. 5 [23]. Пусть $f \in L_2(Q)$, из доказательства теоремы 22.1, гл. 5 [23] следует, что для $\lambda \notin \Omega_{\varepsilon,q}$ имеет место следующая оценка:

$$\Big(\|R(\lambda;\mathcal{L}_\gamma)f\|^2_{H^2(Q)} + |\lambda|^2\|R(\lambda;\mathcal{L}_\gamma)f\|^2_{L_2(Q)}\Big)^{1/2} \leqslant c_4\|f\|_{L_2(Q)}.$$

Из этой оценки следует оценка (8.15). □

Для исследования сильной разрешимости задачи (8.12)–(8.14) воспользуемся теорией полугрупп.

В силу теоремы 8.4 и критерия п.1, гл. 1 [21] получаем следующий результат.

Теорема 8.5. *Пусть выполнены условия 8.3 и 8.4. Тогда оператор $-\mathcal{L}_\gamma$ порождает аналитическую полугруппу $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$.*

Перепишем задачу (8.12)–(8.14) в виде абстрактной задачи Коши в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$:

$$u'(t) + \mathcal{L}_\gamma u(t) = f(t), \quad t \in (0,T) \tag{8.16}$$

$$u(0) = \varphi, \tag{8.17}$$

где $f \in L_2(0,T;L_2(Q))$, $\varphi \in L_2(Q)$.

Определение 8.2. Функция $u \in \mathcal{W}(\mathcal{L}_\gamma)$ называется сильным решением задачи (8.12)–(8.14), если u удовлетворяет почти всюду уравнению (8.16) и удовлетворяет условию (8.17).

Теорема 8.6. *Пусть выполнены условия 8.3 и 8.4. Тогда для всех $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma)$ задача (8.12)–(8.14) имеет единственное сильное решение $u \in \mathcal{W}(\mathcal{L}_\gamma)$. Более того, это решение представляется по формуле:*

$$u(x,t) = T_t\varphi(x) + \int\limits_0^t T_{t-s}f(x,s)ds, \tag{8.18}$$

где $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ — аналитическая полугруппа, порожденная оператором $-\mathcal{L}_\gamma$.

Доказательство. В силу теоремы 3.7, гл. 1 [21] задача (8.16), (8.17) имеет единственное сильное решение, представленное формулой (8.18) тогда и только тогда, когда выполнено следующее неравенство:

$$\int\limits_0^T \|\mathcal{L}_\gamma T_t\varphi\|^2_{L_2(Q)}dt < \infty. \tag{8.19}$$

Поскольку $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma)$, то $\mathcal{L}_\gamma T_t\varphi = T_t\mathcal{L}_\gamma\varphi$, и имеем

$$\int\limits_0^T \|\mathcal{L}_\gamma T_t\varphi\|^2_{L_2(Q)}dt = \int\limits_0^T \|T_t\mathcal{L}_\gamma\varphi\|^2_{L_2(Q)}dt \leqslant c_2\|\mathcal{L}_\gamma\varphi\|^2_{L_2(Q)} < \infty.$$

□

Вопрос о гладкости сильных решений задачи (8.12)–(8.14) рассмотрим в § 9.1.

Пример 8.2.

Рассмотрим уравнение:

$$u_t(x,t) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t)\right) +$$

$$\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t) + c(x)u(x,t) = f(x,t), \quad ((x,t) \in Q_T) \tag{8.20}$$

с нелокальными условиями

$$u_{|_{x_1=s_\mu}}+\sum_{i=1}^{m}b_{\mu i}(x')u_{|_{x_1=d_i}}+\int\limits_0^d b_\mu(x)u(x,t)dx_1=0,\quad (\mu=1,2)$$
$$u_{|_{[0,d]\times\partial G\times(0,T)}}=0 \tag{8.21}$$

и с начальным условием

$$u_{|_{t=0}}=\varphi(x),\qquad (x\in Q) \tag{8.22}$$

где $a_{ij},b_i,c,b_\mu\in C^\infty(\overline{Q})$, $b_{\mu i}\in C^\infty(\overline{G})$ — вещественные функции; $0<d_i<d$, $s_1=0$, $s_2=d$.

Как показано в примере 22.1, гл. 5 [23], нелокальные условия (8.21) можно представить в виде (8.13).

Определим оператор A_1 по формуле $A_1u(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)+c(x)u(x)$. Таким образом, можем рассматривать задачу (8.20)–(8.22) как частный случай задачи (8.12)–(8.14). В силу теоремы 8.6 задача (8.20)–(8.22) имеет единственное сильное решение для всех $f\in L_2(Q_T)$ и $\varphi\in H_0^2(Q)$, удовлетворяющих условиям:

$$\varphi_{|_{x_1=s_\mu}}+\sum_{i=1}^{m}b_{\mu i}(x')\varphi_{|_{x_1=d_i}}+\int\limits_0^d b_\mu(x)\varphi(x)dx_1=0,\quad (\mu=1,2)$$
$$\varphi_{|_{[0,d]\times\partial G}}=0.$$

8.3. Параболические задачи с нелокальными условиями на сдвигах границы

Нелокальные условия на сдвигах границы тесно связаны с разностными операторами. В настоящем параграфе нам понадобятся некоторые дополнительные свойства разностных операторов.

Будем рассматривать разностный оператор $R:L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)$ с постоянными коэффициентами.

Определение 8.3. Функция $\varphi \in C(\overline{Q})$ называется G-периодичной в $\overline{Q}$, если $\varphi(x) = \varphi(x+h)$ для всех $x \in \overline{Q}$, $h \in G$ таких, что $x + h \in \overline{Q}$.

Введем множество:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in G} \{\overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]}\}.$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\mu_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0$, где $\mu_{n-1}(\cdot)$ – $(n-1)$-мерная мера Лебега.

Обозначим через Γ_p связные компоненты открытого (в индуцированной на ∂Q топологии) множества $\partial Q \setminus \mathcal{K}$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 8.1 (см. лемма 7.5, гл. 2 [23]). *Если $(\Gamma_p + h) \cap \overline{Q} \neq \varnothing$ при некотором $h \in G$, то либо $\Gamma_p + h \subset Q$, либо существует $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathcal{K}$ такое, что $\Gamma_p + h = \Gamma_r$.*

В силу леммы 8.1 можем разбить множество $\{\Gamma_p + h : \Gamma_p + h \subset \overline{Q}, p = 1, 2, \ldots; h \in G\}$ на классы следующим образом. Множества $\Gamma_{p_1} + h_1$, $\Gamma_{p_2} + h_2$ принадлежат одному и тому же классу, если:

1) существует $h \in G$ такое, $\Gamma_{p_1} + h_1 = \Gamma_{p_2} + h_2 + h$;

2) в случае $\Gamma_{p_1} + h_1$, $\Gamma_{p_2} + h_2 \subset \partial Q$ направления внутренних нормалей к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{p_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{p_2} + h_2$ совпадают.

Очевидно, множество $\Gamma_p \subset \partial Q$ может принадлежать лишь одному классу, а множество $\Gamma_p + h \subset Q$ – не более чем двум классам. Обозначим множества $\Gamma_p + h$ через Γ_{rj}, где $r = 1, 2, \ldots$ – номер класса, j – номер элемента в данном классе $1 \leqslant j \leqslant J = J(r)$). Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\Gamma_{r1}, \ldots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q, \quad \Gamma_{r(J_0+1)}, \ldots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q \quad (0 \leqslant J_0 = J_0(r) < J(r)).$$

Лемма 8.2 (см. лемма 7.7, гл. 2 [23]). *Для любого $r = 1, 2, \ldots$ существует единственное $s = s(r)$ такое, что $N(s) = J(r)$, и при этом* *подобласти s-го класса Q_{sl} можно перенумеровать так, что $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, \dots, N(s))$.*

Будем считать, что выполнено следующее условие.

Условие 8.5. Для каждой подобласти Q_{sl} $(s = 1, 2, \dots, l = 1, \dots, N(s))$ и для любого $\varepsilon > 0$, существует открытое множество $G_{sl} \subset Q_{sl}$ с границей $\partial G_{sl} \in C^1$ такое, что $\mu_n(Q_{sl} \setminus G_{sl}) < \varepsilon$, $\mu_{n-1}(\partial Q_{sl} \setminus \partial G_{sl}) < \varepsilon$.

Обозначим через $H^1_\gamma(Q)$ $(\gamma = \{\gamma^r_{lj}\})$ подпространство функций из $H^1(Q)$, удовлетворяющих нелокальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} u_{|\Gamma_{rl}} &= \sum_{j=1}^{J_0} \gamma^r_{lj} u_{|\Gamma_{rj}} \quad (r \in B,\ l = J_0 + 1, \dots, J), \\ u_{|\Gamma_{rl}} &= 0 \qquad\qquad\quad\ (r \notin B,\ l = 1, \dots, J), \end{aligned}\right\} \tag{8.23}$$

где $J_0 = J_0(r)$, $J = J(r)$, γ^r_{lj} – комплексные числа, $B = \{r : J_0 > 0\}$.

В силу леммы 8.2 для каждого $r = 1, 2, \dots$ существует единственное $s = s(r)$ такое, что $N(s) = J(r)$, и после перенумерации подобластей s-го класса $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, \dots, N)$. Обозначим через R_{s0} – матрицу порядка $J_0 \times J_0$, получающуюся из матрицы R_s $(s = s(r))$ удалением последних $N - J_0$ строк и столбцов.

В [23] доказана следующая теорема.

Теорема 8.7 (см. теорема 8.1, гл. 2 [23]). *Пусть выполнено условие 8.5 Предположим, что матрицы R_s $(s = 1, 1, \dots)$, R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$ невырождены. Тогда существует множество $\gamma = \{\gamma^r_{lr}\}$ такое, что оператор $\mathrm{R_Q}$ отображает $\mathring{H}^1(Q)$ на $H^1_\gamma(Q)$ непрерывно и взаимооднозначно.*

Пример 8.3.

Пусть $Q = (0, 2) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, $Ru(x) = u(x) + \gamma u(x_1 + 1, x_2) + \gamma u(x_1 - 1, x_2)$, где $\gamma \in \mathbb{R}$.

Тогда разбиение $\mathcal{R}$ области Q состоит из подобластей $Q_{11} = (0,1)\times(0,1)$, $Q_{12} = (1,2) \times (0,1)$ и

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $|\gamma| \neq 1$, то по теореме 8.7 оператор $\mathrm{R_Q} : \mathring{H}^1(Q) \to H^1_\gamma(Q)$ непрерывен и взаимооднозначен. Здесь $H^1_\gamma(Q)$ – подпространство функций из $H^1(Q)$ удовлетворяющих условиям:

$$w|_{x_2=0} = w_{|_{x_2=1}},\ w|_{x_1=0} = \gamma w|_{x_1=1},\ w|_{x_1=2} = \gamma w|_{x_1=1}. \tag{8.24}$$

Теперь сформулируем условия существования разностного оператора $\mathrm{R_Q}$, отображающего пространство $\mathring{H}^1(Q)$ на пространство $H^1_\gamma(Q)$, соответствующее условиям (8.23).

Введем множество $G_0 = \{h \in G : |h| \leqslant \operatorname{diam} Q\}$. Для каждого $s = 1,2,\dots$ упорядоченному множеству чисел $\Lambda = \{a_h \in \mathbb{C} : h \in G_0\}$ поставим в соответствие матрицу $A_s(x)$ $(x \in \overline{Q}_{s1})$ порядка $I \times I$ $(I = I(s,x))$ с элементами

$$a^s_{ij}(x) = a_h, \qquad \text{если } x^j - x^i = h, \tag{8.25}$$

где $\{x^i\}$ $(i = 1,\dots,I(s,x))$ множество точек вида $x + h \in \overline{Q}$ $(h \in G)$, занумерованных так, что $x^1 = x$, $x^i = x+h_{si}$ $(i = 1,\dots,N(s))$; h_{si} определяются из условия $Q_{si} = Q_{s1}+h_{si}$. Введем матрицы R_s порядка $N(s)\times N(s)$, полученные из матриц $A_s(x)$ вычеркиванием последних $I-N$ строк и столбцов.

По лемме 8.2 для каждого $r = 1,2,\dots$ существует единственное $s = s(r)$ такое, что $N(s) = J(r)$, и при этом подобласти s-го класса Q_{sl} можно перенумеровать так, что $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1,\dots,N(s))$. Через $R_{s(r)}$ обозначим матрицу, полученную из R_s $s = s(r)$ соответствующей перенумерацией столбцов и строк, а через e^r_j $(j = 1,\dots,J(r))$ обозначим j-ю строку матрицы порядка $J\times J_0$, полученной из матрицы $R_{s(r)}$ вычеркиванием последних

$J - J_0$ столбцов.

Условие 8.6. Существует множество Λ такое, что для всех $s = 1, 2, \ldots$ матрицы $R_s + R_s^*$ положительно определены, и для каждого $r \in B$ и $s = s(r)$ выполняются соотношения:

$$e_l^r = \sum_{j=1}^{J_0} \gamma_{lj}^r e_j^r \qquad (l = J_0 + 1, \ldots, J). \tag{8.26}$$

Отметим, что условие 8.6 является чисто алгебраическим. Проверка его сводится к решению системы линейных однородных алгебраических уравнений (8.26) относительно неизвестных a_h, и последующей проверке, положительной определенности матриц $R_s + R_s^*$ $(s = 1, 2, \ldots, x \in \overline{Q}_{s1})$, построенных по найденному решению $\{a_h\}$ в соответствии с формулой (8.25).

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_\gamma : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(Q)$ по формуле:

$$\mathcal{A}_\gamma u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u \right)$$

с областью определения $D(\mathcal{A}_\gamma) = \{u \in H_\gamma^1(Q) : \mathcal{A}_\gamma u \in L_2(Q)\}$ где $a_{ij} \in C^\infty(\overline{Q})$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ — вещественные G-периодические функции; $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant c|\xi|^2$ для любых $x \in \overline{Q}$, $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$.

Будем рассматривать следующее параболическое уравнение в цилиндре $Q_T = Q \times (0, T)$, $(0 < T < \infty)$:

$$u_t(x,t) + \mathcal{A}_\gamma u(\cdot, t) = f(x,t), \quad ((x,t) \in Q_T) \tag{8.27}$$

с нелокальными условиями

$$\left.\begin{array}{lcll} u|_{\Gamma_{rl}\times(0,T)} & = & \sum\limits_{j=1}^{J_0} \gamma_{lj}^r u|_{\Gamma_{rj}\times(0,T)} & (r \in B,\ l = J_0 + 1, \ldots, J), \\ u|_{\Gamma_{rl}\times(0,T)} & = & 0 & (r \notin B,\ l = 1, \ldots, J), \end{array}\right\} \tag{8.28}$$

и с начальным условием

$$u_{|t=0} = \varphi(x), \quad (x \in Q) \tag{8.29}$$

где $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$.

Определение 8.4. Функция $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\gamma)$, удовлетворяющая (8.27), (8.29), называется сильным решением задачи (8.27)–(8.29).

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие 8.6, в котором матрицы R_s являются эрмитовыми. Следовательно, существует самосопряженный разностный оператор $\mathrm{R_Q}$ такой, что $\mathrm{R_Q} : \mathring{H}^1(Q) \to H^1_\gamma(Q)$, где пространство $H^1_\gamma(Q)$ соответствует условиям (8.23). В силу лемм 8.12 и 8.7, гл. 2 [23] оператор $\mathrm{R_Q}$ является положительно определенным в $L_2(Q)$.

Рассмотрим также неограниченный оператор $\mathcal{A}_\mathcal{R}$, определенный по формуле $\mathcal{A}_\mathcal{R} = \mathcal{A}_\gamma \mathrm{R_Q}$, с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R}) = \mathrm{R_Q^{-1}}\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$. Этот оператор будем называть дифференциально-разностным. Оператор $\mathrm{R_Q}$ отображает взимооднозначно и непрерывно пространство $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$ на пространство $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$.

В силу предположений относительно коэффициентов a_{ij} и положительной определенности матриц R_s, как показано в примере 9.3, гл. 2 [23], оператор $\mathcal{A}_\mathcal{R}$ является сильно эллиптическим. Для полноты картины приведем соответствующее доказательство, следуя указанному примеру.

Пусть $u \in \dot{C}^\infty(Q)$. Интегрируя по частям, используя M-периодичность коэффициентов a_{ij} в $\overline{Q}$ и положительную определенность оператора $\mathrm{R_Q}$, получаем

$$(\mathcal{A}_\mathcal{R} u, u)_{L_2(Q)} = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}\mathrm{R_Q} u_{x_i}, u_{x_j})_{L_2(Q)} = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}\sqrt{\mathrm{R_Q}} u_{x_i}, \sqrt{\mathrm{R_Q}} u_{x_j})_{L_2(Q)} \geqslant$$

$$c_2 \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\mathrm{R_Q}} u_{x_i}, \sqrt{\mathrm{R_Q}} u_{x_i})_{L_2(Q)} \geqslant c_3 \|\nabla u\|^2_{L_2(Q)} \geqslant c_4 \|u\|^2_{H^1(Q)}.$$

В силу положительной определенности оператора $\mathrm{R_Q}$ в пространстве $L_2(Q)$ можно ввести эквивалентное скалярноее произведение по формуле

$$(u,v)'_{L_2(Q)} = (u, \mathrm{R_Q^{-1}} v)_{L_2(Q)}. \tag{8.30}$$

Это скалярное произведение порождает соответствующую эквивалентную норму, которую будем обозначать $\|\cdot\|'_{L_2(Q)}$. Также для ограниченного оператора $T : L_2(Q) \to L_2(Q)$ будем обозначать через $\|T\|'$ норму оператора T в пространстве $L_2(Q)$ со скалярным произведением, определенным по формуле (8.30).

В работе [23] доказана следующая теорема.

Теорема 8.8 (Теорема 13.3, гл. 2, [23]). *Пусть область удовлетворяет условию 8.5. Пусть матрицы R_s являются эрмитовыми и удовлетворяют условию 8.6, и коэффициенты a_{ij} являются M-периодичными.*

Тогда оператор $\mathcal{A}_\gamma$ является самосопряженным в $L_2(Q)$ со скалярным произведением, заданным по формуле (8.30). Спектр оператора $\mathcal{A}_\gamma$ состоит из вещественных изолированных собственных значений λ_s конечной кратности, и существует $\mu > 0$ такое, что $\lambda_s > \mu$.

Для исследование сильной разрешимости задачи (8.27)-(8.29) воспользуемся теорией полугрупп.

Теорема 8.9. *Пусть область удовлетворяет условию 8.5. Пусть матрицы R_s являются эрмитовыми и удовлетворяют условию 8.6, и коэффициенты a_{ij} являются M-периодичными.*

Тогда оператор $-\mathcal{A}_\gamma$ является инфинитезимальным производящим оператором аналитической полугруппы $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ в пространстве $L_2(Q)$.

Доказательство. Обозначим через $L_2'(Q)$ пространство $L_2(Q)$ со скалярным произведением, заданным по формуле 8.30. Соответственно оператор $\mathcal{A}_\gamma : L_2'(Q) \to L_2'(Q)$ будем обозначать через A'_γ.

По теореме 8.8 оператор A'_γ — положительно определенный в пространстве $L'_2(Q)$. Следовательно, в силу теоремы 1.24, гл. 9 [5] оператор $-\mathrm{A}'_\gamma$ является генератором аналитической полугруппы $\{T'_t\}_{t\geqslant 0}$ в пространстве $L'_2(Q)$.

Оператор $\mathrm{R}_\mathrm{Q}^{1/2}$ является изоморфизмом из $L_2(Q)$ в $L'_2(Q)$ в силу (8.30). Поэтому оператор $\mathcal{A}_\gamma$ можно представить в виде $\mathcal{A}_\gamma = \mathrm{R}_\mathrm{Q}^{-1/2}\mathrm{A}'_\gamma\mathrm{R}_\mathrm{Q}^{1/2} : L_2(Q) \to L_2(Q)$. Рассмотрим аналитическую полугруппу в $L_2(Q)$, заданную по формуле $T_t = \mathrm{R}_\mathrm{Q}^{-1/2}T'_t\mathrm{R}_\mathrm{Q}^{1/2}$. По определению генератора полугруппы получаем, что оператор $\mathrm{R}_\mathrm{Q}^{-1/2}\mathrm{A}'_\gamma\mathrm{R}_\mathrm{Q}^{1/2} = \mathcal{A}_\gamma$ порождает полугруппу $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$. □

Теорема 8.10. *Пусть выполнены все условия теоремы 8.9.*

Тогда для любого $f \in L_2(Q_T)$ задача (8.27)-(8.29) имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in H^1_\gamma(Q)$. Более того, это решение определяется по формуле:

$$u(x,t) = T_t\varphi(x) + \int\limits_0^t T_{t-s}f(x,s)ds, \tag{8.31}$$

где $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ — аналитическая полугруппа, порожденная оператором $-\mathcal{A}_\gamma$.

Доказательство. Пусть $f \in L_2(Q_T)$. В силу теоремы 3.7, гл. 1, [21] задача имеет единственное сильное решение, и справедлива формула (8.31) тогда и только тогда, когда φ удовлетворяет неравенству

$$\int_0^T \|\mathcal{A}_\gamma T_t\varphi\|^2_{L_2(Q)}\,dt < \infty. \tag{8.32}$$

По теореме 1.14.5, гл. 1 [5] для выполнения неравенства (8.32) необходимо и достаточно, чтобы $\varphi \in [\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma); L_2(Q)]_{1/2}$.

