ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «ОБРАЗОВАНИЕ»
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

А.В. КРАСНОСЛОБОДЦЕВ

# ГРУППОВОЙ И БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ПЕРЕНОСА, ВОЗНИКАЮЩИХ В БИОФИЗИКЕ

Учебное пособие

Москва

2008

*Инновационная образовательная программа*
*Российского университета дружбы народов*

**«Создание комплекса инновационных образовательных программ и формирование инновационной образовательной среды, позволяющих эффективно реализовывать государственные интересы РФ через систему экспорта образовательных услуг»**

Экспертное заключение –

доктор физико-математических наук, доцент *М.И. Скворцова*

**Краснослободцев А.В.**

Групповой и бифуркационный анализ нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в задачах переноса, возникающих в биофизике: Учеб. пособие. – М.: РУДН, 2008. – 194 с.

В пособии дается широкий обзор групповых методов решения и анализа дифференциальных и других уравнений, возникающих в различных вопросах математической физики. В качестве основного объекта первоначального изучения были взяты уравнения, часто применяемые в биофизике, и модельные уравнения линейной и нелинейной диссипативной физики, к ним примыкающие. Учебное пособие адресовано магистрам, обучающимся по специальностям «Математика», «Прикладная математика».

***Учебное пособие выполнено в рамках инновационной образовательной программы Российского университета дружбы народов, направление «Комплекс экспортоориентированных инновационных образовательных программ по приоритетным направлениям науки и технологий», и входит в состав учебно-методического комплекса, включающего описание курса, программу и электронный учебник.***

## ОГЛАВЛЕНИЕ

## Введение

Студенты естественнонаучного профиля впервые сталкиваются с групповым анализом дифференциальных уравнений на втором курсе, когда слушают курс по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Однородные, обобщенно-однородные уравнения, интегрирующий множитель для уравнений первого порядка – вот те задачи, которые студенты решают, используя каждый раз некоторые специальные методы, между которыми на первый взгляд нет никакой связи. В курсе уравнений математической физики строят ядро Пуассона для уравнения теплопроводности, используя теорему о свертке. Групповой смысл этого решения также остается непроясненным. Автомодельные решения, пи-теорема в механике сплошных сред, теоретической механике имеют то же происхождение. Поэтому представляется разумным дать широкий обзор групповых методов решения и анализа дифференциальных и других уравнений, возникающих в различных вопросах математической физики. В качестве основного объекта первоначального изучения были взяты уравнения, часто применяемые в биофизике, и модельные уравнения линейной и нелинейной диссипативной физики, к ним примыкающие.

Биофизические модели процессов переноса связывают между собой различным образом диффузию и нелинейность, причем диффузия также может быть и неоднородной и нелинейной. Моделей в биофизике к настоящему времени накоплено великое множество, мы остановились, прежде всего, на уравнении теплопроводности, уравнении Бюргерса, обобщенных уравнениях Фишера (Колмогорова-Петровского-Пискунова), уравнениях Белоусова-Жаботинского. Первые два уравнения взяты, поскольку в них диффузионные и нелинейные процессы выражены в чистом виде. Подчеркнем, что, однако, эти уравнения рассматриваются как первоначальный учебный материал по теоретико-групповым свойствам дифференциальных уравнений с частными производными.

Из другого материала отметим рассмотрение основных теоретико-групповых вопросов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Причем рассмотрены как классические симметрии Ли, так и динамические симметрии. Указаны различия между ними. Изучение динамических симметрий позволяет в дальнейшем перейти к симметрийному изучению интегрируемых бесконечномерных систем.

Отдельный параграф посвящен симметриям линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Приведены различные подходы к этим вопросам, в том числе дано определение нелиевских симметрий. Указаны возможные нелокальные обобщения.

Из современного материала в пособии рассмотрены вопросы группового анализа нелинейных интегродифференциальных уравнений и бесконечных систем дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих как законы сохранения для интегродифференциальных уравнений. Круг решенных задач здесь не слишком широк, это обусловлено отсутствием общего подхода к подобного рода задачам. В пособии изложены результаты автора по групповому анализу интегро-дифференциальных уравнений Бенни, описывающих сильно нелинейные волны на воде со свободной поверхностью, плазменным уравнениям, описывающим ионосферную плазму, и модельным кинетическим уравнениям, возникшим как замена уравнения Больцмана. Изучены полные алгебры классических симметрий, получены формулы производства решений, не имеющие групповой характер. Кроме того, найдены максимальные алгебры классических симметрий для эволюционных интегро-дифференциальных уравнений с квадратичной гидродинамической нелинейностью. В частности, на этом пути была построена полная алгебра классических симметрий для уравнения Бенжамина-Оно.

Всюду в пособии, там, где это, возможно, подчеркивается роль инвариантно-групповых решений для получения временной асимптотики задачи Коши для  дифференциальных уравнений с частными производными. Для биофизических уравнений подробно рассмотрен этот круг вопросов.

В книге также представлены некоторые вопросы теории бифуркаций. Прежде всего, речь идет о теореме Хопфа на плоскости. Изучаемые биофизические модели допускают решения, инвариантные относительно некоторых однопараметрических групп. Фактор-система в этом случае обычно представляет двумерную динамическую систему, которая, как правило, зависит от параметра. Появление  их периодических решений в зависимости   от изменения параметра позволяет изучить бифуркационная техника, которая в дальнейшем может быть применена к многомерным и бесконечномерным системам.

Отметим то, чего нет в пособии, и что предполагается изложить в предполагаемой  второй части. Это, прежде всего вариационные симметрии, контактные преобразования, группы Ли-Бэклунда (или высшие симметрии), теоретико-групповые методы асимптотического анализа динамических систем и сопутствуюшие им вопросы теории бифуркаций.  Несмотря на это, автор надеется, что настоящая книга, основанная на реальных лекциях и практических занятиях, будет полезна не толькоширокому кругу студентов, но и читателям, интересующимся представленными выше вопросами.

## Глава 1. Однопараметрические группы

### § 1. Сведения из теории матричных групп и матричных алгебр Ли

В этом параграфе рассматриваются матричные группы и матричные алгебры, изучается связь между ними. Используя матричную экспоненту, на уровне матричных групп и алгебр Ли фактически доказаны теоремы Ли, устанавливающие связь между общими алгебрами и группами Ли.

**Пример 1.** *Матричные группы преобразований*

$GL(n,R)$, $SL(n,R), O(n,R), SO(n,R), U(n), SU(n)$.

Множество всех квадратных матриц с вещественными элементами обозначается как $M(n,R)$. $M(n,R)$ является линейным пространством, изоморфным пространству $R^{n^2}$, координатами которого являются матричные элементы $a^i_j$. Множество $M(n,R)$ не является группой по умножению, так матрицы, у которых $\det A = 0$, не являются обратимыми.

Норма в $M(n,R)$ задается формулой $|A| = (\sum_{i,j=1}^{n} \left|a^i_j\right|^2)^{\frac{1}{2}}$. Выполняется неравенство треугольника $|A+B| \le |A| + |B|$, а также неравенство $|AB| \le |A||B|$.

Справедлива следующая лемма, которая также выполняется и в бесконечномерном случае.

**Лемма.** *Если* $|A| < 1$, *то матрица* $I - A$ *обратима, где* $I$ *- это единичная матрица, при этом обратная матрица представляется в виде*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \qquad (1)$$

Доказательство: так как $|A|<1,$ то $\sum_{k=0}^{\infty}\left|A^k\right| \le \sum_{k=0}^{\infty}|A|^k < \infty$ сходится как геометрическая прогрессия, при этом $\left|\sum_{k=1}^{n} A^k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |A|^k$. Следовательно, ряд $I + A + A^2 + A^3 + A^4 + \ldots$ сходится. Так как для всякого $n$ верно равенство, то, переходя к пределу (ряд сходится) и учитывая $\left|A^{n+1}\right| \le |A|^{n+1}$, $\lim_{n\to\infty}|A|^{n+1} = 0,$ получим

$$(I - A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k (I - A) = I; \Rightarrow (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Из леммы следует возможность ввести в окрестности $I$ (по норме) координаты следующим образом: $x_j^i(A) = a_j^i - \delta_j^i, \delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j; \\ 0, i \ne j. \end{cases}$

Из леммы следует, что $I + tA,$ где $A$- произвольная матрица при достаточно малых $t$ всегда обратима.

1). *Полная линейная группа* $GL(n,R)$. Множество невырожденных матриц, задаваемое в пространстве $M(n,R)$ условием $\det(a_j^i) \ne 0,$ где $A = (a_j^i) \in M(n,R)$, есть область в $M(n,R)$. Произведение матриц $A = (a_j^i), B = (b_j^i)$ есть матрица $C = (c_j^i)$, которая имеет вид $c_j^i = \sum_{k=1}^{n} a_k^i b_j^k$. Рассматривая произведение матриц как отображение $R^{n^2} \times R^{n^2} \to R^{n^2}$, получаем, что это отображение гладкое в силу того, что является многочленом. Точно так же рассматривая взятие обратной матрицы в $GL(n,R)$ как отображение $R^{n^2} \to R^{n^2}$, видим, что это отображение гладкое. Касательное пространство в точке $A \in GL(n,R)$ при $A = I$ совпадает с $M(n,R)$ как касательное пространство в любой точке открытого множества пространства $R^{n^2}$ (см. также приведенную выше лемму).

2). *<u>Специальная линейная группа</u>* $SL(n,R)$. Это множество матриц из $M(n,R)$ с определителем, равным $1$. Из свойств определителей сразу следует, что выполняются аксиомы группы по умножению матриц. Пусть дана кривая $A = A(t)$ в $SL(n,R)$, проходящая при $t=0$ через $I$, $\det(A(t)) = 1$.

Таким образом, имеем $\begin{vmatrix} a_1^1(t) & \dots & a_1^i(t) & \dots & a_1^n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k^1(t) & \dots & a_k^i(t) & \dots & a_k^n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1(t) & \dots & a_n^i(t) & \dots & a_n^n(t) \end{vmatrix} = \det(A((t)).$

Следовательно,

$$\frac{d(\det(A(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_1^1(t) & \dots & \dfrac{da_1^i(t)}{dt} & \dots & a_1^n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k^1(t) & \dots & \dfrac{da_k^i(t)}{dt} & \dots & a_k^n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1(t) & \dots & \dfrac{da_n^1(t)}{dt} & \dots & a_n^n(t) \end{vmatrix} = 0. \Rightarrow$$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{da_i^i(t)}{dt}\Big|_{t=0} = 0.$ Таким образом, любой касательный вектор (матрица) к единичной матрице $I$ имеет сумму диагональных элементов, равную нулю. Поверхность является неособой, так как для любой строки или столбца градиент по компонентам строки (столбца) не равен нулю, ибо в противоположном случае определитель будет равен нуля, что следует из разложения определителя по этой строке (столбцу). Следовательно, размерность касательного пространства равна $n^2 - 1$. Размерность пространства матриц с нулевым следом имеет такую же размерность. Таким образом, любая бесследная матрица является касательным вектором для некоторой кривой, проходящей через $I$ при $t = 0$.

3). <u>*Ортогональная группа*</u> $O(n,R)$. Состоит из матриц, принадлежащих $M(n,R)$, удовлетворяющих условию $AA^T = I$, где $A^T$ означает транспонированную матрицу. Рассмотрим кривую $A(t)$, лежащую в $O(n,R)$, так что $A(0) = I$, т.е. $A(t)A^T(t) = I$. Дифференцируя по $t$ при $t = 0$, получаем, что $\dot{A}(0) + \dot{A}^T(0) = 0$. Отсюда следует, что касательное пространство состоит из антисимметричных матриц. Из рассмотрения матричной экспоненты далее будет следовать, что любая антисимметричная матрица является касательным вектором для некоторой кривой, т.е. группа задана системой невырожденных уравнений.

4). <u>*Специальная ортогональная группа*</u> $SO(n,R)$. Состоит из матриц, принадлежащих $O(n,R)$ с определителем, равным 1. Эта группа составляет одну из двух связных компонент группы $O(n,R)$, а именно ту, которая содержит $I$. Касательное пространство совпадает с пространством предыдущей группы.

5). *Унитарная группа* $U(n)$. Состоит из комплексных матриц порядка $n$, удовлетворяющих условиям $A\overline{A}^T = I$, где чертой обозначено комплексное сопряжение. Рассматривая кривые $A = A(t), A(0) = I$, в группе $U(n)$, аналогично пункту получим, что $A + \overline{A^T} = 0$. Такие матрицы называются эрмитово антисимметричными или просто антиэрмитовыми. Группа задана регулярно.

6). *Специальная унитарная группа* $SU(n)$. Состоит из унитарных матриц с определителем, равным $1$. Касательное пространство также состоит из антиэрмитовых матриц с нулевым следом (синтез пунктов 3 и 5).

**Пример 2.**

*Матричные алгебры Ли* $gl(n,R), sl(n,R), o(n,R), u(n), su(n)$.

Все эти множества являются векторными пространствами матриц над полем действительных или комплексных чисел, в которых введена дополнительная билинейная операция $[X,Y] = XY - YX$, называемая коммутированием, относительно которой эти векторные пространства замкнуты.

1). *Алгебра* $gl(n,R)$. Это пространство всех матриц $M(n,R)$ над полем $R$. Замкнутость относительно коммутатора очевидна.

2). *Алгебра* $sl(n,R)$. Это множество всех матриц над полем $R$, у которых след равен 0. Структура векторного пространства очевидна. Поскольку след (обозначение $Tr$) одинаков для произведения матриц, т.е. $TrAB = TrBA$, то алгебра $sl(n,R)$ замкнута относительно коммутатора.

3). *Алгебра* $o(n,R)$. Это векторное пространство матриц с дополнительным свойством $A + A^T = 0$, т.е. множество кососимметрических матриц. Если $A + A^T = 0$, $B + B^T = 0$, то

$$\left[A,B\right]+\left[A,B\right]^T = AB-BA+(AB-BA)^T = AB-BA+B^T A^T$$
$$-A^T B^T = AB-BA+(-B)(-A)-(-A)(-B) = AB-BA+AB-BA=0.$$
Следовательно, доказана замкнутость относительно коммутации.

4). *Алгебра* $u(n)$. Это алгебра матриц над полем комплексных чисел, состоящая из матриц, удовлетворяющих условиям $A+\overline{A^T}=0$. Структура векторного пространства очевидна, докажем замкнутость относительно коммутирования. Пусть $A+\overline{A^T}=0, B+\overline{B^T}=0.$ Тогда
$$\left[A,B\right]+\overline{\left[A,B\right]}^T = AB-BA+\overline{(B^T A^T - A^T B^T)} =$$
$$= AB-BA+((-B)(-A)-(-A)(-B))=0.$$

5). *Алгебра* $su(n)$. Это алгебра антиэрмитовых бесследных матриц. Это векторное пространство, которое выдерживает коммутирование матриц, что следует из предыдущих пунктов.

**Пример 3.** *Матричная экспонента*. *Связь между матричными группами и матричными алгебрами Ли.*

*Экспоненциальное отображение (синоним - матричная экспонента) определяется с помощью формального ряда*

$$\exp A = e^A = I+\frac{A}{1!}+\frac{A^2}{2!}+\ldots+\frac{A^n}{n!}+\ldots \quad . \tag{2}$$

Справедлива следующая теорема:

**Теорема 1** [1] .

1). *Ряд (2) сходится для всех* $A\in ML(n,R)$.

*2). Если матрицы* $A,B$ *коммутируют, т.е. если* $AB=BA$, *то* $e^{A+B}=e^A e^B$.

*3). Для всякой матрицы* $A\in ML(n,R)$ *выполняются равенства*

$$\exp A\exp(-A)=I,\exp(A^T)=(\exp A)^T.$$

*4). Для всех* $A \in ML(n,R)$ *и* $B \in GL(n,R)$ *верно равенство*

$$\exp(BAB^{-1}) = B(\exp A)B^{-1}.$$

*5). Имеет место равенство*

$$\det e^{A} = e^{TrA}.$$

**Теорема 2.** *Экспоненциальное отображение переводит матричные алгебры Ли в следующие матричные группы:*

*1)* $gl(n,R) \to GL(n,R)$;

*2)* $sl(n,R) \to SL(n,R)$;

*3)* $o(n,R) \to SO(n,R)$;

*4)* $u(n) \to U(n)$;

*5)* $su(n) \to SU(n)$.

Доказательство: 1). Из пункта 3 теоремы 1 следует, что матрица $e^{A}$ всегда обратима. Это доказывает утверждение.

2). Из пункта 5 теоремы 1 следует, что если $TrA = 0$ то $\det(e^{A}) = 1$. Утверждение доказано.

3). Если $A + A^{T} = 0$, то $e^{A+A^{T}} = I$. Таким образом, $e^{A}(e^{A})^{T} = I$, что следует из пункта 3 теоремы 1. Утверждение доказано.

4). Аналогично пункту 3 получаем $\exp A\overline{(\exp A)}^{T} = I$.

5). Утверждение вытекает из доказанных пунктов 2 и 4.

## § 2. Однопараметрические группы преобразований

**Пример 1.** Пусть $M$ произвольное множество. *Преобразованием множества* $M$ называется взаимно-однозначное отображение множества $M$ на себя (синоним – биекция). Тогда $T(M)$ - множество всех преобразований множества $M$. Групповая операция в $T(M)$ есть композиция отображений: $f,g \in T(M) \Rightarrow (f \circ g)(x) = (f(g(x)))\forall x \in M$. Единицей в множестве $T(M)$ является тождественное преобразование $I(x) = x\forall x \in M$, при этом $f \circ I = I \circ f = f, \forall f \in T(M)$. Обратным элементом $f^{-1} \in T(M)$ называется отображение, обратное к преобразованию $f \in T(M)$, так что $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in M$.

**Определение 1.** *Представлением группы* $G$ *в* $T(M)$ *называется групповой гомоморфизм* $\pi : G \to T(M)$, *где для всякого* $g \in G$ *элемент* $\pi(g)$ *есть преобразование множества* $M$, *при этом* $\pi(g_1) \circ \pi(g_2) = \pi(g_1 g_2)$. *Образ* $\pi(G)$ *группы* $G$ *есть подгруппа в* $T(M)$, *ее также называют представлением группы* $G$ *в виде группы преобразований множества* $M$.

**Определение 2.** *Отображение* $M \times G \to M$, *обозначаемое* $f(x,g)$, *так что* $(x,g) \to \pi(g)(x)$ *называется действием группы* $G$ *на множестве* $G$. *Задание действия определяет групповую структуру на множестве* $T(M)$.

**Определение 3.** *Представление* $\pi : G \to T(M)$ *называется точным (или изоморфизмом), если отображение* $\pi$ *есть групповой изоморфизм.*
Из определения сразу следует, что $\pi$ точно тогда и только тогда, когда $\pi(g) = I$ верно лишь для $g = e$.

**Определение 4.** *Представление* $\pi : G \to T(M)$ *называется тривиальным, если* $\pi(g) = I\forall g \in G$.

Далее в этом параграфе $M = R^n = (x_1, ...., x_n) -$ арифметическое пространство $n$ измерений, $G = R$ - множество действительных чисел, которое рассматривается как группа по сложению.

**Определение 5.** *Представление* $\pi : R \to T(R^n)$ *называется* *локально точным,* *если существует симметричный относительно нуля интервал* $\Delta \subset R$, *такой, что для* $\forall a \in \Delta$ *равенство* $f(a) = I$ *возможно лишь для* $a = 0$.

**Определение 6.** *Локально точное представление* $\pi : R \to T(R^n)$ *называется* *однопараметрической группой* *преобразований пространства* $R^n$. Образ точки $a \in R$ при $\pi : R \to T(R^n)$ записывается, как $\pi_a \in T(R^n)$. Соответствующее этому представлению действие группы $R$ на пространстве $R^n$ определяется как отображение $f : M \times G \to M$, так что $f(x,a) = \pi_a(x)$.

Наоборот, свойства действия позволяют восстановить групповые свойства представления группы $R$.

**Теорема 1.** *Групповые свойства представления* $\pi(R)$ *равносильны следующим свойствам действия* $f$ *:*

*1)* $f(x,0) = x$ *для всякого* $x \in R^n$;

*2)* $f(f(x,a),b) = f(x,a+b)$ *для* $\forall a,b \in R, x \in R^n$;

*3) существует симметричный относительно нуля интервал* $\Delta \subset R$, *что если* $a \in \Delta$ *и* $f(x,a) = x$ *для всякого* $x \in R^n$, *то обязательно* $a = 0$.

Доказательство: фиксируем $a \in R$, тогда определено отображение $\pi_a : R^n \to R^n$, так что $\pi_a(x) = f(x,a)$. Следовательно,

$$(\pi_a \circ \pi_b)(x) = \pi_a(\pi_b(x)) = \pi_a(f(x,b)) = f(f(x,b),a) =$$
$$= f(x,b+a) = \pi_{a+b}(x).$$

Это означает, что $\pi_a \circ \pi_b = \pi_{a+b}$. Так как $\pi_0(x) = f(x,0) = x$ для всякого $x \in R^n$, следовательно, $\pi_0 = I$. Поскольку последние равенства верны для всех чисел $a,b$, то отсюда следует, что $\pi_a \circ \pi_{-a} = \pi_0 = I$. Следовательно, все $\pi_a$ являются преобразованиями пространства $R^n$, т.е. биекциями $R^n$. Из свойства 3 следует, что если $\pi_a(x) = f(x,a) = x$ для $\forall x \in R^n$, при этом $a \in \Delta$, то $a = 0$, поэтому представление локально точное.

**Замечание**. *Если кроме свойств 1-3 выполнено свойство 4) действие* $f : R^n \times R \to R^n$ *принадлежит классу* $C^k(R^n \times R), 0 \le k \le \infty$, *то однопараметрическая группа* $\pi(R)$ *называется <u>непрерывной однопараметрической группой преобразований.</u>*

**Обозначения.** $\pi(R) = G^1 = G^1(f)$. Кроме того, обычно пишут $\overline{x} = f(x,a)$.

**Пример 2**. *<u>Группа сдвигов</u>*.

Фиксируем произвольную точку $x_0 \in R^n$. Зададим действие группы $\overline{x} = x + ax_0$. Свойства однопараметрической группы выполняются очевидным образом.

**Пример 3.** *<u>Однопараметрические группы в группе линейных гомеоморфизмов евклидова пространства</u>.*

Группа невырожденных линейных преобразований (гомеоморфизмов) евклидова пространства $R^n$ есть группа $GL(n,R)$. Рассмотрим представление $\pi : R \to GL(n,R)$, так что соответствующее ему действие принадлежит классу $C^1$. Тогда имеем $\overline{x} = \pi_a(x), (x \in R^n, a \in R)$. Выполнены свойства $\pi_0 = I, \pi_b \circ \pi_a = \pi_{b+a}$.

Рассмотрим однопараметрическую группу как гладкую кривую в пространстве $GL(n,R)$ с касательным вектором в нуле

$\frac{d\pi_a}{da}\Big|_{a=0} = A \in M(n,R)$(производная матрицы есть матрица с производными от каждого матричного элемента). Дифференцируя равенство $\pi_b \circ \pi_a = \pi_{b+a}$ по параметру $b$ в нуле, можно получить задачу Коши для $\pi_a$:

$$\frac{d\pi_a}{da} = A \circ \pi_a, \pi_0 = I. \tag{1}$$

Решением уравнения (1) является матричная экспонента $\pi_a = \exp(aA), a \in R.$

**Пример 4.** *Группа растяжений.*

Пусть $u$ симметричная матрица, тогда невырожденным преобразованием можно привести матрицу $A$ к диагональному виду. Матричная экспонента от диагональной матрицы (см. пример 2 из §1) также есть диагональная матрица, так что если $A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, то $\pi_a = \exp(aA) = diag(\exp(a\lambda_1, ..., a\lambda_n))$. Следовательно, преобразование пространства сводится к растяжениям вдоль координатных осей.

**Пример 5**. *Группа вращений.*

Этот случай мы уже рассмотрели при произвольном значении $n$. При $n = 3$ матричная экспонента переводит антисимметричную матрицу в ортогональную матрицу, которую можно связать с $I$ непрерывным путем. Антисимметричное преобразование $u$ в $R^3$ имеет собственный вектор $x \in R^3$, отвечающий собственному значению $\lambda = 0$, так что $u(x) = 0$. Следовательно, $\exp(tu)(x) = x$. Выберем систему координат, где $x = (0,0,1)$. В этой системе координат

$$\exp(tu)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$ Этой матрице соответствует группа вращений относительно оси $x_3$, которая соответствует направлению собственного вектора $x$.

## §3. Локальные однопараметрические группы преобразований

**Определение 1.** *Локальным преобразованием пространства $R^n$ называется дифференцируемый в обе стороны требуемое число раз гомеоморфизм $\varphi : V_1 \to V_2$, где $V_i$ - это области в пространстве $R^n$.*

**Определение 2.** *Если $\Delta$ - открытый интервал на оси $R$, содержащий $0$. Отображение $f : V \times \Delta \to R^n$ называется однопараметрическим семейством локальных преобразований пространства $R^n$, если для всякого $a \in \Delta$ отображение $f : V \times \Delta \to R^n$ является локальным преобразованием пространства $R^n$.*

**Определение 3.** *Локальной однопараметрической группой Ли локальных преобразований пространства $R^n$ называется такое однопараметрическое семейство локальных преобразований $f : V \times \Delta \to R^n$, которое имеет следующие свойства:*

*1)* $f(x,0) = x$ *для всякого* $x \in V$;

*2)* $f(f(x,a),b) = f(x,a+b)$ *для всяких* $a,b,a+b \in \Delta, x \in V$;

*3) Если* $a \in \Delta$ *и* $f(x,a) = x$ *для всякого* $x \in V$*, следовательно,* $a = 0$;

*4)* $f \in C_\infty(V \times \Delta)$.

Для локальной группы Ли принято обозначение $G^1$.

**Определение 4.** *Отображение* $f: V \times \Delta \to R^n$, *которое порождает группу* $G^1$, *называется* <u>*локальным действием группы*</u> $R$ *на* $R^n$. *Группа* $G^1$ *также рассматривается как представление* $\pi: \Delta \to T(R^n)$, *элементами которого являются локальные преобразования* $\pi_a : V \to R^n$, *так что* $\pi_a(x) = f(x,a)$.

**Пример 1.** <u>Проективная группа</u>.

Принципиально локальной группой является следующее однопараметрическое семейство локальных преобразований: здесь $V = \left((x,y) : |x| < 1, y \in (-\infty, +\infty)\right), \Delta = (-1,1)$. Действие группы задается следующими формулами:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{1-ax}; \\ \bar{y} &= \frac{y}{1-ax} \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

Аксиомы группы легко проверяются, например, рассмотрим групповое умножение $\bar{x} = \dfrac{x}{1-ax}; \bar{y} = \dfrac{y}{1-ax}$. Тогда

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}}{1-b\bar{\bar{x}}} = \frac{\dfrac{x}{1-ax}}{1-b\dfrac{x}{1-ax}} = \frac{x}{1-(a+b)x}.$$ Аналогично $$\bar{\bar{y}} = \frac{y}{1-(a+b)x}.$$

Пусть $f: M \times G \to M$ является действием группы $G$ на множестве $M$, $\pi$, соответствующее этому действию представление, и задано $p: M \to M$ - преобразование множества $M$. Тогда отображение $f_1 : M \times G \to M$, которое порождается представлением

$\pi_1(g)=p\circ\pi(g)\circ p^{-1}$, будет действием группы $G$ на множестве $M$. Действительно, если $g=g_1g_2$, то

$$\pi_1(g)=p\circ\pi(g)\circ p^{-1}=p\circ\pi(g_1g_2)\circ p^{-1}=p\circ\pi(g_1)\circ\pi(g_2)\circ p^{-1}=$$
$$=p\circ\pi(g_1)\circ p^{-1}\circ p\circ\pi(g_2)\circ p^{-1}=\pi_1(g_1)\circ\pi_1(g_2),$$

следовательно, и соответствующее действие обладает требуемыми свойствами. Представления $\pi$ и $\pi_1$ называются эквивалентными, а на множестве всех представлений введено отношение эквивалентности. Соответствующие им действия групп также называются эквивалентными.

**Определение 5.** *Если действия $f, f_1$ группы $G$ эквивалентны, то соответствующие им представления $\pi(G),\pi_1(G)$ называются подобными.*

Вся терминология подобия групп переносится на локальные группы преобразований.

Пусть действия $f_i : V_i\times\Delta_i\to R^n$ порождают группы $G_i^1$. Рассмотрим все диффеоморфизмы между $V_i$ бесконечной гладкости, которые обозначим буквой $p$.

**Определение 6.** *Группы $G_i^1$ называются подобными, если существует преобразование $p$ с указанными свойствами и интервал $\Delta\subset\Delta_1\bigcap\Delta_2$, такие, что для любого $a\in\Delta$ будет выполнено $\pi_{2a}=p\circ\pi_{1a}\circ p^{-1}$.*

**Пример 2** [3]. Пусть группа растяжений задана явными формулами

$$\overline{x^i}=x^i\exp(a\lambda_i), i=1,\dots n. \qquad (2)$$

Область $V$ задается условиями $x^i>0,\forall i=1,\dots n.$ Преобразование $p:V\to R^n$ определяется формулами $p^i(x)=\ln x^i, (p^{-1}(x))^i=\exp x^i$.

Рассмотрим формулу для действия $\overline{\overline{x}} = \pi_{2a}(x) = p \circ \pi \circ p^{-1}(x)$. Отсюда получим, что

$$\overline{\overline{x^i}} = \ln((\pi_{1a} \circ p^{-1})^i(x)) = \ln(p^{-1i}(x)\exp(a\lambda^i)) =$$
$$= \ln((\exp x^i)\exp a\lambda^i) = x^i + a\lambda^i.$$

Следовательно, мы получили группу сдвигов, которая подобна группе растяжений.

## §4. Уравнения Ли

Пусть действие $f(x,a)$ порождает однопараметрическую группу $G^1$. Разложим однопараметрическую группу при малых значениях $a$. Получим, что

$\overline{x} = x + \xi(x)a + o(a)$, где $\xi(x) = \frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\Big|_{a=0}$, а также учтено, что $f(x,0) = x$.

Смысл следующей теоремы Ли состоит в том, что первый член разложения Тейлора полностью определяет действие $f(x,a)$.

**Теорема Ли** (см. **[2]**). *Пусть* $\overline{x} = f(x,a)$ *удовлетворяет групповому свойству* $f(f(x,a),b) = f(x,a+b) \forall a,b,a+b \in \Delta, x \in V$ *и имеет место разложение Тейлора* $\overline{x} = x + \xi(x)a + o(a)$. *Тогда действие* $f$ *является решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (уравнение Ли) с начальными условиями:*

$$\frac{df}{da} = \xi(f); f(a=0,x) = x. \qquad (1)$$

*Обратно, для всякого гладкого векторного поля* $\xi(x)$ *решение задачи Коши (1) удовлетворяет групповому свойству.*

Доказательство: пусть выполнено групповое свойство, следовательно, выполнено равенство

$$f(x,a+\Delta a)=f(f(x,a),\Delta a).\Rightarrow$$
$$f(x,a+\Delta a)=f(x,a)+\frac{\partial f}{\partial a}\Delta a+o(\Delta a). \qquad (2)$$

С другой стороны,

$$f(f(x,a),\Delta a)=f(x,a)+\frac{\partial f}{\partial \Delta a}\Big|_{\Delta a=0}\Delta a+o(\Delta a). \qquad (3)$$

Так как $\frac{\partial f(f(x,a),\Delta a)}{\partial \Delta a}\Big|_{\Delta a=0}=\xi(f(x,a))$, то, приравнивая выражения и переходя к пределу по переменной $\Delta a$, приходим к уравнению Ли

$$\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}=\xi(f(x,a)). \qquad (4)$$

Начальные условия получаются из разложения Тейлора.

Обратно, пусть $\bar{x}=f(x,a)$ есть решение уравнений Ли. Рассмотрим две функции: $g(b)=f(f(x,a),b);q(b)=f(x,a+b)$. Из того, что $f$ является решением уравнений Ли, сразу получаем, что $g,q$ удовлетворяет уравнениям Ли:

$$\frac{dg}{db}=\xi(g),g(b=0)=f(x,a);$$
$$\frac{dq}{db}=\xi(q),q(b=0)=f(x,a).$$

Уравнения одинаковы, начальные условия одни и те же. Следовательно, по теореме единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решения совпадают в некоторой окрестности нуля переменной $a$, т.е.

$$f(x,a+b)=f(f(x,a),b).$$

Теорема доказана.

**Пример 1.** Рассмотрим конкретную систему Ли

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{da} = (\overline{x})^2, \overline{x}\big|_{a=0} = x; \\ \dfrac{d\overline{y}}{da} = (\overline{x}\overline{y}), \overline{y}\big|_{a=0} = y. \end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение, получим $\overline{x} = \dfrac{1}{-a+C}$. Из условия $\overline{x}(0) = x = \dfrac{1}{C} \Rightarrow C = \dfrac{1}{a} \Rightarrow \overline{x} = \dfrac{1}{x^{-1}-a} = \dfrac{x}{1-ax}$; аналогично $\overline{y} = \dfrac{y}{1-ax}$. Это функции задают действие проективной группы.

**Неканоническая групповая операция [4].** Если групповая операция в локальной группе задана не как операция сложения, то заменой параметра задача сводится к операции сложения. Действительно, что если групповое действие удовлетворяет равенству

$$f(\overline{x},b) = f(f(x,a),b) = f(x,\varphi(a,b)), \qquad (5)$$

здесь $\varphi(a,b)$- гладкая функция, при этом $\varphi(a,0)=a; \varphi(0,b)=b$ для некоторых значений параметров из окрестности нуля. Дифференцируя (5) по $b$, получим, что

$$\frac{\partial f(\overline{x},b)}{\partial b} = \frac{\partial f(x,c)}{\partial c} \cdot \frac{\partial \varphi(a,b)}{\partial b}, c = \varphi(a,b). \qquad (6)$$

Положив в (6) $b=0, c=a$ , получим

$$\frac{\partial f(\overline{x},b)}{\partial b}\Big|_{b=0} = \frac{\partial f(x,a)}{\partial a} \cdot \frac{\partial \varphi(a,b)}{\partial b}\Big|_{b=0}, c = \varphi(a,b). \qquad (7)$$

Так как $\left.\frac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b}\right|_{\substack{b=0\\a=0}}=1$, следовательно, $\frac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b}\neq 0$ при достаточно малых $a$ в силу непрерывности функций. Поэтому можно записать $\frac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b}\Big|_{b=0}=\frac{1}{A(a)}$. Если обозначить $\xi(x)=\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\Big|_{a=0}$, то мы получим, что $\frac{1}{A(a)}\cdot\frac{d\bar{x}}{da}=\xi(\bar{x})$. Последнее неравенство можно записать в виде $\frac{d\bar{x}}{d\bar{a}}=\xi(\bar{x})$, где $\bar{a}=\int\limits_0^a A(a)da$. Следовательно, для параметра $\bar{a}$ (он называется *каноническим*) групповая операция является сложением. В дальнейшем для выкладок всегда будет использоваться канонический параметр, кроме специально оговоренных случаев.

## §5. Инфинитезимальный оператор однопараметрической группы преобразований

**Определение 1.** *Орбитой элемента* $x$ *под действием группы* $G^1$ *называется множество вида* $f(x,a)$, *где* $a$ *пробегает множество* $\Delta$, *при* $a=0$ *орбита проходит через точку* $x$.

Фиксируем точку $x\in R^n$. Пусть $f(x,a)$ есть действие локальной однопараметрической группы $G^1$ и $\Phi: R^n\to R^m$ есть отображение класса $C^k, k\geq 1$. Рассмотрим значение отображения $\Phi$ на орбите элемента $x$, т.е. рассмотрим $\Phi(f(x,a))$. Это будет кривая в пространстве $R^m$, проходящая при $a=0$ через $\Phi(x)$. Вычислив касательные вектора к кривым $f(x,a)$, $\Phi(f(x,a))$ при $a=0$, получим

$$\frac{\partial(\Phi(f(x,a))}{\partial a}\Big|_{a=0}=\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x}\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\Big|_{a=0}. \tag{1}$$

Здесь $\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x}$ это матрицы Якоби в точке $x$, $\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\Big|_{a=0} = \xi(x)$.

1). Пусть $\Phi : R^n \to R$. Тогда правую часть (1) можно представить в виде $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\xi^i = (\sum_{i=1}^{n} \xi^i \partial_i)\Phi(x) = (\xi \cdot \partial)\Phi(x)$, где линейный оператор первого порядка $\xi \cdot \partial$ называется _инфинитезимальным оператором_ первого порядка.

2). $\Phi : R^n \to R^m$. Тогда правая часть равенства (1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\Phi^1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\Phi^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\Phi^m}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \cdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \partial_i \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \cdots \\ \Phi^m \end{pmatrix}.$$

Следовательно, результат отображения касательных векторов можно записать как результат действия инфинитезимального оператора.

Таким образом, если

$$x = (x^1,\dots,x^n), \xi = (\xi^1,\dots,\xi^n), \partial = (\partial_1,\dots,\partial_n),$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \Rightarrow \xi \cdot \partial = \xi^i \partial_i = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

**Определение 2.** _Инфинитезимальным оператором группы_ $G^1$ *с касательным векторным полем* $\xi(x)$ *называется линейный дифференциальный оператор первого порядка* $\sum_{i=1}^{n} \xi^i \partial_i = \xi \cdot \partial$.

**Пример 1.**

1). *Оператор группы сдвигов.* $\xi \cdot \partial = \sum_{i=1}^{n} x_0^i \partial_i, x_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)$ - постоянный вектор.

2). *Оператор линейного преобразования.* $\xi \cdot \partial = u_j^i x^i \partial_i$. Здесь $u_j^i$ - матрица линейного преобразования, $x$ - вектор.

3). *Оператор растяжения.* $\xi \cdot \partial = \lambda^i x^i \partial_i$.

4). *Оператор вращения вокруг оси* $x^3$. $\xi \cdot \partial = x^2 \partial_1 - x^1 \partial_2$.

5). *Оператор проективной группы.* $\frac{d\overline{x}}{da}\big|_{a=0} = \frac{(x)^2}{(1-ax)^2}\big|_{a=0} = (x)^2$,

$\frac{d\overline{y}}{da}\big|_{a=0} = \frac{xy}{(1-ax)^2}\big|_{a=0} = xy$. Таким образом $\xi \cdot \partial = (x)^2 \partial_x + xy\partial_y$.

## Глава 2. Группы симметрии дифференциальных уравнений

### § 6. Инвариантные функции и многообразия

Всюду далее рассматривается локальная группа преобразований, область определения явно не указывается, при необходимости области могут быть сужены.

**Определение 1.** *Отображение* $\Phi : R^n \to R^m$ *называется инвариантом группы* $G^1$ *с действием* $f(x,a)$*, если выполнено равенство*

$$\Phi(f(x,a)) = \Phi(x), \forall x, a. \tag{1}$$

Из определения следует, что

$$\frac{\partial \Phi(f(x,a))}{\partial a} = \frac{\partial \Phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial a} = (\xi \cdot \partial)\Phi(\bar{x}). \tag{2}$$

**Теорема 1.** *Отображение* $\Phi : R^n \to R^m$ *класса* $C^1(R^n)$ *является инвариантом группы* $G^1(\xi) \Leftrightarrow$ *для всякого* $\forall x \in V \subset R^n$ *верно равенство*

$$(\xi \cdot \partial)\Phi(x) = 0. \tag{3}$$

Доказательство: если $\Phi -$инвариант, то по определению $\Phi(f(x,a)) = \Phi(x)$. Следовательно, продифференцировав это выражение по параметру $a$ при $a = 0$, получим требуемое.

Обратно. Пусть $(\xi \cdot \partial)\Phi(x) = 0, \forall x \in V$. Следовательно, заменяя переменную $x$ на $\bar{x}$, получим, что $\Phi(f(x,a))$ не зависит от параметра $a$. Следовательно, $\Phi : R^n \to R^m$ есть инвариант группы.

Уравнение (3) является линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка, интегрирование его сводится к нахождению $(n-1)$ функционально независимого первого интеграла системы характеристических уравнений (см. [1]):

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \dots = \frac{dx^n}{\xi^n(x)}. \tag{4}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi = \Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \qquad (5)$$

где $\varphi_i$ - независимые интегралы.

**Примеры нахождения инвариантов.**

1). *<u>Инварианты группы растяжений</u>*. $(\xi \cdot \partial) = \lambda^i x^i \partial_i$. Уравнение (3) запишется так $\lambda^i x^i \partial_i \Phi = 0$.

Система характеристик имеет вид

$$\frac{dx^1}{\lambda^1 x^1} = \frac{dx^2}{\lambda^2 x^2} = \ldots = \frac{dx^n}{\lambda^n x^n}.$$

Отсюда получаем, что $\Phi = \Phi(\frac{x^1}{(x^n)^{\lambda^1}}, \ldots, \frac{x^{n-1}}{(x^n)^{\lambda^{n-1}}})$.

2). *<u>Инварианты проективной группы.</u>* Необходимо решить уравнение

$(x)^2 \partial_x \Phi + xy \partial_y \Phi = 0$ вместе с системой характеристических уравнений $\frac{dx}{(x)^2} = \frac{dy}{xy}$. Отсюда следует, что $\frac{x}{y} = C; C = const$. Следовательно, $\Phi = P\left(\frac{x}{y}\right)$, где $P$ - произвольная функция.

3). *<u>Инварианты группы вращений.</u>* Уравнение (3) имеет вид в данном случае $(\xi \cdot \partial)\Phi = (-x^2 \partial_1 + x^1 \partial_2)\Phi = 0$. Решая систему обыкновенных уравнений $\frac{dx^1}{-x^2} = \frac{dx^2}{x^1} = \frac{dx^3}{0}$, получаем два первых интеграла

$x^3 = C_1, (x^1)^2 + (x^2)^2 = C_2$. Тогда

$$\Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x^3, (x^1)^2 + (x^2)^2).$$

**Теорема 1.** *Всякая группа преобразований* $G^1$ *с действием* $f(x,a)$ *невырожденной заменой переменных* $\bar{x} = \bar{x}(x)$ *сводится к группе сдвигов вдоль оси* $x^n$.

Доказательство: пусть группа $G^1$ имеет инфинитезимальный оператор $v = \xi^i(x)\partial_i$. Так как оператор инвариантен относительно замены координат, то $\sum_{i=1}^{n} \xi^i(x)\partial_i = \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}$. Следовательно, в новых переменных оператор имеет вид $v = v(\bar{x}^i) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$. Выберем любой набор из $n-1$ функционально независимых инвариантов $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{n-1}(x)$ группы $G^1$. В качестве новых переменных в $R^n$ возьмем следующие функции: $\tilde{x}^1 = \varphi_1(x),\ldots,\tilde{x}^{n-1} = \varphi_{n-1}(x)$, в качестве $\tilde{x}^n$ возьмем решение уравнения $v(\tilde{x}^n) = 1$. Полученная система функций является функционально независимой и определяет искомую замену переменных. По построению в новых переменных $v = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n}$, а это оператор группы сдвигов вдоль оси $\tilde{x}^n$. Доказательство окончено.

Пусть $M$ является $(n-s)$ - мерной поверхностью (многообразием), заданной системой уравнений $\Phi_i(x) = 0; i = 1,\ldots,s, s \le n$. Поверхность является гладкой ($\Phi_i \in C^k$) и регулярной, т.е. $rang\left(\frac{\partial \Phi_j(x)}{\partial x^i}\right)\Big|_M = s$.

**Определение 2.** <u>*Поверхность (многообразие)*</u> $M$ <u>*называется*</u> <u>*инвариантной*</u> *относительно группы* $G^1$ *с действием*

$\bar{x} = f(x,a) = x + a\xi(x) + o(a)$, *если для всякого* $x \in M$ *орбита точки* $x$ *лежит на поверхности* $M$. *Таким образом, если* $x$ *является решением системы* $\Phi(x) = 0$, *то и* $\bar{x}$ *является решением, т.е.* $\Phi(\bar{x}) = 0$.

**Теорема 2** [2,5]. *Поверхность* $M$, *задаваемая системой уравнений* $\Phi(x) = 0$, *является инвариантной относительно группы* $G^1$ *с инфинитезимальным оператором* $v = \xi \cdot \partial$ *тогда и только тогда, когда* $v\Phi_i \big|_M = 0, i = 1,...,s.$

Доказательство: если $M$ решение системы $\Phi(x) = 0$, то для $\forall x \in M, \forall a \in \Delta$ следует, что $\Phi(\bar{x}) = 0$. Следовательно $\Phi(\bar{x}) = \Phi(x) + a\xi^i(x)\dfrac{\partial \Phi(x)}{\partial x^i} + o(a)$. Учитывая, что $\Phi(x) = 0$, $\Phi(\bar{x}) = 0$, то, деля все на $a$ и устремляя $a$ к нулю, получим $v\Phi_i \big|_M = 0, i = 1,...,s.$

Обратно. Пусть верно $v\Phi_i \big|_M = 0, i = 1,...,s.$ Необходимо доказать, что орбиты группы, если $x \in M$, целиком лежат на $M$ при малых значениях $a$. Это означает, что векторное поле $\xi(x)$ касается поверхности $M$ в точках орбиты. Последнее свойство инвариантно относительно любых невырожденных замен координат. Следовательно, если мы докажем требуемый результат в одной системе координат, то докажем и в любой другой. «Выпрямим» поверхность, сделав замену переменных

$$\bar{\bar{x}}^i = \Phi_i(x), i = 1,...,s; \bar{\bar{x}}^j = x^j, j = s+1,...,n.$$

Здесь предполагается, что в матрице $\left(\dfrac{\partial \Phi_j(x)}{\partial x^i}\right)$ отличен от нуля левый угловой минор порядка $s$. Если отличен другой минор, то мы можем переименовать переменные, чтобы минор стал угловым. В новых переменных поверхность $M$ задается уравнениями

$\overset{=}{x}^{i}=0, i=1,\ldots,s; \overset{=}{x}^{j}, j=s+1,\ldots,n -$ произвольные переменные, т.е. в этих переменных поверхность является гиперплоскостью, рассматриваемой локально. Далее двойную черту для переменных опустим. Тогда условие $\nu\Phi_i\big|_M=0, i=1,\ldots,s$ примет вид $\xi^k(0,\ldots,0,x^{s+1},\ldots,x^n)=0, k=1,\ldots,s$.

Требуется доказать, что если $x^k=0$, то и $\bar{x}^k=0, \forall x=(0,\ldots,0,x^{s+1},\ldots,x^n)$. Записывая уравнения Ли для двух групп переменных, мы получим

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}^i}{da}=\xi^i(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^s,\bar{x}^{s+1},\ldots,\bar{x}^n), i=1,\ldots,s; \\ \dfrac{d\bar{x}^{s+j}}{da}=\xi^{s+j}(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^s,\bar{x}^{s+1},\ldots,\bar{x}^n), j=1,\ldots,n-s. \end{cases} \tag{6}$$

В качестве начального условия берется произвольная точка $x\in M$, т.е. $x=(0,\ldots,0,x^{s+1},\ldots,x^n)$. Так как

$$\xi^k(0,\ldots,0,x^{s+1},\ldots,x^n)=0, k=1,\ldots,s,$$

то прямая проверка показывает, что $\bar{x}^i=0, i=1,\ldots,s$ и удовлетворены начальные условия. Остальные переменные $\bar{x}^j$ находятся из второй группы уравнений после подстановки туда $\bar{x}^i=0, i=1,\ldots,s$. Единственность решения задачи Коши гарантирует инвариантность многообразия $M$.

**Примеры инвариантных множеств.**

1). Пусть $\Phi(x)$ есть инвариант группы $G^1$. Тогда множество $M = \{x : \Phi(x) = 0\}$ является, как легко понять, инвариантным множеством. Например, из предыдущего следует, что любая поверхность вращения инвариантна относительно оператора вращения вокруг оси $x^3$ .

Можно показать, что любые инвариантные поверхности можно представить с использованием инвариантов группы.

**Теорема 3 (**см., например [4]). *Любую поверхность* $M$*, инвариантную относительно группы* $G^1$*, можно задать системой уравнений вида*

$$\Phi_i(\varphi_1,...,\varphi_{n-1}) = 0, i = 1,...,s, \tag{7}$$

*где* $\varphi_i(x)$*,* $i = 1,...,s$ *составляют функционально независимый базис инвариантов группы* $G^1$*, если* $\xi(x)\big|_M \neq 0$.

Доказательство: предполагая, что поверхность, как и в теореме 2, задана регулярно, сделаем замену переменных в $R^n$, чтобы «выпрямить» поверхность. Замена переменных

$$\overset{=}{x}{}^i = \Phi_i(x), i = 1,...,s; \overset{=}{x}{}^j = x^j, j = s+1,...,n; \tag{8}$$

сводит поверхность $M$ к гиперплоскости, $\overset{=}{x}{}^i = 0, i = 1,...,s; \overset{=}{x}{}^j, j = s+1,...,n;$ где вторая группа переменных принимает произвольные значения. Так как поверхность инвариантна, то групповые преобразования можно сузить на поверхность $M$ , получившаяся группа $\overset{=}{G}{}^1$ состоит из преобразований от переменных $x^j, j = 1,...,n-s$. Введем обозначения переменных $z^1 = x^{s+1},...,z^{n-s} = x^n$. По предыдущему, группа $\overset{=}{G}{}^1$ имеет $n-s+1$ функционально независимый инвариант. Рассмотрим значения инвариантов исходной группы $G^1$ на поверхности, те при $\overset{=i}{x} = 0, i = 1,...,s$. Число этих инвариантов равно $n-1$. Независимых среди них не более $n-s+1$. Пусть число независимых инвариантов среди них $n-\tilde{s}-1 \le n-s-1$. Следовательно, существует $\tilde{s}$ функциональных связей

$$\Phi_i(\varphi_1(z),...,\varphi_{n-1}(z)) = 0, i = 1,...,\tilde{s}; \tilde{s} \ge s. \qquad (9)$$

Считая (9) известными, определим новую поверхность $\tilde{M}$ как множество корней уравнения

$$\Phi_i(\varphi_1(x),...,\varphi_{n-1}(x)) = 0, i = 1,...,\tilde{s}; \tilde{s} \ge s. \qquad (10)$$

По построению очевидно, что $M \subset \tilde{M}$ (следует из (9)). Следовательно, размерность $\tilde{M}$ больше или равна размерности $M$. То есть $\dim \tilde{M} \ge \dim M$. Следовательно, $n-\tilde{s} \ge n-s, \Rightarrow \tilde{s} \le s.$ Вместе с ранее указанным условием $\tilde{s} \ge s$ получаем, что $\tilde{s} = s$, т.е. $\dim \tilde{M} = \dim M$. Из равенства размерностей и условия $M \subset \tilde{M}$ следует, что локально эти поверхности совпадают. Следовательно, инвариантная поверхность может быть задана требуемым образом.

Введенные определения могут быть обобщены на случай $r$ - параметрических локальных групп преобразований (основные определения см. § 9).

Пусть на множестве $X \times U$ действует $r$ - параметрическая группа преобразований $G^r$, так что $(\bar{x}, \bar{u}) = f(x,u,a)$. Здесь $f(x,u,a)$ - действие группы $G^r$, $a = (a^1,...,a^r)$ изменяется в некоторой окрестности нуля $O$ в пространстве $R^r$, так что $f(x,u,a) \in X \times U$, $X -$ открытое подмножество пространства $R^n$, $U -$ открытое множество пространства $R^m$. Пространство переменных, на которые действуют элементы группы $G^r$, разделено на две группы, называемые «независимыми» -$\left(X\right)$и «зависимыми» - $\left(U\right)$. Рассмотрим произвольное отображение $\Psi : X \times U \to X \times U, \Psi \neq const$.

**Определение 3.** *Отображение* $\Psi$ *называется инвариантом отображения группы, если для всяких* $(x,u,a) \in X \times U \times O$ *будет выполнено равенство* $\Psi(\overline{x},\overline{u}) = \Psi(x,u)$.

Пусть алгебра Ли группы $G^r$ порождается инфинитезимальными операторами

$$V_a = \xi_a^i(x,u)\partial_{x^i} + \eta_a^\alpha(x,u)\partial_{u^\alpha}; a \in \left[1,...,r\right], i \in \left[1,...,n\right], \alpha \in \left[1,...,m\right].$$

Тогда справедлива теорема, обобщающая полученные ранее результаты на случай многопараметрических групп преобразований.

**Теорема 4.** *Отображение* $\Psi : X \times U \to X \times U, \Psi \neq const$ *класса* $C^1(X \times U)$ *является инвариантом группы* $G^r$ *тогда и только тогда, когда во всех точках открытого множества* $X \times U$ *имеет место равенство* $V_a\Psi(x,u) = 0$ *для всякого* $a \in \left[1,...,r\right]$.

Доказательство немедленно вытекает из того факта, что в канонической системе координат произвольное преобразование $f_a$ является композицией $f_{a^i}$. Фиксируя все параметры, кроме одного, получаем по предыдущему требуемый результат. Поскольку при замене групповых параметров получается изморфизм соответствующих алгебр Ли, то требуемый результат верен всегда.

Пусть $\left[\Phi\right]$- подмногообразие в пространстве $R^{n+m}$, регулярно заданное с помощью векторного уравнения $\Phi(x,u) = 0$. $(\Phi : R^{n+m} \to R^k)$.

**Определение 4.** *Многообразие* $[\Phi]$ *называется инвариантным многообразием группы* $G^r$, *если орбита любой точки* $(x,u)\in[\Phi]$ *принадлежит многообразию* $[\Phi]$.

Справедлива следующая теорема, которая обобщает на случай однопараметрической группы критерий инвариантности многообразия $[\Phi]$. (см. [2]).

**Теорема 5.** *Многообразие* $[\Phi]$, *которое задано регулярно уравнением* $\Phi(x,u)=0$, *инвариантно тогда и только тогда, когда* $V_a\Phi\big|_{[\Phi]}=0$ *для всякого* $a\in[1,...,r]$.

Доказательство аналогично однопараметрическому случаю.

## § 7. Теория продолжения точечных преобразований

В случае, когда требуется решать какие-либо уравнения, замены переменных могут затрагивать как независимые переменные, так и зависимые. При этом если функциональная зависимость рассматривается в одной системе координат, то она может рассматриваться и в других системах координат. Если в уравнение входят производные, то их необходимо выражать в разных системах координат. Рассмотрим случай, когда преобразования переменных задачи образуют однопараметрическую группу:

$$\begin{cases}\bar{x}=f(x,u,a), f\big|_{a=0}=x;\\ \bar{u}=\varphi(x,u,a),\varphi\big|_{a=0}=u.\end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x=(x^1,...,x^n), u=(u^1,...,u^m)$. Так что группа действует в пространстве $R^{n+m}$. Введем другое пространство переменных

$\underset{1}{u} = \left\{ u_i^\alpha ; \alpha = 1,...,m; i = 1,...,n \right\}$ и зададим их преобразования, зависящие от группового параметра $a$ :

$$\overline{u_i^\alpha} = \psi_i^\alpha (x,u,\underset{1}{u},a), \psi_i^\alpha \Big|_{a=0} = u_i^\alpha . \qquad (2)$$

Потребуем, чтобы (2) были согласованы с равенствами

$$\overline{u_i^\alpha} = \frac{\partial \overline{u^\alpha}}{\partial \overline{x^i}} . \qquad (3)$$

Тогда локально (в некоторой окрестности) преобразования (2) определены однозначно. Таким образом, получается однопараметрическая группа преобразований $\underset{1}{G}^1$ в пространстве $R^{m+n+mn} = (x,u,\underset{1}{u})$. При этом преобразования (1) называются точечными преобразованиями, а преобразования (2) - продолжением первого порядка точечных преобразований.

Пусть группе $G^1$ соответствует оператор

$$v = \xi^i (x,u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha (x,u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} . \qquad (3)$$

Тогда оператор продолженной группы $\underset{1}{G}^1$ будет иметь вид

$$\underset{1}{v} = v + \zeta_i^\alpha (x,u,\underset{1}{u}) \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} . \qquad (4)$$

Прежде чем получить формулы в общем случае, рассмотрим простой случай, когда есть только одна независимая переменная и одна зависимая.

**Пример 1. (**см., например, [6,7]). *Теория продолжения для обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.*

В этом пункте $x = x, u = y, p = \dfrac{dy}{dx}$ . (5)

Рассмотрим действие группы $\underset{1}{G^1}$, разложенное по Тейлору до первого порядка:

$$\begin{cases} \overline{x} = x + \xi(x,y)a + o(a); \\ \overline{y} = y + \eta(x,y)a + o(a); \\ \overline{p} = p + \zeta(x,y,p)a + o(a). \end{cases} \tag{6}$$

Последняя строка определяется первыми двумя строками в силу условия

$$\overline{p} = \frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{d(y+\eta(x,y)a+o(a))}{d(x+\xi(x,y)a+o(a))} = \frac{dy+(\eta_x dx+\eta_y dy)a+\dots}{dx+(\xi_x dx+\xi_y dy)a+\dots} =$$

$$= \frac{\frac{dy}{dx}+(\eta_x+\eta_y\frac{dy}{dx})a+o(a)}{1+(\xi_x+\xi_y\frac{dy}{dx})a+o(a)} = \frac{p+(\eta_x+\eta_y p)a+o(a)}{1+(\xi_x+\xi_y p)a+o(a)} = \tag{7}$$

$$= (p+(\eta_x+\eta_y p)a+o(a))(1+(\xi_x+\xi_y p)a+o(a))^{-1} =$$

$$= p+\left(\eta_x+\eta_y p-\xi_x p-\xi_y p^2\right)a+o(a).$$

Сравнивая последнюю строку (6) с последним выражением (7), можно однозначно определить все коэффициенты продолженного оператора первого порядка

$$\zeta(x,y,p) = \left(\eta_x+\eta_y p-\xi_x p-\xi_y p^2\right). \tag{7.1}$$

Аналогично рассматривается второе продолжение. Введем обозначения

$$x = x, u = y, p = \frac{dy}{dx}, q = \frac{dp}{dx}. \tag{8}$$

Действие продолженной группы $\underset{2}{G^1}$ записывается в виде

$$\begin{cases} \bar{x} = x + \xi(x, y)a + o(a); \\ \bar{y} = y + \eta(x, y)a + o(a); \\ \bar{p} = p + \zeta(x, y, p)a + o(a); \\ \bar{q} = q + \delta(x, y, p, q) + o(a). \end{cases} \tag{9}$$

$$\bar{q} = \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = \frac{d(p + \zeta(x, y, p)a + o(a))}{d(x + \xi(x, y)a + o(a))} =$$

Тогда получим $$= \frac{dp + (\zeta_x dx + \zeta_y dy + \zeta_p dp)a + o(a))}{dx + (\xi_x dx + \xi_y dy)a + o(a)} =$$

$$= \frac{q + (\zeta_x + \zeta_y p + \zeta_p q)a + o(a))}{1 + (\xi_x + \xi_y p)a + o(a)}.$$

Разлагая в ряд последнюю дробь и сравнивая выражения как ряды по параметру $a$, получим

$$\delta = \zeta_x + p\zeta_y + q(\zeta_p - \xi_x) - pq\xi_y. \tag{10}$$

**Пример 2** [3,6,7]. *<u>Теория продолжения для одной зависимой переменной и двух независимых.</u>*

Эта теория непосредственно применима к дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка от двух независимых переменных.

Здесь $x = (x, y), u = z$. Оператор группы $G^1$ имеет следующий вид:

$$v = \xi(x, y, z)\partial_x + \eta(x, y, z)\partial_y + \zeta(x, y, z)\partial_z. \tag{11}$$

Зададим совокупность преобразований следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{x} = x + \xi(x,y,z)a + o(a) \\ \bar{y} = y + \eta(x,y,z)a + o(a) \\ \bar{z} = z + \zeta(x,y,z)a + o(a) \\ \bar{p} = p + \pi(x,y,z,p,q)a + o(a) \\ \bar{q} = q + \rho(x,y,z,p,q)a + o(a). \end{cases} \quad (12)$$

Здесь $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}, q = \dfrac{\partial z}{\partial y}, r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, l = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, s = \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}.$

Тогда совокупность преобразований (12) образует однопараметрическую группу в первом продолженнои пространстве, если верно $dz = pdx + qdy, d\bar{z} = \bar{p}d\bar{x} + \bar{q}d\bar{y}$. Таким образом, получим следующие соотношения:

$$\begin{gathered} dz + (\zeta_z dx + \zeta_y dy + \zeta_z dz)a + o(a) = (p + \pi a + o(a)) \cdot \\ (dx + (\xi_x dx + \xi_y dy + \xi_z dz)a + o(a)) + (q + \rho a + o(a)) \cdot \\ (dy + (\eta_x dx + \eta_y dy + \eta_z dz)a + o(a)) + \ldots. \end{gathered} \quad (13)$$

Приравниваем коэффициенты при множителях $dx$ и $dy$, сравниваем коэффициенты при соответствующих степенях $a$ и получаем следующие формулы:

$$\begin{cases} \pi = \zeta_x - p\xi_x - q\eta_x - p(-\zeta_z + p\xi_z + q\eta_z); \\ \rho = \zeta_y - p\xi_y - q\eta_y - q(-\zeta_z + p\xi_z + q\eta_z). \end{cases} \quad (14)$$

Для второго порядка используются дифференциальные соотношения

$$d\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy, d\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx; \quad \text{т.е.}$$

$dp = rdx + sdy, dq = sdx + ldy.$ Требуя, чтобы эти дифференциальные формы сохранялись и после преобразований, однозначно определим групповую операцию в пространстве $\underset{2}{u}$.

Аналогично тому, как мы это делали для первого порядка, можно получить формулы для второго продолжения, которые, однако, далее удобно иметь в общем виде [2,3].

**Общие формулы продолжения** [2,8,5].

Здесь $\zeta_i^\alpha = \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial a}\Big|_{a=0}$. Эти коэффициенты подлежат определению. Переменные $x, u, \underset{1}{u}$ считаются алгебраически независимыми, но связанными соотношениями $u_i^\alpha = D_i(u^\alpha),$ где $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \ldots$ .

Так как операторы дифференцирования действуют на функции конечного числа переменных, то все операции корректно определены. Оператор $D_i$ называется оператором полного дифференцирования, подразумевая, что мы дифференцируем сложные функции.