Покажем, что $H^1_\gamma(Q) = [\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma); L_2(Q)]_{1/2}$ с точностью до эквивалентности нормы. В силу предположений оператор R_Q отображает взаимнооднoзначно и непрерывно:

$$\mathrm{R_Q}:\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{R}})\to\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$$

$$\mathrm{R_Q}:L_2(Q)\to L_2(Q).$$

Поэтому в силу интерполяционной теоремы (см. теорема 5.1, гл 1 [10]) оператор $\mathrm{R_Q}$ отображает взаимнооднозначно и непрерывно $\mathrm{R_Q}:[\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{R}});L_2(Q)]_{1/2}\to[\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma);L_2(Q)]_{1/2}$. Однако в силу теоремы 3.1 [10] имеет место равенство $[\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{R}});L_2(Q)]_{1/2}=\mathring{H}^1(Q)$. Поскольку оператор $\mathrm{R_Q}$ непрерывно и взаимнооднозначно отображает $\mathring{H}^1(Q)$ на $H^1_\gamma(Q)$, то $[\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma);L_2(Q)]_{1/2}=H^1_\gamma(Q)$. □

Пример 8.4. Пусть область Q из примера 8.3. Рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$w_t(x,t)=\Delta w(x,t)+f(x,t)\qquad((x,t)\in Q_T)\tag{8.33}$$

с нелокальными граничными условиями

$$\begin{aligned}w_{|_{x_2=0}}&=w_{|_{x_2=1}},\\ w_{|_{x_1=0}}&=\gamma w_{|_{x_1=1}},\\ w_{|_{x_1=2}}&=\gamma w_{|_{x_1=1}}.\end{aligned}\tag{8.34}$$

и с начальным условием

$$w|_{t=0}=\varphi(x),\qquad(x\in Q)\tag{8.35}$$

где $|\gamma|<1$.

Пусть $H^1_\gamma(Q)$ — подпространство функций из $H^1(Q)$, удовлетворяющих условию (8.24). Соответствующий разностный оператор $\mathrm{R_Q}:\mathring{H}^1(Q)\to H^1_\gamma$, определяется по формуле:

$$Ru(x)=u(x)+\gamma u(x_1+1,x_2)+\gamma u(x_1-1,x_2).$$

Тогда уравнение (8.33) можно заменить на уравнение:

$$\mathrm{R_Q} u_t(x,t) = \Delta \mathrm{R_Q} u(x,t) + f(x,t) \qquad ((x,t) \in Q_T)$$

с условиями Дирихле

$$u|_{\partial Q \times (0,T)} = 0$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \mathrm{R_Q^{-1}} \varphi(x). \qquad (x \in Q)$$

В силу теоремы 8.10 задача 8.33–8.35 имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in H^1_\gamma(Q)$.

Упражнение 8.2. Построить другие примеры задач с нелокальными условиями на сдвигах границы.

Упражнение 8.3. Построить трехмерное изображение функций из пространства $H^1_\gamma(Q)$.

Глава 9

Гладкость нелокальных задач

9.1. Гладкость решений параболических задач с нелокальными условиями без подхода носителей нелокальных членов к границе

В настоящем параграфе покажем, что сильные решения параболических задач с нелокальными условиями без подхода носителей нелокальных членов к границе обладают соответствующей гладкостью вблизи гладкой границы.

Обозначим через $H^{2k,k}(Q_T)$ пространство Соболева комплекснозначных функций $u \in L_2(Q_T)$, имеющих обобщенные производные $\mathcal{D}_x^\alpha \mathcal{D}_t^\beta u \in L_2(Q_T)$, $|\alpha + 2\beta| \leqslant 2k$ с нормой:

$$\|u\|_{H^{2k,k}(Q_T)} = \left\{ \sum_{|\alpha+2\beta|\leqslant 2k} \int\limits_{Q_T} |\mathcal{D}_x^\alpha \mathcal{D}_t^\beta u(x,t)|^2 dxdt + \int\limits_{Q_T} |u(x,t)|^2 dxdt \right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим задачу (8.1)–(8.3) из § 8.1.

Теорема 9.1. *Предположим, что выполнены условия 8.1 и 8.2. Пусть u — сильное решение задачи (8.1)–(8.3).*

Тогда $u \in H^{2,1}(Q_T)$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{W}(\mathcal{L}_\gamma)$ — сильное решение задачи (8.1)–(8.1), где оператор $\mathcal{L}_\gamma$ определен в § 8.1 В силу уравнения (8.1) имеем

$$\mathcal{L}_\gamma u(\cdot, t) = F(\cdot, t), \tag{9.1}$$

где $F(\cdot, t) = f(\cdot, t) - u_t(\cdot, t) \in L_2(Q)$ и $u(\cdot, t) \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma)$ для почти всех $t \in (0, T)$. Поскольку $\mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma) \subset H^2(Q)$, то из (9.1) следует, что

$$u(\cdot, t) \in H^2(Q)$$

и

$$\|u\|_{H^2(Q)} \leqslant c_1 \|F\|_{L_2(Q)} \tag{9.2}$$

для почти всех $t \in (0, T)$, где $c_1 > 0$ не зависит от t. Возводя в квадрат (9.2) и интегрируя от 0 до T, получаем

$$\|u\|^2_{H^{2,0}(Q_T)} \leqslant c_2 (\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u_t\|^2_{L_2(Q_T)}).$$

Отсюда следует, что $u \in H^{2,1}(Q_T)$. □

Аналогичный результат имеет место и для сильных решений параболических задач с нелокальными условиями в цилиндре.

Рассмотрим задачу (8.12)–(8.14) из раздела 8.2.

Теорема 9.2. *Предположим, что выполнены условия 8.3 и 8.4. Пусть u — сильное решение задачи (8.12)–(8.14).*

Тогда $u \in H^{2,1}(Q_T)$.

Доказательство проводится так же, как и в теореме 9.1.

Упражнение 9.1. Воспроизвести доказательство теоремы 9.2.

9.2. Гладкость решений параболических задач с нелокальными условиями на сдвигах границы

В настоящем параграфе будем рассматривать гладкость сильных решений задачи (8.27)–(8.29). Эта задача рассматривалась в § 8.3. В настоящем пункте область $Q \subset \mathbb{R}^n$ является ограниченной с границей $\partial Q \in C^2$. Будем предполагать выполненным условие 8.6.

Будем рассматривать неограниченный оператор $\mathcal{A}_\gamma : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(Q)$ по формуле $\mathcal{A}_\gamma u = \mathcal{A}u$, где

$$\mathcal{A}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u\right)$$

с областью определения $D(\mathcal{A}_\gamma) = \{u \in H^1_\gamma(Q) : \mathcal{A}_\gamma u \in L_2(Q)\}$, где $a_{ij} \in C^\infty(\overline{Q})$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i,j = 1,\dots,n)$ — вещественные G-периодические функции; $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant c|\xi|^2$ для любых $x \in \overline{Q}$, $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$.

Будем рассматривать также оператор $\mathcal{A}_\mathcal{R}$, связанный оператором $\mathrm{R_Q}$, существующим вследствие условия 8.6.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 9.1. *Предположим, что $\mathcal{A}_\mathcal{R}$ — сильно эллиптический оператор. Пусть $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ и $z \in C^2(\overline{Q})$ такая, что $z|_{\partial Q} = 0$. Тогда $zv \in H^2(Q)$ и имеют место оценки:*

$$\|v\|_{H^1(Q)} \leqslant c_1\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}, \tag{9.3}$$

$$\|zv\|_{H^2(Q)} \leqslant c_2\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{9.4}$$

Доказательство. Поскольку $\mathcal{A}_\mathcal{R}$ — сильно эллиптический оператор, то имеет место неравенство

$$\|\mathrm{R_Q^{-1}}v\|_{H^1(Q)} \leqslant c_3\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{9.5}$$

В силу теоремы 8.7 оператор $\mathrm{R_Q}$ взаимнооднозначно и непрерывно отображает $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$ в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$, более того, $\|\mathrm{R}_\mathrm{Q}^{-1}v\|_{H^1(Q)} \geqslant c_4\|v\|_{H^1(Q)}$, поэтому из (9.5) следует (9.3).

В силу условий на функцию z имеет место $zv \in \mathring{H}^1(Q)$. Применяя к zv оператор $\mathcal{A}$, получаем

$$\mathcal{A}(z(x)v(x)) = z(x)\mathcal{A}v(x) + B_1v(x) \in L_2(Q),$$

где B_1 — дифференциальный оператор первого порядка с коэффициентами из $C(\overline{Q})$. В силу результатов о гладкости обобщенных решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений в гладких областях получаем, что $zv \in H^2(Q)$, и имеет место оценка:

$$\|zv\|_{H^2(Q)} \leqslant c_5(\|\mathcal{A}v\|_{L_2(Q)} + \|v\|_{H^1(Q)}).$$

В силу (9.3) из последнего неравенства следует (9.4). □

Для замкнутого множества $S \subset \mathbb{R}^n$ будем рассматривать ε-окрестность $U_\varepsilon(S) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, S) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Будем предполагать, что множество $\mathcal{K}$ удовлетворяет следующему условию.

Условие 9.1. Множество $\mathcal{K}$ можно представить в виде конечного объединения связных замкнутых множеств k_i $(i = 1, \dots, k)$, и существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\overline{U}_\varepsilon(k_i) \cap \overline{U}_\varepsilon(k_j) = \varnothing$ для всех $i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$. Более того, предположим, что $\mathcal{K} \cap \partial Q = \bigcup\limits_{i=1}^{k_\Gamma} k_i$ $(k_\Gamma \leqslant k)$.

Через $\mathcal{K}_\Gamma$ обозначим совокупность множеств $\{k_i\}_{i=1}^{k_\Gamma}$. При выполнении условия 9.1 будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 9.2. Для любого $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma$ существует единственное $0 \neq h' \in G$ такое, что $k_i + h' \in \mathcal{K}_\Gamma$.

Введем дополнительные обозначения. Пусть для $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma$ имеем $k_i + h' = k_j \in \mathcal{K}_\Gamma$, тогда будем обозначать h' через h_{ij}. Положим $B_\varepsilon(k_i) = \{x \in \overline{Q} : \varrho(x, k_i) < \varepsilon\}$ и $\Gamma_\varepsilon(k_i) = \{x \in \partial Q : \varrho(x, k_i) < \varepsilon\}$, для $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma$, где $\varepsilon > 0$ из условия 9.1 Для множества $\Gamma_\varepsilon(k_i)$ введем следующие подмножества $\Gamma^1_\varepsilon(k_i) = \{x \in \Gamma_\varepsilon(k_i) : x + h_{ij} \in Q\}$ и $\Gamma^2_\varepsilon(k_i) = \{x \in \Gamma_\varepsilon(k_i) : x + h_{ij} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}\}$. Разобьем множество $\mathcal{K}_\Gamma$ на три подмножества $\mathcal{K}^1_\Gamma = \{k_i \in \mathcal{K}_\Gamma : \Gamma^1_\varepsilon(k_i) = \varnothing\}$, $\mathcal{K}^2_\Gamma = \{k_i \in \mathcal{K}_\Gamma : \Gamma^1_\varepsilon(k_i) \neq \varnothing$ и $\Gamma^2_\varepsilon(k_i) = \varnothing\}$ и $\mathcal{K}^3_\Gamma = \{k_i \in \mathcal{K}_\Gamma : \Gamma^1_\varepsilon(k_i) \neq \varnothing$ и $\Gamma^2_\varepsilon(k_i) \neq \varnothing\}$.

Для исследования гладкости функций из пространства $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ вблизи множества $\mathcal{K}^3_\Gamma$ будем предполагать выполненным следующее условие.

Условие 9.3. Множество $k_i \in \mathcal{K}^3_\Gamma$ является $(n-2)$-мерным многообразием класса C^2, если $n \geqslant 3$, и k_i — точка, если $n = 2$.

Приведем несколько примеров.

Пример 9.1. Пусть $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $M = \{(1, 0)\}$. Тогда множество $\mathcal{K}$ состоит из семи точек: $(0, 0)$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Очевидно, $\mathcal{K}_\Gamma = \mathcal{K} \setminus \{(0, 0)\}$. Множество $\mathcal{K}^1_\Gamma$ состоит из двух точек $(\pm 1, 0)$; множество $\mathcal{K}^2_\Gamma$ пусто; множество $\mathcal{K}^3$ состоит из четырех точек $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ (см. рис. 9.1).

Пример 9.2. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ область с границей класса C^2, которая вне кругов

$U_{1/8}((-1, 0))$, $U_{1/8}((-1, 1))$, $U_{1/8}((1, 2))$ и $U_{1/8}((1, 0))$, совпадает с областью, заданной следующими условиями:

$$\begin{aligned} &-1 < x_1 < 1; \\ &0 < x_2 < 1, \qquad x_1 < 0; \\ &0 < x_2 < x_1^4 + 1, \quad x_1 > 0. \end{aligned}$$

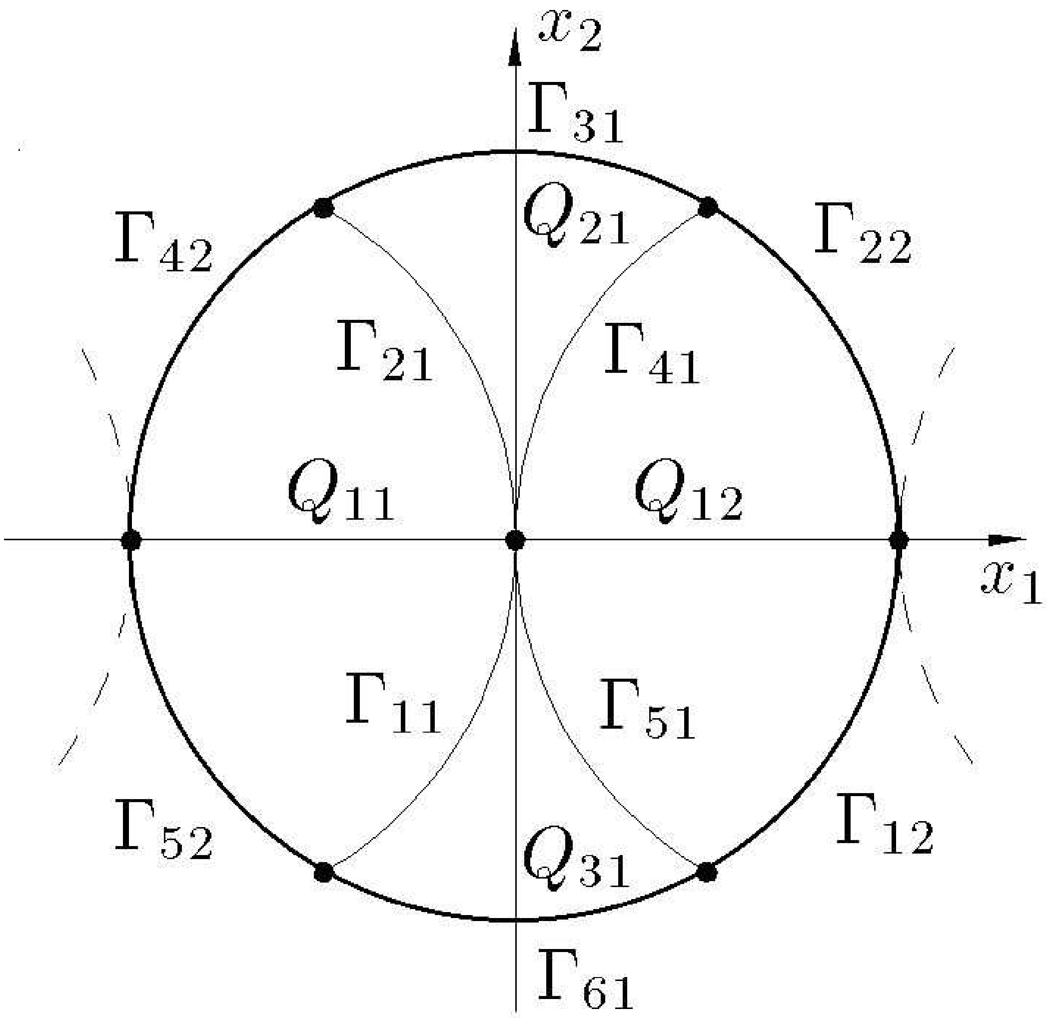

Рис. 9.1.

Пусть $M = \{(0,1)\}$. В этом случае точки $k_1 = (0,0)$, $k_2 = (0,1)$ принадлежат $\mathcal{K}^2_\Gamma$ (см. рис. 9.2.

Модифицируем пример 9.2 так, чтобы точки k_1 и k_2 принадлежали множеству $\mathcal{K}^3_\Gamma$.

Пример 9.3.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ область с границей класса C^2, которая вне кругов $U_{1/8}((-1,0))$, $U_{1/8}((1,2))$ и $U_{1/8}((1,0))$ совпадает с областью, заданной сле-

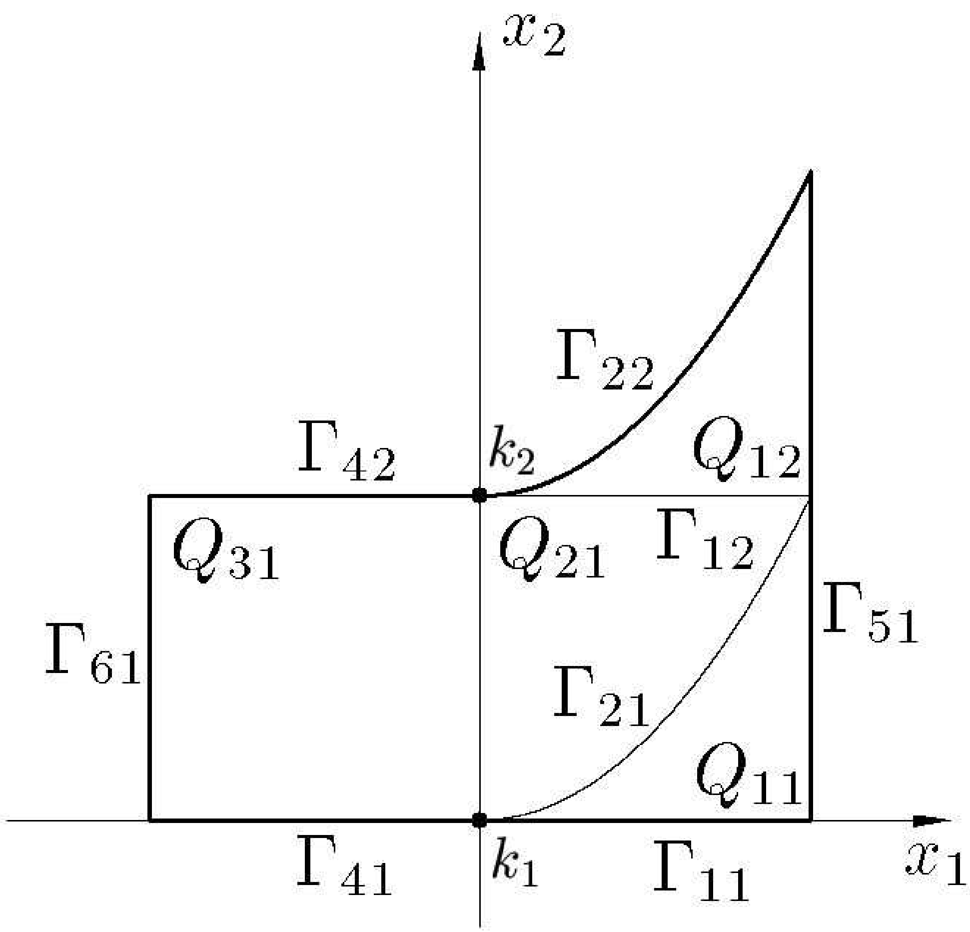

Рис. 9.2.

дующими условиями:

$$-1 < x_1 < 1$$
$$0 < x_2 < x_1^3 + 1.$$

Пусть $M = \{(0,1)\}$. Теперь точки $k_1 = (0,0)$, $k_2 = (0,1)$ принадлежат $\mathcal{K}_\Gamma^3$ (см. рис. 9.3.

Будем предполагать, что оператор $\mathcal{A}_\mathcal{R}$ сильно эллиптический, и выполнены условия 8.5, 8.6, 9.1, 9.2 и 9.3.