Аналогично вводятся пространства высокого порядка

$$\underset{s}{u} = \left\{ u_{i_1,\ldots,i_s}^\alpha \,\middle|\, \alpha = 1,\ldots,m; i_1,\ldots,i_s = 1,\ldots,n \right\}. \tag{15}$$

Здесь аналогично действует оператор полного дифференцирования, например, $u_{ij}^\alpha = D_j(u_i^\alpha) = D_i D_j(u^\alpha),\ldots$

Рассмотрим совокупность дифференциальных форм первого порядка

$$\omega^\alpha = du^\alpha - u_i^\alpha dx_i; \alpha = 1,\ldots,m. \tag{16}$$

Тогда равенства $u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$ можно записать в следующем виде:

$$\omega^\alpha = 0, \alpha = 1,\ldots,m. \tag{17}$$

Тогда требование $\overline{u_i^\alpha} = \dfrac{\partial \overline{u^\alpha}}{\partial \overline{x^i}}$, означает, что равенства (17) задают инвариантное многообразие в пространстве переменных $(x, u, \underset{1}{u}, dx, du)$. Следовательно, надо продолжить преобразования на $dx$ и $du$. Очевидно, это продолжение задается следующими формулами:

$$\begin{cases} d\bar{x} = \dfrac{\partial f}{\partial x^i} dx^i + \dfrac{\partial f}{\partial u^\alpha} du^\alpha; \\ d\bar{u} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha} du^\alpha. \end{cases} \tag{18}$$

Этому расширенному пространству соответствует оператор

$$\hat{v} = \underset{1}{v} + \xi^i \frac{\partial}{\partial dx^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial du^\alpha} \quad . \tag{19}$$

По полученному ранее критерию инвариантности многообразий имеем

$$\hat{v}\omega^\alpha \Big|_{\omega=0} = (\eta^\alpha - u_i^\alpha \xi^i - \zeta_i^\alpha dx^i)\Big|_{\omega=0} = 0. \tag{20}$$

Из этих соотношений, действуя так же как в примерах 1 и 2 из этого параграфа, находится следующая формула для продолжения:

$$\zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j). \tag{21}$$

Аналогично рассматривается второе продолжение. Тогда имеем

$$\underset{2}{v} = v + \zeta_i^\alpha (x, u, \underset{1}{u}) \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \zeta_{ij}^\alpha (x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}) \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\alpha} \tag{22}$$

и систему дифференциальных форм

$$\omega = 0, \underset{1}{\omega} = 0. \tag{23}$$

Здесь $\underset{1}{\omega} = (\omega_i^\alpha \,|\, \alpha = 1, \ldots, m; i = 1, \ldots, n)$, где $\omega_i^\alpha = du_i^\alpha - u_{ij}^\alpha dx^j$. (24)

Опуская простые, но громоздкие выкладки, получим следующие формулы

$$\zeta_{ij}^\alpha = D_j(\zeta_i^\alpha) - u_{ik}^\alpha D_j(\xi^k) \quad . \tag{25}$$

Аналогично получаются формулы продолжения $s$ - го порядка (см., например, [8]). Для функции $f$ в пространстве переменных $(x,u,\underset{1}{u},...,\underset{s}{u})$ полная производная по $i$ - той переменной от функции $f$ имеет вид

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_J u^\alpha_{J,i}\frac{\partial f}{\partial u^\alpha_J} \ . \qquad (26)$$

Здесь, $u^\alpha_{J,i} = \dfrac{\partial u^\alpha_J}{\partial x^i}$, $J = (j_1,...,j_k)$. Суммирование в (26) осуществляется по всем мультииндексам $J$ порядка не больше $s$, т.е. $j_1 + ... + j_k \le s$. Смысл полной производной проясняется, если вместо переменных $u^\alpha, u^\alpha_i, u^\alpha_{ij},...$ подставить функцию $u(x)$ и вычислить производную сложной функции по переменной $x^i$, используя цепное правило дифференцирования. Для общего случая верна следующая теорема, доказательство которой может быть проведено по индукции.

**Теорема 1.** *Пусть инфинитезимальный оператор однопараметрической группы есть* $v = \xi^i(x,u)\dfrac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x,u)\dfrac{\partial}{\partial u^\alpha}$, *тогда продолжение порядка* $s$ *этого оператора имеет вид*

$$\underset{s}{v} = v + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_J \zeta^\alpha_J(x,u,...,\underset{s}{u})\frac{\partial}{\partial u^\alpha_J}, \qquad (27)$$

*где суммирование ведется по всем мультииндексам* $J = (j_1,...,j_k)$, *при этом* $1 \le j_k \le n, 1 \le k \le s$, *так что*

$$\zeta^\alpha_J(x,u,...,\underset{s}{u}) = D_J(\eta^\alpha - \sum_{i=1}^{n}\xi^i u^\alpha_i) + \sum_{i=1}^{n}\xi^i u^\alpha_{J,i}\, , \qquad (28)$$

*при этом* $u^\alpha_i = \dfrac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, u^\alpha_{J,i} = \dfrac{\partial u^\alpha_J}{\partial x^i}$.

## § 8. Алгебры Ли

**Определение 1**. *Линейное пространство $V$ называется* <u>*алгеброй Ли,*</u> *если в нем задана кососимметрическая билинейная операция $[,]$, для которой выполнено тождество Якоби:*

$$\left[\xi,[\eta,\zeta]\right]+\left[\eta,[\zeta,\xi]\right]+\left[\zeta,[\xi,\eta]\right]=0. \qquad (1)$$

<u>Размерностью алгебры Ли</u> $V$ называется размерность векторного пространства $V$.

**Пример 1.** Векторное пространство трехмерных векторов вместе с операцией векторного произведения обладает структурой алгебры Ли. Проверка очевидна.

**Пример 2.** Пространство матриц $M(n,R)$ вместе с коммутатором $[A,B]=AB-BA$ является алгеброй Ли.

Доказательство. Вычислим последовательно

$$\left[A,[B,C]\right]=A[B,C]-[B,C]A=ABC-ACB-BCA+CBA;$$

$$\left[B,[C,A]\right]=B[C,A]-[C,A]B=BCA-BAC-CAB+ACB;$$

$$\left[C,[A,B]\right]=C[A,B]-[A,B]C=CAB-CBA-ABC+CDA.$$

Сложим все и получим 0.

**Пример 3**. $gl(n,R), sl(n,R), o(n,R), u(n), su(n).$

Доказательство вытекает из пункта 2. Следовательно, все ранее рассмотренные матричные алгебры являются алгебрами Ли.

**Пример 4.** Алгебра линейных операторов в векторном пространстве $L$ с операцией коммутации $[A,B]=A\circ B-B\circ A$, где справа стоит разность композиций операторов. Проверка тождества Якоби дословно совпадает с примером. Другие примеры будут приведены далее.

Рассмотрим случай конечномерной алгебры Ли $V$ размерности $r$ над полем вещественных чисел. Пусть $e_1,...,e_r$ - базис алгебры Ли. Тогда имеем $\left[e_i, e_j\right] = C_{ij}^k e_k$. Числа называются <u>структурными константами</u> алгебры Ли $V$. При изменении базиса в алгебре Ли константы меняются по тензорному закону (тензор третьего ранга типа (1,2)). Они антисимметричны по нижним индексам и удовлетворяют тождеству Якоби

$$C_{ij}^k C_{mn}^j + C_{mj}^k C_{ni}^j + C_{nj}^k C_{im}^j = 0. \tag{2}$$

Коммутатор может быть задан с помощью структурных констант, а именно, выбираем базис , задаем набор чисел $C_{ij}^k$, антисимметричных, удовлетворяющих условию (2), определяем коммутатор $\left[e_i, e_j\right] = C_{ij}^k e_k$, распространяем билинейным способом на все вектора из $V$ . Легко проверить, что получена структура алгебры Ли.

Пусть есть две алгебры Ли: $V$ с коммутатором$[\ ]$ и $\tilde{V}$ с коммутатором $\widetilde{[\ ]}$.

**Определение 2.** *Линейное отображение* $L: V \to \tilde{V}$ *называется гомо<u>морфизмом</u> алгебр Ли, если для всяких* $x, y \in V$ *будет выполнено равенство*

$$L([x, y]) = \widetilde{[L(x), L(y)]}. \tag{3}$$

**Определение 3.** *Алгебры* $V$ *и* $\tilde{V}$ *называются <u>изоморфными</u>, если существует гомоморфизм* $L: V \to \tilde{V}$ *, являющийся биекцией. Изоморфизм на себя называется <u>автоморфизмом</u>.*

**Теорема 2**. *Множество всех автоморфизмов алгебры Ли* $V$ *является подгруппой группы линейных гомоморфизмов алгебры* $V$ .

Доказательство. Если $L_1, L_2$ являются автоморфизмами алгебры Ли $V$, то их композиция $L_1 \circ L_2$ тоже является автоморфизмом алгебры Ли. Так как $(L_1 \circ L_2)([x,y]) = L_1([L_2(x), L_2(y)]) = [L_1 \circ L_2(x), L_1 \circ L_2(y)]$.

Изоморфизм конечномерных алгебр Ли можно охарактеризовать в терминах структурного тензора.

**Теорема 3**. *Если структурные константы алгебр $V$, $\tilde{V}$ равны между собой, то эти алгебры Ли изоморфны. Обратно, если они изоморфны, то найдутся базисы алгебр Ли, в которых структурные константы совпадут.*

Доказательство очевидно.

**Определение 4.** *Векторное подпространство $V_1$ алгебры Ли $V$ называется <u>подалгеброй</u> алгебры Ли, если $\forall x, y \in V_1$ будет выполнено $[x,y] \in V_1$.*

**Определение 5.** *Подалгебра $I$ называется <u>идеалом</u> алгебры Ли $V$, если $\forall x \in V, \forall y \in I \Rightarrow [x,y] \in I$.*

**Пример 5.** Во всякой алгебре Ли $V$ нулевая алгебра и сама алгебра $V$ являются подалгеброй и идеалом алгебры Ли $V$. Все остальные алгебры и идеалы называются <u>собственными</u> подалгебрами и идеалами.

**Определение 6.** *Пусть $A, B$ - множества из алгебры $V$. Символом $[A,B]$ обозначается <u>линейная оболочка</u> всех векторов $[x,y], x \in A, y \in B$ (т.е. множество конечных линейных комбинаций $\sum_i \alpha_i [x_i, y_i]$).*

Тогда определения подалгебры и идеала можно сформулировать так: векторное подпространство $V_1$ алгебры Ли $V$ называется подалгеброй алгебры Ли $\Leftrightarrow [V_1, V_1] \subset V_1$; подалгебра $I$ называется идеалом алгебры Ли $V \Leftrightarrow [V, I] \subset I$.

**Определение 7.** *Максимальный идеал* $N$*, который удовлетворяет условию* $[V, N] = 0$*, называется* *центром алгебры* *Ли. Для любого центра* $[N, N] = 0$*, т. е. коммутатор в центре всегда абелев.*

**Напоминание.** Заданы векторное пространство $V$ и набор векторных подпространств $V_i, i = 1, \ldots, n$, так что $\forall x \in V$ можно представить в виде $x = \sum_{i=1}^{n} x_i, x_i \in V_i$. Если при этом такое представление единственно, то говорят, что $V$ является прямой суммой подпространств $V_i$. Это факт записывается в виде $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$.

**Определение 8.** *Если алгебра Ли* $V$ *удовлетворяет следующим условиям:*

*1)* $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$*;*

*2)* $[V_i, V_i] \subset V_i; [V_i, V_j] = 0, i \neq j$*;* (4)

*тогда говорят, что алгебра Ли* $V$ *является* *прямой суммой* *алгебр* $V_i$.

Очевидно, что $V_i; i = 1, \ldots, n$ являются идеалами в алгебре $V$.

Пусть $I$ является идеалом в алгебре Ли $V$. Рассмотрим в $V$ отношение эквивалентности $x \sim y (\operatorname{mod} I) \Leftrightarrow x - y \in I$. Это действительно отношение эквивалентности, так как

1) $x \sim x$;

2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;

3) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Следовательно, алгебра $V$ раскладывается на непересекающиеся классы $P_x = x + I$ эквивалентных элементов. На множестве классов $P_x$ можно ввести операции сложения, умножения на число и коммутации. Проверим корректность коммутации. Пусть $x_1 \sim y_1; x_2 \sim y_2$, т.е. $x_1 = y_1 + i_1, x\ \ = y_2 + i_2$; отсюда следует, что

$$\left[x_1, x_2\right] = \left[y_1, y_2\right] + \left[y_1, i_2\right] + \left[i_1, y_2\right] + \left[i_1, i_2\right] \ . \tag{5}$$

Так как $I$ идеал, то $\left[x_1, x_2\right] \sim \left[y\ \ , y_2\right]$, т.е. операция корректно определена. Все свойства алгебры Ли проверяются очевидно. Полученная структура называется факторалгеброй и обозначается $V / I$.

**Определение 9.** *Пространство* $L = \{x \in V : \varphi(x) = 0\}$ *называется* *<u>ядром гомоморфизма</u>* *и является идеалом в алгебре Ли* $V$. *Очевидно, что* $V / L$ *и* $\varphi(L)$ *изоморфны, как алгебры Ли.*

**Основной пример 5**. <u>Алгебра инфинитезимальных операторов.</u>

Пусть область $V \subset R^n$, тогда отображение $\xi : V \to R^n$ класса $C^\infty(V)$ называется векторным полем в пространстве $R^n$ того же класса. Векторные поля класса $C^\infty(V)$ образуют векторное пространство (бесконечномерное). В локальной теории область $V$ при необходимости можно сузить. Обычное обозначение $L_\xi$.

**Определение 10.** *<u>Коммутатором векторных полей</u>* $\xi, \eta$ *на области* $V$ *называется векторное поле* $[\xi, \eta]$, *которое определяется как* $[\xi, \eta] = \partial\eta\langle\xi\rangle - \partial\xi\langle\eta\rangle$.

*Здесь* $\partial\xi, \partial\eta$ *- это производные векторных полей, рассматриваемых как гладкие отображения,* $\partial\eta\langle\xi\rangle$ *- значение производной на векторе* $\xi$.

**Замечание.** Точно так же определяется коммутатор произвольных гладких векторных полей на мнообразии $M$. Вычисления производятся в любой карте на многообразии. Пространство векторных полей на многообразии $M$ обозначается $D(M)$.

С помощью инфинитезимального оператора $\xi \cdot \partial$ предыдущее определение можно записать следующим образом:

$$[\xi, \eta] = (\xi \cdot \partial)\eta - (\eta \cdot \partial)\xi. \tag{6}$$

Понятие коммутатора векторных полей переносится на операторы.

**Определение 11.** *<u>Коммутатором инфинитезимальных операторов</u> $\xi \cdot \partial; \eta \cdot \partial$ называется инфинитезимальный оператор $[\xi, \eta] \cdot \partial$, который определяется формулой*

$$[\xi \cdot \partial, \eta \cdot \partial] = [\xi, \eta] \cdot \partial. \tag{7}$$

Определение основано на формуле , которая получается в результате сокращения вторых производных в силу их гладкости

$$(\xi \cdot \partial)(\eta \cdot \partial) - (\eta \cdot \partial)(\xi \cdot \partial) = [\xi, \eta] \cdot \partial. \tag{7.1}$$

Определение коммутатора в пространстве векторных полей $L_\xi$ определяет бинарную операцию. Эта операция обладает следующими свойствами:

1) *билинейность*:

$$[a\xi + b\eta, \zeta] = a[\xi, \zeta] + b[\eta, \zeta];$$

2) *антисимметричность:*

$$[\xi, \eta] = -[\eta, \xi];$$

3) *тождество Якоби*:

$$[[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta] = 0.$$

Первые два свойства очевидны. Докажем третье свойство. Доказательство третьего состоит в последовательном развертывании определений:

$$\left[\left[\xi,\eta\right],\zeta\right]=(\left[\xi,\eta\right]\cdot\partial)(\zeta\cdot\partial)-(\zeta\cdot\partial)(\left[\xi,\eta\right]\cdot\partial)=(\xi\cdot\partial)(\eta\cdot\partial)(\zeta\cdot\partial)-$$
$$-(\eta\cdot\partial)(\xi\cdot\partial)(\zeta\cdot\partial)-(\zeta\cdot\partial)(\xi\cdot\partial)(\eta\cdot\partial)+(\zeta\cdot\partial)(\eta\cdot\partial)(\xi\cdot\partial).$$

Сделаем круговую перестановку переменных $(\xi,\eta,\zeta)\to(\eta,\zeta,\xi)\to(\zeta,\xi,\eta)$. Раскрыв все слагаемые в равенстве Якоби, так же как для первого слагаемого, получим требуемый результат. Таким образом мы доказали, что $L_\xi$ является алгеброй Ли.

**Теорема 4.** *Если два векторных поля* $\xi(x),\eta(x)$ *касаются поверхности* $S$*, неособой и гладкой, то и* $\left[\xi,\eta\right](x)$ *тоже касается этой поверхности.*

Доказательство. Пусть для краткости поверхность задается одним уравнением $f(x^1,...,x^n)=0$. Так как поверхность неособая, то $gradf(x)\Big|_{f(x)=0}\neq 0$, для определенности $\dfrac{\partial f}{\partial x^n}\neq 0$. Сделаем замену переменных $\overline{x^1}=x^1,...,\overline{x^{n-1}}=x^{n-1},\overline{x^n}=f(x^1,...,x^n)$. В новых переменных поверхность $S$ имеет вид: $\overline{x^n}=0$. Тогда, если доказать теорему в новой системе координат, то в силу инвариантности объектов, теорема доказана в любой системе координат. Черту сверху далее для краткости опустим. Векторные поля имеют следующий вид: $\xi=(\xi^1,...,\xi^{n-1},\xi^n);\eta=(\eta^1,...,\eta^{n-1},\eta^n)$, причем $\xi^n\Big|_S=0;\eta^n\Big|_S=0$.

Тогда $\left[\xi,\eta\right]=\partial\eta\left\langle\xi\right\rangle-\partial\xi\left\langle\eta\right\rangle$. Но $\left[\xi,\eta\right]^n=\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{\partial\eta^n}{\partial x^k}\xi^k-\dfrac{\partial\xi^n}{\partial x^k}\eta^k)$.

В последней суммме при $k = n$ имеем $\dfrac{\partial \eta^n}{\partial x^n}\xi^n - \dfrac{\partial \xi^n}{\partial x^n}\eta^n = 0$ на $S$ по условию. Если $k < n$, то $\dfrac{\partial \eta^n}{\partial x^k}\Big|_s = \dfrac{\partial \xi^n}{\partial x^k}\Big|_s = 0.$ Теорема доказана.

**Следствие.** *Множество гладких векторных полей на поверхности (многообразии) $S$ образует алгебру Ли.*

## § 9. Локальные группы Ли

**Определение 1.** *Группой Ли называется $r$ - мерное дифференцируемое многообразие $G$, на котором введена групповая структура, при этом групповые операции 1) умножение $(x, y) \to xy$; 2) взятие обратного $x \to x^{-1}$ являются гладкими функциями на многообразии $G$.*

**Пример 1**. Матричные группы преобразований $GL(n, R)$, $SL(n,R), O(n,R), SO(n,R), U(n), SU(n)$ все являются группами Ли, так как групповые операции выражаются либо в виде многочленов, либо в виде дробно-рациональных функций в евклидовом пространстве.

**Определение 2.** *Гомоморфизмом $\varphi$ группы Ли $G$ в группу Ли $\tilde{G}$ называется групповой гомоморфизм, который задается с помощью гладкого отображения многообразия $G$ в многообразие $\tilde{G}$.*

**Определение 3.** *Декартовым произведением $r$ - мерной группы Ли $G$ и $p$ - мерной группы Ли $\tilde{G}$ называется многообразие $G \times \tilde{G}$ размерности $r + p$, в котором групповая операция определяется следующим равенством:* $(g_1, \tilde{g}_1)(g_2, \tilde{g}_2) = (g_1 g_2, \tilde{g}_1 \tilde{g}_2)$. *Очевидно, что групповая операция задается гладкими функциями в декартовом произведении многообразий $G \times \tilde{G}$.*

**Замечание.** *<u>Подмногообразием</u> $N$ многообразия $M$ называется подмножество $N \subset M$ вместе с гладким биективным отображением $\varphi : \tilde{N} \to N$, максимального ранга в любой своей точке. Здесь $\tilde{N}$ - некоторое другое многообразие, называемое пространством параметров.*

*<u>Регулярным подмногообразием</u> $N$ называется подмногообразие, которое обладает следующим свойством: для любой точки подмногообразия существует координатная карта $(x_1,...,x_n)$, в которой подмногообразие задается уравнениями $x^{k+1}=0,...,x^n=0$.*

В дальнейшем, как правило, у нас будут рассматриваться только регулярные подмногообразия.

**Определение 3.** *<u>Подгруппа Ли</u> $H$ группы $G$ задается подмногообразием $\varphi : \tilde{H} \to G$, где $\tilde{H}$ - группа Ли, а $\varphi$ - гомоморфизм групп Ли $H, \tilde{H}$.*

**Теорема 1.** *Если $H$ - замкнутая подгруппа группы Ли $G$, то $H$ - регулярное подмногообразие в $G$. Обратно, всякая регулярная подгруппа Ли группы $G$ замкнута* (доказательство см.[8,9]).

**Определение 4.** *<u>Локальной</u> $r$ - <u>параметрической группой Ли</u> называется пара $(U,\varphi)$, где $U$ - это окрестность нуля в $R^r$, отображение $\varphi : U \times U \to R^r$, обладающее следующими свойствами:*

1) $\varphi(a,0)=\varphi(0,a)=a; \forall a \in U$;
2) $\varphi(\varphi(a,b),c)=\varphi(a,\varphi(b,c)) \ \forall a,b,c \in U$, *причем таких, что* $\varphi(a,b) \in U, \varphi(b,c) \in U$;
3) $\varphi \in C^\infty(U,U)$.

**Теорема 2** (см.[2]). *Для локальной группы Ли существует окрестность нуля $V \subset U$, существует отображение $i : V \to U, i \in C^\infty(V)$, такое, что $\varphi(i(a),a)=\varphi(a,i(a))=0, \forall x \in V$.*

Доказательство. Из свойства 1) определения следует, что $\partial_a \varphi(a,0)\big|_{a=0} = \partial_a \varphi(0,a)\big|_{a=0} = I$. Следовательно, по теореме об обратной функции существуют окрестность нуля $V$ и отображения $i_1, i_2 : V \to U$, такие, что $\varphi(i_1(a),a) = 0; \varphi(a, i_2(a)) = 0$. Из свойства 2) определения следует

$$
\begin{aligned}
& i_1(a) = \varphi(i_1(a),0) = \varphi(i_1(a), \varphi(a, i_2(a))) = \\
& = \varphi(\varphi(i_1(a),a), i_2(a)) = \varphi(0, i_2(a)) = i_2(a).
\end{aligned}
$$

Свойства гладкости отображений требуемые. Теорема доказана.

**Основной пример 2.** *Способ построения локальных групп. Возьмем глобальную группу Ли, рассмотрим карту из атласа, на которой изображена единица. Рассматрим групповые операции в этой карте. Очевидно, что получаем локальную группу Ли.*

**Определение 5.** *Пусть* $(U,\varphi);(\tilde U,\tilde\varphi)$ *- локальные группы Ли. Отображение* $\Phi : U \to \tilde U$ *называется локальным гомоморфизмом группы* $(U,\varphi)$ *в группу* $(\tilde U,\tilde\varphi)$, *если*

$$\Phi(\varphi(a,b)) = \tilde\varphi(\Phi(a),\Phi(b)), \tag{1}$$

*где при необходимости можно сузить область определения* $\Phi$.

**Определение 6.** *Если гомоморфизм биективный и гладкий в обе стороны, то он называется локальным изморфизмом локальных групп Ли.*

**Определение 7.** *Пусть заданы пространство* $R^n$ *и локальная группа* $(U,\varphi)$. *Представление группы* $(U,\varphi)$ *в множестве* $T(R^n)$ *есть групповой гомоморфизм* $\pi : U \to T(R^n)$, *т.е.*

$$\pi(b)\circ\pi(a) = \pi(\varphi(a,b)). \tag{2}$$

**Определение 8.** *Представление называется* <u>*точным,*</u> *если существует окрестность нуля* $V \subset U$, *что для* $a \in V$ *равенство* $\pi(a) = I_{R^n}$ *возможно лишь для* $a = 0$.

**Определение 9.** <u>*Локальной группой Ли локальных преобразований*</u> *пространства* $R^n$ *называется образ* $\pi(V)$ *точного представления* $\pi$, *для которого отображение* $f(x,a) = \pi(a)(x)$ *является отображением класса* $C^\infty$. *Отображение* $f(x,a)$ *называется* <u>*порождающим отображением (действием)*</u>.

**Теорема 3.** *Порождаюшее отображение обладает следующими свойствами:*

*1)* $f(x,0) = x$ *для всякого* $x \in D$;

*2)* $f(f(x,a),b) = f(x,\varphi(a,b))$ *для всяких* $a,b \in V, x \in D$;

*3) Если* $a \in V$ *и* $f(x,a) = x$ *для всякого* $x \in D$, *следовательно,* $a = 0$;

*4)* $f \in C_\infty(D \times V)$.

Здесь $D \subset R^n$ - некоторая область.

Доказательство теоремы полностью аналогично однопараметрическому случаю.

**Определение 10.** <u>*Орбитой точки*</u> $x$ *называется множество* $G_x = \left( f(x,a); \forall a \in U \right)$. *Это множество является подмногообразием пространства* $R^n$.

**Определение 11.** *Группа* $(U,\varphi)$ *действует на пространстве* $R^n$

*1)* <u>*полурегулярно*</u>, *если все орбиты имеют одну и ту же размерность;*

*2) <u>регулярно</u>, если она действует полурегулярно, и для каждой точки $x \in D$ существует окрестность $O_x$ точки $x$, что любая орбита в группе пересекает $O_x$ по линейно связному множеству.*

Пусть $G$ группа Ли, $a$ - фиксированный элемент группы $G$. Отображение $L_a : G \to G$, определенное формулой $L_a(h) = ah$, является диффеоморфизмом, обратный к которому есть $L_{a^{-1}} = (L_a)^{-1}$.

**Определение 11.** *Векторное поле $v$ на $G$ называется <u>левоинвариантным</u>, если*

$$dL_a(v\big|_h) = v\big|_{L_a(h)} = v\big|_{ah}. \tag{3}$$

**Определение 12.** *<u>Алгебра Ли группы Ли</u> $G$ - это векторное пространство всех левоинвариантных векторных полей на $G$ (линейная структура).*

Таким образом, все векторные поля получаются разнесением заданного вектора в касательном пространстве к $e$. Пусть $v\big|_e$ - это вектор в касательном пространстве к $e$. Тогда по определению $v\big|_h = dL_h v\big|_e$. Построенное векторное поле является левоинвариантным. Действительно, так как $L_a \circ L_b = L_{ab}$, то $dL_a(v\big|_h) = dL_a(dL_h(v\big|_e)) = dL_{ah}(v\big|_e) = v\big|_{ah}$.

Очевидно, что алгебра Ли группы Ли имеет размерность $n$, т. е. совпадает с размерностью касательного пространства в $e$.

**Определение 13**. *<u>Коммутатор в пространстве левоинвариантных векторных полей.</u> Пусть $\xi$ и $\eta$ - два левоинвариантных векторных поля на группе Ли $G$. Рассматривая эти векторные поля как дифференциальные операторы, коммутатор определяют обычным образом, а именно $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$.*

**Теорема 4.** *Если отображение* $f: M \to N$ *является диффеоморфизмом, а* $\xi, \eta$ *- гладкие векторные поля на* $N$*, то* $df\left(\left[\xi,\eta\right]\big|_x\right) = \left[df(\xi), df(\eta)\right]\big|_{f(x)}$.

Доказательство: доказываемый результат не зависит от выбора системы координат на мнообразии $M, N$. Поэтому если результат доказан в некоторой системе координат, то тем самым он доказан в любой системе координат. Так как $f$ диффеоморфизм, то системы координат с многообразия $M$ перенесем на многообразие $N$, так что точки $x \in M$ и $f(x) \in N$ имеют одни и те же координаты $(x^1, ..., x^n)$. Таким образом, локально $f$ задается уравнениями $y^i = x^i$. Поэтому $df(\xi\big|_x)^i\big|_{f(x)} = \xi^i\big|_x$.

Следовательно, коммутаторы в системе координат $(x^1, ..., x^n)$ будут одними и теми же функциями. Теорема доказана.

<u>*Корректность операций над левоинвариантными векторными полями.*</u> Структура векторного пространства выполняется очевидным образом. Докажем, что коммутатор левоинвариантных полей является левоинвариантным полем. Этот результат опирается на **теорему 4**, так что

$$dL_a\left(\left[\xi,\eta\right]\big|_x\right) = \left[dL_a(\xi\big|_x), dL_a(\eta\big|_x)\right] = \left[\xi\big|_{ax}, \eta\big|_{ax}\right] = \left[\xi,\eta\right]\big|_{ax},$$

что и требовалось доказать.

**Пример 3** [10]. <u>*Левоинвариантные поля*</u> *на* $GL(n,R)$ *(алгебра Ли группы* $GL(n,R)$*).*

Левые сдвиги задаются формулой

$$L_A H = AH; A \in GL(n,R), H \in GL(n,R).$$

Тогда, если $\overline{H} = \overline{H}(t), \overline{H}(0) = H$ - это кривая, проходящая через $H$ , так что $\frac{d\overline{H}(t)}{dt}\Big|_{t=0} = X$ , где $X$ - произвольная матрица из $M(n,R)$, соответственно получим

$$dL_A(X\big|_H) = \frac{d(L_A(H(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d((AH)(t))}{dt}\Big|_{t=0} = A\frac{dH(t)}{dt}\Big|_{t=0} = AX .$$

Если есть два левоинвариантных векторных поля $\xi$ и $\eta$, тогда $\xi\big|_X = X\xi\big|_e ; \eta\big|_X = X\eta\big|_e$ . Для матричных элементов это принимает следующий вид: $\xi_j^i = x_k^i(\xi_e)_j^k ; \eta_j^i = x_k^i(\eta_e)_j^k$. Для компонент коммутатора имеем $[\xi,\eta]^i = \eta^p\frac{\partial\xi^i}{\partial x^p} - \xi^p\frac{\partial\eta^i}{\partial x^p}$. Так как векторы здесь являются матрицами, то вместо индексов $i,p$ будут двойные индексы. Таким образом, получаем

$$[\xi,\eta]_j^i = \eta_q^p\frac{\partial\xi_j^i}{\partial x_q^p} - \xi_q^p\frac{\partial\eta_j^i}{\partial x_q^p} = x_s^p\left(\xi_e\right)_q^s\frac{\partial x_k^i(\eta_e)_j^k}{\partial x_q^p} - x_s^p\left(\eta_e\right)_q^s\frac{\partial x_k^i(\xi_e)_j^k}{\partial x_q^p} =$$
$$= x_s^p\left(\xi_e\right)_q^s\delta_p^i\delta_k^q\left(\eta_e\right)_j^k - x_s^p\left(\eta_e\right)_q^s\delta_p^i\delta_k^q\left(\xi_e\right)_j^k =$$
$$= x_s^p\left(\xi_e\right)_q^s\left(\eta_e\right)_j^q - x_s^p\left(\eta_e\right)_q^s\left(\xi_e\right)_j^q .$$

Здесь $x_j^i$ - независимые переменные, $\frac{\partial x_k^i}{\partial x_q^p} = \delta_p^i\delta_q^k$ . Таким образом, для матриц $[\xi,\eta]\big|_X = X\xi\big|_e\eta\big|_e - X\eta\big|_e\xi\big|_e = X[\xi,\eta]\big|_e$ . Следовательно, при $X = I$ мы имеем $[\xi,\eta]\big|_e = \left[\xi\big|_e,\eta\big|_e\right] = \xi\big|_e\eta\big|_e - \eta\big|_e\xi\big|_e$ . То есть получен обычный матричный комутатор в $M(n,R)$.