Лемма 9.2. *Пусть $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma^1$. Тогда для любой функции $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ выпол-*

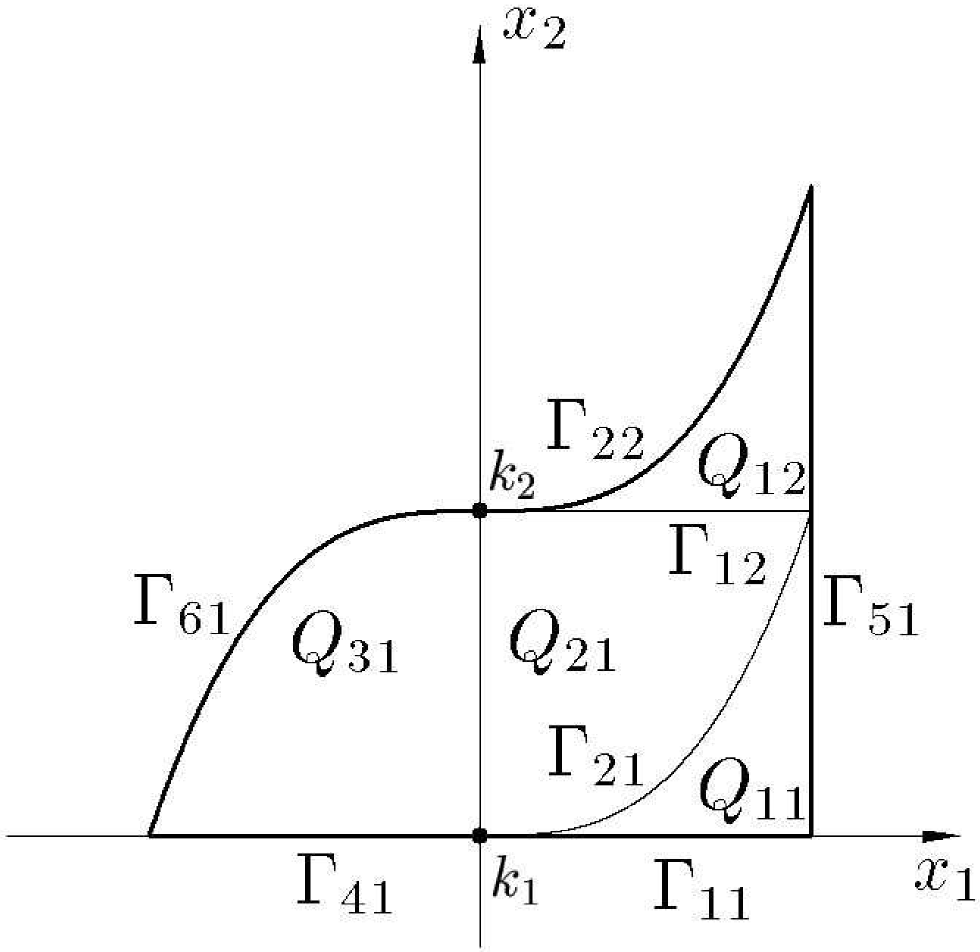

Рис. 9.3.

нено $v|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$ *и имеет место оценка:*

$$\|v\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leqslant c_6 \|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{9.6}$$

Доказательство. Учитывая нелокальные условия, которым удовлетворяет функция v, имеем

$$v|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} = \sum_{l=1}^{J_0} \gamma_l v(x - h_l)|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)}.$$

В силу теоремы о локальной гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений $v \in H^2_{loc}(Q)$. Поскольку в $\Gamma_\varepsilon(k_i) + h_l \subset Q$ для $l = 1, \ldots, J_0$, то $v|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$.

Для $\delta > 0$ будем обозначать $Q_\delta = \{x \in Q : \rho(x, \partial Q) > \delta\}$. Пусть $\xi \in C^2(\overline{Q})$ такая, что $\xi(x) = 1$, $x \in \overline{Q}_\delta$; $\xi(x) = 0$, $x \in \overline{Q} \setminus Q_{\delta/2}$. В силу леммы 9.1, $\xi v \in H^2(Q)$ и для функции ξv справедливо неравенство

$$\|\xi v\|_{H^2(Q)} \leqslant c_7 \|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\|v\|_{H^2(Q_\delta)} \leqslant c_8 \|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{9.7}$$

Поскольку существует такое $\delta > 0$, что

$$\|v\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leqslant c_4 \|u\|_{H^2(Q_\delta)},$$

то в силу неравенства (9.7) следует (9.6). □

Для исследования гладкости функций из $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ вблизи множества $\mathcal{K}_\Gamma^2 \cup \mathcal{K}_\Gamma^3$ введем весовые пространства.

В силу теоремы 2, § 2, гл. 6 [17] можно построить такую функцию $d \in C^2(\overline{Q})$, что $c\varrho(x, \partial Q) \leqslant d(x) \leqslant C\varrho(x, \partial Q)$ при $x \in Q$. В силу условия 9.3, существует такая функция $g \in C(\overline{Q})$, что $g^2 \in C^2(\overline{Q})$, $g(x) > 0$ при $x \in Q$, $\lim\limits_{x \to x_0, x \in k_i} \frac{g(x)}{\rho(x, k_i)} = g_{x_0} \geqslant g_0 > 0$ для всех $x_0 \in k_i$, $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma^3$ и $\frac{\partial(g^2(x))}{\partial n}|_{k_i} = 0$. Введем функцию $\Phi \in C^2(\overline{Q})$, $\Phi(x) \geqslant 0$, $x \in \overline{Q}$, подчиненную условиям для $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma^2$:

$$\Phi|_{\Gamma_\varepsilon^1(k_i)} \leqslant m_1 d(x - h_{ij})|_{\Gamma_\varepsilon^1(k_i)};$$

для $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma^3$:

$$\Phi|_{\Gamma_\varepsilon^1(k_i)} \leqslant m_2 g^2(x) d(x - h_{ij})|_{\Gamma_\varepsilon^1(k_i)}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что функция $\Phi(x)$ является G-периодической, что не противоречит указанным условиям.

Определим функциональное пространство $H^2_\Phi(Q)$ как пополнение функций из $C^2(\overline{Q})$ по норме:

$$\|u\|_{H^2_\Phi(Q)} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|\Phi u_{x_i x_j}\|^2_{L_2(Q)} + \|u\|^2_{H^1(Q)}\right)^{1/2}.$$

Для области $D \subset Q$ будем обозначать через $H^2_\Phi(D)$ сужение функций из $H^2_\Phi(Q)$ на D.

Лемма 9.3. *Пусть $k_i \in \mathcal{K}^2_\Gamma$. Тогда для любой функции $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ выполнено $(\Phi v)|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$, и имеет место оценка:*

$$\|(\Phi v)\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leqslant c_{10}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{9.8}$$

Доказательство. В силу нелокальных условий, которым удовлетворяет функция v, и условия 9.2, имеем

$$v|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} = \sum_{l=1}^{J_0} \gamma_l v(x-h_l)|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)}. \tag{9.9}$$

При этом для всех $\{h_l\}_{l=1}^{J_0}$, кроме одного (для определенности пусть h_{J_0}), имеем

$$\Gamma_\varepsilon(k_i) + h_l \subset Q. \tag{9.10}$$

Для h_{J_0} имеет место $k_i + h_{J_0} = k_j \in \mathcal{K}^2_\Gamma$ и

$$\Gamma_\varepsilon(k_i) + h_{J_0} \subset \overline{Q}. \tag{9.11}$$

Рассмотрим след функции $\Phi(x)v(x)$ на многообразии $\Gamma_\varepsilon(k_i)$. Получаем

$$\begin{aligned}\Phi v|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} = \sum_{l=1}^{J_0-1} \gamma_l(\Phi(x)v(x-h_l))|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} + \gamma_{J_0}(\Phi(x)v(x-h_{J_0}))|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \\ = I_1 + I_2.\end{aligned} \tag{9.12}$$

Поскольку $\Phi \in C^2(\overline{Q})$ и $v \in H^2_{loc}(Q)$, то, как показано в доказательстве леммы 9.2, слагаемое I_1 принадлежит $H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$, и имеет место оценка

$$\|I_1\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leqslant c_{11}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}.$$

Рассмотрим второе слагаемое I_2. В силу леммы 9.1 функция $dv \in H^2(Q)$ и $\|dv\|_{H^2(Q)} \leqslant c_{12}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}$. Поскольку $k_i \in \mathcal{K}^2_\Gamma$, то $v(x-h_{J_0})|_{\Gamma^2_\varepsilon(k_i)} = 0$, и, следовательно, $(d(x-h_{J_0})v(x-h_{J_0})|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$. По построению функции $\Phi(x)$, имеем оценку

$$\|I_2\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leqslant c_{13}\|d(x-h_{J_0})v(x-h_{J_0})\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leqslant c_{14}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}.$$

Поэтому $(\Phi v)|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$ и верна оценка (9.8). □

Лемма 9.4. *Пусть $k_i \in \mathcal{K}^3_\Gamma$. Тогда для любой функции $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ выполнено $(\Phi v)|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$, и имеет место оценка:*

$$\|(\Phi v)\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leqslant c_{15}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{9.13}$$

Доказательство. Поскольку $\Gamma^1_\varepsilon(k_i) + h_{ij} \subset \overline{Q}$, то, как показано в лемме 9.3, $(d(x-h_{ij})v(x))|_{\Gamma^1_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma^1_\varepsilon(k_i))$ и

$$\|d(x-h_{ij})v(x)\|_{H^{3/2}(\Gamma^1_\varepsilon(k_i))} \leqslant c_{16}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{9.14}$$

В то же время $\Gamma^2_\varepsilon(k_i) + h_{ij} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$, и в силу нелокальных условий $v|_{\Gamma^2_\varepsilon(k_i)} = \sum\limits_{l=1}^{J_0-1} \gamma_l v(x-h_l)|_{\Gamma^2_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma^2_\varepsilon(k_i))$ и

$$\|v\|_{H^{3/2}(\Gamma^2_\varepsilon(k_i))} \leqslant c_{17}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{9.15}$$

Покажем, что $(g^2(x)d(x-h_{ij})v)|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$.

Введем ограниченные операторы $I^1_g : L_2(\Gamma^1_\varepsilon(k_i)) \to L_2(\Gamma_\varepsilon(k_i))$ по формуле:

$$I^1_g w(x) = \begin{cases} g^2(x)w(x), & x \in \Gamma^1_\varepsilon(k_i) \\ 0, & x \in \Gamma^2_\varepsilon(k_i) \end{cases}$$

и $I^2_g : L_2(\Gamma^2_\varepsilon(k_i)) \to L_2(\Gamma_\varepsilon(k_i))$ по формуле

$$I^2_g w(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Gamma^1_\varepsilon(k_i) \\ g^2(x)w(x), & x \in \Gamma^2_\varepsilon(k_i) \end{cases}.$$

Покажем, что оператор I_g^1 ограничен так же, как оператор $I_g^1 : H^2(\Gamma_\varepsilon^1(k_i)) \to H^2(\Gamma_\varepsilon(k_i))$. Пусть $w \in H^2(\Gamma_\varepsilon^1(k_i))$. Поскольку $k_i \subset \overline{\Gamma_\varepsilon^1(k_i)}$, и k_i является гладким многообразием, то для функции $g^2(x)w(x)$ определено

$(g^2(x)w(x))|_{k_i}$ и $(\frac{\partial(g^2(x)w(x))}{\partial n})|_{k_i}$. Поскольку $g(x)|_{k_i} = 0$, то имеем

$$(g^2(x)w(x))|_{k_i} = 0,$$
$$(\frac{\partial g^2(x)w(x)}{\partial n})|_{k_i} = 0. \tag{9.16}$$

Обозначим через $\widetilde{w_g}$ продолжение нулем функции $g^2(x)w(x)$ в $\Gamma_\varepsilon(k_i)$. Поскольку $k_i = \overline{\Gamma_\varepsilon^1(k_i)} \cap \overline{\Gamma_\varepsilon^2(k_i)}$, то в силу (9.16) имеем $\widetilde{w_g} \in H^2(\Gamma_\varepsilon(k_i))$. В то же время $\tilde{w}_g = I_g^1 w$ и $\|\tilde{w}_g\|_{H^2(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leqslant c_{18}\|w\|_{H^2(\Gamma_\varepsilon^1(k_i))}$.

Для гладкого многообразия S пространство $H^{3/2}(S)$ является интерполяционным пространством: $H^{3/2}(S) = [H^2(S); L_2(S)]_{1/4}$. Следовательно, в силу интерполяционной теоремы (см. теорема 5.1, гл. 1 [10]) оператор I_g^1 является ограниченным оператором $I_g^1 : H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon^1(k_i)) \to H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$.

Аналогично можно показать ограниченность оператора $I_g^2 : H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon^2(k_i)) \to H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$.

По определению операторов I_g^1 и I_g^2 имеем

$$g^2(x)d(x - h_{ij})v(x)|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} = I_g^1((d(x - h_{ij})v)|_{\Gamma_\varepsilon^1(k_i)}) +$$
$$I_g^2((d(x - h_{ij})v)|_{\Gamma_\varepsilon^2(k_i)}) \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i)).$$

В то же время по построению функции $\Phi(x)$ получаем

$$\|\Phi(x)v(x)\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leqslant c_{19}\|g^2(x)d(x - h_{ij})v(x)\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))}.$$

При этом в силу оценок (9.14) и (9.15), а также ограниченности операторов I_g^1 и I_g^2 имеет место (9.13). □

Теорема 9.3. *Предположим, что выполнены условия 8.6, 9.1, 9.2 и 9.3.*

Тогда $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) \subset H^2_\Phi(Q)$, и имеет место следующая оценка:

$$\|v\|_{H^2_\Phi(Q)} \leqslant c_{20}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)} \tag{9.17}$$

для всех $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$.

Доказательство. Возьмем функцию $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$. Пусть $x_0 \in \partial Q \setminus \mathcal{K}^\varepsilon$, где $\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\}$. Рассмотрим $v|_{\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0)}$, где $\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0) = \{x \in \partial Q : \rho(x, x_0) < \varepsilon/2\}$. Имеем $\overline{\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0)} \subset \Gamma_p$, где согласно лемме 8.2 $\Gamma_p = \Gamma_{rl}$. В силу нелокальных условий, $v|_{\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0)} = 0$ или $v|_{\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0)} = \sum\limits_{l=1}^{J_0} \gamma_l v(x - h_l)|_{\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0)}$. Рассмотрим последний случай. Поскольку $\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0) + h_l \subset Q$ для $l = 1, \dots, J_0$, то, как показано в доказательстве леммы 9.2, $v|_{\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0)} \in H^{3/2}(\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0))$ и

$$\|v\|_{H^{3/2}(\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0))} \leqslant c_{21}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}. \tag{9.18}$$

В то же время для любого $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma$ в силу одной из лемм 9.2, 9.3 или 9.4 имеет место $(\Phi v)|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$ и $\|\Phi v\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leqslant c_{22}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}$. Отсюда и из (9.18) получаем, что $(\Phi v)|_{\partial Q} \in H^{3/2}(\partial Q)$ и

$$\|\Phi v\|_{H^{3/2}(\partial Q)} \leqslant c_{23}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{9.19}$$

Покажем, что $\Phi v \in H^2(Q)$. Пусть $F \in H^2(Q)$ такая, что $F|_{\partial Q} = (\Phi v)|_{\partial Q}$ и $\|F\|_{H^2(Q)} \leqslant c_{24}\|(\Phi v)\|_{H^{3/2}(\partial Q)}$. Тогда $(\Phi v - F) \in \mathring{H}^1(Q)$, и имеет место

$$\mathcal{A}(\Phi v - F) = \Phi\mathcal{A}v + B_2 v + \mathcal{A}F \in L_2(Q), \tag{9.20}$$

где B_2 — дифференциальный оператор первого порядка. В силу (9.20) функция $(\Phi v - F)$, а, следовательно, и Φv принадлежит $H^2(Q)$, и имеет место оценка:

$$\|\Phi v\|_{H^2(Q)} \leqslant c_{25}(\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)} + \|F\|_{H^2(Q)}) \leqslant c_{26}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)} \tag{9.21}$$

Покажем теперь, что $v \in H^2_\Phi(Q)$. Действительно,

$$\Phi v_{x_i x_j} = (\Phi v)_{x_i x_j} - \Phi_{x_i x_j} v - \Phi_{x_i} v_{x_j} - \Phi_{x_j} v_{x_i} \in L_2(Q),$$

для $i, j = 1, \ldots, n$, и имеет место оценка

$$\|v\|_{H^2_\Phi(Q)} \leqslant c_{27} \|\Phi v\|_{H^2(Q)} \leqslant c_{28} \|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}.$$

$\square$

Применим теперь полученные результаты к исследованию гладкости сильных решений параболических уравнений с нелокальными условиями на сдвигах границы.

Введем пространство $H^{2,1}_\Phi(D_T)$ как пополнение функций из $C^\infty(\overline{D}_T)$ по норме:

$$\|u\|_{H^{2,1}_\Phi(D_T)} = \left\{ \int_0^T \|u_t\|^2_{L_2(Q)} dt + \int_0^T \|u\|^2_{H^2_\Phi(D)} dt \right\}^{1/2},$$

где $D \subset Q$, $D_T = D \times (0, T)$.

Через $H^{2,0}_\Phi(D_T)$ обозначим пространство, определяемое как пополнение функций из $C^\infty(\overline{D}_T)$ по норме:

$$\|u\|_{H^{2,0}_\Phi(D_T)} = \left\{ \int_0^T \|u\|^2_{H^2_\Phi(D)} dt \right\}^{1/2}.$$

Теорема 9.4. *Предположим, что выполнены условия 8.6, 9.1, 9.2 и 9.3.*

Тогда любое сильное решение $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\gamma)$ задачи (8.27)–(8.29) принадлежит $H^{2,1}_\Phi(Q_T)$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\gamma)$ — сильное решение задачи (8.27)–(8.29). В силу уравнения (8.27) имеем

$$\mathcal{A}_\gamma u(\cdot, t) = F(\cdot, t), \tag{9.22}$$

где $F(\cdot, t) = f(\cdot, t) - u_t(\cdot, t) \in L_2(Q)$ для п.в. $t \in (0, T)$. По теореме 9.3

$$u(\cdot, t) \in H^2_\Phi(Q),$$

и

$$\|u\|_{H^2_\Phi(Q)} \leqslant c_{31}\|F\|_{L_2(Q)} \tag{9.23}$$

для почти всех $t \in (0,T)$, где $c_{31} > 0$ не зависит от t. Возводя в квадрат (9.23) и интегрируя от 0 до T, получаем

$$\|u\|^2_{H^{2,0}_\Phi(Q_T)} \leqslant c_{32}(\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u_t\|^2_{L_2(Q_T)}).$$

Отсюда следует, что $u \in H^{2,1}_\Phi(Q_T)$. □

Пример 9.4.

Пусть область Q из примера 9.2. Рассмотрим неограниченный оператор $\mathcal{A}_\gamma : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий по формуле: $\mathcal{A}_\gamma u = -\Delta u$, $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) = \{u \in H^1_\gamma(Q) : \mathcal{A}_\gamma u \in L_2(Q)\}$, где $H^1_\gamma(Q) = \mathrm{R_Q}\mathring{H}^1(Q)$ — подпространство функций из $H^1(Q)$, удовлетворяющих нелокальным условиям на сдвигах границы. Оператор $\mathrm{R_Q}$ определим по формуле $\mathrm{R_Q} = \mathrm{P_Q}R\mathrm{I_Q}$, где $Ru(x_1,x_2) = u(x_1,x_2) + \gamma u(x_1,x_2-1) + \gamma u(x_1,x_2+1)$, $|\gamma| < 1$. Можно показать, что выполнено условие 8.6. Будем обозначать: $k_1 = (0,0)$, $k_2 = (0,1)$ и $h_{12} = (0,1)$ $h_{21} = (0,-1)$. Пусть $\varepsilon = 1/4$, удовлетворяющее условию 9.1. Легко видеть, что $k_1, k_2 \in \mathcal{K}^2_\Gamma$ (см. пример 9.2). В силу теоремы 9.4 любое решение $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\gamma)$ задачи (8.27)–(8.29) принадлежит пространству $H^{2,1}_\Phi(Q_T)$ и $H^{2,1}_\Phi(Q_{21}\times(0,T))$, где в определении весовых пространств $\Phi(x) = \rho^4(x)$, $x \in B_\varepsilon(k_1)$ и $\Phi(x) = \rho^4(x-h_{12})$, $x \in B_\varepsilon(k_2)$, где $\rho(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Пример 9.5.

Пусть теперь область Q из примера 9.3. Оператор $\mathcal{A}_\gamma : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ действует по формуле: $\mathcal{A}_\gamma u = \Delta u$, $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) = \{u \in H^1_\gamma(Q) : \mathcal{A}_\gamma u \in L_2(Q)\}$, где $H^1_\gamma(Q) = \mathrm{R_Q}\mathring{H}^1(Q)$. Оператор R такой же, как в примере 9.4. Будем обозначать: $k_1 = (0,0)$, $k_2 = (0,1)$ и $h_{12} = (0,1)$ $h_{21} = (0,-1)$.

Пусть $\varepsilon = 1/4$, удовлетворяющее условию 9.1. В этом случае $k_1, k_2 \in \mathcal{K}^3_\Gamma$ (см. пример 9.3). В силу теоремы 9.4 любое решение $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\gamma)$ задачи (8.27)–(8.29) принадлежит пространству $H^{2,1}_\Phi(Q_T)$ и $H^{2,1}_\Phi(Q_{21} \times (0,T))$, где в определении весовых пространств $\Phi(x) = \rho^2(x)\rho^4(x) = \rho^6(x)$, $x \in B_\varepsilon(k_1)$ и $\Phi(x) = \rho^2(x-h_{12})\rho^4(x-h_{12}) = \rho^6(x-h_{12})$, $x \in B_\varepsilon(k_2)$.