**Замечание 1.** Тем самым мы доказали, что алгеброй Ли группы $GL(n,R)$ является множество $M(n,R)$, которое в данном контексте обозначалось как матричная алгебра $gl(n,R)$. Соответственно точно так же доказывается, что список матричных алгебр $gl(n,R), sl(n,R)$, $o(n,R), u(n), su(n)$ является списком алгебр Ли для матричных групп Ли $GL(n,R)$, $SL(n,R), O(n,R), SO(n,R), U(n), SU(n)$.

**Замечание 2.** Вместо левоинвариантных векторных полей можно было брать правоинвариантные. Получившаяся алгебра Ли будет изоморфна алгебре Ли, построенной выше.

**Конструкция** [8,9,10]. Траектории левоинвариантных векторных полей.

Пусть дано гладкое многообразие $M$ и гладкое векторное поле $\xi$ на многообразии $M$. Тогда для всякой точки $x_0$ существует функция $x(t)$ на некотором интервале $(\alpha,\beta)$, такая, что $x(0)=x_0, \dfrac{dx(t)}{dt}=\xi\Big|_{x(t)}$. Этот интервал свой для каждой точки $x_0$ в общем случае. Тогда $x(t)=f_\xi(x_0,t)$. По доказанному ранее, $f_\xi(x_0,t)$ обладает групповым свойством (см. §4), рассматриваемая как локальная однопараметрическая группа. Часто так же обозначают $f_\xi(x_0,t)=\exp(t\xi)(x_0)$. Мотивировка обозначения следует из группового свойства.

**Определение 14.** *Гладкое отображение* $\pi : R \to G$, *где* $G$ *группа Ли называется однопараметрической подгруппой, если*

$$\pi(a+b)=\pi(a)\pi(b); \forall a,b \in R.$$

Это определение обобщает на случай произвольной глобальной группы Ли предыдущие определения.

**Теорема 5.** *Всякое левоинвариантное векторное поле полное, любая интегральная кривая, проходящая через единицу группы $e$, является однопараметрической подгруппой. Обратно, любая однопараметрическая подгруппа группы $G$ является интегральной кривой левоинвариантного векторного поля.*

Доказательство: пусть $a,b\in G;\xi$ - левоинвариантное векторное поле. Тогда $bf_\xi\left(a,t\right)=f_\xi\left(ba,t\right)$ при всех $t$, при которых это равенство имеет смысл. Действительно, $bf_\xi\left(a,t\right)=L_b f_\xi\left(a,t\right)$. $f_\xi(a,t)$ - это интегральная кривая векторного поля $\xi$ с начальным условием $a$. Следовательно, получим $\frac{dL_b\left(f_\xi(a,t)\right)}{dt}=dL_b\frac{dx(t)}{dt}=dL_b(\xi\big|_x)=\xi\big|_{bx}$, в силу левоинвариантности векторного поля. Следовательно, $L_b x\left(t\right)$является интегральной кривой векторного поля $\xi$, начальное условие при $t=0$ имеет вид $L_b x\left(0\right)=bf_\xi(a,0)=ba$. Поэтому в силу единственности решений дифференциальных уравнений интегральная кривая $bf_\xi\left(x,t\right)=f_\xi\left(ba,t\right)$, что доказывает утверждение.

В силу доказанного равенства получаем

$$f_\xi\left(e,t\right)f_\xi\left(e,\tilde{t}\right)=f_\xi\left(f_\xi\left(e,t\right)e,\tilde{t}\right)=f_\xi\left(f_\xi\left(e,t\right),\tilde{t}\right)=f_\xi\left(e,t+\tilde{t}\right).$$

Следовательно, $f_\xi\left(e,t+\tilde{t}\right)$ имеет смысл. Отсюда следует, что интервал существования решения $\left(\alpha,\beta\right)$совпадает с числовой осью $\left(-\infty,\infty\right)$, так как при любых конечных интервалах $\left(\alpha,\beta\right)$при произвольных $t,\tilde{t}$, неизбежно $t+\tilde{t}$ выйдет за пределы $\left(\alpha,\beta\right)$.

Обратное утверждение доказывается аналогично.

Пусть $G$ группа Ли, $v_e$ - касательный вектор из касательного пространства $T_e$ к единице в группе $G$. По $v_e$ строится левоинвариантное векторное поле $v$ на группе Ли $G$, так что $f_\xi(e,t)$ его интегральная кривая с начальным условием $e$. $f_\xi(e,t)$ является однопараметрической подгруппой в $G$, которая определена при всех $t$.

**Определение 15.** $\exp\xi = f_\xi(e,1)$. *Отображение* $\exp: T_eG \to G$ *называется* <u>*экспоненциальным отображением*</u>.

Следовательно, $\exp t\xi = f_{t\xi}(e,1) = f_\xi(e,t)$. Отсюда получаем, что $\frac{d}{dt}(\exp t\xi)\big|_{t=0} = \xi$. Отображение гладкое, так как решение дифференциального уравнения гладко зависит от параметров и начальных условий.

**Теорема 6.** $\exp$ *является локальным диффеоморфизмом.*

Доказательство: $d\left(\exp\right)\big|_0$ отображает $T_eG$ в пространство $T_eG$. Здесь отождествлено касательное пространство к $T_eG$ с самим $T_eG$. Если $e_i = (0,...,1,...,0)$, где единица стоит на $i$- ом месте (в любом базисе $T_eG$), тогда положим $x^i(t) = te_i$. При этом $e_i = \frac{dx^i(t)}{dt}, \exp x^i(t) = \exp te_i$. Следовательно,

$$d\left(\exp\big|_0\right)e_i = \frac{d(\exp x^i(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d(\exp te_i)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d(f_{te_i}(e,1))}{dt}\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d(f_{e_i}(e,t))}{dt}\Big|_{t=0} = e_i.$$

Отсюда получаем, что $d(\exp)\big|_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \det\left(d(\exp)\big|_0\right) = 1 \neq 0$. Следовательно, по теореме об обратной функции заключаем, что имеем локальный диффеоморфизм.

**Определение 16.** _Каноническая система координат._

*Если выбрать в* $T_e G$ *базис* $e_1, \dots, e_r$, *то* $\xi = \sum_{i=1}^{r} \xi^i e_i$, *где* $\xi^i$ *- координаты в* $T_e G$. *Координаты переносятся в окрестность* $e$ *с помощью построенного диффеоморфизма. Эти координаты в окрестности* $e$ *называются* _канонческими координатами первого рода._

**Пример 4.** *Однопараметрические группы в* $GL(n,R)$. Этот пример уже рассмотрен в §1. Сейчас мы его рассмотрим в контексте общих построений.

Интегральные кривые левоинвариантных векторных полей в $GL(n,R)$ определяются уравнениями

$$\dot{x} = x\xi_e, x(0) = x_0; \xi_e \in M(n,R), x_0 \in GL(n,R).$$

Тогда $f_\xi(x_0, t) = x_0 \exp(t\xi_e)$, здесь справа стоит обычная матричная экспонента.

Действительно,

$\dot{x} = x\xi_e, x(0) = x_0 \Rightarrow \ddot{x}\Big|_{t=0} = x_0\xi_e^2, \dots, x^{(m)}\Big|_{t=0} = x_0\xi_e^m$. Следовательно, решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид $x(t)=x_0\sum_n \xi_e^n \frac{t^n}{n!}=x_0 e^{t\xi_e}$. Так как решение задачи коши единственно, то $f_\xi(x_0,t)=x_0 e^{t\xi_e}$.

Аналогично рассматриваются другие матричные группы и алгебры Ли. Таким образом, мы восстанавливаем по алгебре Ли группу Ли (точнее- окрестность единицы группы Ли). В силу полученного результата матричная экспонента является экспоненциальным отображением.

**Конструкция**. *Алгебры Ли локальных групп Ли*.

Пусть $(U,\varphi)$- локальная группа Ли с умножением $\varphi(a,b)$. Левый сдвиг в локальной группе определяется $L_a(b)=\varphi(a,b)$. Левоинвариантное векторное поле на локальной группе $(U,\varphi)$ определяется формулой $dL_a\left(v\big|_b\right)=v\big|_{L_a(x)}=v\big|_{\varphi(a,b)}$ при естественных предположениях об области определения $U$. Как и для глобальных групп Ли, векторное поле полностью характеризуется своим значением в касательном пространстве к $e$, размерность пространства всех таких векторных полей равна $r$. Поскольку закон умножения в этом случае задан в координатном виде, то и алгебру Ли можно представить в координатном виде, точнее в виде инфинитезимальных операторов.

**Теорема 2.** *Пусть* $(U,\varphi)$ *- локальная группа Ли. Тогда ее алгебра Ли порождается векторными полями* $v_s=\sum_{i=1}^{r}\xi_s^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, s=1,\ldots,r$, *где* $\xi_s^i(x)=\frac{\partial \varphi^i(a,b)}{\partial b^s}\Big|_{b=0,a=x}$.

Доказательство: чтобы писать касательные векторы в стандартном виде, изменим в этом пункте обозначения $L_x\left(y\right)=\varphi\left(x,y\right)\Rightarrow dL_a(\xi_s^i(0)\frac{\partial}{\partial y^i})=\xi_s^i(0)\frac{\partial\varphi^j}{\partial y^i}(x,0)\frac{\partial}{\partial y^j}$.

Так как $\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^k}(0,0)=\delta_k^i$, то имеем линейный изоморфизм для любых точек, близких к $e$, а, следовательно, базис в касательном пространстве, что и требовалось доказать.

## § 10. Схема вычисления основной группы, допускаемойсистемой дифференциальных уравнений. Определяющие уравнения.

В пространстве переменных $\left(x,u,\underset{1}{u},...,\underset{s}{u}\right)$ рассматривается регулярная поверхность (многообразие), заданная системой дифференциальных уравнений в частных производных порядка $s$:

$$\Phi(x,u,\underset{1}{u},...,\underset{s}{u})=0,\Phi=(\Phi^1,...,\Phi^p). \tag{1}$$

**Определение 1.** *Система дифференциальных уравнений (1) инвариантна относнооднопараметрической группы преобразований* $G^1$*(допускает эту группу, если поверхность в пространстве переменных* $\left(x,u,\underset{1}{u},...,\underset{s}{u}\right)$*, заданная системой (1), как системой алгебраических уравнений, инвариантна относительно* $s$ *- го продолжения продожения группы* $G^1$*, т.е.* $\underset{s}{G^1}$.

**Пример 1.** Одна зависимая переменная $m=1$, три независимых переменных $n=3$. Уравнение второго порядка.

Тогда $x=(x^1,x^2,x^3)=(x,y,z),u=(u),\underset{1}{u}=(u_x,u_y,u_z)$,

$\underset{2}{u} = (u_{xx}, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz}, u_{yy}, u_{zz})$. Уравнение изучается в пространстве $(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz}, u_{yy}, u_{zz})$.

**Пример 2.** $n = 2, m = 1$. Уравнение второго порядка. Так что $x = (t, x), u = (u)$. Все разворачивается в пространстве переменных $(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx})$. Допускаемый оператор однопараметричесой группы $G^1$ имеет следующий вид:

$$V = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u. \tag{2}$$

В таком виде обычно ищут симметрии эволюционных уравнений. Приведем формулы продолжения второго порядка для оператора однопараметрической группы:

$$\underset{2}{V} = V + \zeta^t \partial_{u_t} + \zeta^x \partial_{u_x} + \zeta^{tt} \partial_{u_{tt}} + \zeta^{xx} \partial_{u_{xx}} + \zeta^{tx} \partial_{u_{tx}}. \tag{3}$$

Операторы полного дифференцирования имеют вид

$$\begin{cases} D_t = \dfrac{\partial}{\partial t} + u_t \dfrac{\partial}{\partial u} + u_{tt} \dfrac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx} \dfrac{\partial}{\partial u_x} + \ldots; \\ D_x = \dfrac{\partial}{\partial x} + u_x \dfrac{\partial}{\partial u} + u_{tx} \dfrac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx} \dfrac{\partial}{\partial u_x} + \ldots. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь соответственно
$$\begin{cases} \zeta^t = D_t\eta - u_t D_t\tau - u_x D_t\xi; \\ \zeta^x = D_x\eta - u_t D_x\tau - u_x D_x\xi; \\ \zeta^{tt} = D_t\varphi^t - u_{tt} D_t\tau - u_{tx} D_t\xi; \\ \zeta^{tx} = D_t\varphi^t - u_{tt} D_t\tau - u_{tx} D_t\xi; \\ \zeta^{xx} = D_x\varphi^x - u_{tx} D_x\tau - u_{xx} D_x\xi. \end{cases} \tag{5}$$

Для любой функции зависимых и независимых переменных получим: $f = f(t,x,u)$, $D_t f = f_t + u_t f_u; D_x f = f_x + u_x f_u$. Формулы первого продолжения примут вид

$$\begin{cases} \zeta^t = \eta_t + u_t(\eta_u - \tau_t) - u_x\xi_t - u_t^2\tau_u - u_t u_x \xi_u; \\ \zeta^x = \eta_x + u_x(\eta_u - \xi_x) - u_t\tau_x - u_x^2\xi_u - u_t u_x \tau_u. \end{cases} \tag{6}$$

Формулы второго продолжения

$$\begin{cases} \zeta^{tt} = \eta_{tt} + u_t(2\eta_{tu} - \tau_{tt}) - u_x\xi_{tt} + u_t^2(\eta_{uu} - 2\tau_{tu}) - \\ -2u_t u_x \xi_{xu} - u_t^2 u_x \xi_{uu} - u_t^3\tau_{uu} + u_{tt}(\eta_u - 2\tau_t) - \\ -2u_{tx}\xi_t - 3u_t u_{tt}\tau_u - u_x u_{tt}\xi_u - 2u_t u_{tx}\xi_u; \\ \zeta^{tx} = \eta_{tx} + u_t(\eta_{xu} - \tau_{tx}) + u_x(\eta_{tu} - \xi_{tx}) - u_t^2\tau_{xu} + \\ +u_t u_x(\eta_{uu} - \tau_{tu} - \xi_{xu}) - u_x^2\xi_{tu} - u_t^2 u_x\tau_{uu} - u_t u_x^2\xi_{uu} - u_{tt}\tau_x + \\ +u_{tx}(\eta_u - \tau_t - \xi_x) - u_{xx}\xi_t - u_t u_x\xi_u - 2u_t u_{tx}\tau_u - -u_x u_{tt}\tau_u - 2u_x u_{tx}\xi_u; \\ \zeta^{xx} = \eta_{xx} - u_t\tau_{xx} + u_x(2\eta_{xu} - \xi_{xx}) - 2u_t u_x\tau_{xu} + u_x^2(\eta_{uu} - 2\xi_{xu}) - u_t u_x^2\tau_{uu} - \\ -u_x^3\xi_{uu} - 2u_{tx}\tau_x + u_{xx}(\eta_u - 2\xi_x) - u_t u_{xx}\tau_u - 2u_x u_{tx}\tau_u - 3u_x u_{xx}\xi_u. \end{cases}$$

Схема нахождения допускаемых однопараметрических групп основывается на применении к системе уравнений критерия инвариантности поверхности.

**Теорема 1.** *Система (1) допускает однопараметрическую группу* $G^1$ *с однопараметрическим оператором* $V$ *тогда и только тогда, когда* $\underset{s}{V}\Phi\big|_{\Phi=0} = 0.$

При этом необходимо выполнить следующие шаги:

1) построить продолжения оператора $V$;

2) подействовать продолженным оператором на систему дифференциальных уравнений (1). Здесь оператор действует на каждое уравнение системы независимо;

3) перейти в полученных выражениях на систему уравнений (1). Локально это означает, что некоторые переменные из пространства производных исключаются и остаются лишь независимые переменные в пространстве производных, что, в свою очередь, означает параметризацию поверхности (1) областью евклидова пространства. Поскольку полученные уравнения должны удовлетворяться тождественно, то, приравнивая коэффициенты при одинаковых одночленах в пространстве производных, получим систему уравнений для нахождения коэффициентов оператора $V$, которая называется <u>системой определяющих уравнений.</u>

Приведенные этапы вычислений можно подытожить следующей теоремой.

**Теорема 2.** *Какой бы ни была группа $G^1$, которую допускает система уравнений, ее касательное векторное поле (ее инфинитезимальный оператор) удовлетворяет определяющим уравнениям. Обратно, каждое решение системы определяющих уравнений задает оператор, который является оператором некоторой однопараметрической группы, допускаемой системой уравнений (1).*

**Свойства определяющих уравнений.**

1). Определяющие уравнения <u>*линейные и однородные*</u> относительно коэффициентов оператора $V$. Это следует из того, что этим свойством обладает оператор $\underset{s}{V}$. Следовательно, множество решений является линейным пространством.

2). Поскольку допускаемые операторы являются, будучи продолженными, касательными векторами для поверхности в продолженном пространстве, которая задается системой уравнений, то из результатов § 8 следует, что допускаемые операторы образуют <u>*алгебру Ли*</u>, не обязательно конечномерную.

3). Рассмотрим совокупность преобразований пространства зависимых и независимых переменных, каждое из которых принадлежит некоторой группе $G^1$, допускаемой системой уравнений (1). Можно ввести основное определение группового анализа дифференциальных уравнений.

**Определение 2.** *Основной группой системы дифференциальных уравнений (1) называют группу локальных преобразований пространства заывисимых и независимых переменных, которая является конечно-порожденным множеством преобразований, принадлежащих всевозможным однопараметрическим группам $G^1$, допускаемым системой (1).*

## § 11. Алгебры симметрии уравнений, моделирующих биофизические процессы, – уравнений теплопроводности, уравнения Бюргерса, уравнения Фишера (Колмогорова – Петровского - Пискунова), системы Тьюринга (Белоусова - Жаботинского)

Основными механизмами рождения структур в нелинейных задачах математической биологии являются диффузия и нелинейные распределенные источники, причем сама диффузия также может быть нелинейной. Вариантов очень много. Поэтому мы рассмотрим наиболее типичные. Начнем с уравнения теплопроводности с чистой диффузией, а затем будем усложнять нелинейным образом системы. Главной целью этого параграфа является обучение методу группового анализа дифференциальных уравнений и изучение зависимости допускаемых алгебр Ли от нелинейных свойств уравнений. Биофизические уравнения позволяют это сделать.

**1. Уравнение теплопроводности:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad . \tag{1}$$

Допускаемый оператор будем искать в следующем виде:

$$V = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u . \tag{2}$$

Находим второе продолжение допускаемого оператора

$$\underset{2}{V} = V + \zeta^t \partial_{u_t} + \zeta^x \partial_{u_x} + \zeta^{tt} \partial_{u_{tt}} + \zeta^{xx} \partial_{u_{xx}} + \zeta^{tx} \partial_{u_{tx}}. \qquad (3)$$

Записывая уравнение (1) в виде $\Phi = \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, после применения продолженного оператора получим следующее соотношение: $\underset{2}{V}\Phi\Big|_{u_t = u_{xx}} = \zeta^t - \zeta^{xx}\Big|_{u_t = u_{xx}} = 0$. Таким образом, исключена переменная $u_t$, свободными переменными в пространстве производных являются $1, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}$ и их различные произведения. Подставляя выражения для выражений $\zeta^t, \zeta^{xx}$ из § 10, получим следующее уравнение:

$$\eta_t - \eta_{xx} + u_x(\xi_{xx} - \xi_t - 2\eta_{xu}) + \left(u_x\right)^2 (2\xi_{xu} - \eta_{uu}) + \left(u_x\right)^3 \xi_{uu} +$$
$$+ u_{xx}(\tau_{xx} - \tau_t + 2\xi_x) + u_{tx}(2\tau_x) + u_x u_{xt}(2\tau_u) + u_x u_{xx}(2\xi_u + 2\tau_{xu}) +$$
$$+ \left(u_x\right)^2 u_{xx}\tau_{uu} = 0.$$

Это полином свободных переменных в пространстве производных. Выпишем коэффициенты при имеющихся мономах, ставя слева одночлен в пространстве производных, при котором рассматривается коэффициент:

(1.1). $(u_x)^2 u_{xx} : \tau_{uu} = 0.$

(1.2). $u_x u_{xx} : 2\xi_u + 2\tau_{xu} = 0.$

(1.3). $u_x u_{tx} : 2\tau_u = 0.$

(1.4). $u_{tx} : 2\tau_x = 0.$

(1.5). $u_{xx} : \tau_{xx} - \tau_t + 2\xi_x = 0.$

(1.6). $\left(u_x\right)^3 : \xi_{uu} = 0.$

(1.7). $\left(u_x\right)^2 : 2\xi_{xu} - \eta_{uu} = 0.$

(1.8). $u_x : \xi_{xx} - \xi_t - 2\eta_{xu} = 0.$

(1.9). $1 : \eta_t - \eta_{xx} = 0.$

Из уравнений (1.3),(1.4) следует, что $\tau = \tau(t)$. Поэтому из (1.2) получаем $\xi_u = 0$, т.е. $\xi = \xi(t,x)$. Тогда уравнения (1.1),(1.6) выполняются автоматически. Таким образом, остаются уравнения

(1.5): $\xi_x = \frac{1}{2}\tau_t$; (1.7): $\eta_{uu} = 0$; (1.8): $\xi_{xx} - \xi_t = 2\eta_{xu}$; (1.9): $\eta_t - \eta_{xx} = 0$.

Из (1.7) следует, что $\eta$ является линейной функцией по переменной $u$. Тогда $\eta = p(t,x)u + q(t,x)$, где функции $p(t,x), q(t,x)$ подлежат определению.

Из (1.5) следует, что $\xi = \frac{1}{2}\tau_t x + r(t)$, где $r(t)$- неизвестная пока функция. Подставим полученные выражения в уравнения (1.8),(1.9):

$$-\frac{1}{2}\tau_{tt}x - r_t = 2p_x; (p_t - p_{xx})u + q_t - q_{xx} = 0.$$

Отсюда сразу получается, что $p(t,x)$ является квадратичной функцией по переменной $x$: $p = -\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}r_t x + m(t)$, где функция $m(t)$ подлежит определению. Так как $p(t,x), q(t,x)$ не зависят от $u$, то получим пару уравнений: $p_t - p_{xx} = 0; q_t - q_{xx} = 0$. Подставим $p = -\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}r_t x + m(t)$ в уравнение $p_t - p_{xx} = 0$. Полученное выражение рассматриваем как полином по переменой $x$: $-\frac{1}{8}\tau_{ttt}x^2 - \frac{1}{2}r_{tt}x + m_t + \frac{1}{4}\tau_{tt} = 0$. Отсюда следует, что так как $\tau, m, r$ являются функциями только от переменной $t$, то необходимо выполнение следующих условий: $\tau_{ttt} = 0; r_{tt} = 0; m_t = -\frac{1}{4}\tau_{tt}$. Поэтому получаем следующие выражения для упомянутых функций:

$$\tau = c_1 t^2 + c_2 t + c_3; r = c_4 t + c_5; m = -\frac{1}{2} c_1 t + c_6.$$

Подставляя полученные формулы в выражения для коэффициентов оператора $V$, получим

$$\begin{cases} \tau = c_1 t^2 + c_2 t + c_3; \\ \xi = c_1 t x + \frac{1}{2} c_2 x + c_4 t + c_5; \\ \eta = -\frac{1}{2} c_1 (x^2 + 2t) u - \frac{1}{2} c_4 x u + c_6 u + q(t,x). \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $q(t,x)$ - произвольное решение уравнения теплопроводности. Приведем базисные векторные поля (инфинитезимальные операторы), допускаемые уравнением теплопроводности:

$$\begin{cases} V_1 = 4t^2 \partial_t + 4tx \partial_x - (x^2 + 2t) u \partial_u; \\ V_2 = 2t \partial_t + x \partial_x; \\ V_3 = \partial_t; \\ V_4 = 2t \partial_x - xu \partial_u; \\ V_5 = \partial_x; \\ V_6 = u \partial_u; \\ V_\infty = q(t,x) \partial_u. \end{cases} \tag{5}$$

**Замечание 1.** Допускаемая алгебра операторов бесконечномерна, так как зависит от функции $q(t,x)$, которая является решением уравнения теплопроводносcти, а пространство таких решений бесконечномерно. Структура допускаемой алгебры операторов имеет вид $L = L^6 \oplus L^\infty$, где $L^6$ порождается шестью первыми операторами $V_i$, $L^\infty$ порождается операторами $V_\infty$. Отметим, что подобный результат находится в полном соответствии с выводами § 17, так что можно было сразу искать алгебру операторов в таком виде. Однако, имея в виду анализ нелинейных уравнений, такая техника здесь применяться не будет.

**2. Уравнение Бюргерса:** $\dfrac{\partial u}{\partial t} = u\dfrac{\partial u}{\partial x} + u_{xx}.$ (6)

Это уравнение первоначально было предложено для описания турбулентных процессов. В сочетании с некоторыми вероятностными структурами оно продолжает использоваться и в настоящее время. Здесь (6) рассматривается как уравнение, сочетающее в себе нелинейный перенос и диффузию.

Возможны другие формы уравнения (6), например,
$\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = u_{xx}$. Оно сводится к предыдушему заменой $u \to -u$.
Мы будем пользоваться уравнением, приведенным выше, так как уменьшается количество минусов в выкладках.

Оператор продолжения в этом случае такой же, как и для уравнения теплопроводности. Условие инвариантности уравнения Бюргерса относительно инфинитезимального оператора имеет следующий вид:

$$\zeta^{t} - \zeta^{xx} - \eta u_x - u\zeta^{x}\Big|_{u_t = uu_{xx} + u_{xx}} = 0. \tag{7}$$

Подставляя формулы продолжения из § 10, исключая производную $u_t$, расщепляя уравнения на мономы и приравнивая коэффициенты при них нулю, получим систему определяющих уравнений:

$$(2.1).1 : \eta_t - \eta_{xx} - u\eta_x = 0;$$
$$(2.2).u_x : u(\eta_u - \tau_t) - \xi_t - \eta - 2\eta_{xu} + \xi_{xx} + u\tau_{xx} - u(\eta_u - \xi_x - u\tau_x) = 0;$$
$$(2.3).(u_x)^2 : (u)^2 \tau_u - u\xi_u - \eta_{uu} + 2\xi_{xu} + 2u\tau_{xu} + u(u\tau_u + \xi_u) = 0;$$

$(2.4).\left(u_x\right)^3 : u\tau_{uu} + \xi_{uu} = 0;$

$(2.5).\left(u_{tx}\right) : 2\tau_x = 0;$

$(2.6).\left(u_{xx}\right) : \eta_u - \tau_t - \eta_u + 2\xi_x + \tau_{xx} + u\tau_x = 0;$

$(2.7).(u_x u_{tx}) : 2\tau_u = 0;$

$(2.8).(u_x u_{xx}) : -2\tau_u - \xi_u + 2\tau_{xu} + u\tau_u + 3\xi_u + u\tau_u = 0;$

$(2.9).\left(u_x\right)^2 u_{xx} : \tau_{uu} = 0;$

$(2.10).\left(u_{xx}\right)^2 : -\tau_u + \tau_u = 0.$

Из формул (2.5),(2.7) следует, что $\tau = \tau(t)$. Тогда из (2.8) получаем зависимость $\xi = \xi(t,x)$. После этого остаются существенными следующие уравнения:

$$\begin{cases} \eta_t - \eta_{xx} - u\eta_x = 0; \\ u\tau_t + \xi_t + \eta + 2\eta_{xu} - \xi_{xx} - u\xi_x = 0; \\ \eta_{uu} = 0; \\ \tau_t = 2\xi_x. \end{cases} \tag{8}$$

Отсюда сразу находим, что $\eta = p(t,x)u + q(t,x); \xi = \frac{1}{2}\tau_t x + r(t)$.

Функции $p, q, r$ подлежат определению. Подставляя выражения для функций $\eta, \xi$ во второе уравнение из (8), получим, что

$$u\left(\frac{1}{2}\tau_t + p\right) + \frac{1}{2}\tau_{tt}x + r_t + q + 2p_x = 0. \tag{9}$$

Так как это тождество по переменной $u$, то отсюда получаем, что

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\tau_t + p = 0; \\ \frac{1}{2}\tau_{tt} + r_t + q + 2p_x = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Дифференцируя первое уравнение по переменной $x$, имеем, что $p_x = 0.$ То есть $p = p(t).$ Поэтому $q = -\frac{1}{2}\tau_{tt}x - r_t, p = -\frac{1}{2}\tau_t.$ Подставим эти выражения в первое уравнение (8). Тогда имеем $-\frac{1}{2}\tau_{ttt}x - r_{tt} = 0$. Так как это тождество по всем переменным, то получим $\tau_{ttt} = 0, r_{tt} = 0.$ Отсюда сразу находим функциональный вид $\tau, r,$ так что $\tau = c_1t^2 + c_2t + c_3, r = c_4t + c_5.$ Таким образом, общий вид коэффициентов допускаемого инфинитезимального оператора имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \tau = c_1t^2 + c_2t + c_3t; \\ \xi = c_1tx + \frac{1}{2}c_2x + c_4t + c_5; \\ \eta = -c_1tu - \frac{1}{2}c_2u - c_1x - c_4. \end{cases} \tag{11}$$

Алгебра операторов пятимерна. Базис этой алгебры таков:

$$\begin{cases} V_1 = t^2\partial_t + tx\partial_x + (-x - ut)\partial_u; \\ V_2 = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u; \\ V_3 = \partial_t; \\ V_4 = t\partial_x - \partial_u; \\ V_5 = \partial_x. \end{cases} \tag{12}$$

**Замечание 1.** Введение нелинейности в уравнение, как правило, сужает симметрию. Бесконечномерная алгебра Ли симметрий для уравнения теплопроводности превратилась в пятимерную алгебру для уравнения Бюргерса. На уровне точечных симметрий, не зная заранее результата, трудно установить связь между ними. Точный результат сформулируем в виде упражнения.

**Упражнение 1.** Уравнение Бюргерса $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ заменой искомой функции $u=-2\nu\frac{\partial}{\partial x}(\ln\psi)$ сводится к уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

**3. Уравнение (Колмогорова - Петровского - Пискунова):**

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(u). \tag{13}$$

Это одно из основных уравнений биофизики. Далее мы достаточно подробно рассмотрим его решения.

Мы рассмотрим случай, когда $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\neq 0$. В противоположном случае получаем уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+au+b$. Стандартными заменами оно сводится к уравнению теплопроводности (см. задачник [11]). Всегда можно добиться заменами независимых и зависимой переменных, чтобы $\nu=1$. Групповая классификация уравнения (13) была выполнена в работе [12,14]. Искомый вид допускаемого оператора все тот же. Выкладки будут практически такие же, что и ранее. Для простоты можно считать $F(u)$ аналитической функцией $u$. Приведем лишь сводку результатов.

При любом выборе нелинейного источника $F(u)$ уравнение (13) допускает операторы $V_1=\partial_t, V_2=\partial_x$. То есть уравнение инвариантно всегда относительно сдвигов по оси $x$ и по времени $t$. Если $F(u)=u^s$, где $s\neq 0;1$, то уравнение дополнительно допускает оператор растяжения

$2t\partial_t + x\partial_x + \dfrac{2}{1-s}u\partial_u$. Если же $F(u) = \exp(Lu)$, то дополнительный оператор имеет следующий вид: $2t\partial_t + x\partial_x - \dfrac{2}{L}\partial_u$.

Здесь также сразу можно отметить, что в пространственном случае, когда число независимых переменных три, к полученным операторам добавляются операторы вращения вокруг координатных осей.

**Замечание 2.** Если $F(u) = u(1-u)$, то уравнение Колмогорова - Петровского - Пискунова называется уравнением Фишера. Оно является модельным уравнением нелинейной биофизики. В этом случае уравнение допускает лишь сдвиги по осям $t, x$.

**4. Система Тьюринга (упрощенные уравнения Белоусова - Жаботинского):**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nu_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_1(u,v); \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \nu_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F_1(u,v). \end{cases} \tag{14}$$

При $\dfrac{\partial F_1}{\partial u} = 0; \dfrac{\partial F_2}{\partial v} = 0$ получаются несвязанные уравнения Колмогорова - Петровского - Пискунова , которые мы уже рассматривали.

В биофизике считается, что система Тьюринга удачно моделирует явления морфогенеза, а морфогенез можно объяснить взаимной диффузией и реакциями веществ, которые называют морфогенами.

Опуская довольно громоздкие, но преодолеваемые детали, приведем итог группового анализа системы Тьюринга, впервые осуществленный в работах [13,14].

Для произвольных гладких функций $F_1(u,v), F_2(u,v)$ система Тьюринга допускает только сдвиги по осям $x, t$, т.е. операторы $\partial_t, \partial_x$.

Расширение алгебры операторов системы происходит лишь в следующих случаях.

**4.1. Степенные источники, не вырождающиеся в константы:**

$$F_1 = u^s v^t, F_2 = u^k v^l. \quad (15)$$

В этом случае возникает дополнительный оператор, соответствующий группе подобия

$$2t\partial_t + x\partial_x + mu\partial_u + nv\partial_v, \quad (16)$$

где постоянные величины $m, n$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (s-1)m + tn = -2; \\ km + (L-1)n = -2. \end{cases} \quad (17)$$

**4. 2. Экспоненциальные источники, не вырождающиеся в константы:** $F_1 = \exp(L_1 u + L_2 v); F_2 = \exp(L_3 u + L_4 v)$. (18)

Дополнительный оператор в этом случае имеет вид

$$2t\partial_t + x\partial_x + m\partial_u + n\partial_v. \quad (19)$$

Здесь постоянные величины $m, n$ удовлетаоряют линейной системе уравнений

$$\begin{cases} L_1 m + L_2 n = -2; \\ L_3 m + L_4 n = -2. \end{cases} \quad (20)$$

**4.3.Источники смешанного экспоненциально-степенного типа:**

А). $F_1 = u^{s_1}\exp(L_1 v); F_1 = u^{s_2}\exp(L_2 v)$. (21)

Дополнительный оператор имеет вид

$$2t\partial_t + x\partial_x + ku\partial_u + l\partial_v, \quad (22)$$

где постоянные $k, l$ удовлетворяют линейной системе уравнений

$$\begin{cases} k(s_1 - 1) + lL_1 = -2; \\ ks_2 + lL_2 = -2. \end{cases} \quad (23)$$

Б). $F_1 = \exp(L_1 u) v^{s_1}; F_2 = \exp(L_2 u) v^{s_2}$. (24)

Дополнительный оператор имеет вид

$$2t\partial_t + x\partial_x + k\partial_u + lv\partial_v, \qquad (25)$$

где константы $k, l$ удовлетворяют линейной системе уравнений

$$\begin{cases} kL_1 + ls_1 = -2; \\ kL_2 + l(s_2 - 1) = -2. \end{cases} \qquad (26)$$

Этим исчерпывается групповой анализ уравнений Тьюринга.

**Замечание 3.** Во многих книгах, статьях по групповому анализу рассматривается задача групповой классификации уравнений или систем уравнений, когда в состав уравнений входят произвольные функции. В полном соответствии в приведенным выше анализом возникает нетривиальная зависимость допускаемой алгебры операторов от вида функции или функций. На множестве допускаемых алгебр действуют некоторые преобразования эквивалентности, которые разбивают допускаемые алгебры на эквивалентные классы, каждый из которых характеризуется некоторым представителем (алгеброй операторов наиболее простого вида). Для них и ищутся точные решения. Задача групповой классификации является нетривиальной. Но в нашем случае, поскольку мы, прежде всего, будем исследовать общий случай, задача групповой классификации является излишней.

## § 12. Симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений

**1. Диффренциальные уравнения первого порядка.** Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка $y'_x = f(x, y)$. Допустим, что это уравнение допускает однопараметрическую группу преобразований $G^1$ с инфинитезимальным оператором

$V = \xi(x.y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$. (1)

Первое продолжение оператора имеет вид

$$\underset{1}{V} = V + \zeta^{x} \partial_{y_x}, \tag{2}$$

где
$$\zeta^{x} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x) y_x - \xi_y (y_x)^2, y_x = y'_x. \tag{3}$$

Тогда условие инвариантности уравнения $y'_x = f(x, y)$ относительно $G^1$ имеет вид

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x) f - \xi_y f^2 = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial y}{\partial y}. \tag{4}$$

Уравнение (4) часто формально решить труднее, чем исходное дифференциальное уравнение. Но для многих классов уравнений допускаемый оператор находится довольно просто. Итак, допустим, что допускаемый оператор $V$ известен! Рассмотрим область в $R^2(x, y)$, где $V \neq 0$, в этой области $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$. По теореме о выпрямлении векторного поля, заменой переменных
$$\begin{cases} u = \alpha(x, y); \\ v = \beta(x, y), \end{cases} \tag{5}$$

приведем оператор к виду $\underset{1}{V} = V = \dfrac{\partial}{\partial v}$. Тогда отсюда из (4) следует, что в новой системе координат $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = 0$. Следовательно, $\tilde{f} = \tilde{f}(u)$. Таким образом в новой системе координат уравнение принимает вид

$$\frac{dv}{du} = \tilde{f}(u). \tag{6}$$

Уравнение (6) является уравнением с разделяющимися переменными и интегрируется в квадратурах. Возвращаясь к исходным переменным, получаем решение исходного уравнения. Итогом этих рассуждений служит теорема.

**Теорема 1.** *Если дифференциальное уравнение* $y'_x = f(x,y)$ *допускает оператор однопараметрической группы* $V = \xi(x.y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y$, *то решение дифференциального уравнения может быть найдено в квадратурах.*

**Замечание 1.** По формулам замены переменных для функций $\alpha(x,y), \beta(x,y)$ получаем систему линейных уравнений в частных производных

$$\begin{cases} V(\alpha) = \xi \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} = 0; \\ V(\beta) = \xi \dfrac{\partial\beta}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial\beta}{\partial y} = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Так что $\alpha$ является инвариантом однопараметрической группы.

**Пример 1** [4,8]. Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}). \tag{8}$$

Мы решим это уравнение не самым коротким способом (см., например,[15]), зато универсальным. Уравнение является инвариантным при следующей замене переменных $(x,y) \to (kx,ky), k > 0, k = e^a$. В пространстве первого продолжения имеем $(x,y,y_x) \to (kx,ky,y_x), k > 0, k = e^a$. Тогда оператор допускаемой группы имеет следующий вид: $V = x\partial_x + y\partial_y$. Замена переменных, при которой происходит выпрямление векторного поля, примет вид

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + y\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} = 0; \\ x\dfrac{\partial\beta}{\partial x} + y\dfrac{\partial\beta}{\partial y} = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Фнкционально независимыми решениями этой системы являются функции $u=\dfrac{y}{x}; v=\ln x.$ Так что, $x=e^{v}$. Пользуясь классической формулой дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}=\frac{\frac{d}{du}(xu)}{\frac{dx}{du}}=\frac{x+u\frac{dx}{du}}{\frac{dx}{dv}\frac{dv}{du}}=\frac{x+uxv_{u}}{xv_{u}}=\frac{x(1+uv_{u})}{xv_{u}}=\frac{1+uv_{u}}{v_{u}}.$$

Следовательно, получим уравнение $\dfrac{dv}{du}=\dfrac{1}{f(u)-u}$. Получено дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируем его и возвращаемся к исходным переменным.

**Теорема 2 (Софус Ли).** *Если дифференциальное уравнение первого порядка*

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{10}$$

*допускает однопараметрическую группу* $G^{1}$ *с оператором* $V=\xi(x,y)\partial_{x}+\eta(x,y)\partial_{y}$, *то функция*

$$R(x,y)=\frac{1}{\xi(x,y)P(x,y)+\eta(x,y)Q(x,y)} \tag{11}$$

*является интегрирующим множителем для дифференциального уравнения* (10).

Доказательство: запишем уравнение (10) в виде $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}=f(x,y)$. Если в уравнение (4) подставить

$-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f(x,y)$, то получится уравнение

$$(\xi\frac{\partial P}{\partial x}+\eta\frac{\partial P}{\partial y})Q-(\xi\frac{\partial Q}{\partial x}+\eta\frac{\partial Q}{\partial y})P+\frac{\partial\eta}{\partial x}Q^2-(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x})PQ- \\ -\frac{\partial\xi}{\partial y}Q^2=0. \tag{12}$$

Уравнение (12) дает критерий того, что оператор $V$ является симметрией уравнения (10).

С другой стороны, если $R(x,y)$ является интегрирующим множителем для уравнения (10), то необходимо выполнение условия $\dfrac{\partial}{\partial y}(RP)=\dfrac{\partial}{\partial x}(PQ)$. Подставим в это условие выражение $R(x,y)=\dfrac{1}{\xi(x,y)P(x,y)+\eta(x,y)Q(x,y)}$. После элементарных преобразований получим

$$R^2\left\{\eta(Q\frac{\partial P}{\partial y}-P\frac{\partial Q}{\partial y})-\frac{\partial\xi}{\partial y}P^2-\frac{\partial\eta}{\partial y}PQ\right\}= \\ =R^2\left\{\xi(P\frac{\partial Q}{\partial x}-Q\frac{\partial P}{\partial x})-\frac{\partial\xi}{\partial x}PQ-\frac{\partial\eta}{\partial x}Q^2\right\}.$$

А условие в точности совпадает с формулой (12). Теорема доказана.

**2. Симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков.** Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение произвольного порядка $F(x,y,y_x,...,y_x^{(n)})=0$. (13)

Допустим, что известен оператор симметрии $V$ для уравнения (16). Считая $V\neq 0$, сделаем замену переменных $u=\alpha(x,y);v=\beta(x,y)$, в которых оператор $V$ примет вид $V=\partial_v$. Уравнение в новых переменных примет следующий вид:

$$\tilde{F}(u,v,v_u,\ldots,v_u^{(n)})=0. \tag{14}$$

Тогда условие инвариантности дифференциального уравнения (14) относительно $V=\partial_v$ примет вид $\dfrac{\partial\tilde{F}}{\partial v}=0$. Следовательно, уравнение не содержит явно переменную $v$, т.е. $\tilde{F}(u,v_u,\ldots,v_u^{(n)})=0$. Полагая $z=v_u$, получим дифференциальное уравнение $(n-1)$ порядка.

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение вида $F(y,y_x,y_{xx})=0$. Так как в уравнение не входит явно независимая переменная $x$, то уравнение допускает оператор $\dfrac{\partial}{\partial x}$. Сделаем замену переменных $u=y; v=x.$ То есть поменяем местами зависимые и независимые переменные. Тогда $y_x=\dfrac{1}{v_u}; y_{xx}=-\dfrac{v_{uu}}{v_u^3}$. После замены уравнение примет вид $F(u,\dfrac{1}{v_u},-\dfrac{v_{uu}}{v_u^3})=0$. Обозначая $z=v_u$, получим дифференциальное уравнение первого порядка.

**Пример 3.** Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами $\ddot{y}+p(t)\dot{y}+q(t)y=0.$ (Это же уравнение рассматривается в § 13). Это линейное уравнение. Оно инвариантно относительно замены переменных $(t,y)\to(t,\lambda y),\lambda>0,\lambda=e^a$. Этой однопараметрической группе соответствует оператор $V=y\partial_y$. Выпрямление векторного поля достигается заменой переменных $u=t, v=\ln y$. Тогда в этих переменных оператор группы примет вид $V=\dfrac{\partial}{\partial v}$. Тогда $y=e^v; y_t=e^v v_t; y_{tt}=(v_{uu}+v_u^2)e^v$.

Уравнение принимает вид

$$v_{uu} + v_u^2 + p(u)v_u + q(x) = 0. \tag{15}$$

Это уравнение после замены $z = v_u$ становится уравнением Риккати $z_u + z^2 + p(u)z + q(z) = 0$. То есть порядок уравнения понижен.

**Пример 4 [4].** Интегрирование частного уравнения Риккати. Рассматривается уравнение частного вида

$$y' + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0. \tag{16}$$

Это уравнение инвариантно относительно группы растяжений $\overline{x} = xe^a; \overline{y} = ye^{-a}$, что проверяется непосредственно. Этой группе соответствует оператор $V = x\partial_x - y\partial_y$. Делаем замену переменных для выпрямления векторного поля $(x, y) \to (u, v)$ с помощью обычных условий, так что получим $Vu = 1, Vv = 0$. Отсюда находим $v = xy; u = \ln x$. В новых переменных получим после простейших преобразований $v_u + v^2 - v - 2 = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными интегрируется в элементарных функциях.

Все сказанное в этом разделе можно подытожить теоремой.

**Теорема 3.** *Если дифференциальное уравнение $F(x, y, y_x, ..., y_x^{(n)}) = 0$ инвариантно относительно однопараметрической группы преобразований оператором $V$, то оно может быть понижено в порядке.*

**3. Дифференциальные инварианты.**

**Определение 1.** *Пусть $G^1$ локальная группа преобразований на множестве $M \subset X \times U$, где $X \subset R, U \subset R$. Дифференциальным инвариантом $s$ - го порядка называется функция $\Phi : \underset{s}{M} \to R$ ($\underset{s}{M}$ является $s$ -*

*ым продолжением множества* $M$ *) такая, что* $\Phi : \underset{s}{M} \to R$ *является инвариантом продолженного действия группы* $G^1$.

**Пример 5.** Дифференциальные инварианты группы вращений. Этой группе соответствует оператор $V = -y\partial_x + x\partial_y$. Тогда первое продолжение оператора $V$ будет иметь вид $\underset{1}{V} = -y\partial_x + x\partial_y + (1 + y_x^2)\partial_{y_x}$. Условие инвариантности запишется в виде $\underset{1}{V}\Phi(x,u,u_x) = 0$. Базис дифференциальных инвариантов $I_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, I_2 = \dfrac{xy_x - y}{x + yy_x}$.

Возникает проблема нахождения дифференциальных инвариантов, если известен какой либо один. Имеет место теорема.

**Теорема 4.** [2,16]. *Пусть для группы* $G^1$ *известен инвариант* $\phi(x, y)$ *и дифференциальный инвариант первого порядка* $\Phi(x, y, y_x)$. *Тогда выражение* $\Psi = \dfrac{d\Phi}{d\varphi} = \dfrac{\Phi_x + \Phi_y y_x + \Phi_{y_x} y_{xx}}{\varphi_x + \varphi_y y_x}$ *будет дифференциальным инвариантом второго порядка. Любой инвариант не выше второго порядка группы* $G^1$ *будет функцией* $\varphi, \Phi, \Psi$.

Доказательство этой теоремы можно прочитать в книге Л.В. Овсянникова «Групповой анализ дифференциальных уравнений». Смысл построения дифференциальных инвариантов относительно заданной однопараметрической группы состоит в том, что таким образом можно найти общий вид дифференциального уравнения соответствующего порядка, инвариантного относительно заданной однопараметрической группы. Сказанное поясним примером.

**Пример 6.** Рассмотрим оператор $V = y\partial_x$. Нетрудно проверить, что первое и второе продолжение этого оператора следующий вид:

$$\underset{1}{V} = y\partial_x - y_x^2\partial_{y_x};\underset{2}{V} = y\partial_x - y_x^2\partial_{y_x} - 3y_x y_{xx}\partial_{y_{xx}}.$$

Решая характеристическую систему, например, для второго продолжения, получим $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{0} = -\dfrac{dy_x}{y_x^2} = -\dfrac{dy_{xx}}{3y\ y_{xx}}$. Базис дифференциальных инвариантов имеет вид $I_1 = y; I_2 = \dfrac{y}{y_x} - x; I_3 = \dfrac{y_{xx}}{y_x^3}$.Поэтому общий вид дифференциального уравнения первого порядка инвариантного относительно оператора $V$ имеет вид $F_1(y, \dfrac{y}{y_x} - x) = 0$, соответственно второго - $F_2(y, \dfrac{y}{y_x} - x, \dfrac{y_{xx}}{y_x^3}) = 0$. Здесь $F_i$- произвольные функции.

## § 13. Симметрии динамических систем (динамические симметрии).

Пусть $x = (x^1,...,x^n)$, $a$ - групповой параметр однопараметрической группы $G^1$. Действие этой группы задается в виде $\bar{x} = \bar{x}(x,a) = f(x,a)$. При малых значениях группового параметра $a$ имеем $\bar{x} = x + \xi(x)a + o(a)$. Уравнения Ли для $G$ записываются следующим образом: $$\frac{d\bar{x}}{da} = \xi(\bar{x});\quad \bar{x}\big|_{a=0} = x.$$

Рассмотрим более подробно вопрос о преобразовании произвольной функции $\Phi$ с помощью группы $G^1$, точнее, как найти выражение для $\Phi(\bar{x})$, если известно выражение $\Phi(x)$. Тогда $\Phi(\bar{x}) = \Phi(x + \xi(x)a + ...) = \tilde{\Phi}(x,a).$

Следовательно, $\dfrac{d\Phi(\bar{x})}{da} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial\bar{x}}\dfrac{d\bar{x}}{da}$. В силу уравнений Ли получим, что $\dfrac{d\Phi\left(\bar{x}\right)}{da} = \xi^i\left(\bar{x}\right)\partial_{\bar{x}^i}\Phi\left(\bar{x}\right) = V\Phi\Big|_{x=\bar{x}}$. Здесь $V = \xi^i(x)\partial_{x^i}$ - инфинитезимальный оператор группы $G^1$.

Уравнение $\dfrac{d\Phi}{da} = V\Phi$ называется _уравнением Лиувилля_. Решение уравнения Лиувилля позволяет выразить $\bar{\Phi}$ через $V, \Phi$.

Считая, что рассматриваемые функции являются аналитическими функциями группового параметра $a$, мы можем написать следующее разложение: $\bar{\Phi}\left(x,a\right) = \bar{\Phi}\left(x,0\right) + \dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial a}\Big|_{a=0} a + \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial a^2}\Big|_{a=0} + \ldots$ . (1)

Имеем следующие начальные условия при $a = 0$:

$$\bar{\Phi}\left(x,0\right) = \Phi\left(x\right),\quad \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial a} = \frac{d\Phi\left(\bar{x}\right)}{da} = V\Phi\left(\bar{x}\right) \Rightarrow \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial a}\Big|_{a=0} = V\Phi\left(x\right).$$

Также $\dfrac{d^2\Phi\left(\bar{x}\right)}{da^2} = V^2(\bar{x})$. Следовательно, $\dfrac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial a^2}\Big|_{a=0} = V^2\Phi(x).$

Аналогично рассматриваются высшие производные. В результате получаем следуюший ряд:

$$\bar{\Phi}(x,a) = \Phi(x) + aV\Phi(x) + \frac{a^2}{2}V^2\Phi(x) + \ldots \quad . \qquad (2)$$

Этот ряд называется <u>рядом Ли</u>, и он также может быть записан в виде

$$\tilde{\Phi}(x,a) = e^{aV}\Phi\left(x\right). \qquad (3)$$

Уравнение (3) также можно считать определением операторной экспоненты. Дифференцируя формулу (3) по $a$, получим

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial a} = V\Phi + aV^2\Phi + \frac{a^2}{2}V^2\Phi + \ldots = V(\Phi + aV\Phi + \ldots) = V\tilde{\Phi}(x,a).$$

Таким образом доказана формула

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(e^{aV}\tilde{\Phi}\right) = Ve^{aV}\tilde{\Phi}. \qquad (4)$$

Это позволяет переписать уравнение Лиувилля в следующей форме:

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}(x,a)}{\partial a} = V\tilde{\Phi}. \qquad (5)$$

Здесь уже $V = \xi^i(x)\partial_{x^i}$, т.е. инфинитезимальный оператор записан в старых координатах. Отсюда сразу получаем, что $\Phi(x)$ является инвариантом группы $G^1 \Leftrightarrow V\Phi(x) = 0$, что совпадает с полученным ранее критерием.

Уравнение (5) является линейным уравнением в частных производных, решение его равносильно решению уравнения Ли. Точнее, если $\overline{x} = \overline{x}(a)$ решение уравнений Ли, то $\Phi(\overline{x})$ есть решение уравнения Лиувилля. Наоборот, пусть известно решение уравнения (5) для любой функции $\Phi(x)$, тогда, полагая $\Phi(x) = x$, получим с помощью ряда Ли

$$\overline{x} = x + aVx + \frac{a^2}{2}V^2x + \dots \quad . \tag{6}$$

**Пример 1.** <u>*Проективная группа*</u>.

Здесь $x = (x, y)$, т. е. группа рассматривается на плоскости. Тогда

$$\overline{x} = x + aVx + \frac{a^2}{2}V^2x + \dots; \overline{y} = y + aVy + \frac{a^2}{2}V^2y + \dots \quad . \tag{7}$$

Здесь $V = x^2\partial_x + xy\partial_y$ - оператор проективной группы. Тогда $Vx = x^2$, $V^2x = 2x^3$ и так далее. Таким образом получаем $\overline{x} = x + ax^2 + \frac{a^2}{2}2x^3 + \frac{a^3}{6}6x^4 + \dots = x(1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \dots) =$ $= \frac{x}{1 - ax}$.

Совершенно аналогично имеем $\overline{y} = \frac{y}{1 - ax}$.

Пусть $\Phi(x)$ - инвариант группы $G^1$, $R(x)$ - произвольная гладкая функция. Тогда $V(\Phi(x)R(x)) = V(\Phi(x))R(x) + \Phi(x)V(R(x)) = \Phi(x)V(R(x))$.

**Определение 1** [6,7,17]. *Функция* $\Phi(x)$ *называется собственной функцией оператора* $V$*, если существует инвариант группы* $G^1$ $\lambda(x)$*, для которого верно*

$$V\Phi(x) = \lambda(x)\Phi(x). \tag{8}$$

*В этом случае инвариант $\lambda(x)$ называют собственным значением оператора $V$ .*

Пусть $\Phi\left(x\right)$- собственная функция оператора $V$ , $\lambda(x)$- соответствующее собственное значение. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\Phi(x,a)=\Phi(x)+aV\Phi(x)+\frac{a^2}{2}V^2\Phi(x)+\ldots=\\
&=\Phi(x)+a\lambda(x)\Phi(x)+\frac{a^2}{2}\lambda^2\Phi(x)+\ldots=\lambda(x,a)\Phi(x).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

**Свойство собственных функций.** *Пусть* $\Phi_1(x)$- *собственная функция оператора* $V$ *с собственным значением* $\lambda_1(x)$, $\Phi_2(x)$- *собственная функция оператора* $V$ *с собственным значением* $\lambda_2(x)$. *Тогда верно*

$$V(\Phi_1(x)\Phi_2(x))=(\lambda_1+\lambda_1)(x)\Phi_1(x)\Phi_2(x). \tag{10}$$

**Конструкция 1** [6,7]. **Преобразование динамической системы под действием однопараметрической группы преобразований.**

Если сделать замену переменных в пространстве $R^n$, $u=u(x)$, то в силу инвариантности оператора $V$ получим $V=\xi^i(x)\partial_{x^i}=V(u^i)\partial_{u^i}$. Если потребовать, чтобы формулы замены переменных являлись не фиксированным отображением, а образовывали однопараметрическую группу, то можно переформулировать задачу следующим образом: рассматривается динамическая система $\frac{dx}{dt}=X\left(x\right)$ с оператором $A=X^i(x)\partial_{x^i}$. Кроме этого, задана однопараметрическая группа преобразований координатного пространства $G^1:u=u(x,a)$ с оператором $V=\xi^i(x)\partial_{x^i}$. После замены переменных исходная динамическая система примет следующий вид: $\dfrac{du}{dt} = \tilde{X}(u,a)$. Ей соответствует оператор $\tilde{A} = \tilde{X}^i(u,a)\partial_{u^i}$. Необходимо установить связь между операторами $A, \tilde{A}, V$. Так как $u = f(x,a) = e^{aV}x$, то $x = f\left(u,-a\right) = e^{-aV}u$. По построению операторной экспоненты в первом случае оператор имеет вид $V = \xi^i(x)\partial_{x^i}$, а во втором случае - $V = \xi^i(u)\partial_{u^i}$. Возвращаясь в операторе $\tilde{A}$ к старым переменным, мы получим оператор $A$. Тогда по формулам пересчета коэффициентов в операторах, имеем

$$A = \left(\tilde{A}x^i\right)\partial_{x^i} = \left(\tilde{A}e^{-aV}u^i\right)\partial_{x^i} . \tag{11}$$

Переходя в $\left(\tilde{A}e^{-aV}u^i\right)$ к переменным $x$, получим систему тождеств $\tilde{A}e^{-aV}u^i = X^i(x)$. Правые части не зависят от параметра $a$, следовательно, после дифференцирования по параметру $a$ получим $\dfrac{d}{da}\left(\tilde{A}e^{-aV}u^i\right) = 0$. Дифференцируя покомпонентно, получим

$\dfrac{\partial\tilde{A}}{\partial a}e^{-aV}u - \tilde{A}Ve^{-aV}u + V\tilde{A}e^{-aV}u = 0$, последнее слагаемое получено в результате дифференцирования $u = f(x,a) = e^{aV}x$. Так как это выполнено для всех $x$ из некоторой окрестности, а следовательно, для любых $u$ из некоторой окрестности, то из последнего равенства следует, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{A}}{\partial a} = \tilde{A}V - V\tilde{A} = \left[\tilde{A}, V\right]; \\ \tilde{A}(u,a)_{a=0} = A(u). \end{cases} \qquad (12)$$

Это уравнение Лиувилля, записанное для оператора. Точно так же решение системы (12) задается в виде ряда по параметру $a$:

$$\tilde{A}(u,a) = A(u) + a\frac{\partial \tilde{A}}{\partial a}|_{a=0} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial a^2}|_{a=0} + \dots \quad . \qquad (13)$$

Из уравнения (12) следует, что $\dfrac{\partial \tilde{A}}{\partial a}|_{a=0} = [A,V]$. Учитывая, что имеет место равенство $\dfrac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial a^2} = \dfrac{\partial}{\partial a}\left[\tilde{A},V\right]$, получим $\dfrac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial a^2}|_{a=0} = \dfrac{\partial}{\partial a}\left[\tilde{A},V\right]|_{a=0} = \left[[A,V],V\right]$ и так далее. Таким образом получен ряд Ли для оператора, который в этом случае называется рядом Хаусдорфа( [6,7]):

$$\tilde{A} = A + a[A,V] + \frac{a^2}{2}\left[[A,V],V\right] + \dots \quad . \qquad (14)$$

Отсюда получаем, что динамическая система не меняется по действием однопараметрической группы преобразований, если $\tilde{A} = A$, что возможно при таком операторе $V$, что $[A,V] = 0$. Таким образом возникает определение 2.

**Определение 2** [6,7,18]. *Оператор однопараметрической группы преобразований называется оператором симметрии динамической системы с* *оператором* $A$*, если в некоторой области переменных выполнено соотношение*

$$\left[A,V\right]=0. \tag{15}$$

**Теорема 1** [6,7]. *Пусть дана динамическая система* $\dot{x}=X\left(x\right)$ *с оператором* $A=X^i(x)\partial_{x^i}$ *и известна симметрия динамической системы* $V=\xi^i(x)\partial_{x^i}$*, так что* $\left[A,V\right]=0$*,* $V\neq 0$*. Тогда систему можно понизить в порядке, т.е. свести к системе от меньшего числа зависимых переменных.*

Доказательство совершенно аналогично результату для обыкновенных дифференциальных уравнений. Так как $V\neq 0$, то можно невырожденной заменой переменных $x=x(y)$добиться того, что в новых переменных $\tilde{V}=\dfrac{\partial}{\partial y^n}$. Раз коммутор операторов равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю и во всех остальных, следовательно, $\left[\tilde{A},\dfrac{\partial}{\partial y^n}\right]=0$.

По определению это означает, что для любой функции $\varphi(y^1,...,y^n)$ будет

$$\left[\tilde{A},\frac{\partial}{\partial y^n}\right]\varphi(y)=0.$$

Раскрывая коммутатор, получим

$$\tilde{A}\frac{\partial}{\partial y^n}\varphi - \frac{\partial}{\partial y^n}\tilde{A}\varphi = \tilde{X}^i \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y^n}\right) - \frac{\partial}{\partial y^n}\left(\tilde{X}^i \frac{\partial \varphi}{\partial y^i}\right) =$$

$$= \tilde{X}^i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^i \partial y^n} - \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial y^n}\frac{\partial \varphi}{\partial y^i} - \tilde{X}^i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^n \partial y^i} = 0.$$

Подставляя последовательно $\varphi = y^1, \dots, y^n$, получим, что $\dfrac{\partial \tilde{X}^i}{\partial y^n} = 0$. Таким образом преобразованная система не зависит от переменной $y^n$.

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение $\ddot{y} + p(t)\,\dot{y} + q(t)\,y = 0.$ (16)

Сделав замену - $x = t, \dot{y} = z$, получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = 1; \\ &\dot{y} = z; \\ &\dot{z} = -p(x)z - q(x)y. \end{aligned} \tag{17}$$

Этой системе соответствует группа симметрий

$\bar{x} = x; \bar{y} = \exp(a)x; \bar{z} = \exp(a)z;$ с оператором $V = y\partial_y + z\partial_z$ . (18)

Оператор исходной системы $A = \partial_x + z\partial_y - (p(x)z + q(x)y)\partial_z.$ Прямая проверка показывает, что $[A, V] = 0.$ Найдем новые координаты, в которых вектор $V$ выпрямлен, для этого необходимо ввести новые координаты $y^1 = \ln y; y^2 = \dfrac{z}{y}; y^3 = x.$ В новых переменных получим

$$\tilde{A} = (Ay^1)\partial_{y^1} + (Ay^2)\partial_{y^2} + (Ay^3)\partial_{y^3} =$$

$= y^2\partial_{y^1} - (p(y^3)y^2 + q(y^3) + (y^2)^2)\partial_{y^2} + \partial_{y^3}$. Соответственно система в новых переменных имеет вид $\begin{cases} \dot{y}^1 = y^2; \\ \dot{y}^2 = p(y^3) + q(y^3)y^2 + (y^2)^2; \\ \dot{y}^3 = 1. \end{cases}$

Таким образом уравнение свелось к уравнению Риккати. Этот же результат был получен для обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием классических симметрий Ли.