9.3. Гладкость решений параболических дифференциально-разностных уравнений

Как уже отмечалось, в отличие от параболических дифференциальных уравнений, эти уравнения обладают рядом принципиально новых свойств. Например, гладкость сильных решений функционально-дифференциальных параболических уравнений может нарушаться внутри цилиндрической области даже при бесконечно гладкой правой части уравнения. В настоящем пункте рассмотрим гладкость сильных решений параболических дифференциально-разностных уравнений.

Теорема 9.5. *Пусть область Q удовлетворяет условию 8.5, и пусть $\partial Q \setminus \bigcup\limits_i M_i \subset \mathcal{K}$. Предположим, что дифференциально-разностный оператор $\mathcal{A}_\mathcal{R}$ — сильно эллиптический.*

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ и всех $s = 1, 2, \ldots;$ $l = 1, \ldots, N(s)$ любое сильное решение u задачи (7.9)–(7.11) $u(x,t) \in$ $H^{2,1}((Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon) \times (0,T))$

Доказательство. Из определения сильного решения и уравнения (7.9) следует, что

$$\mathcal{A}_\mathcal{R} u(\cdot, t) = F(\cdot, t), \tag{9.24}$$

где $F(\cdot,t) = f(\cdot,t) - u_t(\cdot,t) \in L_2(Q)$ для почти всех $t \in (0,T)$. В силу теоремы 11.2, [23] о гладкости обобщенных решений краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений для любого $\varepsilon > 0$

$$u(\cdot, t) \in H^2(Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$$

и

$$\|u\|_{H^2(Q_{sl}\setminus\mathcal{K}^\varepsilon)} \leqslant c\|F\|_{L_2(Q)} \tag{9.25}$$

для почти всех $t \in (0, T)$ и $s = 1, 2, \ldots; l = 1, \ldots, N(s)$, где $c > 0$ не зависит от t.

Возводя обе части неравенства (9.25) в квадрат и интегрируя от 0 до T, получим

$$\|u\|_{W_2^{2,0}((Q_{sl}\setminus\mathcal{K}^\varepsilon)\times(0,T))} \leqslant c_1(\|f\|_{L_2(\Omega_T)} + \|u_t\|_{L_2(\Omega_T)}).$$

Отсюда следует, что $u \in W_2^{2,1}((Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon) \times (0, T))$. $\square$

Как показывает следующий пример, гладкость сильных решений задачи (7.9)–(7.11) может нарушаться на границе соседних цилиндров $Q_{s_1 l_1} \times (0, T)$ и $Q_{s_2 l_2} \times (0, T)$, а также вблизи множества $\mathcal{K} \times (0, T)$.

Пример 9.6. Рассмотрим первую смешанную задачу (7.9)–(7.11) предполагая, что $Q = (0, \frac{4}{3}) \times (0, \frac{4}{3})$, $\mathcal{A}_\mathcal{R} = -\Delta \mathrm{R_Q}$, $\mathrm{R_Q} = \mathrm{P_Q} R \mathrm{I_Q}$, $Ru(x) = u(x) + \gamma u(x_1 + 1, x_2 + 1) + \gamma u(x_1 - 1, x_2 - 1)$, $|\gamma| < 1$. Очевидно, разбиение $\mathcal{R}$ области Q состоит из двух классов подобластей: 1)$Q_{11} = (0, \frac{1}{3}) \times (0, \frac{1}{3})$, $Q_{12} = (1, 4/3) \times (1, 4/3)$ и 2) $Q_{21} = Q \setminus (\overline{Q}_{11} \cup \overline{Q}_{12})$. Множество $\mathcal{K}$ принадлежит границе ∂Q и состоит из четырех точек: $g^1 = (\frac{1}{3}, 0)$, $g^2 = (\frac{4}{3}, 1)$, $g^3 = (0, \frac{1}{3})$, $g^4 = (1, \frac{4}{3})$.

Матрицы $A_s(x)$ $(x \in \overline{Q}_{s1}; s = 1, 2)$ имеют вид:

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \qquad (x \in \overline{Q}_{11}),$$

$$A_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \ (x \in \overline{Q}_{21} \cap \mathcal{K}), \quad A_2(x) = (1) \ (x \in \overline{Q}_{21} \setminus \mathcal{K}).$$

Таким образом, матрицы $A_s(x)(\xi_1^2+\xi_2^2)$ $(x\in\overline{Q}_{s1}; s=1,2)$ положительно определены. Следовательно, оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ — сильно эллиптический.

Положим

$v_1(r,\varphi)=\xi(r)r^\lambda\sin\lambda\varphi$, $v_2(r,\varphi)=\xi(r)r^\lambda\sin\lambda\varphi(\frac{3\pi}{2}-\varphi)$,

где $\xi(r)\in\dot{C}^\infty(Q)(\mathbb{R})$,$0\leqslant\xi(r)\leqslant 1$, $\xi(r)=1$ при $r\leqslant\frac{1}{8}$, $\xi(r)=0$ при $r\geqslant\frac{1}{6}$, $\lambda=\frac{2}{\pi}\arccos(\frac{\gamma}{2})$, r,φ — полярные координаты.

Введем функцию $v(x)$ по формуле:

$$v(x)=\begin{cases}\frac{v_1(x_1-\frac{1}{3},x_2)-\gamma v_2(x_1-\frac{1}{3},x_2)}{1-\gamma^2} & (x\in Q_{11}),\\[2em] \frac{-\gamma v_1(x_1-\frac{4}{3},x_2-1)+v_2(x_1-\frac{4}{3},x_2-1)}{1-\gamma^2} & (x\in Q_{12}),\\[2em] v_1(x_1-\frac{1}{3},x_2)+v_2(x_1-\frac{4}{3},x_2-1) & (x\in Q_{21}).\end{cases}\tag{9.26}$$

Очевидно,

$\mathrm{R_Q}v(x)=v_1(x_1-\frac{1}{3},x_2)+v_2(x_1-\frac{4}{3},x_2-1)$.

Поскольку $0<\lambda<1$, легко видеть, что $v\in\mathring{W}_2^1(Q)$, $-\Delta\mathrm{R_Q}v\in L_2(Q)$, но $v\notin H^2(Q_{s1}\cap S_\delta(g^1))$ для любого $\delta>0$. Следовательно, функция $u(x,t)=tv(x)$ является сильным решением задачи (7.9)–(7.11) для $f(x,t)=v(x)-t\Delta\mathrm{R_Q}v(x)\in L_2(Q_T)$ и $\varphi(x)=0$. Однако $u\notin H^{2,0}((Q_{s1}\cap S_\delta(g^1))\times(0,T))$ для любого $\delta>0$.

Покажем теперь, что

$ux_1|_{x_1=\frac{1}{3}+0,x_2\leqslant\frac{1}{8}}\neq ux_1|_{x_1=\frac{1}{3}-0,x_2\leqslant\frac{1}{8}}$.

В силу (9.26) для этого достаточно убедиться, что

$$v_{1\varphi}|_{\varphi=\frac{\pi}{2},r\leqslant\frac{1}{8}}\neq\frac{1}{1-\gamma^2}\{v_{1\varphi}|_{\varphi=\frac{\pi}{2},r\leqslant\frac{1}{8}}-\gamma v_{2\varphi}|_{\varphi=\frac{\pi}{2},r\leqslant\frac{1}{8}}\}.\tag{9.27}$$

Соотношение (9.27) эквивалентно следующему:

$$\lambda\cos\frac{\lambda\pi}{2}\neq\frac{1}{1-\gamma^2}(\lambda\cos\lambda\frac{\pi}{2}-\lambda\cos\lambda\pi).\tag{9.28}$$

Приводя подобные и используя равенство $\cos\frac{\lambda\pi}{2} = \frac{\gamma}{2}$, можем переписать (9.28) в виде:

$$\gamma^3 - \gamma^2 + 2 \neq 0. \tag{9.29}$$

Поскольку корни уравнения $\gamma^3 - \gamma^2 + 2 = 0$ имеют вид $\gamma_{1,2} = 1 \pm i$, $\gamma_3 = -1$, условие (9.29) выполняется при $0 < \gamma < 1$. Поэтому $u \notin H^{2,0}(S_\sigma(y))$ для любых $y = (y_1, y_2)$ и $\sigma > 0$ таких, что $y_1 = \frac{1}{3}$, $0 < y_2 < \frac{1}{8}$, $\sigma < y_2$. Таким образом, гладкость сильных решений задачи (7.9)–(7.11) может нарушаться на границе соседних подобластей $Q_{s_1l_1} \times (0,T)$ и $Q_{s_2l_2} \times (0,T)$.

Этот пример показывает, что при $\varepsilon = 0$ теорема 9.5, вообще говоря, не верна. Исследуем гладкость сильных решений задачи (7.9)–(7.11) в цилиндрических подобластьях.

Теорема 9.6. *Пусть оператор $\mathcal{A}_\mathcal{R}$ — сильно эллиптический. Предположим, что $\partial Q \in C^2$ и выполнены условия 9.1, 9.2, 9.3.*

Тогда любая функция $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$ принадлежит пространству $H^2_\Phi(Q_{sl})$ для всех $s = 1, 2, \dots$ $l = 1, \dots, N(s)$, и имеет место следующая оценка:

$$\|u\|_{H^2_\Phi(Q_{sl})} \leqslant c_{29}\|u\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R})}. \tag{9.30}$$

Доказательство. Для любой функции $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$, функция $v = \mathrm{R_Q}u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ принадлежит по теореме 9.3 пространству $H^2_\Phi(Q)$, и имеет место оценка:

$$\|v\|_{H^2_\Phi(Q)} \leqslant c_{30}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}.$$

Следовательно, функция $v'(x) = \Phi(x)v(x)$ принадлежит пространству $H^2(Q)$. Однако функция $\Phi(x)$ является G-периодической, поэтому справедливы равенства:

$$\Phi(x)u(x) = \Phi(x){\mathrm{R_Q}}^{-1}v(x) = {\mathrm{R_Q}}^{-1}\Phi(x)v(x) = {\mathrm{R_Q}}^{-1}v'(x). \tag{9.31}$$

Из леммы 8.15, гл. 2 [23] следует, что $\Phi(x)u(x) = \mathrm{R_Q}^{-1}v' \in H^2(Q_{sl})$ для всех $s = 1, 2, \dots\ l = 1, \dots, N(s)$.

Однако поскольку

$$\Phi u_{x_i x_j} = (\Phi u)_{x_i x_j} - \Phi_{x_i x_j} u - \Phi_{x_i} u_{x_j} - \Phi_{x_j} u_{x_i} \in L_2(Q_{sl}),$$

то $u \in H^2_\Phi(Q_{sl})$, для всех $s = 1, 2, \dots\ l = 1, \dots, N(s)$. Наконец, оценка (9.30) следует из непрерывности оператора $\mathrm{R_Q}^{-1} : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) \to \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$. □

Теорема 9.7. *Пусть оператор $\mathcal{A}_\mathcal{R}$ — сильно эллиптический. Предположим, что $\partial Q \in C^2$ и выполнены условия 9.1, 9.2, 9.3.*

Тогда любое сильное решение задачи (7.9)–(7.11) $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$ принадлежит $H^{2,1}_\Phi(Q_{sl} \times (0, T))$, для $s = 1, 2, \dots;\ l = 1, \dots, N(s)$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$ — сильное решение задачи (7.9)–(7.11). В силу уравнения (7.9) имеем

$$\mathcal{A}_\mathcal{R} u(\cdot, t) = F(\cdot, t), \tag{9.32}$$

где $F(\cdot, t) = f(\cdot, t) - u_t(\cdot, t) \in L_2(Q)$ для п.в. $t \in (0, T)$. По теореме 9.6

$$u(\cdot, t) \in H^2_\Phi(Q_{sl}),$$

для $s = 1, 2, \dots;\ l = 1, \dots, N(s)$, и

$$\|u\|_{H^2_\Phi(Q_{sl})} \leqslant c_{31} \|F\|_{L_2(Q)} \tag{9.33}$$

для почти всех $t \in (0, T)$, где $c_{31} > 0$ не зависит от t. Возводя в квадрат (9.33) и интегрируя от 0 до T, получаем

$$\|u\|^2_{H^{2,0}_\Phi(Q_{sl} \times T)} \leqslant c_{32}(\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u_t\|^2_{L_2(Q_T)}).$$

Отсюда следует, что $u \in H^{2,1}_\Phi(Q_{sl} \times T)$. □

Пример 9.6 показывает, что гладкость сильных решений параболических дифференциально-разностных уравнений может нарушаться на границе соседних цилиндрических подобластей. Подобный эффект наблюдается для обобщенных решений сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений. В работе [23] получены необходимые и достаточные условия гладкости решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений на границе соседних подобластей. Покажем, что аналогичные условия имеют место и для сильных решений параболических дифференциально-разностных уравнений.

Будем предполагать, что область Q удовлетворяет условию 8.5. Зафиксируем $s = p$ и рассмотрим точку $y^1 \in Q \cap (\partial Q_{p1} \setminus \mathcal{K})$. Пусть $y^l = y^1 + h_{pl} \in \partial Q_{pl} \setminus \mathcal{K}$ $(l = 1, \dots, N(p))$. Будем считать, что $y^l \in Q$ $(l = 1, \dots, J_0)$, $y^l \in \partial Q$ $(l = J_0 + 1, \dots, N(p))$. Приведем условия, когда для данного $1 \leqslant l \leqslant J_0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что сильное решение параболического дифференциально-разностного уравнения $u \in H^{2,1}(S_\varepsilon(y^l) \times (0, T))$ $S_\varepsilon(y^l) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varrho(x, y^l) < \varepsilon\}$, т.е. решение обладает соответствующей гладкостью в окрестности множества $S_\varepsilon(y^l) \times (0, T)$.

В силу леммы 8.2 существует единственная подобласть $Q_{qj} \neq Q_{p1}$ такая, что $y^1 \in \partial Q_{qj}$.

Обозначим $\gamma_\varepsilon = \{x \in \partial Q_{s1} : |x| < \varepsilon\}$. Через $R_{\alpha s1}(x)$ обозначим матрицы порядка $J_0 \times (N(s) - J_0)$, полученные из матрицы $R_{\alpha s}(x)$ вычеркиванием J_0 первых столбцов и $N(s) - J_0$ последних строк. Поскольку $h_{pl} = h_{ql}$ $(l = 1, \dots, J_0)$, матрицы порядка $J_0 \times J_0$, полученные из матриц $R_{\alpha s}(x)$ при $s = p, q$ вычеркиванием последних $N(s) - J_0$ строк и столбцов, равны. Обозначим эту матрицу порядка $J_0 \times J_0$ через $R_{\alpha p0}(x)$. Обозначим матрицу порядка $J_0 \times (J_0 - 1)$, полученную из матрицы $R_{\alpha p0}(x)$ при $\alpha = (0, \dots, 0, 2)$ вычеркиванием l-го столбца через $B_{lp}(x)$.

Условие 9.4. Будем говорить, что подобласть Q_{pl} и точка $y^l \in \partial Q_{pl} \setminus \mathcal{K}$ $(1 \leqslant l \leqslant J_0)$ удовлетворяют условию 9.4, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $x \in \gamma_\varepsilon$ каждый столбец матриц $R_{\alpha s1}(x)$ $(\alpha = (0, \dots, 0, 2), s = p, q)$ является линейной комбинацией столбцов матрицы $B_{pl}(x)$.

Теорема 9.8. *Пусть оператор $\mathcal{A}_\mathcal{R}$ — сильно эллиптический дифференциально-разностный оператор. Предположим, что выполнено условие 8.5.*

Тогда для каждой подобласти Q_{pl} и точки $y^l \in \partial Q_{pl} \setminus \mathcal{K}$ $(1 \leqslant l \leqslant J_0)$ любое сильное решение задачи (7.9)–(7.11) $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$ принадлежит $H^{2,1}(S_\varepsilon(y^l) \times (0,T))$ тогда и только тогда, когда для Q_{pl} и y^l выполнено условие 9.4.

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$ — сильное решение задачи (7.9)–(7.11) В силу уравнения (7.9) имеем

$$\mathcal{A}_\mathcal{R} u(\cdot, t) = F(\cdot, t), \tag{9.34}$$

где $F(\cdot, t) = f(\cdot, t) - u_t(\cdot, t) \in L_2(Q)$ для п.в. $t \in (0, T)$. Пусть для Q_{pl} и y^l выполнено условие 9.4, тогда в силу теоремы 12.2, гл. 2 [23] получаем

$$u(\cdot, t) \in H^2((S_\varepsilon(y^l))$$

и

$$\|u\|_{H^2((S_\varepsilon(y^l))} \leqslant c_1 \|F\|_{L_2(Q)} \tag{9.35}$$

для почти всех $t \in (0, T)$, где $c_1 > 0$ не зависит от t. Возводя в квадрат (9.35) и интегрируя от 0 до T, получаем

$$\|u\|^2_{H^{2,0}((S_\varepsilon(y^l) \times (0,T))} \leqslant c_2 (\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u_t\|^2_{L_2(Q_T)}).$$

Отсюда следует, что $u \in H^{2,1}((S_\varepsilon(y^l) \times (0,T))$.

Если для Q_{pl} и y_l условие 9.4 не выполнено, то в силу теоремы 12.2, гл 2 [23] существует такая функция $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$, что $v \notin H^2(S_\varepsilon(y^l))$ для любого

$\varepsilon > 0$. Тогда функция $u(x,t) = tv(x)$ является сильным решением задачи (7.9)–(7.11), где $f(x,t) = v(x) - t\mathcal{A}_{\mathcal{R}}v(x) \in L_2(Q_T)$ и $\varphi(x) = 0$. Однако $u \notin H^{2,0}((S_\varepsilon(y^l) \times (0,T))$ для любого $\varepsilon > 0$.

Теорема 9.8 полностью доказана. $\square$

Глава 10

Вычислительные эксперименты

10.1. Вычислительные эксперименты в математике

Математика, являясь строгой дедуктивной наукой, не может опираться на эксперимент как на источник новых знаний. Однако вычислительные методы играют важную роль в теоретической математике. С одной стороны, численные методы исследования могут быть использованы в качестве иллюстрации математических конструкций, а с другой — все чаще вычислительные эксперименты используются в математике в качестве доказательных вычислений. Существует много примеров применения доказательных вычислений для получения новых результатов (теорем).

В нашем курсе вычислительные эксперименты используются именно в качестве иллюстрации основных результатов.

10.2. Идея исследования пространств начальных данных

Основным результатом нашего курса является получение точного описания пространств начальных данных для параболических задач. Напомним, что пространства начальных данных описывают тот класс начальных функций, для которых существует сильное решение параболической задачи. При этом пространства начальных данных представляют собой необходимые и достаточные условия существования сильных решений. То есть если начальная функция принадлежит пространству начальных данных, то сильное решение существует, если же начальная функция выходит из пространства начальных данных, то сильного решения существовать не может.

В настоящей главе проведем вычислительные эксперименты, чтобы продемонстрировать теоретические результаты на практике. Рассмотрим основную идею нашего вычислительного эксперимента.

Пусть мы имеем V-коэрцитивный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H. Соответственно через $-\mathcal{A}$ обозначим генератор аналитической полугруппы, порожденный оператором $-A$. Далее рассмотрим абстрактную параболическую задачу:

$$u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0, \quad t \in (0, 1),$$

$$u(0) = \varphi.$$

Для ясности специально рассматриваем однородную задачу с начальным условием $\varphi \in H$. Также для определенности мы выбрали отрезок $(0, 1)$, на котором рассматриваем наше решение. Согласно результатам, изложенным ранее в курсе, для любого $\varphi \in H$ существует единственное обобщенное решение, которое может быть представлено в виде:

$$u(t) = T_t\varphi,$$

где T_t есть аналитическая полугруппа, порожденная оператором $-\mathcal{A}$.

Если наше решение u является сильным решением, то величина

$$\sigma = \int\limits_0^1 \|u'(t)\|_H^2 dt$$

является конечной. С другой стороны, для любого обобщенного решения является конечной следующая величина:

$$\sigma(\varepsilon) = \int\limits_\varepsilon^1 \|u'(t)\|_H^2 dt,$$

для любого $0 < \varepsilon < 1$.

Действительно, в силу свойств полугрупп операторов для любого $t \in (\varepsilon, 1)$ имеем

$$\|u'(t)\|_H = \|\mathcal{A}u(t)\|_H = \|\mathcal{A}T_t\varphi\|_H =$$

$$\|\mathcal{A}T_{t-\varepsilon}T_\varepsilon\varphi\|_H = \|T_{t-\varepsilon}\mathcal{A}T_\varepsilon\varphi\|_H.$$

Поскольку наша полугруппа T_t является сжимающей, то имеем далее

$$\|u'(t)\|_H = \|T_{t-\varepsilon}\mathcal{A}T_\varepsilon\varphi\|_H \leqslant \|\mathcal{A}T_\varepsilon\varphi\|_H.$$

В силу теоремы 3.10 существует такая положительная константа C_ε, зависящая от ε, что имеет место оценка:

$$\|\mathcal{A}T_\varepsilon\varphi\|_H \leqslant C_\varepsilon\|\varphi\|_H.$$

Следовательно,

$$\|u'(t)\|_H \leqslant C_\varepsilon\|\varphi\|_H,$$

при $0 < \varepsilon < t < 1$. А это означает, что величина $\sigma(\varepsilon)$ может быть оценена следующим образом:

$$\sigma(\varepsilon) = \int\limits_\varepsilon^1 \|u'(t)\|_H^2 dt \leqslant C_\varepsilon^2(1-\varepsilon)\|\varphi\|_H^2 < \infty.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, если u является сильным решением, то имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma(\varepsilon) = \sigma. \tag{10.1}$$

Верно и обратное. Пусть для обобщенного решения u имеет место (10.1), тогда обобщенное решение u является сильным решением.