**Дополнительные симметрии динамических систем.**

Пусть задана динамическая система $\dfrac{dx}{dt} = X(x)$, где $x = (x^1,...,x^n)$ с оператором $A = X^i(x)\partial_{x^i}$. Если известна группа преобразований **с** оператором $V = \xi^i(x)\partial_{x^i}$, такая, что $[A,V] = \lambda(x)A$, где $\lambda(x)$ - некоторая гладкая функция, то это также позволяет понизить порядок системы. Действительно,

$$[[A,V],V] = [\lambda A,V] = \lambda AV - V(\lambda A) = \lambda AV - \lambda VA - (V\lambda)A =$$
$$= \lambda^2 A - (V\lambda)A = \lambda_1(x)A.$$

Здесь $\lambda_1 = \lambda^2 - V\lambda.$ Аналогично рассатриваются коммутаторы более высокого порядка. В результате получим, что $\overset{\square}{A} = \alpha(x)A$. В новых переменных $u = u(x)$ система примет следующий вид:

$$\frac{du}{dt} = \lambda(u)X(u). \tag{19}$$

В координатном представлении имеем $\dfrac{du^i}{dt} = \lambda(u)X^i(u)$. Поделив все уравнения системы на последнее уравнение, получим

$$\frac{du^i}{du^n} = \frac{X^i(u)}{X^n(u)}, i = 1,...,n-1. \qquad (20)$$

Таким образом, интегральные кривые для системы (20) такие же, как и для исходной системы, что мотивирует определение.

**Определение 2.** *Оператор* $V = \xi^i(x)\partial_{x^i}$ *называется оператором симметрии динамической системы* $\dot{x} = X(x)$ *с оператором* $A = X^i(x)\partial_{x^i}$, *если существует такая гладкая функция* $\lambda(x)$, *что* $\left[A, V\right] = \lambda(x)A$.

**Теорема 2.** *Если динамическая система допускает группу симметрий в расширенном смысле, то она может быть понижена в порядке.*

Доказательство полностью аналогично теореме 1.

**Принцип суперпозиции в нелинейных системах.**

Пусть даны две динамические системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x); \\ \dfrac{dx}{da} = \Phi(x). \end{cases} \qquad (21)$$

Этим системам соответствуют операторы $A = F^i(x)\partial_{x^i}; B = \Phi^i(x)\partial_{x^i}$. По операторам могут быть построены однопараметрические группы $\bar{x} = u(x,t); \bar{\bar{x}} = v(x,a)$. Фиксируя $t, a$, можно составить композицию групповых преобразований двумя способами:

1) $x' = u(x,t), x'' = v(x',a) = v(u(x,t),a);$

2) $x' = v(x,a), x'' = u(v(x,a),t). \qquad (22)$

**Теорема 3.** *Композиция групповых преобразований не зависит от порядка преобразований, если и только если коммутируют операторы однопараметрических групп.*

Доказательство: так как $u(v(x,a),t) = e^{At}v(x,a) = e^{At}e^{Ba}x$; $v(u(x,t),a) = e^{Ba}u(x,t) = e^{Ba}e^{At}x$, то, следовательно, имеем $e^{At}e^{Ba}x = e^{Ba}e^{At}x$ при всех значениях групповых параметров. Раскладывая правую и левую части в ряд по параметрам $a,t$, видим, что все коэффициенты различным способом выражаются через коммутатор $\left[A,B\right]$. Поэтому если $\left[A,B\right]=0$, то группы коммутируют. Наоборот, если группы коммутируют, то, оставляя линейные по параметрам члены, получаем $\left[A,B\right]=0.$

**Теорема 4.** *Пусть есть две однопараметрические коммутирующие группы. Тогда композиция групповых преобразований, при условии отождествления групповых параметров, также образует однопараметрическую группу.*

Доказательство: требуется доказать что $u(v(x,a),a)$ является группой. Действительно, $u(v(x,a),a) = e^{Aa}e^{Ba}x = e^{Ba}e^{Aa}x = e^{A+B}x.$ Отсюда следует, что новую группу порождает оператор $A+B.$

**Следствие** [6,7]. *Пусть дана динамическая система*

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + \Phi(x), \tag{23}$$

*причем векторному полю* $F(x)$ *соответствует оператор* $A = F^i(x)\partial_{x^i}$, *а векторному полю* $\Phi(x)$ *соответствует оператор* $B = \Phi^i(x)\partial_{x^i}$, *так что операторы коммутируют* $\left[A,B\right]=0.$ *Если* $x_0$ *начальное условие для системы (23), решение системы (23) имеет вид* $x = u(v(x_0,t),t) = v(u(x_0,t),t)$.

Следствие служит просто другой формулировкой теоремы 4 и выражает нелинейную «суперпозицию» в нелинейных системах. Этот результат является важным в асимптотических теориях, так как позволяет «разделить» быстрые и медленные движения в механических системах [6].

**Замечание 1.** Динамические симметрии и симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений, вообще говоря, не совпадают. Это следует хотя бы из того факта, что по заданной динамической системе симметрия определяется как решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Пространство таких решений бесконечномерно. С другой стороны, обыкновенное дифференциальное уравнение вообще может не допускать никаких однопараметрических групп. Тем не менее для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка симметрии совпадают (см.[6,7]).

## Глава 3. Инвариантные решения уравнений

### § 14. Инвариантные решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с частными производными, которая задается с помощью гладкого отображения $\Phi$ пространства с координатами $x, u, \underset{1}{u}, ..., \underset{s}{u}$ $(x = (x^1, ..., x^n), u = (u^1, ..., u^m))$ в пространство $R^k$, так что $\Phi(x, u, \underset{1}{u}, ..., \underset{s}{u}) = 0$. (1)

В дальнейшем эту систему будем именовать основной системой.

Так как орбиты разных элементов, полученные действием мнопараметрической группы преобразований, могут иметь разные размерности, то действие группы необходимо характеризовать более детально, чем это было сделано ранее при рассмотрении инвариантных многообразий.

Всякое решение $u = \varphi(x)$ основной системы является отображением $X \to U$, где $X \subset R^n, U \subset R^m$. На множестве всех решений основной системы (в случае линейной основной системы это линейное пространство) действует любая группа преобразований, допускаемая основной системой. Оно может совпадать с основной группой преобразований, допускаемой основной системой, или быть ее подгруппой. По смыслу симметрии отсюда следует, что допускаемая группа решение переводит в решение, причем это решение в общем случае отлично от исходного решения. Любое решение можно представить геометрически. Это множество точек в пространстве $R^n \times R^m$ вида $(x, \varphi(x))$, т.е. график отображения $\varphi$. Поскольку $x \in X \subset R^n$, $X$ - открытое множество, то рассматриваемое множество является многообразием (карта задается с помощью проекции $(x, f(x)) \to x, \forall x \in X$). Соответственно это многообразие является подмногообразием в пространстве $R^{n+m}$. Это многообразие обозначим $[\varphi]$. Размерность $[\varphi]$, как очевидно, равна $n$.

Пусть задана некоторая $r$ - параметрическая группа преобразований $G^r$, допускаемая основной системой уравнений. Эта группа порождается алгеброй инфинитезимальных операторов

$$V_a = \xi_a^i(x,u)\partial_{x^i} + \eta_a^\alpha(x,u)\partial_{u^\alpha}; a \in [1,...,r], i \in [1,...,n], \alpha \in [1,...,m].$$

**Определение 1** [19]. *Рангом группы* $G^r$ *в точке* $(x_0,u_0)$ *открытого множества* $X \times U$ *нызывается число, равное рангу матрицы* $\left\| \xi_a^i(x_0,u_0), \eta_a^\alpha(x_0,u_0) \right\|$ *размерности* $(r, n+m)$.

**Определение 2.** *Общим рангом группы* $G^r$ *на открытом множестве* $X \times U$ *называется число* $r_* = \max\limits_{(x_0,u_0)\in(X,U)} rank \left\| \xi_a^i(x_0,u_0), \eta_a^\alpha(x_0,u_0) \right\|$.

Очевидно, что общий ранг достигается на открытом подмножестве множества $X \times U$.

Напомним, что отображение $\Psi$ является инвариантом группы $G^r$ тогда и только тогода, когда

$$V_a\Psi(x,u) = 0 \text{ для всякого } a \in [1,...,r]. \quad (2)$$

Система уравнений (2) является системой линейных дифференциальных уравнений относительно каждой компоненты отображения $\Psi$. Можно показать (см. [19]), что при $r_* < n+m$ система уравнений (2) является полной, т.е. существуют решения, причем аналогично однопараметрическому случаю, существует полный набор из $n+m-r_*$ фунционально независимых инвариантов $I^l : X \times U \to R^k, l \in [1,...,n+m-r_*]$. При этом любой другой инвариант группы $G^r$ является функцией приведенных инвариантов. По построению, очевидным образом, выполнены соотношения $r_* \le r, r_* \le n+m$ (ранг меньше или равен минимальному размеру матрицы). Если $r < m+n$, то тогда по предыдущему существуют инварианты группы $G^r$. Но они могут быть, даже если $r > N$, лишь бы $r_* < n + m$. Можно сказать, что $r_*$ показывает число «существенно различных» уравнений системы (2).

Пусть $r_*$ - ранг группы $G^r$ (синонимы - ранг касательного отображения $(\xi_a, \eta_a)$, ранг матрицы $\|\xi_a, \eta_a\|$ на открытом множестве ($X \times U$).

**Определение 3.** *Точка* $(x_0, u_0)$ *называется неособой точкой группы* $G^r$, *если в этой точке* $rank\|\xi_a^i(x_0,u_0), \eta_a^\alpha(x_0,u_0)\| = r_*$. *Точка* $(x_0, u_0)$ *называется особой, если* $rank\|\xi_a^i(x_0,u_0), \eta_a^\alpha(x_0,u_0)\| < r_*$.

**Определение 4.** *Многообразие* $[\Psi]$ *называется особым многообразием, если оно состоит из особых точек группы* $G^r$ *и ранг* $rank\|\xi_a^i(x_0,u_0), \eta_a^\alpha(x_0,u_0)\|$ *постоянен на всех точках многообразия* $[\Psi]$ *и меньше* $r_*$.

**Определение 5.** *Многообразие* $[\Psi]$ *называется неособым многообразием, если оно состоит из неособых точек группы* $G^r$ *и ранг* $rank\|\xi_a^i(x_0,u_0), \eta_a^\alpha(x_0,u_0)\|$ *постоянен на всех точках многообразия* $[\Psi]$ *и равен* $r_*$.

Неособые инвариантные многообразия группы $G^r$ можно охарактеризовать способом, аналогичным тому, как это было сделано для однопараметрических групп.

**Теорема 1** (см. [2]). *Неособые инвариантные многообразия группы* $G^r$ *существуют тогда и только тогда, когда* $n + m > r_*$. *Если неособое регулярное инвариантное многообразие* $[\Psi]$ *задано уравнением*

$\Psi(x,u)=0$*, то существует такой инвариант* $I: X\times U \to R^k$*, что* $[\Psi]$ *задается уравнением* $I(x,u)=0$.

**Определение 6.** Рангом неособого инвариантного многообразия $[\Psi]$ группы $G^r$ называется число $\rho = n+m-k-r_*$.

Рассмотрим решение $u=\varphi(x)$ основной системы уравнений. Это решение рассматриваем как многообразие, задаваемое уравнением $u-\varphi(x)=0$ и обозначаемое $[\varphi]$. Пусть $G^r$ является некоторой $r$ - параметрической группой, допускаемой основной системой.

**Определение 7.** *Решение* $u=\varphi(x)$ *основной системы называтся инвариантным решением относительно группы* $G^r$*, если многообразие* $[\varphi]$ *является инвариантным многообразием группы* $G^r$.

Многообразие $[\varphi]$ имеет размерность $n=\dim X$. С другой стороны требуем, чтобы отображение $u=\varphi(x)$ имело ранг, равный $m$. Размерность $X\times U$ равна $n+m$. Следовательно, $[\varphi]$ задано регулярно.

Применим к многообразию $[\varphi]$ критерий инвариантности многообразия относительно $r$ - параметрической группы преобразований $G^r$, тогда получим систему уравнений

$$\eta_a(x,\varphi(x)) = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} < \xi_a(x,\varphi(x)) >; a\in[1,...,r]. \quad (3)$$

**Определение 8.** *Инвариантное решение является неособым, если многообразие* $[\varphi]$ *является неособым и особым в противоположном случае.*

Из условий (3) сразу следует, что верно $r_*(\xi_a,\eta_a)\Big|_{[\varphi]} = r_*(\xi_a)\Big|_{[\varphi]}$. То есть ранги матриц на многообразии$\left[\varphi\right]$ совпадают. Следовательно, получим, что инвариантное решение является особым, если $r_*(\xi_a)\Big|_{[\varphi]} < r_*$, неособым - при $r_*(\xi_a)\Big|_{[\varphi]} = r_*$. Здесь $r_*$ - общий ранг системы операторов.

**Теорема 2.** *Необходимым условием существования* $G^r$ *инвариантного решения является выполнение условий* $r_*(\xi_a)\Big|_{[\varphi]} = r_*$, $r_* \le n$.

Первое условие уже получено, а второе следует из того, что на $\left[\varphi\right]$ вместо $n+m$ берем $n$.

Сформулируем *алгоритм* нахождения неособых инвариантных решений относитетельно заданной $G^r$ - параметрической группы, допускаемой основной системой. Пусть для определенности $r_* < n$.

Выберем базис инвариантов для группы $G^r$: $I_1(x,u), I_2(x,u),\dots, I_{n+m-r_*}(x,u)$. Неособые инвариантные решения в силу **теоремы 1** ищутся в виде функций базисных инвариантов

$$\Phi^\alpha(I_1,\dots,I_{n+m-r_*}) = 0, \alpha \in \left[1,\dots,m\right]. \qquad (4)$$

Чтобы из системы уравнений (4) можно было выразить $u = \varphi(x)$, надо чтобы базисные инварианты были независимы по $u$, т. е. $rank(\dfrac{\partial I^k}{\partial u^\alpha}) = m$. Собственно, это условие и означает, что $r_*(\xi_a,\eta_a)\Big|_{[\varphi]} = r_*(\xi_a)\Big|_{[\varphi]}$. Как обычно будем считать, что этому условию удовлетворяют первые $m$ инвариантов $I^1,\dots,I^m$. Если это не так, то перенумеруем переменные $I^k$. Введем новые переменные [5]

$$\begin{cases} v^{\alpha} = I_{\alpha}(x,u), \alpha[1,...,m]; \\ y^i = I_{m+i}(x,u), i \in [1,...,n-r_*]. \end{cases}$$

Систему (4) запишем теперь в виде

$$v^{\alpha} = v^{\alpha}(y). \tag{5}$$

Из (4),(5) выразим $u, \underset{1}{u}, ..., \underset{s}{u}$ через $x, y, v$. Подставим все выражения в (1) и получим систему уравнений относительно функций $v^{\alpha}(y)$. Так что любое $G^r$ инвариантное решение удовлетворяет новой системе дифференциальных уравнений, которая обычно называется <u>фактор-системой</u> относительно группы $G^r$. Итог рассуждений состоит в следующей теореме.

**Теорема 3.** *Любое инвариантное решение является решением фактор-системы.*

**Замечание 1**. В зависимости от величины $n - r_*$ фактор-система является системой уравнений в частных производных $(n - r_* > 1)$, системой обыкновенных дифференциальных уравнений $(n - r_* = 1)$. Но во всех случаях **теорема 3** дает лишь необходимые алгебраические условия существования решений. Существование решений в каждом случае изучается отдельно.

## § 15. Инвариантные решения уравнений биофизики

На основе уравнений, сочетающих в себе нелинейность и диффузию, а потому достаточно универсальных, приведены примеры инвариантных решений.

**<u>1. Уравнение теплопроводности</u>**:

$$u_t = u_{xx} \quad . \tag{1}$$

А). <u>Решения, инвариантные относительно оператора</u> $V_3 = \partial_t$. Инвариантами этого оператора являются функции $I_1 = x; I_2 = u$. Следовательно, инвариантные решения имеют вид $u = \varphi(x)$. Подставляя эту функцию в уравнение (1), получим, что $\varphi_{xx} = 0$. Таким образом мы доказали, что решение, инвариантное относительно группы временных сдвигов, имеет следующий вид: $\varphi = Ax + B$. Здесь $A; B -$произвольные постоянные.

Б). <u>Решения, инвариантные относительно оператора</u> $V_3 + cV_5 = \partial_t + c\partial_x$. Инвариантами этого оператора являются функции $I_1 = x - ct; I_2 = u$. Инвариантные решения этого уравнения принимают следующий вид: $u = \varphi(\xi) = \varphi(x - ct), \xi = x - ct$. Подставляя эту функцию в уравнение (1) и дифференцируя сложную функцию, получим уравнение $-c\varphi_\xi = \varphi_{\xi\xi}$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Первое интегрирование дает $A - c\varphi = \varphi_\xi$. Интегрируя еще раз, получаем общий вид инвариантного решения $\varphi = B\exp(-c\xi) + A$. Тогда решение исходного уравнения (1) принимает следующий вид: $u = B\exp(-c(x - ct)) + A$.

В). <u>Решения, инвариантные относительно оператора</u> $V_4 = 2t\partial_x - xu\partial_u$. Это инвариантность относительно преобразований Галилея. Инварианты оператора находятся из уравнений характеристик $\frac{dt}{0} = \frac{dx}{2t} = \frac{du}{-xu}$.

Базисные инварианты приобретают следующий вид: $I_1 = t; I_2 = u\exp(\frac{x^2}{4t})$. Инвариантное решение имеет следующий вид: $u = \varphi(t)\exp(-\frac{x^2}{4t})$. Подставим полученное выражение в уравнение (1) и получим уравнение

$$u_t = \exp(-\frac{x^2}{4t})(\varphi_t + \varphi\frac{x^2}{4t^2}) = u_{xx} = \exp(-\frac{x^2}{4t})\varphi(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}). \qquad (2)$$

После сокращений получаем обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $\varphi_t' = -\frac{\varphi}{2t}$. Его общее решение имеет вид $\varphi = \frac{C}{\sqrt{t}}$. Здесь $C$ - произвольная постоянная. Тогда общий вид инвариантного решения относительно преобразований Галилея имеет вид

$$u = \frac{C}{\sqrt{t}}\exp(-\frac{x^2}{4t}). \qquad (3)$$

С точностью до множителя $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ это фундаментальное решение уравнение теплопроводности или функция источника. Интересно, что оно получено не как решение инвариантное относительно группы растяжений, а как решение, инвариантное относительно преобразований Галилея. Фундаментальное решение определяет структуру общего решения задачи Коши для уравнения теплопроводности, а также главную асимптотику решения задачи Коши.

Г). <u>Решения, инвариантные относительно оператора</u> $V_2 + 2\alpha V_6 = 2t\partial_t + x\partial_x + 2\alpha u\partial_u$ [8]. Это линейная комбинация операторов растяжения, их наиболее общий вид. Здесь $2\alpha$ - произвольная постоянная, множитель $2$ взят для удобства вычислений. Уравнения характеристик имеют вид $\frac{dt}{2t} = \frac{dx}{x} = \frac{du}{2\alpha u}$. Базисные инварианты $I_1 = \frac{x}{\sqrt{t}}; I_2 = \frac{xu}{t^\alpha}$, следовательно, инвариантное решение необходимо искать как функцию вида $u = t^\alpha \varphi(\frac{x}{\sqrt{t}})$. После подстановки этого выражения в уравнение (1) получается обыкновенное дифференциальное уравнение на функцию $\varphi$:

$$\varphi_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\xi\varphi_\xi - \alpha\varphi = 0; \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}. \tag{4}$$

Это довольно сложное уравнение, которое можно свести к дифференциальному уравнению Вебера, общее решение которого выражается через функции параболического цилиндра [8]. Здесь достаточно заметить, что для значения $\alpha = 1/2$ функция $\varphi(\xi) = C\exp(-\xi^2/4)$ является решением уравнения $\varphi_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\xi\varphi_\xi - \frac{1}{2}\varphi = 0$. Следовательно, $u = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4t})$ является решением уравнения теплопроводности. Теперь фундаментальное решение получено как автомодельное решение, т.е. решение, инвариантное относительно группы растяжений. Таким образом, фундаментальное решение является инвариантным решением для двух различных однопараметрических групп.

Д). <u>Асимптотика задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности.</u>

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности на прямой.

$$u_t = u_{xx}; u(t=0,x) = \psi(x);$$

$$x \in R, t > 0, u \to 0 \text{ при } |x| \to \infty. \tag{5}$$

Решая задачу (5) с помощью преобразования Фурье (см., например [20]), получим следующее выражение:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(k)\exp(-k^2 t + ikx)dk. \tag{6}$$

Здесь $\tilde{\psi}(k)$ - образ Фурье начальной функции, при этом $\tilde{\psi}(-k) = \overline{\tilde{\psi}}(k)$, так как $\psi(x)-$вещественная начальная функция.

Предположим, что $\tilde{\psi}(k)$ является аналитической функцией переменной $k$. Разложим ее в ряд Тейлора в окрестности $k=0$. Это позволяет вычислить интегралы. Рассмотрим тождества

$$\tilde{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx; i\tilde{\psi}(0) = .., \quad \text{и т.д.} \tag{7}$$

Получим представление решения

$$u(t,x) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi)d\xi}{2(\pi t)^{1/2}}\exp(-\frac{x^2}{4t}) + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi)\xi d\xi}{2\sqrt{\pi t}}\frac{x}{2(2t)^{1/2}}\cdot$$

$$\cdot\exp(-\frac{x^2}{4t}) + \ldots \quad .$$

Отсюда сразу находим, что решение при $t \to \infty$ стремится к инвариантному решению (автомодельному), а роль начальных условий определяется интегралом $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi)d\xi$, т.е. при «больших» $t$ решение принимает универсальный вид

$$u(t,x)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi)d\xi}{2(\pi t)^{1/2}}\exp(-\frac{x^2}{4t}). \qquad (8)$$

Таким образом доказано, что асимптотика задачи Коши определяется инвариантным решением.

**2. Уравнение Бюргерса**:

$$u_t+uu_x=\nu u_{xx}. \qquad (9)$$

Здесь $\nu$ – некоторая положительная постоянная, в физической литературе часто называемая вязкостью.

А). Обобщенные стационарные решения. Рассмотрим решения инвариантные относительно операторов $\partial_t+c\partial_x$. Инвариантные решения ищем в виде $u=\varphi(x-ct)$. Для $\varphi$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение $-cu_\xi+uu_\xi=\nu u_{\xi\xi};\xi=x-ct$. Интегрируя его один раз по $\xi$, получим $A-cu+(1/2)u^2=\nu u_\xi$, здесь $A$ - постоянная интегрирования. Полагая, что $u\to u_1,u_2$ при $\xi\to\pm\infty$, получим, что $c=\frac{1}{2}(u_1+u_2);A=\frac{1}{2}u_1u_2$. Тогда проинтегрированное уравнение примет вид $(u-u_1)(u_2-u)=-2\nu u_\xi$. Интегрируя обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим следующий интеграл: $\xi/\nu=\frac{2}{u_2-u_1}\ln(\frac{u_2-u}{u-u_1})$. (см.[21]). Разрешая это уравнение, получим, что

$u = u_1 + \dfrac{u_2 - u_1}{1 + \exp\left(\dfrac{u_2 - u_1}{\dfrac{u_2 - u_1}{2\nu}\left(x - \dfrac{u_1 + u_2}{2} t\right)}\right)}$. В теории нелинейных волн решенная нами задача называется задачей о распространении ударной волны. Полученное решение имеет большое значение в общем моделировании нелинейных диффузионных процессов, поскольку описывает решение, связывающее два разных постоянных значения переменной $u$ на $\pm\infty$, так что этот «скачок» движется по прямой.

Б). <u>Решения, инвариантные относительно проективной группы.</u> Рассмотрим решения, инвариантные относительно проективной группы, которая порождается оператором $V_1 = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u$. Здесь изменение в знаках оператора $V_1$ получается заменой переменной $u$ на величину $-u$. Базисные инварианты имеют вид $I_1 = \dfrac{x}{t}; I_2 = ut - x$. Инвариантное решение ищется в виде $u = \dfrac{x}{t} + \dfrac{\varphi(x/t)}{t}; \xi = \dfrac{x}{t}$. Подставляя это выражение в уравнение (9), получим после очевидных сокращений $\varphi\varphi_\xi = \nu\varphi_{\xi\xi}$. Это чисто стационарное уравнение Бюргерса ($c = 0$). Следовательно, структура общего вида инвариантных относительно проективной группы решений позволяет строить новые решения из стационарных решений. Отметим также, что при $\varphi = 0$ получаем точное инвариантное решение $u = \dfrac{x}{t}$. Далее будет это решение будет выделено в структуре асимптотического решения уравнения Бюргерса. Кроме того, можно заметить, что уравнение Бюргерса допускает более широкие преобразования, оставляющее решение инвариантным. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

**Теорема 1.** *Если* $\varphi(\tau,\xi)$ *является решением уравнения Бюргерса* $\varphi_\tau + \varphi\varphi_\xi = \nu\varphi_{\xi\xi}$, *то функция* $u = \frac{x}{t} + \frac{1}{t}\varphi(C - \frac{1}{t}, \frac{x}{t})$ *также будет решением, где* $C -$ *произвольная постоянная.*

Доказательство: прямая подстановка.

В). Асимптотика задачи Коши для уравнения Бюргерса в классе быстро убывающих функций.

Сделаем замену Хопфа - Коула в уравнении Бюргерса (9) $u = -2\nu(\ln(\varphi(t,x))_x$. После подстановки в уравнение (9) и преобразований получим, что функция $\varphi(t,x)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности $\varphi_t = \nu\varphi_{xx}$. Если для уравнения Бюргерса ставится задача Коши $u(t=0,x) = u_0(x)$, так что $u_0 \in S(R^1)$, где $S(R^1)$- пространство Шварца, то, решая задачу Коши для уравнения теплопроводности для быстро убывающих начальных условий, получим решение уравнение Бюргерса:

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4\nu t} - \frac{1}{2\nu}\int_0^y u_0(s)ds)dy. \tag{10}$$

Для сходимости интегралов в (10) достаточно, чтобы было выполнено условие $\int_0^y u_0(s)ds \le const \cdot x; |x| \to \infty$. Мы будем предполагать, что

$\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s)ds = M < \infty$. Из уравнения Бюргерса следует, что тогда

$\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s)ds = M = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)dx$. Это можно показать, если записать уравнение Бюргерса в виде $u_t + (\frac{1}{2}u^2 - \nu u_x)_x = 0$. Интегрируя его в классе функций Шварца, получим требуемый результат. Используя метод стационарной фазы (см. [21]), можно показать , что при $t \to \infty$ уравнение Бюргерса имеет следующую асимптотику:

$u(t,x) \approx -2\nu(\ln F(\frac{x}{\sqrt{4t}}))_x$, где

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\exp(-\frac{M}{4\nu})\int_{-\infty}^{x}\exp(-s^2)ds + \exp(\frac{M}{4\nu})\int_{x}^{+\infty}\exp(-s^2)ds). \quad (11)$$

Начальные условия входят в формулу (11) только через закон сохранения $M$. Если при этом еще $\nu \to 0$, то отсюда следует, что при $M > 0$ получается следующая асимптотика

$$\lim_{t\to\infty,\nu\to 0} u(t,x) = \begin{cases} \frac{x}{t}, 0 < x < \sqrt{2Mt}; \\ 0, x < 0, x > \sqrt{2Mt}. \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом доказано, что временная асимптотика задачи Коши для уравнения Бюргерса в случае малой диссипации определяется инвариантным решением $u = \frac{x}{t}$.

Е. Неоднородное уравнение диффузии.

Рассмотрим краевую задачу для неоднородного уравнения диффузии

$$\begin{cases} u_t = (x^s u_x)_x; \\ u(t,\infty) = 1, u(t,0) = 0, t > 0, s \neq 2. \end{cases} \quad (13)$$

Нетрудно заметить, что неоднородное уравнение теплопроводности инвариантно относительно однопараметрической группы подобия

$\bar{x} = \exp(\lambda)x; \bar{t} = \exp(\lambda(2-s))t$. Здесь $\lambda$ - групповой параметр. Инфинитезимальный оператор однопараметрической группы имеет вид

$$V_1 = (2-s)t\partial_t + x\partial_x. \qquad (14)$$

Общий вид инвариантного решения имеет следующий вид:

$$u = \varphi(\frac{x}{t^{1/(2-s)}}), \xi = \frac{x}{t^{1/(2-s)}}. \qquad (15)$$

Тогда функция $\varphi$ определится из решения обыкновенного дифференциального уравнения и преобразованных граничных условий

$$-\frac{1}{2-s}\xi\varphi_\xi = (\xi^s\varphi_\xi)\xi; \varphi(\infty) = 1, \varphi(0) = 0. \qquad (16)$$

Решение краевой задачи (16) имеет следующий вид:

$$u(t,x) = \varphi(\frac{x}{t^{1/(2-s)}} = \xi) = A\int_0^\xi \sigma^s \exp(-\frac{1}{(2-s)^2}\sigma^{2-s})d\sigma. \qquad (17)$$

Здесь постоянная $A$ выражается через функцию Эйлера [22 ]

$$A = (\int_0^{+\infty} \sigma^{-s} \exp(-\frac{1}{(2-s)^2}\sigma^{2-s})d\sigma)^{-1} = |2-s|^{s/(s-2)}\,\Gamma(\frac{1-s}{2-s}). \qquad (18)$$

Для сходимости интегралов нужно требовать, чтобы было $s < 1$ или $s > 2$.

Таким образом, решена краевая задача для уравнения в частных производных с помощью обыкновенного дифференциального уравнения для инвариантного относительно группы подобия решения. Это означает, что относительно однопараметрической группы инвариантна краевая задача в целом. Возможны и другие граничные условия, когда краевая задача инвариантна относительно группы подобия. В физической литературе такие решения называются автомодельными.

Ж. Уравнение Фишера (Колмогорова-Петровского-Пискунова):

$$u_t = ku(1-u) + Du_{xx}. \qquad (19)$$

Это уравнение вывели сразу несколько ученых. Колмогоров, Петровский, Пискунов извлекли это уравнение из генетики. Фишер рассматривал его как детерминистическую версию стохастической модели распространения благоприятного гена в диплоидной популяции. Часто его рассматривают с произвольной нелинейностью $f(u)$.

Уравнение Фишера допускает два оператора - $\partial_t, \partial_x$. Следовательно, допускает оператор $\partial_t - c\partial_x$. Требуется исследовать существование и форму решений типа бегущей волны для функции $u$, на которую наложены условия $0 \le u \le 1$, т.е. $u$ является величиной типа концентрации. Инвариантное решение ищется в следующем виде:

$$u = \varphi(x + ct) = \varphi(\xi); \xi = x + ct. \tag{20}$$

После подстановки (20) в уравнение (19) получится обыкновенное дифференциальное уравнение

$$D\varphi_{\xi\xi} - c\varphi_{\xi} + k\varphi(1 - \varphi) = 0. \tag{21}$$

Требуется найти такое значение $c$, что существует неотрицательное решение уравнения (21), для которого выполнены следующие условия:

$$\lim_{\xi \to -\infty} \varphi(\xi) = 0, \lim_{\xi \to \infty} \varphi(\xi) = 1. \tag{22}$$

**Теорема 2 (Фишер)[22].** *Уравнение (21) имеет бесконечное число решений типа бегущей волны, для которых* $0 \le u \le 1$, *с волновыми скоростями* $c \ge c_{\min} = 2\sqrt{kD}$.

**Теорема 3 ( Колмогоров, Петровский, Пискунов***)* [23]. *Если начальные условия имеют следующий вид:*

$$u(t=0,x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1, x > 0; \end{cases} \quad \text{или } u(t=0,x) = \begin{cases} 1, x_1 < x, \\ h(x), x_2 < x < x_1, \\ 0, x < x_2, \end{cases} \tag{23}$$

*где* $x_1, x_2$ *конечны, а* $h(x)$ *монотонна и непрерывна, то уравнение* (19) *имеет единственное решение и это решение при* $t \to \infty$ *развивается в решение вида* (20) *и обладающей скоростью* $c_{\min}$.