Таким образом, можем исследовать принадлежность начальной функции к пространству начальных данных, исследуя предел функции $\sigma(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Разумеется, можем наблюдать лишь приближенное решение u. При этом необходимо иметь приближенное решение с достаточно высокой точностью. Среди различных численных методов будем использовать численно-аналитичный метод Фурье.

10.3. Численно-аналитичный метод Фурье

Будем рассматривать абстрактное параболическое уравнение в гильбертовым пространстве H:

$$u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0 \tag{10.2}$$

с начальным условием

$$u(0) = \varphi, \tag{10.3}$$

где $\mathcal{A}$ есть положительный оператор в пространстве H с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. При этом будем предполагать, что область определения, рассматриваемая как гильбертово пространство с нормой графика оператора, компактно вложена в пространство H. При этом оператор $-\mathcal{A}$ является генератором аналитической полугруппы T_t.

Самосопряженность оператора $\mathcal{A}$ и компактность резольвенты для этого оператора гарантируют существование дискретного спектра оператора $\mathcal{A}$.

Обозначим это спектр следующим образом:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots .$$

При этом все собственные значения положительны и имеют конечную кратность. Собственные вектора, соответствующие собственным значениям, обозначим следующим образом:

$$w_1, w_2, \ldots, w_k, \ldots .$$

При этом хорошо известно, что из собственных векторов можно составить ортонормированный базис в пространстве H. Будем считать, что наши собственные вектора $\{w_k\}$ уже нормированы:

$$(w_p, w_q)_H = \delta_{pq},$$

где δ_{pq} есть символ Кронекера.

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & p = q; \\ 0, & p \neq q. \end{cases}$$

Опишем метод Фурье для нахождения решения задачи (10.2)–(10.3). Начальное условие $\varphi \in H$ можно разложить в ряд Фурье по собственным функциям оператора $\mathcal{A}$:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k w_k,$$

где коэффициенты Фурье φ_k вычисляются по формуле

$$\varphi_k = (\varphi, w_k)_H.$$

Ряд Фурье, в который разложен вектор φ, сходится в пространстве H, и по равенству Парсеваля имеем

$$\|\varphi\|_H = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Можно показать, что если задача (10.2)–(10.3) имеет сильное решение, то это решение представляется рядом Фурье:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\lambda_k t} w_k. \tag{10.4}$$

Для доказательства этого факта рассмотрим лемму.

Лемма 10.1. *Полугруппа T_t, порожденная оператором $-\mathcal{A}$ представляется следующим образом:*

$$T_t\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\lambda_k t} w_k.$$

Доказательство этой леммы следует из спектрального представления самосопряженного оператора и функционального исчисления таких операторов.

Замечание 10.1. Ряд в правой части формулы (10.4) сходится в H при любом $\varphi \in H$, при этом можно показать, что этот ряд представляет обобщенное решение задачи (10.2)–(10.3).

Имея представление решения в виде (10.4), можно привести формулы для вычисления функции $\sigma(\varepsilon)$:

$$\begin{gathered}\sigma(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{1} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\varphi_k|^2 e^{-2\lambda_k t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\varphi_k|^2 \tfrac{1}{2\lambda_k}(e^{-2\lambda_k\varepsilon} - e^{-2\lambda_k}) = \\ \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\varphi_k|^2 (e^{-2\lambda_k\varepsilon} - e^{-2\lambda_k}).\end{gathered} \tag{10.5}$$

10.4. План вычислительного эксперимента

Наш вычислительный эксперимент посвящен численному исследованию поведения функции $\sigma(\varepsilon)$ для решений задачи (10.2)–(10.3). При этом для вычислений будем использовать следующую формулу для приближенного вычисления функции $\sigma(\varepsilon)$:

$$\sigma_N(\varepsilon) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \lambda_k |\varphi_k|^2 (e^{-2\lambda_k \varepsilon} - e^{-2\lambda_k}).$$

Легко подсчитать ошибку при замене функции $\sigma(\varepsilon)$ функцией $\sigma_N(\varepsilon)$

$$\sigma(\varepsilon) - \sigma_N(\varepsilon) = \frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k |\varphi_k|^2 (e^{-2\lambda_k \varepsilon} - e^{-2\lambda_k}).$$

Разумеется, при конструктивной реализации нашего эксперимента мы вынуждены приближенно вычислять и коэффициенты Фурье φ_k.

Более конкретно, будем рассматривать простейшую параболическую задачу — первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности. Приведем точную постановку задачи. Однородное уравнение теплопроводности:

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 < x < \pi, \ 0 < t < 1, \tag{10.6}$$

с первым краевым условием

$$\begin{gathered} u(0,t) = 0, \\ u(\pi,t) = 0, \end{gathered} \tag{10.7}$$

и начальным условием

$$u_{|_{t=0}} = \varphi(x), \quad x \in (0,\pi). \tag{10.8}$$

Для данной задачи абстрактный оператор $\mathcal{A}$ задается по следующей формуле:

$$\mathcal{A}u = -u_{xx}, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = W_2^2(0,\pi) \cap \mathring{W}_2^1(0,\pi).$$

Как хорошо известно, этот оператор имеет следующие собственные значения:

$$\lambda_k = k^2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а собственные функции, соответствующие этим собственным значениям, ортонормированные в пространстве $L_2(0, \pi)$, имеют следующий вид:

$$w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx), \quad k = 1, 2, \dots .$$

В ходе вычислительного эксперимента мы вынуждены вычислять коэффициенты Фурье для функций, заданных на интервале $(0, \pi)$. Хотя эти коэффициенты можно вычислять для любых функций из пространства $L_2(0, \pi)$, будем работать лишь с кусочно-непрерывными функциями, заданными всюду на отрезке $[0, \pi]$. Для вычисления коэффициентов Фурье для функции $\varphi(x)$ будем использовать следующую формулу

$$\varphi_k \approx \sum_{k=1}^{M} \varphi(k\Delta) w_k(k\Delta)\Delta,$$

где $\Delta = \pi/M$.

10.5. Программная реализация

В настоящем разделе приведем листинг программы, с помощью которой будем производить вычислительные эксперименты. Вначале рассмотрим некоторые общие принципы организации научных вычислений.

С самого начала программирование предназначалось для решения именно научных и инженерных задач. Однако в настоящее время научное программирование представляет собой далеко не самое главное направление computer science. Это привело к тому, что многие программисты изначально ориентированы на системное или еще более распространенное прикладное программирование. По нашему мнению, идеология научного программирования существенно отличается от прикладного программирования.

Что значит научное программирование? Прежде всего научное программирование должно быть ориентировано на эффективное и корректное решение поставленной задачи. Можно возразить, что эти требования предъявляются ко всем программным средствам. Однако вопрос в приоритете критериев. Скажем, если офисная программа будет работать не $0,25$ секунд, а 1 секунду для обработки операции, то это не так критично, как, скажем, проведение расчета в течение недели или месяца. Тоже самое и на счет корректности выполнения программы. Одно дело, когда «зависнет» компьютерная игра, и совсем другое дело, если в ходе вычислений будет ошибка, которая приведет к неверным выводам или технологическим катастрофам.

Изложение идеологии научного программирования лежит в стороне от темы нашей книги, поэтому ограничимся лишь некоторыми моментами, которые следует иметь в виду, приступая к программированию научных задач.

Отделение научной части от интерфейсной. Мы призываем придерживаться правила: одна программа производит численный расчет, сохраняя результаты расчета, а другая программа осуществляет визуализацию полученных данных.

Оптимизация текстов программ. Очень часто небольшое изменение в тексте программы позволяет кардинально увеличить скорость расчетов. Оптимизирующий компилятор не всесилен.

Не использовать внешние подпрограммы и большие библиотеки. За исключением особых случаев, старайтесь программировать используемые алгоритмы сами. Во-первых, это даст исчерпывающее понимание самого численного метода, а, во-вторых, реализуя «для себя», можно добиться наилучшего результата.

Жертвуйте универсальностью в угоду эффективности. Универсальность одно из самых любимых достижений программирования, но для научного программирования построение универсальных программных комплексов оправданно не всегда.

Используйте современные компиляторы. Далеко не все можно оптимизировать «руками» — современные оптимизирующие компиляторы могут серьезно увеличить скорость.

Издавна языком для научных расчетов являлся Фортран. Действительно, этот язык имеет много преимуществ, но еще больше недостатков. Таких как:

Язык старого поколения. Этот язык был разработан на заре компьютерной эры, поэтому многие важные технологии программирования такие, как модульность, контроль типов и др., в нем не реализованы. Что приводит к ошибкам и трудностям при программировании.

Многие библиотеки подпрограмм уже устарели. Прогресс в компьютерной сфере происходит крайне быстро. Поэтому библиотеки разработаны для устаревших ЭВМ и могут быть бесполезны.

Отсутствие мобильности. Несмотря на существующие стандарты языка, конкретные реализации этого языка существенно отличаются.

Выбор языка C++ мотивируется следующими факторами:

Истинная мобильность. Признано, что исходные тексты на стандартном C++ являются мобильными и наименее зависимыми от платформы, на которой были созданы. В частности, мы приводим исходные тексты, но нет необходимости оговаривать, в какой среде они были созданы.

Распространенность Linux. В свободно распространяемой операционной системе существует отличный оптимизирующий компилятор C++. Не секрет, что многие научные учреждения и университеты, особенно Европы, используют Linux, где C++ входит как органическая часть.

Эффективность языка. C++ является современным языком программирования, позволяющим удобно писать эффективные программы. Большинство известных компиляторов других языков значительно проигрывают в скорости выполнения программ известным компиляторам C++.

Приведем листинг нашей программы на языке C++.

```
#include <cmath>

#include <iostream>

#include <fstream>

#include <stdlib.h>

#include <time.h>

using namespace std;

const double pi=3.14159265358979323846264338327950;

const double pi2=6.28318530717958647692528676655900;
```

```
int N=1024; // предел суммируемости для вычисления sigma

int M=1024; // количество точек при вычислении интеграла

// функция, в которой реализуется функция,
// задающая начальную функцию

// входные параметры:
// x - точка, в которой вычисляется функция
//
// возвращаемый результат:
// значение функции в точке x
//
double varphi(double x) {

    return x*(pi-x);

}

// функция реализующая, собственные функции

// входные параметры:
// k - номер собственной функции
// x - точка, в которой вычисляется функция
//
// возвращаемый результат:
// значение собственной функции в точке x
```

```
//

double e_k(int k, double x) {

    double res;

    res = sin(double(k)*x);

    // нормировать собственную функцию
    res = sqrt(2.0/pi)*res;

    return res;

}

// вычисление коэффициента Фурье
//
// входные параметры:
// k - номер коэффициента Фурье
//
// возвращаемый результат:
// коэффициент Фурье
//

double fi_k(int k) {

    int i;
```

```
    double res;

    double delta;

    double x;

    res = 0;

    // шаг интегрирования
    delta = pi / double(M);

    for(i=1;i<=M;i++)
    {

        // вычислить текущую точку x
        x = double(i)*delta;

        // очередное слагаемое
        res = res + varphi(x)*e_k(k, x)*delta;
    }

    return res;

}

// собственное значение
```

```
//
// входные параметры:
// k - номер собственного значения
//
// возвращаемый результат:
// собственное значение
//

double lambda(int k) {

    return double(k)*double(k);

}

//
// головная функция программы
//

int main(int argc, char* argv[]) {

    int i, k;

    // текущее значение eps
    double eps;

    // начальное значение eps
    double eps0=1e-6;
```

```
// конечное значение eps
double eps1=1e-4;

// шаг eps
double eps_h=1e-6;

double la;

double fi;

double res;

// ввод минимального значения eps0

printf("\n\nPlease, enter eps0 > ");

scanf("%le", &eps0);

printf("\n");

// ввод максимального значения eps1

printf("Please, enter eps1 > ");

scanf("%le", &eps1);
```

```
printf("\n");

// ввод шага по eps

printf("Please, enter eps_h > ");

scanf("%le", &eps_h);

printf("\n");

// начало вычислений

printf("\n\nCalculation...\n");

FILE *f;

// создать и открыть файл с результатами
f = fopen("result.txt", "w");

eps = eps0;

// основной цикл при вычислении sigma
while(eps < eps1)
{

    res = 0;
```

```
        for(k=N;k>=1;k--)
        {

            // собственное значение
            la = lambda(k);

            // коэффициент Фурье
            fi =  fi_k(k);

            // очередное слагаемое
            res = res + fabs(la)*fi*fi*(exp(-2*la*eps)-exp(-2*la));
        }

        res = 0.5*res;

        // вывести результат

        fprintf(f, "eps = %E\tsigma = %E\n", eps, res);

        // сделать шаг по eps
        eps += eps_h;
    }

    // закрыть файл с результатами расчетов
    fclose(f);

    return 0;
```

```
}
```

10.6. Проведение вычислительных экспериментов

В настоящем разделе приведем результаты численных опытов с помощью программы, приведенной в предыдущем разделе.

Параметры наших вычислительных экспериментов:

$$N = 1024 \quad \text{предел суммирования,}$$
$$M = 1024 \quad \text{шаг разбиения.}$$

Будем вычислять функцию $\sigma_N(\varepsilon)$ в пределах $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 10^{-3}$ с шагом по ε равным, 10^{-6}.

Замечание 10.2. Будем численно вычислять функцию σ_N при $\varepsilon = 0$. При этом значение $\sigma_N(0)$ будет всегда конечным, даже если имеет место

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma(\varepsilon) = \infty.$$

В ходе численных опытов будем использовать различные начальные функции, как принадлежащие пространству $\mathring{W}_2^1(0, \pi)$, так и не принадлежащие пространству $\mathring{W}_2^1(0, \pi)$. В результате вычислительного эксперимента установим, что для тех начальных функций, которые принадлежат пространству начальных данных ($\mathring{W}_2^1(0, \pi)$), функция σ_N ограничена при $\varepsilon \to 0$. С другой стороны, для функций, не принадлежащих пространству начальных данных, значение функции σ_N будет значительно возрастать при $\varepsilon \to 0$.

На рис. 10.1 приведем скриншот терминала с работой нашей программы.

Опыт №1.

Пусть начальная функция имеет вид:

$$\varphi(x) = \sin(x)\cos(x).$$

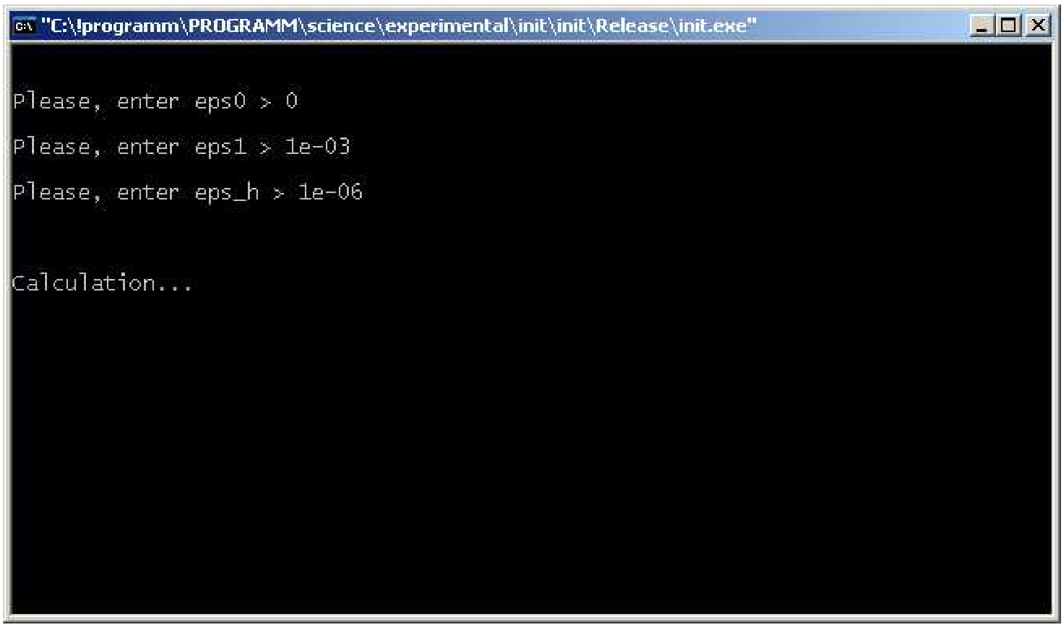

Рис. 10.1. Скриншот

Легко видеть, что $\varphi \in \mathring{W}_2^1(0, \pi)$.

Опыт №2.

Пусть начальная функция имеет вид:

$$\varphi(x) = x \sin(x).$$

Легко видеть, что $\varphi \in \mathring{W}_2^1(0, \pi)$.

Опыт №3.

Пусть начальная функция имеет вид:

$$\varphi(x) = x(\pi - x).$$

Легко видеть, что $\varphi \in \mathring{W}_2^1(0, \pi)$.

Опыт №4.

Пусть начальная функция имеет вид:

$$\varphi(x) = 1.$$

Легко видеть, что $\varphi \notin \mathring{W}_2^1(0, \pi)$.

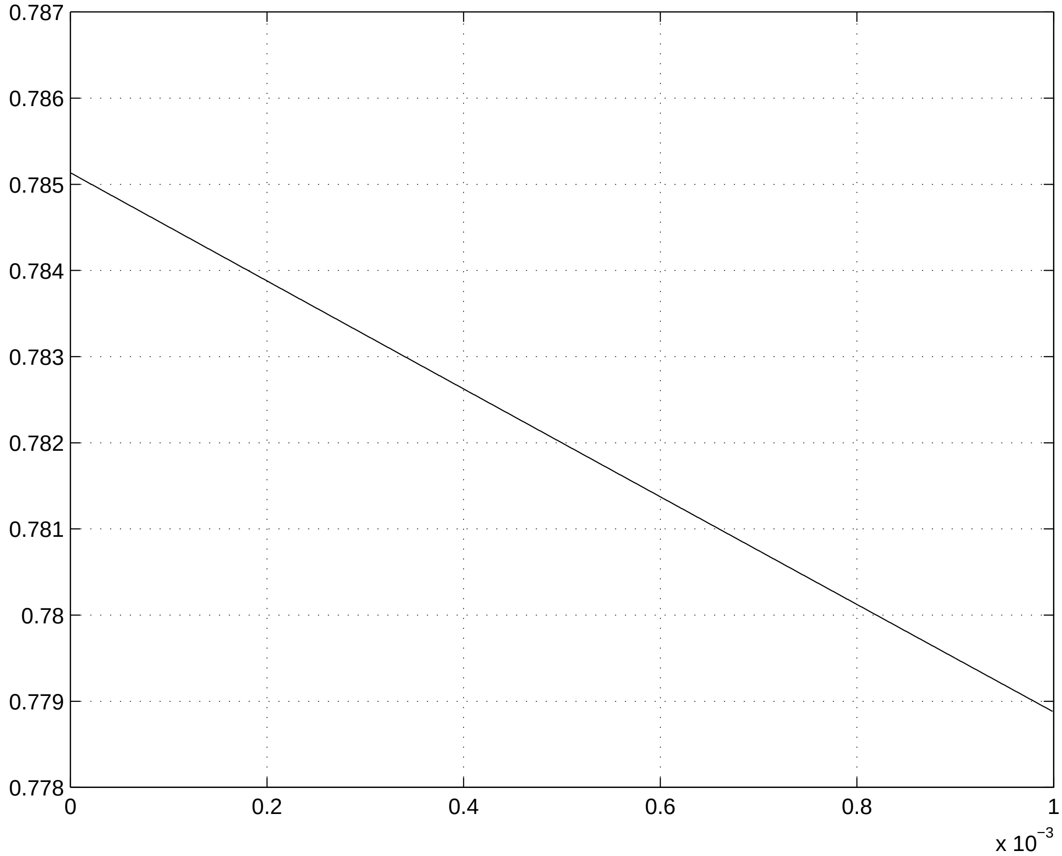

Рис. 10.2. Опыт №1

Опыт №5.

Пусть начальная функция имеет вид:

$$\varphi(x) = x.$$

Легко видеть, что $\varphi \notin \mathring{W}_2^1(0, \pi)$.

Опыт №6.

Пусть начальная функция имеет вид:

$$\varphi(x) = \cos(x).$$

Легко видеть, что $\varphi \notin \mathring{W}_2^1(0, \pi)$.

Опыт №7.