Таким образом доказано, что для широкого класса начальных условий асимптотическим решением опять будет являться инвариантное решение для оператора $\partial_t - c_{\min}\partial_x$. Для других начальных условий могут реализовываться другие бегущие волны, которые опять же являются инвариантными решениями.

# Глава 4. Группы симметрии линейных систем и интегродифференциальных уравнений

## § 16. Алгебры симметрии бесконечных систем дифференциальных уравнений и интегродифференциальных уравнений

В предыдущих разделах рассматривались локальные задачи, т. е. системы дифференциальных уравнений, где функции и производные вычислялись в одной точке. В рассматриваемых ранее задачах порядок производных был ограничен. Нелокальность можно вводить двумя способами: 1) как нелокальность групповых структур, допускаемых дифференциальными уравнениями; 2) как нелокальность рассматриваемых объектов, т. е. бесконечных систем дифференциальных уравнений, зависящих от конечного числа производных бесконечного числа функций (или, наоборот, в задаче встречаются производные любого порядка от конечного числа функций). Разумеется, возможны другие сочетания возможностей, но ограничимся пока этими двумя. В этом пособии будем рассматривать случай 2. Но скажем несколько слов о нелокальности групповых структур.

Групповое преобразование может зависеть от бесконечного числа производных. При этом групповое действие может представляться формальным рядом по параметру $a$, который при этом не обязан сходиться. Если групповое преобразование зависит от конечного числа производных конечного числа функций, то можно показать ([5]), что в этом случае групповые преобразования сводятся либо к точечным преобразованиям, если число неизвестных функций в рассматриваемой системе больше одного, либо в случае одной неизвестной функции в системе к контактным преобразованиям, обобщающим, например, преобразования Лежандра. Если же порядок производных равен строго бесконечности, то в этом случае, при условии, что коэффициент при первой степени формального ряда по параметру $a$ зависит от конечного числа производных неизвестных функций, действительно можно построить содержательное обобщение теории, которое называется группами Ли - Бэклунда или высшими симметриями. В этом курсе подобные вопросы не рассматриваются.

Основным объектом группового анализа в этом разделе являются бесконечные системы дифференциальных уравнений в частных производных и интегродифференциальные уравнения, которые могут быть сведены к бесконечным системам. Такими объектами являются, например, законы сохранения для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, так что в каждое уравнение входит конечное число зависимых переменных. Для определенности рассматривается случай двух независимых переменных, которые обозначаются $t, x$. Неизвестные функции обозначаются $A^n, n \in N$, так что $A^n(t,x)$. В соответствии с подходом Ли, основным объектом анализа является инфинитезимальный оператор первого порядка

$$V = \bar{t}\partial_t + \bar{x}\partial_x + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{A^n}\partial_{A^n} \quad . \tag{1}$$

Этот оператор действует на функции, зависящие от конечного числа переменных $t, x, A^1, ..., A^N$. При этом не возникает проблемы сходимости ряда (1) при действии на функции. В этом разделе коэффициенты инфинитезимального оператора обозначаются теми же буквами, что и соответствующая переменная, по которой производится дифференцирование, но с чертой наверху. Каждый коэффициент оператора, по определению, зависит от конечного числа переменных, причем эти наборы различные для разных коэффициентов. Пусть бесконечная система уравнений имеет следующий вид:

$$
\begin{cases}
\Phi_1(t,x,A^1,...)=0; \\
\qquad ...; \\
\Phi_N(t,x,A^1,...)=0; \\
\qquad ....
\end{cases}
\tag{2}
$$

**Определение 1.** *Алгеброй симметрии бесконечной системы (2) называется алгебра Ли* $L$ *операторов вида (1), получаемая предельным переходом по* $N$ *из алгебры симметрии* $L_N$*, где* $L_N$ *является алгеброй симметрии первых* $N$ *уравнений системы (2).*

**Замечание 1.** Предел понимается в том смысле, что для каждого коэффициента оператора (1) существует такой номер $N_i$, после которого вид этого коэффициента не меняется. Этот номер свой для каждого коэффициента.

**Замечание 2.** Линейные операции и коммутаторы для операторов вида (1) вводятся стандартным образом, так как эти операторы действуют на функции конечного числа переменных.

Рассмотрим конкретные системы бесконечного числа дифференциальных уравнений. Для определенности они будут системами первого порядка. Обобщение на системы с производными более высокого порядка не вызывает затруднений.

**Пример 1** [29]. <u>Групповой анализ уравнений Бенни и уравнений, описывающих динамику ионной компоненты в ионосферной разреженной плазме.</u>

В теории непотенциальных движений жидкости со свободной поверхностью в длинноволновом приближении известна система уравнений Бенни [24] :

$$\begin{cases} u_t + uu_x - u_y(\int\limits_0^y u_x dy) + h_x = 0; \\ h_t + (\int\limits_0^{h(t,x)} udy)_x = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $h(t,x)-$неизвестная высота свободной поверхности, $u(t,x,y)-$горизонтальная компонента вектора скорости. Снизу жидкость ограничена горизонтальным дном, так что вертикальная компонента скорости на дне равна нулю. Рассматривается система координат, в которой ускорение свободного падения $g=1$, плотность жидкости постоянна и равна единице. Требуется построить алгебру симметрии системы уравнений (3). Для системы (3) была построена бесконечная система законов сохранения (Миура). А именно, вводя бесконечную систему моментов $A^n(t,x) = \int\limits_0^{h(t,x)} (u(t,x,y))^n dy$, можно получить (см., например[25]), бесконечную систему уравнений в частных производных

$$A_t^n + A_x^{n+1} + nA^{n-1}A_x^0 = 0. \tag{4}$$

При изучении динамики ионной компоненты разреженной ионосферной плазмы в одномерном по пространственным координатам случае возникает следующее кинетическое уравнение в двумерном фазовом пространстве $(x,v)$:

$$f_t + vf_x - f_v(\ln(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t,x,v)dv))_x = 0. \tag{5}$$

Вводя бесконечную систему моментов $\tilde{A}^n(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t,x,v)(v)^n dv$, получим бесконечную систему дифференциальных уравнений с частными производными (моментную систему)

$$\tilde{A}^n_t + \tilde{A}^{n+1}_x + n\tilde{A}^{n-1}(\ln \tilde{A}^0)_x = 0 \ . \qquad (6)$$

Системы (4) и (6) можно объединить в одну, записав бесконечную систему в виде $$A^n_t + A^{n+1}_x + nA^{n-1}(\Phi(A^0))_x = 0. \qquad (7)$$

Эдесь $\Phi$ - произвольная гладкая функция переменной $A^0$. Функция $\Phi$ будет классифицирующим элементом в нашей задаче, а система (7) – основным объектом исследования в данном пункте.

Продолженный оператор первого порядка имеет вид

$$\underset{1}{V} = V + \tilde{A}^n_t \partial_{A^n_t} + \tilde{A}^n_x \partial_{A^n_x}, \qquad (8)$$

где

$$\begin{cases} \tilde{A}^n_t = \overline{A}^n_t + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k_t \overline{A}^n_{A^k} - A^n_t(\overline{t}_t + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k_t \overline{t}_{A^k}) - A^n_x(\overline{x}_t + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k_t \overline{x}_{A^k}); \\ \tilde{A}^n_x = \overline{A}^n_x + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k_t \overline{A}^n_{A^k} - A^n_t(\overline{t}_x + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k_x \overline{t}_{A^k}) - A^n_x(\overline{x}_x + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k_x \overline{x}_{A^k}). \end{cases} \qquad (9)$$

После применения оператора (8) к системе (7) получается следующая система уравнений в пространстве первого продолжения:

$$\tilde{A}^n_t + \tilde{A}^{n+1}_x + n\tilde{A}^{n-1}\Phi' A^0_x + nA^{n-1}\Phi'' \overline{A}^0 A^0_x + nA^{n-1}\Phi' \tilde{A}^0_x = 0, n \geq 0 \, . \qquad (10)$$

Для удобства вычислений заменим в системе (7) $x$ на значение $-x$. Исключим временную производную соотношением $A^n_t = A^{n+1}_x + nA^{n-1}A^0_x\Phi'$. Первое уравнение из (7) имеет вид $\tilde{A}^0_t = \tilde{A}^1_x$.

После подстановки в (10) формул (9) и исключения $A^n_t$, т.е. исключения зависимых переменных, получаем первое уравнение из бесконечной системы определяющих уравнений:

$$\overline{A}_t^0 + \sum_k \overline{A}_{A^k}^0 (A_x^{k+1} + kA^{k-1}\Phi' A_x^0) - A_x^1(\overline{t}_x + \sum_k (A_x^{k+1} + kA^{k-1}\Phi' A_x^0)\overline{t}_{A^k} -$$
$$-A_x^0(\overline{x}_t + \sum_k (A_x^{k+1} + kA^{k-1}\Phi' A_x^0)\overline{x}_{A^k}) = \overline{A}_x^1 + \sum_k \overline{A}_{A^k}^1 A_x^k -$$
$$-(A_x^2 + A^0\Phi' A_x^0)(\overline{t}_x + \sum_k \overline{t}_{A^k} A_x^k) - A_x^1(\overline{x}_x + \sum_k \overline{x}_{A^k} A_x^k).$$

Так как $\overline{t}, \overline{x}, \overline{A}^0, \overline{A}^1$ зависят от конечного числа переменных (подчеркнем, что здесь $A^k$ также становятся независимыми переменными) и мы учли все связи, то члены написанного уравнения образуют полином относительно переменных $A_x^n$, быть может, высокого порядка. Условие обращения этого полинома в ноль эквивалентно обращению в ноль коэффициентов этого полинома при всех независимых одночленах. Таким образом, получается система уравнений для функций $\overline{t}, \overline{x}, \overline{A}^0, \overline{A}^1$.

Точно так же можно анализировать системы, получающиеся при рассмотрении второго и третьего уравнений из (7). Исключение квадратичных членов в пространстве производных, в предположении, что $\Phi' = \dfrac{\partial \Phi}{\partial A^0} \neq 0$, позволяет получить следующую систему определяющих уравнений:

$$\overline{A}_{A^1}^1 = \overline{A}_{A^0}^0 + \overline{x}_x - \overline{t}_t;$$
$$\overline{A}_{A^0}^1 = \overline{A}_{A^2}^1 - \overline{t}_x;$$
$$\overline{A}_{A^{k-1}}^0 = \overline{A}_{A^k}^1, k \geq 3;$$
$$\sum_k k\Phi' A^{k-1} \overline{A}_{A^k}^0 - \overline{x}_t = \overline{A}_{A^0}^1 - \overline{t}_x A^0 \Phi';$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{A}^0_t = \overline{A}^1_x;\\
&\overline{A}^1_{A^{k-1}} = \overline{A}^2_{A^k} + A^0\Phi'\overline{A}^0_{A^k}, k \ge 4;\\
&\overline{A}^1_{A^2} = \overline{A}^2_{A^2} - \overline{t}_x + A^0\Phi'\overline{A}^0_{A^2};\\
&\overline{A}^2_{A^2} = \overline{A}^1_{A^1} + \overline{x}_x - \overline{t}_t - A^0\Phi'\overline{A}^0_{A^2};\\
&\overline{A}^1_{A^0} - \overline{x}_t = \overline{A}^2_{A^1} + A^0\Phi'(\overline{A}^0_{A^1} - \overline{t}_x);\\
&\sum_k k\Phi' A^{k-1}\overline{A}^1_{A^k} + A^0\Phi'\left(\overline{x}_x - \overline{t}_t - \overline{A}^0_{A^0}\right) = \overline{A}^2_{A^0} - 2A^1\Phi'\overline{t}_x +\\
&+A^0\Phi' + A^0\Phi''\overline{A}^0;\\
&\overline{A}^1_t = \overline{A}^2_x + A^0\Phi'\overline{A}^0_x;\\
&\overline{A}^2_{A^{k-1}} = \overline{A}^3_{A^k} + 2A^1\Phi'\overline{A}^0_{A^k}, k \ge 5;\\
&\overline{A}^2_{A^3} = \overline{A}^3_{A^4} - \overline{t}_x + 2A^1\Phi'\overline{A}^0_{A^4};\\
&\overline{A}^3_{A^3} = \overline{A}^2_{A^2} + (\overline{x}_x - \overline{t}_t) - 2A^1\Phi'\overline{A}^0_{A^3};\\
&\overline{A}^2_{A^1} - \overline{x}_t = \overline{A}^3_{A^2} + 2A^1\Phi'\overline{A}^0_{A^2};\\
&\overline{A}^2_{A^0} = \overline{A}^3_{A^1} + 2A^1\Phi'(\overline{A}^0_{A^1} - \overline{t}_x);\\
&\sum_k kA^{k-1}\Phi'\overline{A}^2_{A^k} + 2A^1\Phi'(\overline{x}_x - \overline{t}_t - \overline{A}^0_{A^0}) =\\
&= \overline{A}^3_{A^0} - \overline{t}_x 3A^2\Phi' + 2A^1\Phi''\overline{A}^0 + 2\overline{A}^1\Phi'.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Совершенно аналогично можно рассматривать уравнения высших порядков при номерах $n \ge 3$. В результате мы получаем бесконечную переопределенную систему определяющих уравнений.

Типичный метод анализа получившихся уравнений далее таков: допустим, что $N$ - максимальное число, такое, что $\overline{A}^0_{A^N} \ne 0$. Отсюда следует, что $\overline{A}^1_{A^{N+1}} = \overline{A}^0_{A^N}$, или $\overline{A}^1 = A^{N+1}\overline{A}^0_{A^N} + g(t, x, ..., A^N)$ и т.д. Подставляя такие выражения в системы и продвигаясь по ней дальше, мы с необходимостью будем получать упрощающиеся условия. Детали этой процедуры очень громоздки и не особенно поучительны, поэтому мы их опускаем.

В результате все возможные варианты могут быть извлечены из следующих выражений:

$$\begin{cases} \overline{A}^n = A^n(\lambda + n(\overline{x}_x - \overline{t}_t)) - n\overline{x}_t A^{n-1}; \\ \overline{x} = C_1 tx + C_2 x + C_3 t + C_4; \\ \overline{t} = C_1 t \; + C_5 t + C_6. \end{cases} \tag{12}$$

Причем все эти величины связаны классифицирующим уравнением

$$2(\overline{x}_x - \overline{t}_t) = \lambda + \lambda A^0 \Phi'' / \Phi', \lambda = C_0 - \overline{x}_x. \tag{13}$$

Здесь $C_i$ - коэффициенты при базисных операторах в алгебре Ли. В зависимости от вида $\Phi$ мы будем получать разные алгебры операторов, допускаемые системой уравнений (7).

Из классифицирующего уравнения следует, что существует два различных варианта в случае, когда величина $A^0\Phi''/\Phi'$ зависит от $A^0$ нетривиально, т.е. когда $A^0\Phi''/\Phi' \neq const$. В силу того, что (13) выполняется тождественно по всем переменным, получаем

$$\lambda = 0, \lambda = 2(\overline{x}_x - \overline{t}_t). \tag{14}$$

Более интересные случаи возникают, если $A^0\Phi''/\Phi' = \alpha = const$ или $\Phi' = C(A^0)^\alpha$. Отсюда при $\alpha = 0$ приходим к уравнениям Бенни, при $\alpha = -1$ - к моментным уравнения для плазмы. Если $\alpha \neq 0, -1$, то получаем произвольную степенную нелинейность.

Подводя итог, отметим, что реально отличны одно от другого только уравнения с функциями $\Phi = \ln A^0, \Phi = (A^0)^{\alpha+1}$ и параметрами, не сводящимися к двум предыдущим.

В последнем случае имеем такую алгебру операторов:

$$V_1=\partial_t, V_2=\partial_x, V_3=x\partial_x+\sum_k A^k\partial_{A^k},$$
$$V_4=t\partial_x-\sum_k A^{k-1}\partial_{A^k}. \qquad (15)$$

Для $\alpha=const$ классифицирующее уравнение примет вид
$$2(\bar{x}_x-\bar{t}_t)=(1+\alpha)(C_0-\bar{x}_x). \qquad (16)$$

При $\alpha=1$, когда $\Phi=(A^0)^2$ (рассматривается система с кубической нелинейностью), здесь возникает существенное расширение допускаемой группы за счет проективного оператора:

$$V_p=t^2\partial_t+xt\partial_x-\sum_n ntA^n\partial_{A^n}-\sum_n nxA^{n-1}\partial_{A^n}. \qquad (16)$$

Кроме того, для значения $\alpha=1$ с необходимостью получаем, что $C_2=C_0+C_5$ и алгебра операторов принимает вид

$$V_p=t^2\partial_t+xt\partial_x-\sum_n ntA^n\partial_{A^n}-\sum_n nxA^{n-1}\partial_{A^n}, \partial_t, \partial_x,$$
$$t\partial_x-\sum_n nA^{n-1}\partial_{A^n}, x\partial_x+\sum_n (n+1)xA^n\partial_{A^n}, t\partial_t-\sum_n (n-1)A^n\partial_{A^n}. \qquad (17)$$

Алгебра уравнений Бенни (алгебра операторов, допускаемая бесконечной системой законов сохранения) при $\alpha=0$ состоит из операторов:

$$\partial_t, \partial_x, t\partial_x-\sum_n nA^{n-1}\partial_{A^n}, t\partial_t-\sum_n (n+2)A^n\partial_{A^n},$$
$$x\partial_x+\sum_n (n+2)A^n\partial_{A^n}. \qquad (18)$$

Операторы $\partial_t, \partial_x, t\partial_x-\sum_n nA^{n-1}\partial_{A^n}$ образуют одномерную группу Галилея, которую обозначают $\Gamma_3$.

Алгебра Ли плазменного уравнения $\Phi = \ln A^0, \alpha = -1$ представляет, вследствие условия, следующую совокупность операторов:

$$\Gamma_3, \sum_n A^n \partial_{A^n}, x\partial_x + t\partial_t. \tag{19}$$

**Замечание 1.** Связь групповых структур моментных систем и кинетических (интегродифференциальных) уравнений.

Возникает следующая проблема: насколько изложенные результаты зависят от выбора моментного представления, способа предельного перехода, а также от способа перенесения групповой информации от моментов к функции распределения. Для уравнения Бенни надо от переменных $A^n$ перейти к переменным $h(t,x), u(t,x,y)$, для плазменного уравнения - от $A^n$ к переменной $f(t,x,v)$, так что $A^n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t,x,v)v^n dv$. Рассмотрим вариант с переменной $f(t,x,v)$, тем более, что систему уравнений Бенни также можно записать в кинетическом виде, исходя из интерпретации $A^n = \int\limits_0^{h(t,x)} (u(t,x,y))^n dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t,x,v)v^n dv$. Система уравнений Бенни может быть записана в виде одного интегродифференциального уравнения

$$f_t + vf_x - f_v(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f dv)_x = 0.$$

Найденные здесь конечномерные алгебры операторов фактически однозначно поднимаются до выражений непосредственно через величины $v, f$. Намного сложнее интерпретировать псевдогруппы Ли, которые возникают, например, при изучении диссипативных систем в кинетике.

В общем случае отсутствуют общие методы группового анализа интегродифференциальных уравнений, так как моментные представления или неоднозначны, или, что чаще, не представляется возможным построить вообще. Для высших симметрий отсутствуют способы определения <u>всех</u> высших симметрий хотя бы в принципе.

При переходе от $A^n$ к $f$ удобно восстановить явное параметрическое представление группы, для чего необходимо решить уравнение Ли

$$\frac{dx'}{da} = \xi(x'), x'(0) = x.$$

Например, для оператора $t\partial_t - \sum_n (n+2)A^n\partial_{A^n}$ имеем систему

уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{dt'}{da} = t', t'(0) = t; \\ x' = x; \\ \dfrac{dA^{n\prime}}{da} = -(n+2)A^{n\prime}, A^{n\prime} = A^n. \end{cases} \qquad (20)$$

Решение системы очевидно: $t' = e^a t, x' = x, A^{n'} = A^n \exp(-(n+2)a)$. Если $f', v'$ — искомые преобразованные величины, то $A^{n\prime} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(v')^n dv'$. Отсюда ясно, что $f' = fe^{-a}, v' = ve^{-a}$. На языке касательных операторов получим $t\partial_t - v\partial_v - f\partial_f$. (21)

Для системы законов сохранения для уравнений Бенни, помимо приведенного оператора, можно найти и другие:

$$\partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_v, x\partial_x + v\partial_v + f\partial_f. \qquad (22)$$

Линейная комбинация операторов (21) и (22) дает общий вид автомодельного оператора $t\partial_t + \beta x\partial_x + (\beta-1)v\partial_v + (\beta-1)f\partial_f = X$.

Инвариант $I(t,x,v,f)$ выражается через базисные инварианты $x(t)^{-\beta}, v(t)^{-\beta+1}, f(t)^{-\beta+1}$. Отсюда находим общий вид инвариантного решения для оператора $X$: $f=(t)^{\beta-1}g\left(x(t)^{-\beta}, v(t)^{-\beta+1}\right)$. Функция $g$ является решением фактор-системы. При $\beta=1$ имеем $f=g(x/t,v)$, а для $\beta=0$ получим выражение $f=(1/t)g(x,vt)$. Это классические автомодельные решения, которые возникают из теории размерностей ([27]).

**Замечание 2** <u>[29[. Построение решений для уравнений, допускающих проективную группу.</u>

Приводимая ниже схема хорошо работает практически для любых эволюционных уравнений, но мы ее изложим для кинетических интегро-дифференциальных уравнений, другие случаи разбираются подобным образом. Под действием группы, допускаемой данным уравнением или системой, причем любого типа, решение системы переходит в решение. Это же верно и для проективной группы. Оператор для проективной группы в $(v,f)$ представлении имеет вид $t^2\partial_t+xt\partial_x+(x-vt)\partial_v$. Решая уравнения Ли, получаем $v'=x/t+(v-x/t)(1-at), f'=f$. Выражения для временной и пространственной переменных были выведены раньше. Тогда, если $f(t,x,v)$ решение кинетического уравнения, допускающего проективную группу, то решением будет функция

$$f=f\left(\frac{t}{1-at},\frac{x}{1-at},\frac{x}{t}+\left(v-\frac{x}{t}\right)(1-at)\right). \tag{23}$$

**Пример 2** [30-32]. Алгебры симметрии диссипативных кинетических уравнений. Модельные кинетические уравнения.

Основным уравнением этого пункта является модельное кинетическое уравнение, называемое БГК-уравнением (по именам Бхатнагара, Гросса, Крука): $f_t + \vec{v} \cdot grad_x f = \nu(\Phi - f)$ (24)

Здесь $\nu$ – эффективная частота столкновений, обычно зависящая от плотности частиц $n$ и температуры $T$, $\Phi$ – локально-максвелловское распределение, $n = \iiint f d\vec{v}, \vec{V} = (V^1, V^2, V^3)$ – гидродинамическая скорость.

$$V^i = \iiint f v^i d\vec{v}, \Phi = n(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2kT}(\vec{v} - \vec{V})^2\right].$$

В рассматриваемых уравнениях $n(\vec{x}, t), V^i(t, \vec{x}), f(t, \vec{x}, \vec{v})$ являются неизвестными функциями. Классифицирующая функция $\nu$ может зависеть либо от независимых переменных, либо от переменных $n, T$.

Ограничимся одномерным по пространственным координатам случаем. Тогда уравнение запишется следующим образом:

$$\begin{cases} f_t + v f_x = \nu(\Phi^* - f); \\ \Phi^* = n\left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left[-\dfrac{m}{2kT}(v - V)^2\right]; \\ n = \int f dv, V = \dfrac{1}{n}\int f dv; \\ kT/m = \dfrac{1}{n}\int f(v - V)^2 dv. \end{cases} \quad (25)$$

Если ввести моментную систему $f^n = \int f(v - V)^n dv, V$, то система уравнений (25) сводится к бесконечной моментной системе уравнений (системе законов сохранения):

$$f_t^n + nV_t f^{n-1} + f_x^{n+1} + Vf_x^n + (n+1)V_x f^n + nVV_x f^{n-1} = \nu(\Phi^n - f^n);$$

$$\Phi^n = \begin{cases} 0, n = 2k-1, \\ (2k-1)!!(f^2 / f^0)^k f^0, n = 2k. \end{cases} \qquad (26)$$

Неизвестными являются функции $V, \left\{ f^n \right\}$. Все интегралы берутся в пределах от минус бесконечности до плюс бесконечности. Групповую классификацию естественно проводить по функции $\nu(n,T)$, что отвечает физике задачи ([33]). Предполагаем, что $(\frac{\partial \nu}{\partial n})^2 + (\frac{\partial \nu}{\partial T})^2 \neq 0$. Система (26) допускает следующую алгебру операторов ([30-32]):

$$\begin{aligned} &\bar{t}\partial_t + \bar{V}\partial_V + \sum_n \bar{f}^n \partial_{f^n}; \\ &\bar{t} = C_1 t^2 + C_5 t + C_6, \bar{x} = C_1 tx + C_2 x + C_3 t + C_4; \\ &\bar{V} = V(\bar{x}_x - \bar{t}_t) + \bar{x}_t; \\ &\bar{f}^0 = f^0 \varphi, \varphi = C_0 - \bar{x}_x; \\ &\bar{f}^n = f^n(n(\bar{x}_x - \bar{t}_t) + \varphi). \end{aligned} \qquad (27)$$

Система уравнений (27) должна быть дополнена классифицирующим уравнением

$$\begin{aligned} &\nu_{f^0} f^0 (C_0 - C_2 - C_1 t) + \nu_{f^2} f^2 (C_0 + C_2 - 2C_5 - 3C_1 t) + \\ &+ \nu(2C_1 t + C_5) = 0. \end{aligned} \qquad (28)$$

В уравнении (28) содержится важная информация. Не проводя общей групповой классификации, рассмотрим два примера. Пусть $\nu \sim (f^0)^\beta (f^2)^{1/2}, \beta \neq 1/2$, т.е. когда сила межмолекулярного взаимодействия $f \sim \frac{1}{r^k}$. Этот случай соответствует заданию следующей связи между координатами операторов:

$C_1 = 0, C_1(1-\alpha) = C_0(\alpha\beta+1) + C_2(1-\alpha\beta)$. Другой пример $\nu \sim n\sqrt{T}$ (это есть модель твердых шариков); при этом происходит расширение допускаемой группы за счет проективной группы.

Рассмотрим решения системы (27), инвариантные относительно проективной группы. Подчеркнем, что все выводы, полученные здесь справедливы и для уравнения Бенни в одномерном по координате $x$ случае для кубической нелинейности. Подставляя инвариантные решения $f = F(x/t, vt-x)$ в кинетическое уравнение, соответствующее системе уравнений (27), и переходя к переменным $\bar{x} = x/t, \bar{v} = vt - x$, получим в новых переменных стационарное уравнение.

**Теорема 1.** *Если* $F(x,v)-$*стационарное решение одномерного по переменной* $x$ *кинетического уравнения, допускающего проективную группу, то* $F(x/t, vt-x)$ *будет нестационарным решением кинетического уравнения.*

Этот результат можно усилить. После подстановки в кинетическое одномерное уравнение решения $f(C-1/t, x/t, vt-x)$ и перехода к переменным $\bar{x}, \bar{v}, \bar{t} = C - 1/t$ получим в новых переменных старое уравнение по форме, умноженное на величину $t^{-2}$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Если* $f(t,x,v)-$*решение кинетического уравнения, одномерного по переменной* $x$*, допускающего проективную группу, то* $f(C-1/t, x/t, vt-x)$ *также будет решением кинетического уравнения. Здесь* $C-$ *произвольная постоянная.*

Таким образом, получена формула производства решений кинетического уравнения. Применяя ее $n$ раз, получаем решение, зависящее от $n$ произвольных постоянных $C_i$. Причем $C_i$ не являются групповыми параметрами.

Отметим также здесь, что проективный оператор допускается уравнением Бюргерса и уравнениями одномерной газовой динамики при показателе адиабаты $\gamma = 3$. Происхождение этой симметрии становится ясным, если учесть связь показателя адиабаты в газовой динамике с законами молекулярного взаимодействия, используемыми при подсчете интеграла столкновений в кинетической теории газов.

Если движение газа плоское (две степени свободы), то проективный оператор существует для максвелловского газа при $\nu \sim n$, а в пространственном случае ( три степени свободы) – при $\nu \sim n\left(T\right)^{-1/2}$, т.е. когда сила взаимодействия между молекулами пропорциональна $\left(r\right)^{-3}$.

БГК – уравнение является удачной моделью для группового анализа, потому что все приведенные симметрии для конкретных моделей межмолекулярного взаимодействия для БГК – уравнения имеют место и для уравнения Больцмана с теми же законами межмолекулярного взаимодействия, хотя проверить это непросто. Непараметрический способ производства решений для уравнения Больцмана был обнаружен А.А. Никольским. Связь этого результата с проективной инвариантностью уравнения Больцмана и его моделей была выяснена в работе [32]. Интересно отметить, что приведенная формула производства решений верна для газа из твердых шариков переменного во времени диаметра $d_t = d \cdot t$.

Рассмотрим случай $\nu = \nu(t, x)$. Физически это не самый интересный случай. Но ввиду необычности возникающих структур приведем здесь результаты анализа. Координаты при базисных операторах $\partial_{f^k}, k \geq 3$ ведут себя следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\overline{f}^3 = f^3(3(\overline{x}_x - \overline{t}_t) + \varphi) - g^3(t), \\
\overline{f}^4 = f^4(4(\overline{x}_x - \overline{t}_t) + \varphi) + 4g^3V + g^4(t,x), \\
\overline{f}^5 = f^5(5(\overline{x}_x - \overline{t}_t) + \varphi) - 10g^3(V)^2 - 5g^4V - g^5, \\
-----------------------------.
\end{gathered}
\tag{29}
$$

Коэффициенты в (29) подчиняются биномиальным разложениям. Классифицирующее уравнение здесь принимает вид

$$
\begin{cases}
\quad \nu_t \overline{t} + \nu_x \overline{x} + \nu \overline{t}_t = 0, \\
\nu g^k + g_t^k - g_x^{k+1} = 0, k \geq 3.
\end{cases}
\tag{30}
$$

Допускаемая алгебра операторов зависит от бесконечного числа допускаемых функций. Можно считать это примером «бесконечной» псевдогруппы Ли.

**Пример 3.** Групповые свойства эволюционных одномерных дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью и бесконечным числом пространственных производных. Уравнение Бенжамина - Оно.