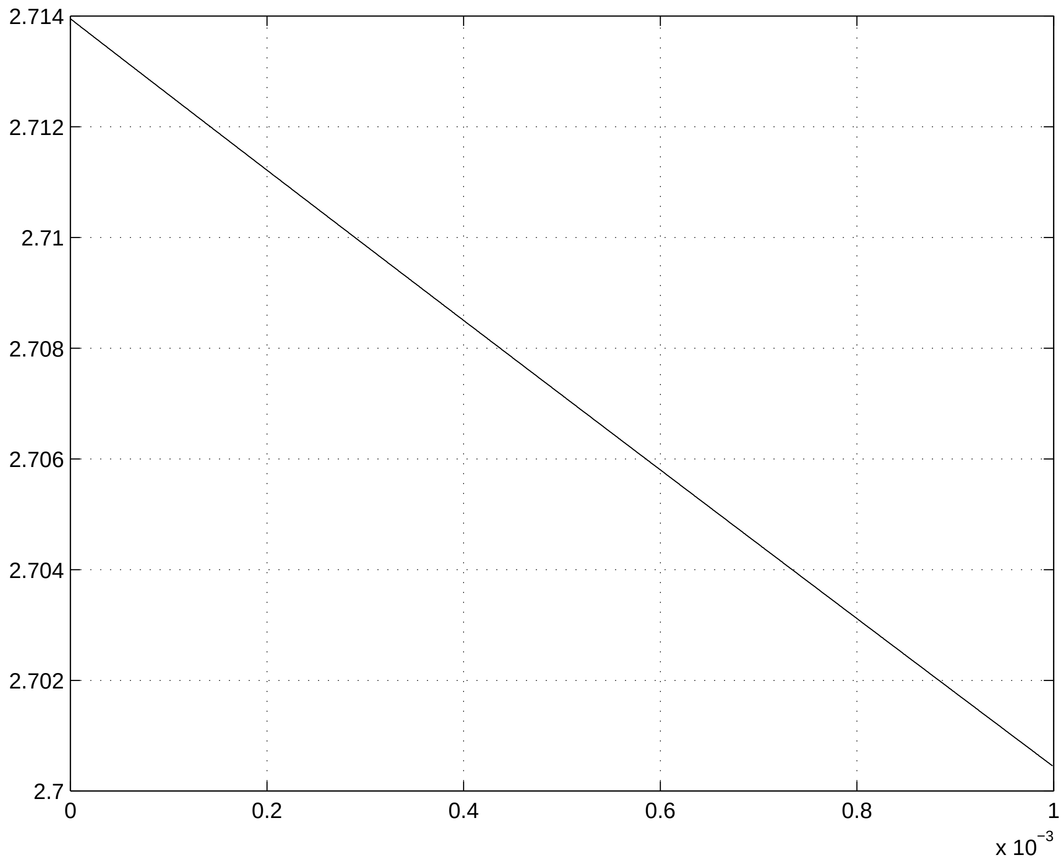

Рис. 10.3. Опыт №2

Теперь рассмотрим функцию $\varphi \notin \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\pi)$, но такую, что $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi/2); \\ \pi - x, & x \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

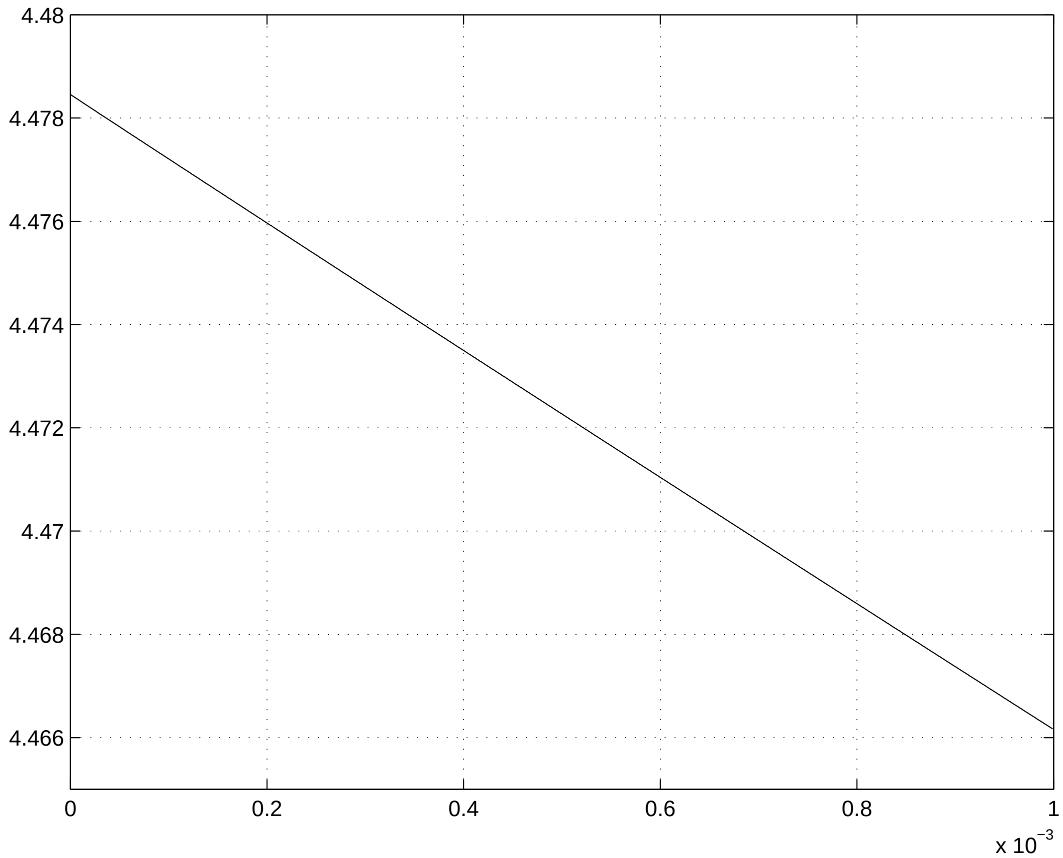

Рис. 10.4. Опыт №3

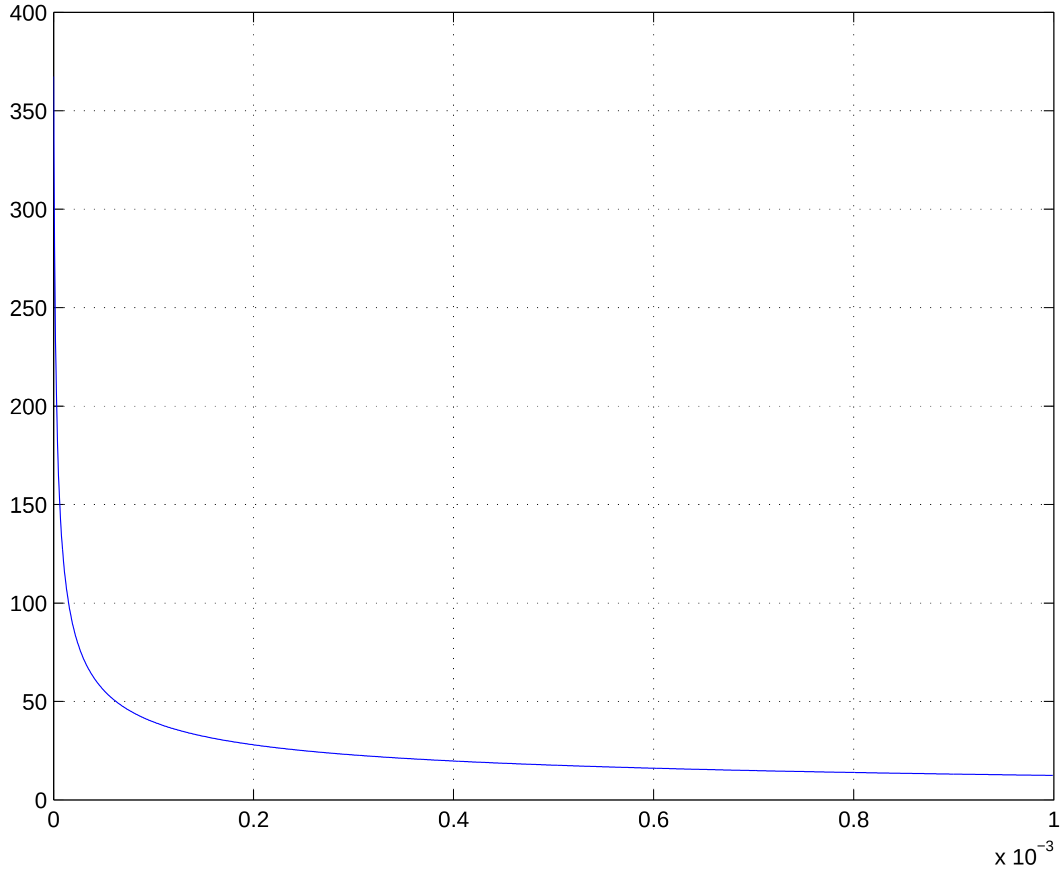

Рис. 10.5. Опыт №4

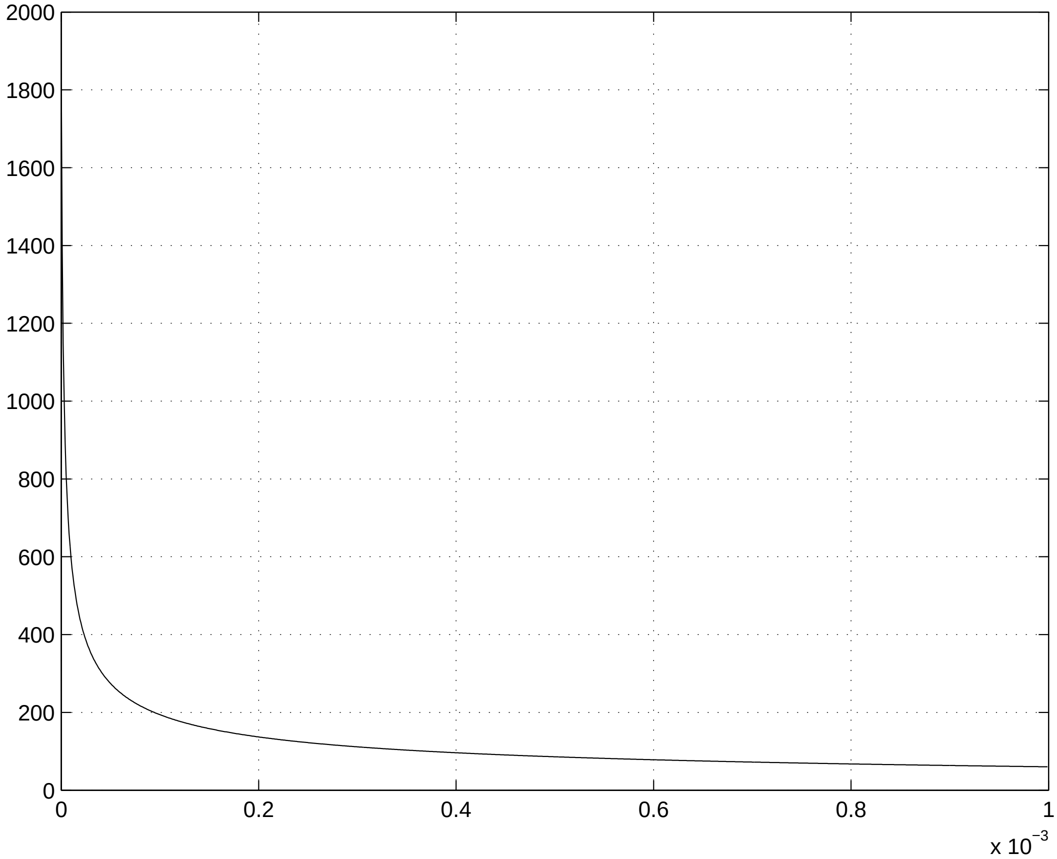

Рис. 10.6. Опыт №5

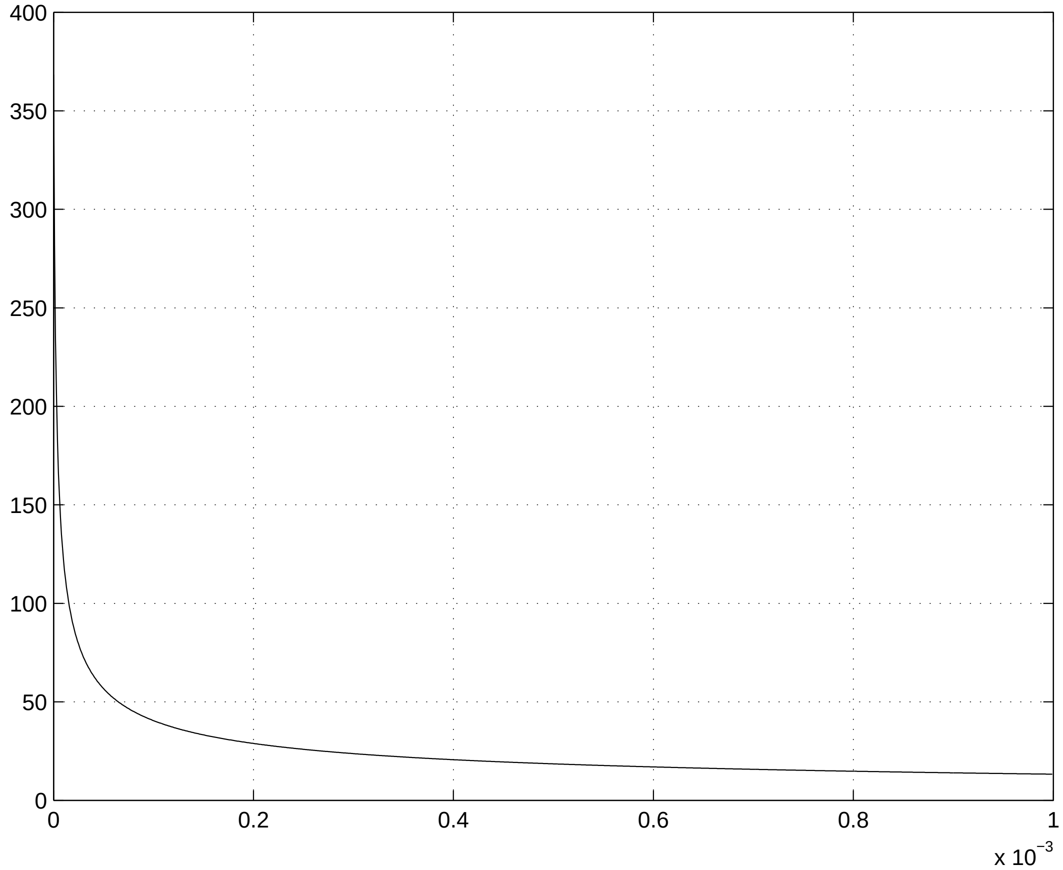

Рис. 10.7. Опыт №6

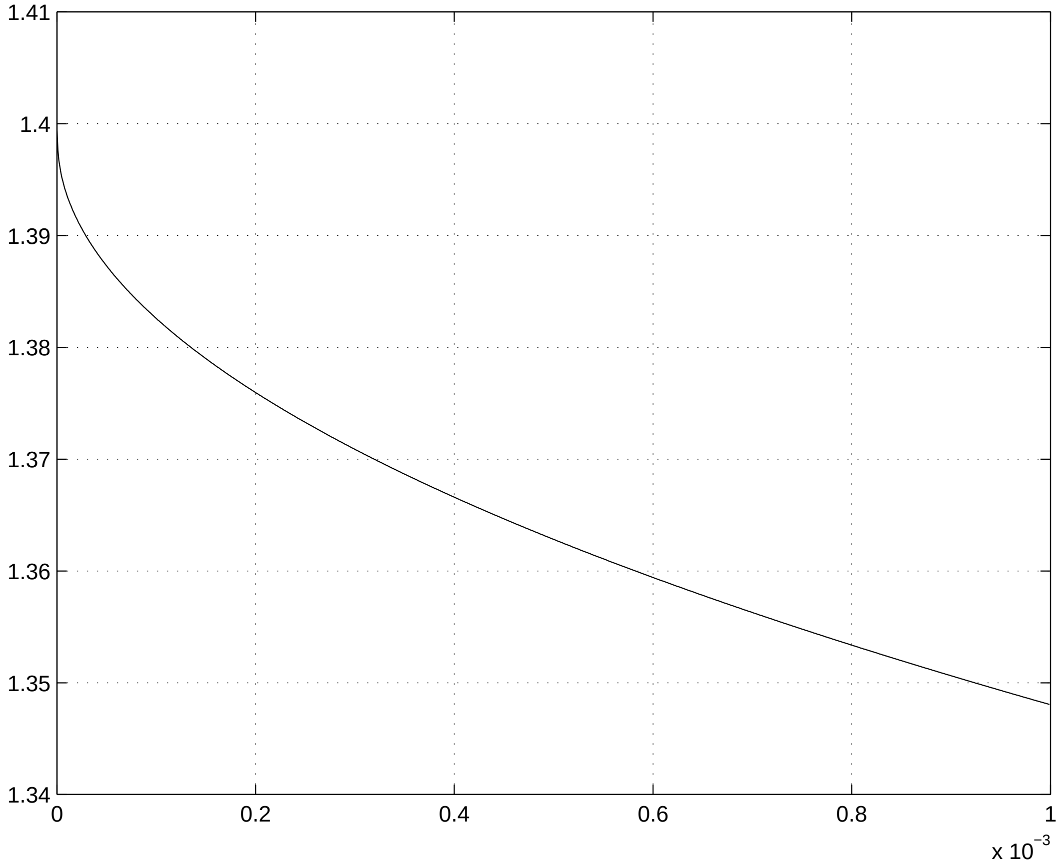

Рис. 10.8. Опыт №7

Глава 11

Практикум по теории полугрупп операторов

Пример 1.1. Рассмотрим оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где A — квадратная матрица. Для произвольной матрицы, как для ограниченного оператора, существует экспоненциальная функция e^{tA}, которая может быть определена просто с помощью ряда Тейлора:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k, \tag{11.1}$$

который абсолютно сходится для любого $t \geqslant 0$. Поэтому оператор A всегда порождает непрерывную полугруппу $T_t = e^{tA}$.

Однако для вычисления полугрупповых операторов непосредственное применение формулы (1.1) затруднительно. Рассмотрим различные способы явного вычисления e^{tA}.

Найти e^A можно путем приведения к жордановой форме. Пусть известна такая матрица C, что $C^{-1}AC = M$ имеет жорданову форму, т.е. состоит из клеток K_i. Каждая жорданова клетка имеет вид: $K = \lambda E + F$, у матрицы F все элементы нули, кроме 1-го косого ряда над диагональю. Поэтому $F^m = 0$, где m — порядок матрицы F, и e^F легко найти с помощью ряда

(3.4). Так как еще $e^{\lambda E} = e^{\lambda} E$, то

$$e^K = e^{\lambda E + F} = e^{\lambda E} e^F = e^{\lambda} E e^F = e^{\lambda} e^F.$$

Составив из клеток e^{K_i} матрицу e^M, найдем e^A с помощью формулы

$$e^A = C e^M C^{-1}. \tag{11.2}$$

Другой способ нахождения экспоненты (полугруппы) от матрицы состоит в нахождении решения соответствующего линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами каким-либо известным методом.

Действительно, i-столбец матрицы $e^t A$ есть решение системы уравнений для уравнения $x'(t) = Ax(t)$ с начальными условиями $x_i(0) = 1$, $x_k(0) = 0$ при $i \neq k$ (x_i — i-я координата вектора x).

Задача 11.1. Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти e^{tA}.

Решение. Матрица A представляется в виде $A = CMC^{-1}$, где

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Применяя формулу (11.2), получаем

$$e^{tA} = C e^{tM} C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & -e^t + e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Задача 11.2. Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix},$$

Найти e^{tA}.

Решение. Рассмотрим дифференциальное уравнение в векторной форме

$$\dot{X} = AX, \tag{11.3}$$

общее решение уравнения (11.3) представляется формулами $x_1 = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$, $x_2 = 2C_1e^{-1} - 2C_2e^{3t}$. При начальных условиях $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ решение уравнения (11.3) равно $x_1 = 1/2e^{-t} + 1/2e^{3t}$, $x_2 = e^{-1} - e^{3t}$. А при условиях $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ решение уравнения (11.3) равно $x_1 = 1/4e^{-t} - 1/4e^{3t}$, $x_2 = 1/2e^{-1} + 1/2e^{3t}$. Следовательно,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1/2e^{-t} + 1/2e^{3t} & 1/4e^{-t} - 1/4e^{3t} \\ e^{-1} - e^{3t} & 1/2e^{-1} + 1/2e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Задача 1.3. Для каждого фиксированного $t > 0$ рассмотрим оператор $T_t : \tilde{L} \to \tilde{L}$:

$$T_t f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < x < t \\ f(x-t) & , \quad x < t < T. \end{cases}$$

Показать, что семейство операторов $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ образуют сжимающую полугруппу в пространстве $\tilde{L}$.

Задача 11.4. Найти генератор полугруппы $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$.

Решение. Генератором этой полугруппы будет неограниченный оператор: $\Lambda : \tilde{L} \to \tilde{L}$ $\Lambda f(x) = -\frac{df(x)}{dx}$, $f \in \mathcal{D}(\Lambda) = \{f \in H^1(0,T) : f(0) = 0\}$.

Неограниченный оператор $A : H \to H$ называется диссипативным, если для всех $u \in \mathcal{D}(A) \subset H$ выполнено неравенство

$$\mathrm{Re}(Au, u)_H \leqslant 0.$$

Задача 11.5. Показать, что оператор Λ диссипативный.

Решение. Пусть $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$, тогда

$$\operatorname{Re}(\Lambda f, f)_{\tilde{L}} = -\operatorname{Re}\int\limits_0^T f'(x)\overline{f(x)}dx = -1/2\int\limits_0^T \frac{d}{dx}|f(x)|^2 dx = -|f(T)|^2 \leqslant 0.$$

Задача 11.6. Пусть $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ неограниченный оператор, заданный формулой $A = -\frac{d}{dt}$ с областью определения $\mathcal{D}(A) = \{u \in H^1(0,1) : u(0) = cu(1)\}$, где $c \in \mathbb{C}$. Найти все значения параметра c, при которых оператор A будет генератором сжимающей полугруппы.

Решение. Пусть $u \in H^1(0,1)$

$$2\operatorname{Re}(Au,u)_{L_2(0,1)} = -\int\limits_0^1 (u'\overline{u} + \overline{u'}u)dt = -(|u(1)|^2 - |u(0)|^2) = (c^2-1)|u(1)|^2.$$

для $|c| < 1$ оператор A будет диссипативным.

Рассмотрим задачу

$$u' + \lambda u = f,$$

$$u(0) = cu(1)$$

для любой $f \in L_2(0,1)$. Общее решение этой задачи представляется по формуле

$$u(x) = c_1 e^{-\lambda x} + \int\limits_0^x e^{-\lambda(x-t)} f(t)dt,$$

при $|c| < 1$ константа c_1 находится однозначно, в дальнейшем будем считать, что это условие выполнено. Найдем оценку для резольвенты:

$$\|f\|_{L_2(0,1)}\|y\|_{L_2(0,1)} \geqslant \operatorname{Re}((\lambda I - A)y, y)_{L_2(0,1)} =$$

$$\lambda\|y\|^2_{L_2(0,1)} - \operatorname{Re}(Ay,y)_{L_2(0,1)} \geqslant \lambda\|y\|^2_{L_2(0,1)}$$

отсюда

$$\|y\|_{L_2(0,1)} \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L_2(0,1)},$$

или
$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$
В силу теоремы Хилле-Иосиды оператор A порождает сжимающую полугруппу.

Задача 11.7. Рассмотрим оператор $L : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ $Ly = y''$, $y \in \mathcal{D}(L) = \{y \in \mathring{H}^1(Q)(0,1) : Ly \in L_2(0,1)\} = \mathring{H}^1(Q)(0,1) \cap H^2(0,1)$ Показать, что оператор L порождает сжимающую полугруппу.

Решение. При $\lambda > 0$ существует резольвента $(\lambda I - L)^{-1}$. Найдем теперь оценку для резольвенты. Запишем уравнение:
$$(\lambda I - L)y = f,$$
$$\|f\|_{L_2(0,1)}\|y\|_{L_2(0,1)} \geqslant ((\lambda I - L)y, y) = \int_0^1 |y'|^2 dx + \lambda\|y\|^2_{L_2(0,1)} \geqslant \lambda\|y\|^2_{L_2(0,1)},$$
отсюда
$$\|y\|_{L_2(0,1)} \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L_2(0,1)},$$
или
$$\|(\lambda I - L)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$
В силу теоремы Хилле-Иосиды оператор L порождает сжимающую полугруппу.

Задача 11.8. Рассмотрим оператор:
$$L : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$$
$$Ly = y'' + py' + qy,$$
$$y \in \mathcal{D}(L) = \{y \in \mathring{H}^1(Q)(0,1) : Ly \in L_2(0,1)\} = \mathring{H}^1(Q)(0,1) \cap H^2(0,1),$$
где $p, q \in \mathbb{R}$. Показать, что если $q \leqslant 0$, то оператор L порождает сжимающую полугруппу.

Решение. Покажем, что оператор L является диссипативным. Пусть $y \in \mathcal{D}(L)$:

$$\mathrm{Re}(Ly, y)_{L_2(0,1)} = \int\limits_0^1 y''\overline{y}dx + p\int\limits_0^1 y'\overline{y}dx + q\|y\|^2_{L_2(0,1)} =$$

$$-\|y'\|^2_{L_2(0,1)} + p(y(1) - y(0)) + q\|y\|^2_{L_2(0,1)} = -\|y'\|^2_{L_2(0,1)} + q\|y\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant 0.$$

Рассмотрим уравнение:

$$\lambda y - Ly = f, \tag{11.4}$$

где $\lambda > 0$. Покажем, что однородное уравнение (11.4) имеет только тривиальное решение для всех $\lambda > 0$. Действительно, пусть y_0 такое решение. Умножим уравнение (11.4) на y_0 и проинтегрируем на $(0, 1)$, получим

$$\lambda(y_0, y_0)_{L_2(0,1)} - (Ly_0, y_0)_{L_2(0,1)} = 0, \tag{11.5}$$

возьмем в (11.5) вещественную часть и применим полученную ранее оценку для $\mathrm{Re}(Ly, y)_{L_2(0,1)}$:

$$\lambda\|y_0\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant 0,$$

Следовательно, $y_0 = 0$. Поэтому уравнение (11.4) однозначно разрешимо для любой f, что означает, что $\lambda > 0$ принадлежит резольвентному множеству оператора L. Оценка для резольвенты оператора получается так же, как и в задачах 11.6., 11.7.

Литература

[1] *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. — М.:, Мир, 1980.

[2] *Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я.* Обобщенные функции. Т. 4. — М.: Физматгиз, 1961.

[3] *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т.2. — М.: Мир, 1966.

[4] *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.

[5] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.

[6] *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.

[7] *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978.

[8] *Ладыженская О.А.* О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики // Математический сборник. — 1958. — Т. 45 — N 2. — С. 123–158.

[9] *Ладыженская О.А.* О решении нестационарных операторных уравнений // Математический сборник. — 1956. — Т. 39. — N 4. — С. 491–524.

[10] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.

[11] *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977.

[12] *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1983.

[13] *Россовский Л.Е.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений // Математические заметки. — 1996. — Т. 59. — Вып. 1. — с. 103–113.

[14] *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.

[15] *Скубачевский А.Л., Шамин Р.В.* Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Математические заметки. — 1999. — Т. 66. — Вып. 1. — С. 145–153.

[16] *Слободецкий Л.Н.* Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Уч. зап. Ленинградского гос. пед. института им А.И. Герцена. 1958. — Т. 197. — С. 54–112.

[17] *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.

[18] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир., 1980.

[19] *Шамин Р.В.* О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. // Математический сборник. — 2003. — Т. 194. — Вып. 9 — С. 1411-1426.

[20] *Хилле Э, Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.

[21] *Ashyralyev A., Sobolevskii P.E.* Well-posedness of parabolic difference equations. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 1994.

[22] *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — New York–Berlin–Heidelberg: Springer, 1983.

[23] *Skubachevskii A.L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 1997.

[24] *Skubachevskii A.L., Shamin R.V.* The mixed boundary value problem for parabolic differential-difference equation // Functional differential equations. — 2001. — V. 8. — N 3–4. P. 407–424.

ОПИСАНИЕ КУРСА И ПРОГРАММА

Цели и задача курса:

- учебно-методический курс разработан по профилю «Математика», по специальности дифференциальные уравнения;
- учебно-методический курс разработан для студентов 3-го (бакалавриат);
- учебно-методический курс разработан для студентов, обучающихся по направлению «математика»;
- учебно-методический курс носит теоретический характер;

Целью учебно-методического курса «Полугрупп операторов» является обучение студентов современной теории абстрактных параболических задач, изложение современных теорий полугрупп операторов, теории интерполяции. Задача курса не только продемонстрировать современные математические теории, но и показать взаимосвязь между абстрактными понятиями в области функционального анализа и конкретными проблемами теории дифференциальных уравнений в частных производных. Важной задачей курса является также показать применение методов математического моделирования в абстрактных теориях.

Лекции и практические занятия по данному курсу будут проводиться в мультимедийном классе, что позволяет сочетать изложение новых математических результатов и современных вычислительных средств и средств визуализации для лучшего усвоения знаний студентами.

<u>Инновационность курса по содержанию.</u>

Использование теории полугрупп операторов для исследования дифференциальных уравнений в частных производных имеет сравнительно не большую историю (начиная с 40-50-х годов XX века). Поэтому учебно-методических курсов, посвященных методам теории полугрупп, практически не существует. Вместе с тем использование теории полугрупп в теории дифференциальных уравнений в частных производных, в частности в параболических задачах, имеем много преимуществ как научного, так и методического плана. Другая важна инновационная составляющая учебно-методического курса «Полугруппы операторов» состоит в активном использовании различных разделов современной математики таких как: функциональный анализ, теория функций комплексного переменного, теории интерполяции и многих других.

Нетрадиционным для учебных курсов является изучение и использование при изложении основных результатов теории интерполяции гильбертовых пространств. Теория интерполяции гильбертовых пространств являясь современной и сложной теорией, оказывается мощным средством для исследовании ряда трудных проблем в параболических задачах. Заметим, что изучение столь необычной теории несет важный методический эффект при обучении – студенты не только имеют возможность ознакомиться с современными теориями в математике, но и могу почувствовать взаимосвязь многих математических понятий.

Следующим инновационным элементом учебно-методического курса «Полугрупп операторов» является параллельное изучение традиционных постановок задач в теории дифференциальных уравнений в частных производных и теории абстрактных дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах. При этом с одной стороны показывается, что конкретные уравнения и задачи могут быть протрактованы в абстрактной форме, а с другой стороны за многими абстрактными постановками кроются конкретные понятия дифференциальных уравнений.

Другим инновационным моментом курса является использование в курсе последних достижений в области абстрактных дифференциальных уравнений и параболических задач. Многие результаты, которые излагаются в учебно-методическом курсе «Полугрупп операторов», ранее были изложены исключительно в журнальной литературе. При этом эти последние достижения изложены в доступной для студентов форме.

Наконец, инновационным является привлечение вычислительных экспериментов для изучения многих красивых и неожиданных эффектов. При этом применяемые в курсе численные методы, являются строго обоснованными. Более того, для обоснования многих численных схем кроме традиционных методов мы используем собственные методы теории полугрупп.

Инновационность по методике преподавания.

Несмотря на теоретическую направленность курса, мы избрали смешанную методику преподавания курса «Полугруппы операторов». На лекциях мы рассматриваем теорию полугрупп операторов, теории интерполяции, параболических задач, а на семинарских занятиях эти же абстрактные понятия подвергаются систематическому изучению на конкретных примерах, а также с использованием математического моделирования, вычислительных экспериментов.

Инновационность по литературе.

Как уже отмечалось, в учебно-методическом курсе «Теория полугрупп» используются современные факты, изложенные в монографической литературе, а также только в журнальных публикациях. Многие результаты, излагаемые в курсе, были получены самим автором курса.

<u>Инновационность по организации учебного процесса.</u>

Инновационным является использование в учебном процессе не только традиционных форм обучения, таких как лекции и семинарские занятия, но и использование методов математического моделирования, проведение реальных численных экспериментов.

Структура курса

Курс рассчитан на 144 часа учебной нагрузки (один семестр, 4 кредита), из которых 36 часов отводится на лекции, 36 часов – на практические занятия, 72 часа – на самостоятельную работу студента.

<u>Темы лекций.</u>

Тема 1. Введение теорию абстрактных параболических задач *(лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа)***.**
Введение в предмет курса. Рассмотрение истории вопроса. Обзор современных результатов. Обзор литературы.
Введение основных обозначений. Рассмотрение базовых понятий. Рассмотрение постановок абстрактных параболических задач.

Тема 2. Анализ функций со значениями в гильбертовых пространствах *(лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа)*.

Определение функций со значениями в гильбертовых пространствах. Элементарные свойства функций со значениями в пространствах Гильберта. Основные определения математического анализа для функций со значениями в гильбертовых пространствах: предел, непрерывность, дифференцируемость. Определение интеграла от функций со значениями в гильбертовых пространствах.

Доказательство основных теорем относительно функций со значениями в гильбертовых пространствах.

Тема 3. Коэрцитивные операторы *(лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа)*.

Определение коэрцитивных операторов. Основные свойства коэрцитивных операторов.

Примеры коэрцитивных операторов. Доказательство основных неравенств для оператора Лапласа. Введение пространства Соболева с отрицательным показателем.

Спектральные свойства коэрцитивных операторов.

Тема 4. Постановка абстрактной задачи Коши в гильбертовом пространстве *(лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа)*.

Рассмотрение дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах. Задача Коши. Определение слабого решения. Определение сильного решения.

Пример первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

Рассмотрение основных проблем при исследовании абстрактных параболических задач.

Тема 5. Определение теории полугрупп операторов *(лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).*

Определения полугрупп операторов. Основные свойства. Простейшие примеры полугрупп операторов. Идея применения полугрупп операторов для исследования разрешимости параболических задач.

Тема 6. Сильно непрерывные полугруппы *(лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).*

Определение сильно непрерывных полугрупп. Свойства сильно непрерывных полугрупп. Примеры сильно непрерывных полугрупп.

Определение генератора полугруппы операторов. Свойства генераторов сильно непрерывных полугрупп.

Тема 7. Теорема Хиле-Иосиды *(лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).*

Спектральные свойства генераторов полугрупп операторов. Доказательство теоремы Хиле-Иосиды. Следствия теоремы Хиле-Иосиды. Применение теоремы Хиле-Иосиды. Формула для конструктивного представления полугруппы оператора через ее генератор.

Тема 8. Аналитические полугруппы *(лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).*

Определение аналитических полугрупп. Свойства аналитических полугрупп. Примеры аналитических полугрупп.

Теорема об аналитических полугруппах.

Различные эквивалентные определения аналитических полугрупп. Контрпримеры в теории аналитических полугрупп.

Связь генераторов аналитических полугрупп с коэрцитивными операторами.

Тема 9. Применение теории полугрупп к задаче Коши *(лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).*

Применение теории аналитических полугрупп в задачах Коши для абстрактных параболических уравнений.

Теорема единственности слабого решения для абстрактной параболической задачи Коши.

Существование слабого решения для абстрактной параболической задачи.

Определение пространства сильных решений и доказательство теорем о существовании сильных решений задачи Коши в гильбертовом пространстве.

Тема 10. Введение в теорию интерполяцию *(лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).*

Основные задачи теории интерполяции гильбертовых пространств. Промежуточные пространства. Определение интерполяционных пространств. Простейшие свойства интерполяционных пространств.

Различные методы построения интерполяционных пространств. Введение интерполяционного функтора.

Тема 11. Интерполирование областей определения коэрцитивных операторов *(лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).*

Теоремы об интерполировании областей определения коэрцитивных операторов. Свойства интерполяционных пространств для областей определения коэрцитивных операторов.

Построение интерполяционных операторов в этом случае.

Тема 12. Свойства интерполяционных пространств *(лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).*

Основные свойства интерполяционных пространств. Интерполирование сопряженных пространств.

Основная интерполяционная теорема. Дополнительные примеры интерполяционных пространств.

Тема 13. Конструктивное описание интерполяционных пространств *(лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).*

Проблема конструктивного описания интерполяционных пространств. Связь с проблемой описания пространств начальных данных.

Доказательство основной теоремы о конструктивном описании интерполяционных пространств.

Диаграмма, демонстрирующая вложение пространств.

Тема 14. Пространства начальных данных для абстрактных параболических задач *(лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).*

Определения пространств начальных данных для задачи Коши. Примеры различных пространств начальных данных для известных задач.

Применение теории полугрупп и теории интерполяции для конструктивного описания пространств начальных данных.

Тема 15. Проблема Като *(лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).*

Формулировка проблемы Като об области определения корня квадратного из коэрцитивного оператора. История вопроса. Контрпирмер Макинтоша и его последние результаты.

Связь проблемы Като с проблемой описания пространств начальных данных для параболических задач.

Выделение нового класса операторов, для которых верна гипотеза Като. Примеры.

Тема 16. Абстрактные функционально-дифференциальные уравнения *(лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).*

Идея функционально-дифференциальных уравнений. История вопроса. Параболические дифференциально-разностные уравнения. Параболические функционально-дифференциальные уравнения с растяжением и сжатием аргументов.

Примеры функционально-дифференциальных уравнений.

Сложности в исследовании функционально-дифференциальных уравнений. Сильная разрешимость параболических функционально дифференциальных уравнений. Конструктивное описание пространств начальных данных для функционально-дифференциальных уравнений.

Тема 17. Примеры абстрактных параболических задач *(лекции – 4 часа, практические занятия – 4 часа, самостоятельная работа – 8 часа).*

Рассмотрение конкретных примеров функционально-дифференциальных уравнений. Вопросы приближенное решения параболических задач для функционально-дифференциальных уравнений.

Описание системы контроля знаний.

Виды контроля знаний:

- контрольная работа
- написание реферата по выбранной теме
- итоговый контроль в форме письменной итоговой работы

Для оценки работы студента применяется балльная система. Наилучшему результату соответствуют 100 баллов, которые распределяются по видам контроля следующим образом:

- контрольная работа – от 0 до 25 баллов;
- реферат – от 0 до 25 баллов;
- итоговая работа – от 0 до 50 баллов.

Целью контрольной работы является проверка усвоения материала курса. Работа выполняется каждым студентом в аудитории, без обращения к конспектам и литературе по предмету. Контрольная работа состоит из двух задач. Оцениваются как ход решения (чёткость рассуждений, достаточная аргументация), так и правильность полученного ответа. Точное содержание контрольной работы студентам заранее неизвестно. Примерные варианты приведены ниже.

Вариант 1.

1. Привести примеры функциональных пространств для задачи Дирихле для эллиптического оператора $2m$-го порядка таким образом, чтобы этот оператор был генератором аналитической полугруппы.

2. Найти пространство начальных данных для третьей смешанной задачи для уравнения теплопроводности.
3. Найти интерполяционные пространства для конкретно заданной интерполяционной пары.

Вариант 2.

1. Привести примеры функциональных пространств для задачи Дирихле для эллиптического дифференциально-разностного оператора таким образом, чтобы этот оператор был генератором аналитической полугруппы.
2. Найти пространство начальных данных для задачи Коши для уравнения теплопроводности.
3. Найти интерполяционные пространства для конкретно заданной интерполяционной пары.

Соответствие суммарного количества набранных баллов итоговой оценке (по пятибалльной шкале и европейскому стандарту) показано в таблицах.

Баллы	0-50	51-68	69-85	86-100
Оценка	неуд.	удовл.	хорошо	отлично

Баллы	0-30	31-50	51-62	63-73	74-83	84-92	93-100
Оценка	F	FX	E	D	B	C	A

Методика выставления и шкала итоговых оценок отвечают принятым в РУДН для теоретических дисциплин.

Программа курса

Аннотированное содержание курса

Раздел 1. Абстрактные параболические задачи

Темы: 1, 2, 3, 4.

Трудоёмкость: 1 кредит, 32 часов, из них

- лекции – 8 часов,

- практические занятия – 8 часа,

- самостоятельная работа – 16 часа.

В первом разделе рассматриваются абстрактные параболические задачи. Известно, что многие задачи теории дифференциальных уравнений в частных производных могут быть записаны в абстрактной постановке. Рассмотрение абстрактных постановок задач имеет не только научное преимущество, но и большое методическое значение для изучения. В частности линейные параболические задачи допускают характерную запись в форме дифференциальных уравнений в гильбертовых (или более обще – в банаховых) пространствах. При этом основные моменты, характеризующие параболические задачи, выявляются значительно более четко.

Среди дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах, мы выделяем, так называемые, абстрактные параболические задачи. Для рассмотрения дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах необходимо соблюдать особую осторожность, поэтому в первом разделе уделено много внимания анализу функций со значениями в гильбертовом пространстве.

Ядром абстрактных параболических уравнений является коэрцитивный оператор. В параболических уравнениях этот оператор есть соответствующий эллиптический оператор. При рассмотрении абстрактных постановок задач, мы рассматриваем именно коэрцитивные операторы. Изучаем их свойства, рассматриваем многие примеры операторов, которые являются коэрцитивными.

При рассмотрении примеров операторов в Соболевских пространствах, мы вынуждены вводить и изучать основные свойства пространств Соболева с отрицательными показателями.

Рассмотрение уравнений и задачи Коши в гильбертовом пространстве подразумевает детальное изучение различных определений решений этих уравнений. Мы рассматриваем как слабые решения, так и сильные решения. При рассмотрении сильных решений, мы сталкиваем с одной из характерных трудностей параболических задач – определение пространств начальных данных. Действительно, при постановке задачи Коши мы вынуждены рассматривать значения решения при фиксированном значении времени. Однако при изучении уравнений в пространствах измеримых функций (в пространствах Соболева) мы должны рассматривать следы решений. При этом пространство следов сильных решений, как правило, представляет собой сложное пространство. Для обычных параболических уравнений это пространство может быть описано, зная результаты о гладкости решений, или сводя задачу к самосопряженному случаю. Однако в ряде примеров, в частности, в теории функционально-дифференциальных уравнений мы имеем лишь ограниченные знания относительно гладкости сильных решений, а самое важное, мы не можем свести задачу к самосопряженному случаю, поскольку нелокальные операторы преобразования пространственного аргумента содержатся в старших членах уравнения.

Раздел 2. Полугруппы операторов

Темы: 5, 6, 7, 8, 9.

Трудоёмкость: 1 кредит, 40 часов, из них

- **лекции** – 10 часов,
- **практические занятия** – 10 часа,
- **самостоятельная работа** – 20 часа.

Теория полугрупп операторов и ее применимость к параболическим задачам возникла в середине XX века. Истоками этой теории были именно параболические задачи. В частности в работах В. Феллера теория полугрупп операторов возникла при рассмотрении марковских процессов и диффузионных процессов. Были отмечены характерные «полугрупповые» свойства решений параболических задач.

Дальнейшее развитие теории полугрупп операторов позволило найти общие теоремы, гарантирующие существование полугрупп операторов для заданных абстрактных параболических задач. Сама теория получила большое развитие, как в области самой теории, так и в области приложений теории полугрупп к конкретным задачам. К сожалению, в настоящий момент в практике преподавания теории дифференциальных уравнений в частных производных теория полугрупп достаточно редко изучается.

В настоящем разделе учебно-методического курса «Полугруппы операторов» рассматриваются основы теории полугрупп и ее приложения в параболических задачах. Мы рассматриваем наиболее принципиальные моменты этой теории.

Поскольку в теории полугрупп существует много различных определений тех или иных классов полугрупп, то мы наиболее внимательно рассматриваем сильно непрерывные и аналитические полугруппы. При рассмотрении теории полугрупп, мы постоянно рассматриваем конкретные примеры полугрупп. Все свойства полугрупп также демонстрируются на примерах.

Изучение теории полугрупп начинается с рассмотрения сильно непрерывных полугрупп. Показано, что эти полугруппы порождаются неограниченными генераторами полугрупп. На лекциях изучаются спектральные свойства генераторов сильно непрерывных полугрупп. Доказывается основная в теории сильно непрерывных полугрупп теорема – теорема Хиле-Иосиды. Эта теорема дает критерий (необходимые и достаточные условия) существования сильно непрерывных полугрупп в конкретных ситуациях. Изучение это теоремы позволяет глубоко понять «механику» полугрупп операторов. Теорема Хиле-Иоссиды также позволяет применять теорию полугрупп во многих конкретных ситуациях. Помимо классической теоремы Хиле-Иосиды мы рассматриваем многочисленные следствия и обобщения этой теоремы.

В связи с теоремой Хиле-Иосиды в курсе много внимания уделяется спектральным аспектам генераторов полугрупп.

Как уже подчеркивалось, сильно непрерывные полугруппы являются основным классом полугрупп, которые возникают при рассмотрении абстрактной задачи Коши в гильбертовом пространстве. Однако для более глубокого изучения абстрактных параболических задач необходимо рассматривать более узкий класс полугрупп, называемых аналитическими полугруппами.

Аналитические полугруппы характеризуются различными, но взаимосвязанными свойствами. В частности, существует несколько различных определений аналитических полугрупп. Во-первых, аналитические полугруппы можно определить как сильно непрерывные полугруппы такие, что они допускают аналитическое продолжение в сектор комплексной плоскости, содержащий вещественную полуось, по полугрупповому параметру. Во-вторых, аналитические полугруппы можно определить как полугруппы, допускающие оценку специального вида производной по параметру в нуле. Наконец, в-третьих, аналитические полугруппы можно определить по спектральным свойствам генератора. Более точно, по оценке резольвенты генератора. Все три определения очень важны как для самой теории аналитических полугрупп, так и для применений теории аналитических полугрупп в параболических задачах.

В настоящем курсе подробно изучаются эти свойства, рассматривается теорема об эквивалентности различных определений.

Полученные результаты относительно аналитических полугрупп применяются для изучения параболических задач. Мы показываем, что если абстрактная задача Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве имеет сильное решение, то соответствующий оператор является генератором аналитической полугруппы. Это демонстрирует, необходимость рассмотрение именно аналитических полугрупп при изучении сильной разрешимости абстрактных параболических уравнений.

С другой стороны априорное знание, что оператор, задающий задачу Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве, является генератором аналитической полугруппы, позволяет устанавливать теоремы существования и единственности сильных решений этой задачи.

При установлении теорем о существовании сильных решений мы накладываем минимальные ограничения на правую часть уравнения.

В известной литературе обычно рассматриваются задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах в пространствах непрерывных функций по временной переменной. Однако современный уровень изучения абстрактных параболических задач требует рассмотрения решений в пространствах измеримых функций по временной переменной. К сожалению работ, содержащих доказательства существования сильных решений в пространствах измеримых функций при минимальных предположениях относительно правой части, практически нет, либо эти работы являются трудно доступными для российской аудитории. В нашем курсе мы приводим подробные доказательства теорем о сильной разрешимости абстрактных параболических уравнений в пространствах измеримых функциях при минимальных ограничениях на правую часть уравнения.

Использование аппарата теории аналитических полугрупп позволяет построить на единой основе стройную теорию разрешимости абстрактных параболических уравнений.

Использование в учебно-методическом курсе «Полугруппы операторов» большого количества примером, демонстрирующих все основные понятия, излагаемые в курсе, позволяет достичь единства абстрактной теории и решения конкретных проблем в теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Другой важной особенностью этого учебно-методического курса является применение теории полугрупп не только для доказательства теорем существования и единственности для абстрактных параболических уравнений, но и для построения новых численных схем, позволяющих проводить численное моделирование параболических задач.

Применение теории полугрупп к вычислительным методам в теории параболических задач является достаточно новым подходом. Однако благодаря тому, что полугруппы операторов хорошо «чувствуют» особенности параболических задач, применение методов аналитических полугрупп операторов в задачах численного моделирования часто оказывается очень эффективным.

Другой целью применения полугрупп в численных методах является учебная задача продемонстрировать природу полугрупп операторов в параболических задачах.

Раздел 3. Теория интерполяции

Темы: 10, 11, 12, 13.

Трудоёмкость: 1 кредит, 32 часов, из них

- лекции – 8 часов,

- практические занятия – 8 часа,

- самостоятельная работа – 16 часа.

В третьем разделе учебно-методического курса «Полугруппы операторов» рассматриваются основы теории интерполяции гильбертовых пространств. Эта теория находится на стыке таких различных математических дисциплин, как функциональный анализ, теория функций и других современных разделов математики.

В нашем курсе применение методов теории интерполяции совместно с методами теории полугрупп операторов является ключевым моментом. Теория, излагаемая в нашем курсе, имеет своей целью построить основы теории параболических функционально-дифференциальных уравнений. И одной из самых трудных задач является задача описания пространств начальных данных для задачи Коши для параболических уравнений. С помощью методов теории интерполяции гильбертовых пространств можно получить исчерпывающие критерии сильной разрешимости абстрактных задач Коши в гильбертовом пространстве. Комбинация же методов теории полугрупп операторов и теории интерполяции пространств позволяет построить теорию сильной разрешимости для абстрактных параболических задач.

Хотя многие идеи, используемы в этом разделе нашего курса были в той или иной степени известны среди специалистов в теории полугрупп, такого органичного и последовательного изложения этих теорий в применении к параболическим задачам, практически нет даже в монографической литературе.

Следует отметить, что изложение в нашем курсе является доступным для студентов. Сложные, а порой очень громоздкие, построения в теории интерполяции нами изложены доступно. Конечно, мы далеко не всегда приводим и доказываем самые общие результаты. В частности, в нашем курсе рассматриваются в основном методы теории интерполяции именно гильбертовых пространств, а не банаховых пространств, что является обычным изложением в большинстве книг по теории интерполяции.

Мы рассматриваем основные определения теории интерполяции, после чего переходим к конкретным методам построения интерполяционных пространств.

Как известно, существует несколько различных методов построения интерполяционных пространств. В частности, методы интерполяции делятся на вещественные методы интерполяции и комплексные методы интерполяции. В случае рассмотрения более общих пространств эти методы приводят, вообще говоря, к различным интерполяционным пространствам. В настоящем учебно-методическом курсе используются практически всегда только вещественные методы интерполяции гильбертовых пространств.

После изучения различных методов интерполяции гильбертовых пространств мы переходим к рассмотрению различных свойств интерполяционных пространств и соответствующих теорем. Мы рассматриваем вопросы сопряженных интерполяционных пространств. Изучаются другие факты из теории интерполяции гильбертовых пространств. Подробно рассматривается основная интерполяционная теорема.

Важное значение имеет связь теории интерполяции гильбертовых пространств с теорией полугрупп операторов. В частности подробно выясняется вопрос об интерполяции области определения коэрцитивного оператора. Для описания пространств начальных данных для задачи Коши в гильбертовом пространстве принципиальное значение имеет интерполяционное пространство между областью определения коэрцитивного оператора и основным гильбертовым пространством. К сожалению, в теории интерполяции редко удается получить конструктивное описание интерполяционных пространств. Другой трудностью является то обстоятельство, что при изучении функционально-дифференциальных уравнений мы, как правило, не имеем точного описания области определения соответствующего эллиптического оператора.

Последовательное применение методов интерполяции гильбертовых пространств и теории полугрупп операторов позволяет получить конструктивное описание промежуточного пространства в раде важных случаев.

Третий раздел учебно-методического курса завершается центральным результатом, принадлежащим автору курса. Этот результат позволяет выделить специальный класс коэрцитивных операторов, для которых можно конструктивно описать интерполяционное пространство между их областью определения и основным гильбертовым пространством. При этом условия выделяющий этот класс операторов могут быть конструктивно проверены для широкого круга важных параболических задач. В частности в теории функционально-дифференциальных уравнений эти условия являются естественными. Этот главный результат приводится с полным доказательством, и иллюстрируются примерами. Для лучшего понимания этого доказательства основная идея иллюстрируется также на специальных диаграммах вложения пространств.

Раздел 4. Функционально-дифференциальные уравнения

Темы: 14, 15, 16, 17.

Трудоёмкость: 1 кредит, 32 часов, из них

- лекции – 8 часов,

- практические занятия – 8 часа,

- самостоятельная работа – 16 часа.

Теория функционально-дифференциальных уравнений имеет большую историю, однако ее современное состояние определилось фундаментальными работами середины XX века. В последнее время получили развитие параболические функционально-дифференциальные уравнения. Этот интерес обеспечивается рядом интересных приложений в физике. В частности в нелинейно оптике и теории плазмы.

В настоящем курсе функционально-дифференциальные уравнения являются тем объектом, на котором мы испытываем и к которому мы применяем результаты, полученные в абстрактной форме в предыдущих разделах.

Следуя духу нашего курса излагать материал от абстрактных понятий к конкретным проблемам, мы начинаем изучать функционально-дифференциальные уравнения с наиболее абстрактной формы. Мы рассматриваем абстрактное операторно-дифференциальное уравнение в пространстве измеримых функций. При этом мы накладываем на операторы в нашем уравнении определенные условия. Эти условия соответствуют большинству преобразований пространственных переменных, которые используются в определении функционально-дифференциальных уравнений.

В качестве функционально-дифференциальных уравнений мы рассматриваем параболические уравнения, содержащие преобразование пространственных аргументов в старших членах соответствующего эллиптического оператора. Такие функционально-дифференциальные уравнения обладают различными необычными свойствами, которые доставляют серьезные трудности для исследования. Одной из принципиальной трудности, присущей функционально-дифференциальным уравнениям является эффект нарушения гладкости сильных решений внутри области, в которой рассматривается уравнение. Эта трудность препятствует применению стандартных методов дифференциальных уравнений для исследования функционально-дифференциальных уравнений. В разделе, посвященном функционально-дифференциальным уравнениям, мы подробно рассматриваем этот эффект. Приводим различные примеры, демонстрирующие нарушение гладкости внутри области.

Другой принципиальной трудностью в изучении параболических функционально-дифференциальных уравнений является несамосопряженность соответствующего эллиптического оператора. Методы теории полугрупп операторов позволяют решить эту трудность при доказательстве теорем существования и единственности решений. Однако при исследовании пространств начальных данных эта трудность является одной из основных.

Центральной темой четвертого раздела учебно-методического курса «Полугруппы операторов» является вопрос о конструктивном описании пространств начальных данных. Под пространством начальных данных мы понимаем такое множество (подпространство) в основном гильбертовом пространстве, что начальных данных из этого множества существует сильное решение параболического уравнения. Методами теории полугрупп легко можно доказать, что сильное решение всегда существует, если начальная функция принадлежит области определения генератора аналитической полугруппы. Однако это условие (принадлежности начальной функции области определения генератору полугруппы) является достаточным, но необходимым условием. Для выяснения минимальных требований на начальную функцию такую, что для соответствующей задачи Коши существует сильное решение, необходимо привлекать методы теории интерполяции гильбертовых пространств. Комбинацией различных результатов теории аналитических полугрупп операторов и теории интерполяции получается следующий результат. Пространство начальных данных, гарантирующее существование сильного решения, описывается интерполяционным пространством между областью определения генератора аналитической полугруппы и основным гильбертовым пространством. Казалось бы вопрос с определением пространства начальных данных решен. Однако при применении этого результата к различным параболическим задачам, в частности, к задачам для параболических функционально-дифференциальных уравнений, мы сталкиваемся с рядом принципиальных трудностей.

Во-первых, как мы уже отмечали, процедура конструктивного описания интерполяционных пространств, как правило, либо очень трудная, либо практически невозможна.

Во-вторых, сама область определения генератора аналитической полугруппы, во многих интересных задачах нам неизвестна. В частности, как уже было отмечено, теория функционально-дифференциальных уравнений часто сталкивается со случаями, когда область определения соответствующих эллиптических операторов представляет собой очень сложное множество. Часто, эта область до конца не известна из теории эллиптических функционально-дифференциальных операторов.

Таким образом, мы сталкиваемся с трудной задачей описания пространства начальных данных. В настоящем разделе курса «Полугруппы операторов» решаем эту проблему с помощью результатов полученных в предыдущем разделе «Теория интерполяции». При этом мы можем использовать полученные ранее результаты об интерполяции областей определения генераторов аналитических полугрупп.

В настоящем разделе мы получаем конструктивные результаты, конструктивно описывающие пространства начальных данных для абстрактных параболических функционально-дифференциальных уравнений.

С задачей конструктивного описания пространств начальных данных для параболических уравнений тесно связана известная проблема Като. Эта проблема впервые была поставлена известным математиком Т. Като в 1961 году. Смысл этой проблемы сводился к гипотезе о том, что для любого диссипативного оператора область определения квадратного корня совпадает (с точностью до эквивалентных норм) с областью определения квадратного корня из сопряженного оператора.

Эта проблема получила большую известность. Но вскоре было показано, что эта гипотеза в такой широкой формулировке неверна. После этого проблема Като была переформулирована для эллиптических операторов. Однако решение это (переформулированной проблемы) оказалось также очень трудной. И лишь в начале XXI века было дано положительное решение этой проблемы для эллиптических операторов с измеримыми коэффициентами.

В настоящем учебно-методическом курсе мы рассматриваем проблему Като в применении к функционально-дифференциальным операторам. Таким образом, мы выделили новый класс операторов, для которых верна гипотеза Като. Этот новый класс включает в себя важные функционально-дифференциальные операторы, которые имеют важные приложения.

Четвертый раздел нашего курса представляет основы теории параболических функционально-дифференциальных уравнений. При этом мы начинаем рассмотрения с общих операторно-дифференциальных уравнений. В этих уравнениях вводятся абстрактные операторы, в качестве которых могут выступать большинство известных операторов преобразования пространственных аргументов, которые встречаются в функционально-дифференциальных уравнениях.

Для этого операторно-дифференциального уравнения мы показываем, что условия для применимости наших результатов о вычислении пространств начальных данных. Следующим шагом является установление области определения квадратного корня соответствующего коэрцитивного оператора. Из соображений симметрии мы получаем, что это же множество является областью определения квадратного корня сопряженного оператора.

В дальнейшем мы рассматриваем различные конкретные функционально-дифференциальные уравнения: дифференциально-разностные уравнения и функционально-дифференциальные уравнения с растяжением и сжатием аргументов.

Дифференциально-разностные уравнения параболического типа представляют собой параболические уравнения, содержащие разностные операторы (операторы сдвига аргументов) в старших членах своей эллиптической части. Эти уравнения имеют важные приложения в теории плазмы и нелинейной оптике. В тоже время сильные решения параболических дифференциально-разностных уравнений, как мы уже отмечали, обладают рядом необычных свойств – гладкость этих решений может нарушаться внутри области, и сохраняться лишь в цилиндрических подобластях. В нашем курсе мы исследуем гладкость сильных решений.

Другим важным примером параболических функционально-дифференциальных уравнений является параболические функционально-дифференциальные уравнения с растяжением и сжатием аргументов.

Список литературы

Обязательный

- Шамин Р.В. О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. // Математический сборник, том 194, 2003, вып. 9, с. 1411-1426.
- Скубачевский А.Л., Шамин Р.В. Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Математические заметки, т. 66, вып. 1, 1999, с. 145--153.
- Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., Мир, 1971.
- Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., Мир., 1980.
- Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972.
- Иосида К. Функциональный анализ. М., Мир, 1967.
- Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., Наука, 1967.
- Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М., Наука, 1978.
- Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М., Мир, 1980.
- Россовский Л.Е. Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений // Математические заметки, т. 59, вып. 1, 1996, с. 103--113.
- Хилле Э, Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1962.
- Ashyralyev A., Sobolevskii P.E. Well-posedness of parabolic difference equations. Basel--Boston--Berlin, Birkhauser, 1994.

* Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York--Berlin--Heidelberg, Springer, 1983.
* Skubachevskii A.L. Elliptic functional differential equations and applications. Basel--Boston--Berlin, Birkhauser, 1997.
* Skubachevskii A.L., Shamin R.V. The mixed boundary value problem for parabolic differential-difference equation // Functional differential equations, vol. 8, 2001, N 3--4, p. 407--424.

<u>Дополнительный</u>

* Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я. Обобщенные функции, т. 4, Физматгиз, 1961.
* Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т.2, М., Мир, 1966.
* Ладыженская О.А. О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики // Математический сборник, т. 45, N 2, 1958, с. 123--158.
* Ладыженская О.А. О решении нестационарных операторных уравнений // Математический сборник, т. 39, N 4, 1956, с. 491--524.
* Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М., Мир, 1977.
* Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., Наука, 1983.
* Рудин У. Функциональный анализ. М., Мир, 1975.
* Слободецкий Л.Н. Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Уч. зап. Ленинградского гос. пед. института им А.И. Герцена, том 197, 1958, с. 54--112.

- Auscher P., Hofmann S., McIntosh A., Tchamitchian P. The Kato square Root problem for higher order elliptic operators and systems on R^n // Journal of Evolution Equations, v. 1, N4, 2001.
- Kato T., McLeod J.B. The functional differential equation // Bull. Amer. Math.Soc. v. 77 (1971), 891-937.
- McIntosh A. On the Comparability of A^{1/2} and A^{*1/2} // Proc. Amer. Math.Soc., v. 32 (1972), 430-434.

Темы рефератов

1. Различные примеры коэрцитивных операторов.
2. Различные классы полугрупп.
3. Сравнение различных эквивалентных определений аналитических полугрупп.
4. Различные способы определения интерполяционных пространств.
5. Применение теории полугрупп для определения и интерполяции функциональных пространств.
6. Пространства Бесова.
7. Комплексные методы интерполяции гильбертовых пространств.
8. Контрпримеры в проблеме Като.
9. Последние достижения в проблеме Като для эллиптических операторов с измеримыми коэффициентами.
10. Дифференциально-разностные уравнения параболического типа.
11. Функционально-дифференциальные уравнения параболического типа с растяжением и сжатием аргументов.
12. Параболические уравнения с нелокальными краевыми условиями. Примеры таких задач.
13. Численное исследование пространств начальных данных.

14. Численное моделирование параболических задач с помощью методов теории полугрупп.
15. Численное моделирование в задачах теории интерполяции гильбертовых пространств.
16. Численное моделирование нелокальных параболических задач.

Учебный тематический план курса

№	Название разделов и темы	Всего часов	в том числе		
			лекции	практ. занятия	самост. работа
1.	**Абстрактные параболические задачи**				
1.1	Введение теорию абстрактных параболических задач	8	2	2	4
1.2	Анализ функций со значениями в гильбертовых пространствах	8	2	2	4
1.3	Коэрцитивные операторы	8	2	2	4
1.4	Постановка абстрактной задачи Коши в гильбертовом пространстве	8	2	2	4
2.	**Полугруппы операторов**				
2.1	Определение теории полугрупп операторов	8	2	2	4
2.2	Сильно непрерывные полугруппы	8	2	2	4
2.3	Теорема Хиле-Иосиды	8	2	2	4
2.4	Аналитические полугруппы	8	2	2	4
2.5	Применение теории полугрупп к задаче Коши	8	2	2	4
3.	**Теория интерполяции**				
3.1	Введение в теорию интерполяцию	8	2	2	4

№	Название разделов и темы	Всего часов	в том числе		
			лекции	практ. занятия	самост. работа
3.2	Интерполирование областей определения коэрцитивных операторов	8	2	2	4
3.3	Свойства интерполяционных пространств	8	2	2	4
3.4	Конструктивное описание интерполяционных пространств	8	2	2	4
4.	**Функционально-дифференциальные уравнения**				
4.1	Пространства начальных данных для абстрактных параболических задач	8	2	2	4
4.2	Проблема Като	8	2	2	4
4.3	Абстрактные функционально-дифференциальные уравнения	8	2	2	4
4.4	Примеры абстрактных параболических задач	16	4	4	8
Итог		**72**	**36**	**18**	**18**