Рассмотрим уравнение следующего вида:

$$
u_t + uu_x = \Phi(u_x^{(3)}, u_x^{(5)}, ..., u_x^{(2k+1)}, ...). \tag{31}
$$

Здесь $\Phi -$произвольная функция бесконечного числа переменных, хотя допускаются и конечные наборы переменных; $u_x^n -$производная $n$ - го порядка по координате $x$. Переобозначая зависимую переменную и ее пространственные производные: $u = u^0, u_x = u^1, u_x^{(2k-1)} = u^k$, можно представить уравнение (31) в виде бесконечной системы

$$
\begin{cases}
u_t^0 + u^0u^1 = \Phi\left(u^2, u^3, ..., u^k, ...\right); \\
\quad u_x^0 = u^1, u_{xx}^k = u^{k+1}, k \geq 1.
\end{cases}
\tag{32}
$$

**Теорема 3** [34]. *Если* $\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{\partial \Phi}{\partial u^k})^2 \neq 0$, *то алгебры <u>точечной</u> симметрии уравнения (31) или системы (32) при различных видах функции* $\Phi$ *будут различными подалгебрами линейной оболочки операторов:*

$$\begin{cases} X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_x + \partial_u, \\ X_4 = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, X_5 = x\partial_x + u\partial_u, \\ X_p = (t)^2\partial_t + xt\partial_x + (x - ut)\partial_u. \end{cases} \tag{33}$$

Последний оператор, например, допустим для уравнения Бенжамина - Оно

$$u_t + uu_x = (\int_0^{\infty} \frac{u(t, x+a) - u(t, x-a)}{a} da)_{xx}. \tag{34}$$

Это, вообще говоря, неудивительно, поскольку правая часть уравнения представляет собой непрерывную совокупность смещенных «диссипаторов» $u(t, x+a)_{xx}$ и «антидиссипаторов» $-u(t, x-a)_{xx}$, что очень похоже на уравнение Бюргерса. Проективная инвариантность доказывается прямой подстановкой групповых преобразований. Интересно отметить, что некоторые решения, построенные для уравнения Бенжамина - Оно, которое моделирует процесс распространения внутренних волн в океане, можно получить, анализируя натурные измерения волновых процессов в океане [34].

## § 17. Алгебры симметрии линейных дифференциальных уравнений

**Определение 1.** *Дифференциальная система* $\Phi : X \times U \times \underset{1}{U} \times \ldots \times \underset{s}{U} \to R^p; \Phi = 0$ *называется <u>линейной однородной системой,</u> если для фиксированного значения* $x$ *частное отображение* $\Phi_x$ *будет линейным по всем остальным аргументам.*

Здесь $x \in R^n, u \in R^m, \underset{1}{u} \in R^{nm}, \ldots$ .

Пусть допускаемый оператор линейной системы имеет следующий вид: $V = \xi(x,u)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u$. Имеет место лемма.

**Лемма 1** [2]. *Допускаемая алгебра операторов всегда содержит абелеву подалгебру операторов вида* $V = \alpha(x)\partial_u$, (1)

*где* $\alpha : R^n \to R^m$. *Здесь* $\alpha(x)$ – *произвольное решение линейной системы* $\Phi = 0$.

Доказательство: пусть система допускает оператор $V = \alpha(x)\partial_u$. Рассмотрим систему уравнений Ли:

$$\begin{aligned} &\frac{d\bar{x}}{da} = \bar{x}; \bar{x}(0) = x; \\ &\frac{d\bar{u}}{da} = \alpha(\bar{x}); \bar{u}(0) = u. \end{aligned} \tag{2}$$

Решая эту систему, получаем

$$\bar{x} = x; \bar{u}(x) = \alpha(x)a + u(x). \tag{3}$$

Пусть $u = u(x)$является решением системы $\Phi = 0$ в переменных $(x,u)$. Следовательно, $\Phi = 0$ в переменных $(\bar{x},\bar{u})$. Тогда выражение $\bar{u}(x) = \alpha(x)a + u(x)$ является решением уравнения $\Phi = 0$. Отсюда, в силу линейности уравнения, получаем $\Phi(\alpha(x)) = 0$.

Обратно. Пусть $\alpha(x) = 0$ решение исходного уравнения. Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований $\bar{x} = x, \bar{u} = u + a\alpha(x)$. Тогда $\Phi(\bar{x},\bar{u},\ldots,\underset{s}{\bar{u}}) = \Phi(x.u,\ldots,\underset{s}{u}) + a\Phi(\underset{s}{\alpha})$, так как $\Phi(\underset{s}{\alpha}) = 0$. Следовательно, $\Phi(\bar{x},\bar{u},\ldots,\underset{s}{\bar{u}}) = \Phi(x.u,\ldots,\underset{s}{u})$. Так что $\Phi$является инвариантом продолженной группы. Поэтому $V = \alpha(x)\partial_u$ является допускаемым оператором.

**Замечание 1.** Множество всех операторов рассматриваемого вида образует линейное пространство. Коммутатор любых двух таких операторов равен $0$, поэтому алгебра операторов абелева. Эта алгебра обозначается $L^{\infty}$.

**Наблюдение 1.** *Системами линейных дифференциальных уравнений допускаются операторы вида*

$$V = \xi(x)\partial_x + \beta(x)\langle u\rangle\partial_u. \tag{4}$$

*Здесь* $\xi(x)$ *не зависит от* $u$*, для любого фиксированного* $x$ $\beta(x)$ *является отображением из* $R^m$ *в* $R^m$*. При этом* $\alpha(x), \beta(x)$ *находятся из решения системы определяющих уравнений.*

**Замечание 2.** Рассматриваемые операторы образуют, как правило, конечномерную алгебру Ли, допускаемую системами дифференциальных уравнений. Наиболее «интересные» операторы для линейных систем имеют такой вид. Стандартное обозначение рассматриваемой алгебры $L^r$. Доказательство этого утверждения приведено ниже.

**Лемма 2** [2]. *Дифференциальные операторы вида (4) образуют алгебру Ли.*

Доказательство: линейная структура операторов вида (4) выполняется очевидным образом. Для коммутаторов достаточно доказать замкнутость операторов вида (4) относительно коммутации. Пусть рассматриваются два оператора $V_1 = \xi_1(x)\partial_x + \beta_1(x)\langle u\rangle\partial_u; V_2 = \xi_2(x)\partial_x + \beta_2(x)\langle u\rangle\partial_u$.

Тогда получим, что

$$[V_1,V_2]=[\xi_1(x)\partial_x,\xi_2(x)\partial_x]+[\xi_1(x)\partial_x,\beta_2(x)\langle u\rangle\partial_u]+$$
$$+[\beta_1(x)\langle u\rangle\partial_u,\xi_2(x)\partial_x]+[\beta_1(x)\langle u\rangle\partial_u,\beta_2(x)\langle u\rangle\partial_u]=$$
$$=[\xi_1,\xi_2](x)\partial_x+(\beta_2\circ\beta_1-\beta_1\circ\beta_2)(x)\langle u\rangle\partial_u+((\xi_1(x)\partial_x)\beta_2-$$
$$-(\xi_1(x)\partial_x)\beta_2)\langle u\rangle\partial_u.$$

Получившийся результат и означает, что операторы вида (4) образуют алгебру Ли. Здесь знак $\circ$ означает композицию линейных операторов или соответствующих им квадратных матриц.

**Лемма 3.** *Прямая сумма векторных пространств $L^r\oplus L^\infty$ имеет структуру алгебры Ли. Подалгебра $L^\infty$ является идеалом в $L^r\oplus L^\infty$.*

Доказательство: утверждение вытекает из вида «перекрестного» коммутатора $[V_1,V_2]$, где $V_1=\alpha(x)\partial_u$ и $V_2=\xi(x)\partial_x+\beta(x)\langle u\rangle\partial_u$. Действуя аналогично лемме 2, получим $[V_1,V_2]=(\beta(x)\langle\alpha\rangle-(\xi\cdot\partial_x)\alpha(x))\cdot\partial_u$.

**Замечание 3.** Для большинства линейных уравнений и систем $L^r\oplus L^\infty$ является основной алгеброй, допускаемой системой $\Phi=0$. Критерий истинности этого утверждения, очевидно, состоит в том, что для допускаемого оператора $V=\xi(x,u)\partial_x+\eta(x,u)\partial_u$ среди определяющих уравнений должны быть следующие: $\partial_u\xi=0;\partial_u\eta=\beta(x)$.

**Конструкция.** Для линейных уравнений условия инвариантности можно сформулировать, в силу вышесказанного, в терминах коммутаторов функций <u>независимых</u> переменных. Для простоты ограничимся случаем одной зависимой переменной. Ищем только операторы вида $V=\xi(x)\partial_x+\beta(x)u\partial_u$, т. е., рассматриваем алгебру $L^r$. Операторы из $L^r$ действуют на функции от независимых переменных $x,u$. Рассмотрим алгебру операторов вида

$$\vec{V} = \xi(x)\partial_x + \beta(x), \tag{5}$$

действующих на функции переменных $x$. Прямая проверка показывает, что мы получаем изоморфные алгебры операторов. Именно для этих операторов и для линейных уравнений $Lu = 0$ вводится определение симметрии линейных систем.

**Определение 2.** Оператор $\vec{V} = \xi(x)\partial_x + \beta(x)$ называется оператором симметрии для линейного дифференциального уравнения произвольного порядка $Lu = 0$, если существует такая гладкая функция $\lambda(x)$, что выполнено следующее соотношение:

$$\left[A, \vec{V}\right] = \lambda(x) A. \tag{6}$$

Важность введенного определения выясняется из теоремы.

**Теорема 1.** *Оператор симметрии отображает решения линейного уравнения в решения того же уравнения.*

Доказательство: если $u = \alpha(x)$ решение дифференциального уравнения $Lu = 0$,

тогда $L(\vec{V}\alpha(x)) = \vec{V}(L\alpha(x)) + \lambda(x)L\alpha(x) = 0$ в силу линейности уравнения и в силу определения симметрии. То есть $\vec{V}\alpha(x)$ то же решение уравнения $Lu = 0$.

**Замечание 4.** Именно такое определение и принимается в качестве основного во многих работах по групповому анализу линейных дифференциальных уравнений ([35]). Дело в том, что оператор симметрии в этом случае часто удается обобщить, а именно, например, он может не быть дифференциальным оператором первого порядка или даже быть, например, интегродифференциальным оператором. Интересующихся читателей отсылаем к приведенной выше литературе. Можно отметить также и слабости приведенной конструкции, поскольку она не применима к нелинейным уравнениям. В общем случае и для линейных уравнений симметрии вида (6) отличаются от классических симметрий Ли. Однако имеет место следующий результат для линейных однородных уравнений первого порядка, который мы сформулируем в виде упражнения.

**Упражнение 1.** Для линейного дифференциального уравнения первого порядка $Lu = \sum_{i=1}^{n} a^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0$ оператор $V = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \partial_{x^i}$ допускается уравнением в смысле классического определения Ли тогда и только тогда, когда выполнено условие $[L,V] = \lambda(x) L$, где $\lambda(x)$ некоторая гладкая функция.

Таким образом, связь симметрий в различных смыслах похожа на случай обыкновенных дифференциальных уравнений, когда совпадение определений имеет место для уравнений первого порядка.

**§ 18. Теорема Хопфа на плоскости**

Эта теорема характеризует те условия, которые необходимы для существования периодических решений у автономной системы дифференциальных уравнений.

**Теорема 1** ([36,22]). *Пусть задана двумерная автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений с правой частью, зависящей от параметра* $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \varepsilon_0 > 0$

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x, \varepsilon), \tag{1}$$

*где* $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$, $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix}$, *при этом* $\Phi$ *определена в области* $G \subset R^2$. *Допустим, что для всякого* $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *уравнение имеет особую точку, т.е. для* $\Phi(x, \varepsilon) = 0$ *имеем решение* $x = \varphi(\varepsilon)$. *Рассмотрим матрицу Якоби функции* $\Phi(x, \varepsilon)$, *вычисленную в точке* $x = \varphi(\varepsilon)$ *и обозначеннуую*

$A(\varepsilon)$. *Для матрицы* $A(\varepsilon)$ *предполагаются выполненными следующие условия: матрица* $A(0)$ *имеет чисто мнимые собственные значения* $\pm i\alpha, \alpha \neq 0$, *так что* $SpA(0) = 0, \det A(0) > 0$. *Для матрицы* $B(\varepsilon)$, *определенной равенством*

$$A(\varepsilon) = A(0) + \varepsilon B(\varepsilon), \tag{2}$$

*предполагается выполненным условие* $Sp(0) \neq 0$. *Тогда для всякого значения* $\varepsilon$, *достаточно близкого к значению* $\varepsilon = 0$, *в некоторой окрестности точки* $x = \varphi(0)$ *существует периодическое решение системы (1) с периодом* $T \approx \dfrac{2\pi}{\alpha}$.

Доказательство: построим для любого вектора $\vec{b}$ вспомогательные скалярные функции $c(u), d(u), \varepsilon(u) = ud(u), T(u) = T_0(1 + uc(u))$ и векторные функции $x(u,t) = \varphi(\varepsilon(u) + uy(T_0 t / T(u), u)$, для которых выполнены следующие условия:

1) $c(0) = d(0) = 0;$
2) $\exists u_0 > 0$, что $c(u), d(u) \in C^1[0, u_0]$;
3) $y(0,u) = \vec{b}$;
4) $y(s,u)$ имеет по переменной $s$ период $T_0$;
5) $x(u,t)$ является решением уравнения

$\dot{x} = \Phi(x, \varepsilon(u))$ с периодом $T(u)$, зависящим от $\varepsilon$.

Вводим новые переменные $s = T_0 t / T(u), s = T_0 t / T(u), \varepsilon = ud(u), T(u) = T_0(1 + uc(u))$. Тогда $y(s,u)$ определяется уравнением $x(u,t) = \varphi(\varepsilon(u) + uy(T_0 t / T(u), u)$.

Если $x(u,t)$ периодична по $t$ с периодом $T(u)$, то $y(s,u)$ - периодическая функция $s$ с периодом $T_0$. Кроме того, мы имеем

$$x(u,0) = \varphi(\varepsilon) + u\vec{b}. \tag{4}$$

Подставим в уравнение (4) выражения для $x, y$ в новых переменных, получим $u\dfrac{dy(s,u)}{ds} = \dfrac{T(u)}{T_0}\Phi(\varphi(\varepsilon) + uy, \varepsilon)$, (5)

где $\dfrac{ds}{dt} = T_0 / T(u)$. Определим вектор-функцию $Q(y,\varepsilon,u)$ равенством

$$\Phi(\varphi(\varepsilon) + uy, \varepsilon) = uA(\varepsilon)y + u^2Q(y,\varepsilon,u). \tag{6}$$

Тогда уравнение (5) примет следующий вид:

$$\frac{dy}{ds} = A(0)y + uG(y,u), \tag{7}$$

здесь
$$\begin{gathered} G(y,u) = d(u)B(ud(u))y + c(u)A(ud(u))y + (1+ \\ +uc(u))Q(y,ud(u),u). \end{gathered} \tag{8}$$

Пусть $Y(s)$ есть решение матричной задачи Коши

$$dY / ds = A(0)Y, Y(0) = I. \tag{9}$$

Решение уравнения (9) имеет вид $Y(s) = \cos(\alpha s)I + \dfrac{1}{\alpha}\sin(\alpha s)A(0)$.

Обращая эти матрицу, получим, что

$$Y^{-1}(s) = \cos(\alpha s)I - \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha s)A(0). \tag{10}$$

Кроме того, $\dfrac{dY^{-1}(s)}{ds} = -Y^{-1}(s)A(0)$. Тогда подстановка в уравнение (7) дает новое уравнение

$$\frac{d}{ds}\left(Y^{-1}(s)y(s,u)\right) = Y^{-1}\frac{dy}{ds} - Y^{-1}A(0)y = uY^{-1}(s)G(y,u). \tag{11}$$

Прямое интегрирование дает уравнение

$$Y^{-1}(s)y(s,u) = u\int_0^s Y^{-1}(z)G(z)dz + const. \qquad (12)$$

Из условий $uy(0,u) = x(u,0) - \varphi(\varepsilon(u)) = u\vec{b}, Y(0) = I$, получим что $const = \vec{b}$. Таким образом получили на $G$ интегральное уравнение.

Требуется определить $u, c(u), d(u)$ так, чтобы векторная функция $y$ имела период $T_0$ по переменной $s$ для всех значений $u$. Для $u = 0$ при $s = T_0$, так как $y$ имеет период $T_0$, получаем

$$y(T_0,0) = Y(T_0)\vec{b} = y(0,0) = \vec{b}. \qquad (13)$$

Так как (13) верно для любого $\vec{b}$, то отсюда следует, что $Y(T_0) = I$.

Следовательно, из условия $\cos(\alpha T_0)I + \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha T_0)A(0) = I$, находим, что

$$T_0 = \frac{2\pi}{\alpha}. \qquad (14)$$

Теперь $y(s,u)$ - периодическая функция с периодом $T_0$ по переменной $s$ для всех $u$, так что $y(T_0,u) = \vec{b}$, то при $s = T_0$ получим

$$\int_0^{T_0} Y^{-1}(z)G(z)dz = 0. \qquad (15)$$

Отсюда получается векторное уравнение

$$\int_0^{T_0} Y^{-1}(z)\{c(u)A(ud)y + d(u)B(ud)y + \qquad (16)$$
$$(1 + uc(u))Q(y,ud,u)\}dz = 0.$$

В уравнении (16) есть три переменных $u, c, d$. Требуется доказать, что из (16) следует, что для решения $c, d$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями переменной $u$ для достаточно малых $u \geq 0$, так что $c(0) = d(0) = 0$. Для доказательства необходимо воспользоваться теоремой о неявной функции.

1). Докажем, что (16) удовлетворяется при $u = 0, c(0) = d(0) = 0$.

Выражение (6) при малых $u$ есть разложение Тейлора по $uy$. $Q(y, \varepsilon, 0)$ есть квадратичная форма компонент $y$. Так как $y(s,0) = Y(s)\vec{b}$, то $Q(y(s,t), \varepsilon, 0)$ - квадратичная форма компонент $Y(s)$. Из (10) следует, что эта функция представляет собой линейную оболочку величин $\cos^n(\alpha s)\sin^{2-n}(\alpha s), n = 0,1,2.$ Следовательно, $Y^{-1}(z)Q(y(z,0),0,0)$ - линейная комбинация слагаемых вида $\cos^n(\alpha s)\sin^{3-n}(\alpha s), n = 0,1,2,3.$ Следовательно, верно равенство

$$\int_0^{T_0} Y^{-1}(z)Q(y(z,0),0,0)dz = 0. \qquad (17)$$

Используя полученное равенство, после подстановки $u = 0, c(0) = d(0) = 0$ видим, что (16) удовлетворяется.

2) Надо доказать, что якобиан левой части (16) по $c, d$ при $u = c = d = 0$ не равен нулю.

Введем обозначение $B = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} Y^{-1})z)B(0)Y(z)dz$ . (18)

Из (10) и равенства $A^2(0) = -\alpha^2 I$ получим

$$\int_0^{T_0} Y^{-1}(z)A(0)Y(z)dz = T_0 A(0). \qquad (19)$$

Аналогично получаем, что $B = 1/2(B(0) - \frac{1}{\alpha^2}A(0)B(0)A(0))$. (20)

Продифференцируем левую часть (16) по $d$, затем положим $u = c = d = 0$, тогда получим

$$\int_0^{T_0} Y^{-1}(z)B(0)y(z,0)dz = T_0 \bar{B}\vec{b}. \qquad (21)$$

Аналогично дифференцируя по $c$, получим, что

$$\int_0^{T_0} Y^{-1}(z)A(0)y(z,0)dz = T_0 A(0)\vec{b}. \qquad (22)$$

Поэтому осталось доказать, что определитель матрицы $\left(\bar{B}\vec{b}, A(0)\vec{b}\right)$ не равен нулю.

Приведем $A(0)$ к диагональному виду, используя преобразование $P$ к главным осям

$$P^{-1}A(0)P = i\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Из равенств (21)-(23) следует, что

$$2P^{-1}\bar{B}P = P^{-1}B(0)P + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}B(0)P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если верно, что $P^{-1}B(0)P = \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \psi \end{pmatrix}$, то получим, что

$$P^{-1}\bar{B}P = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Так как $P$ - неособая матрица, то существует $P^{-1}$. Пусть $\vec{k} = \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \end{pmatrix} = P^{-1}\vec{b}$. Тогда можно получить, что $P^{-1}\left(\bar{B}\vec{b}, A(0)\vec{b}\right) = \begin{pmatrix} \xi k^1 & i\alpha k^1 \\ \psi k^2 & -\alpha k^2 \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы считается явно $-i\alpha k^1 k^2 Sp\tilde{B}$. Так как $SpB = Sp\tilde{B} \neq 0$, то осталось доказать, что $k^1, k^2 \neq 0$. Пусть последовательно имеем

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} P^{11} & P^{12} \\ P^{21} & P^{22} \end{pmatrix}, A(0) = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $k^2 = 0, k^1 \neq 0$. Тогда получим, что

$$b^1 = P^{11} k^1, b^2 = P^{21} k^1. \qquad (24)$$

Тогда получим, что $A(0)P = i\alpha P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом находим, что

$$\begin{cases} A^{11}P^{11} + A^{12}P^{21} = i\alpha P^{11}; \\ A^{21}P^{11} + A^{22}P^{21} = i\alpha P^{21}. \end{cases} \qquad (24)$$

Умножая первое уравнение на $k^1$ и используя (24), получим

$$A^{11}b^1 + A^{12}b^2 = i\alpha b^1.$$

Так как $A(0), \vec{b}$ действительны, то сразу получаем $b^1 = 0$. Поэтому $P^{11} = 0, A^{22} = i\alpha$. Это приводит к противоречию, так как матрица $A(0)$ вещественна. Следовательно, $k^2 \neq 0$.

Аналогично доказывается, что $k^1 = 0, k^2 \neq 0$ также приводит к противоречию.

В итоге доказано, что определитель матрицы $\left(\tilde{B}\vec{b}, A(0)\vec{b}\right)$ не равен нулю. Следовательно, $c(u), d(u)$ существуют при всех $u \in [0, u_0)$.

Таким образом мы доказали, что все требуемые условия выполняются. Из изложенного выше материала следует, что если $u$ мало, то и $\varepsilon$ мало.

Следовательно, период $T(u) \approx T_0 = \dfrac{2\pi}{\alpha}$. Теперь теорема доказана полностью.

**Замечание.** Изложенное доказательство принадлежит Фридрихсу [36]. В несколько измененном виде оно изложено Марри [22], которому в этом разделе мы и следуем. Доказательство носит конструктивный характер, вычисления ведутся в явном виде. Поэтому применения носят просто подстановочный характер, хотя поначалу и это может быть не очень просто.

**Пример 1** ([22]).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\begin{pmatrix} x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x^1 + \varepsilon x^2 - (x^1)^2 x^2 \end{pmatrix} = \Phi(x,\varepsilon)$.

Проверим условия применимости теоремы Хопфа. Особая точка находится очевидным образом $x = \varphi(\varepsilon) = 0$. После линеаризации около особой точки получим $A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$, так что $A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Условия для матрицы выполняются, так как $SpA(0) = 0, \det A(0) = 1 > 0.$ Характеристическое уравнение принимает вид $\det(A(0) - \lambda I) = 0$. Поэтому $\lambda = \pm i$. Следовательно, $\alpha = 1$. Период при $\varepsilon = 0$ равен $T_0 = 2\pi$.

Выпишем матрицу $A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(0) + \varepsilon B(0)$.

Очевидно, что $SpB(0) = 1 \neq 0$.

Проходя по этапам доказательства приведеной теоремы, можно показать, что существование предельных циклов вблизи точки бифуркации

$\varepsilon = 0$, требует чтобы $\varepsilon > 0$. Результат этот хорошо известен, так как рассмотренное нами уравнение является одним из модельных уравнений теории динамических систем и носит имя Ван дер Поля. Линеаризуя систему уравнений, можно получить, что особая точка в этом случае представляет собой неустойчивый фокус для $0 < \varepsilon < 2$. Поэтому при малых $\varepsilon$ предельный цикл устойчив.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Ижевск: РХД. 2000. - 368с.
2. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978, - 400 с.
3. *Лагно В.И., Спичак С.В., Стогний В.И.* Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа. - М., Институт компьютерных исследований, 2004. -394 с.
4. *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа. - М.: Знание, 1989 - 64с.
5. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. - М.: Наука,1983. - 289 с.
6. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. - М.: Наука, 1988. - 328 с.
7. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. - М.: Физматлит, 2001, 320 с.
8. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. - 640 с.
9. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. - М.: Мир, 1987. - 304 с.
10. *Трофимов В.В.* Введение в теорию многообразий с симметриями.- М.: Изд-во МГУ, 1989. - 359 с.
11. *Владимиров В.С. и др.* Сборник задач по уравнениям математической физики. - М.: Физматлит, 2003. - 288 с.
12. *Данилов Ю.А.* Теоретико-групповые свойства математических моделей биологии//Математическая биология развития. - М.: Наука, 1982. - с. 5-15.

13. *Данилов Ю.А.* Групповая классификация уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова. - М.: Препринт ИАЭ-3305/1, 1980а. - 30 с.
14. *Данилов Ю.А.* Групповая анализ системы Тьюринга и ее аналогов. - М.: Препринт ИАЭ-3287/1, 1980б. - 36 с.
15. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: РХД, 2000. - 176 с.
16. *Ибрагимов Н.Х.* Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Знание, 1989. - 47 с.
17. *Чеботарев Н.Г.*Теория групп Ли. - М.: Гостехиздат, 1949. – 400 с.
18. *Stephani H., Maccallum M.* Differential equations. - N.Y. Cambridge University Press. 1989. - 269 p.
19. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. - М.: ИЛ, 1948. - 368 с.
20. *Масленникова В.Н.* Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: РУДН, 1997. - 448 с.
21. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М. Мир.:1977. – 638 с.
22. *Мари Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. - М., Мир, 1983. - 376 с.
23. *Murray J.D.* Mathematical biology: An Introduction. - N.Y. Springer, 2000. - 576 p.
24. *Benney D.J.* Some properties of long waves//Stud. Appl. Math. – 1973. - V.52. - p.45-69.
25. *Miura R.M.* Conservation laws for the fully nonlinear long-wave equations// Stud. Appl. Math. – 1973. - V.52. - p. 45-46.
26. *Манин Ю.И.* Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений. - М.: ВИНИТИ, 1978, т. 11/ - с.3-152.

27. *Силин В.П.* Введение в кинетическую теорию газов. - М.: ФИАН, 1998. - 340 с.

28. *Таранов В.Б.* О симметрии одномерных высокочастотных движений бесстолкновительной плазмы.//ЖТФ. - 1975. - т. 46. - с. 1271-1277.

29. *Краснослободцев А.В.* Газодинамические и кинетические аналогии в теории вертикально неоднородной мелкой воды.// Нелинейные волновые процессы. - Труды ИОФАН. - М.: Наука. - Т.18. 1989). - с. 33-71.

30. *Бунимович А.И., Краснослободцев А.В.* О групповых свойствах и точных решениях кинетических уравнений//XIII Междунар. симп. по динамике разреженных газов: Тез. докл. - Новосибирск , 1982. - с. 9-11.

31. *Бунимович А.И., Краснослободцев А.В.* Группы симметрий уравнений кинетической теории газов//Взаимодействие волн в деформируемых средах. - М.: Изд-во МГУ, 1984. - с. 12-19.

32. *Бунимович А.И., Краснослободцев А.В.* Инвариантно-групповые решения кинетических уравнений//Вестник МГУ, Сер. 1: Матем атика, механика. – 1983. - №4. - с. 69-72.

33. *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. - М.: Мир, 1973. - 246 с.

34. *Воляк К.И., Краснослободцев А.В.* О симметрии и нестационарных решениях уравнения Бенджамина - Оно// Изв. АН СССР, Физ. атм. и океана. – 1986. - Т.22. - №2. - с. 204-206.

35. *Фущич В.И., Никитин А.Г.* Симметрия уравнений квантовой механики. - М.: Наука, 1990. - 404 с.

36. *Fridrichs K.* Advanced ordinary differential equations. - Nelson, 1965. - 214 p.

37. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. - М.: Физматлит, 2005. - 256с.

38. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. - М.: Физматлит, 2002. - 432с.

39. *Скотт Э.* Нелинейная наука. Рождение и развитие когерентных структур. - М.: Физматлит, 2007. - 560 с.

40. *Cantwell B.J.* Introduction to symmetry analysis. - Cambridge university press, 2002. - 612p.

41. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. – Новосибирск: изд. СО АН СССР, 1962. – 160 с.

42. *Галкин В.А.* Уравнение Смолуховского. - М., Физматлит, 2001. - 240 с.

43. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. - М., Институт компьютерных исследований, 2002. – 560 с.

44. *Павловский Ю.Н.* Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя//Журнал выч. матем. и матем. физики. - т. 1. - №2, 1975. - с. 149-158.

45. *Ланкерович М.Я.* Групповые свойства уравнений трехмерного пограничного слоя на произвольной поверхности.//Динамика сплошной среды. Вып. 7. – Новосибирск, 1971. – с. 12-24.

46. *Ибрагимов. Н.Х.* Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1967. - 140 с.

47. *Бучнев А.А.* Группа Ли, допускаемая уравнениями движения идеальной жидкости.//Динамика сплошной среды. Вып. 7. – Новосибирск, 1971. - с. 212-214.

48. *Овсянников Л.В.* Аналитические группы. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1972. - 140 с.
49. *Овсянников Л.В.* О бесконечных группах отображений, задаваемых дифференциальными уравнениями//ДАН СССР/ - Т. 148. №1,1963. - с. 36-39 .
50. *Филиппов Ю.Г.* Применение инвариантно-группового метода к решению задачи определения течений неоднородного океана// Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана. – 1968.т. 4, № 6. - с. 579-585.
51. *Bluman G,W., Cole J.D.* The general similarity of the heat equation// J. Math. And Mech. – 1969. - v.18. - №11. - p. 1025-1042 .
52. *Лапко Б.В.* Построение оптимальных систем подгрупп группы Ли преобразований, допускаемых уравнением газовой динамики//Динамика сплошной среды. Вып. 15. 1973. – Новосибирск. - с. 122-129.
53. *Овсянников Л.В.* Частичная инвариантность// ДАН СССР. - т. 186. - №1, 1969. - с.22-25.
54. *Меньщиков В.М.* К теории частично-инвариантных решений дифференциальных уравнений.//Динамика сплошной среды/ - вып. 11. - 1972, Новосибирск. - с. 82-93 .
55. *Яненко Н.Н.* Бегущие волны системы квазилинейных уравнений// ДАН СССР. – 1956. -Т. 109. №1. - с. 44-47.

## Приложение 1. Элементарные сведения из общей топологии

**Определение 1.** *Пусть* $M$ *некоторое множество, в котором выделена система подмножеств* $G_\alpha$, *называемых* *открытыми,* *которые обладают следующими свойствами:*

*1). Объединение любого числа множеств* $G_\alpha$ *снова принадлежит к этой системе, т.е.* $\bigcup_\alpha G_\alpha = G_\beta$ *для некоторого* $\beta$.

*2). Пересечение конечного числа множеств принадлежит этой системе, т.е.* $\bigcap_{i=1}^{i=N} G_i = G_j$ *для некоторого* $j$.

*3).* $\varnothing, M$ *принадлежат этой системе множеств.*

***Определение 2.*** *Если обозначить систему открытых множеств* $G_i$ *через* $T$, *то пара* $(M, T)$ *называется* *топологическим* *пространством.*

**Определение 3.** *Окрестностью* *точки* $x \in M$ *называется произвольное множество, содержащее открытое множество, которому принадлежит точка* $x$.

**Определение 4.** *Множество* $F$ *называется* *замкнутым,* *если* $G = M \setminus F$ *является открытым.*

**Определение 5.** *Пусть* $Y \subset M$. *На множестве* $Y$ *определена* *индуцированная* *топология: множество* $V \subset Y$ *называется открытым, если оно является пересечением множества* $Y$ *и некоторого открытого множества* $U$ *из* $M$. *Множество* $Y$ *называется подпространством топологического пространства* $M$.

**Определение 6.** *Замыканием* *множества* $X \subset M$ *называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих в себе* $X$.

**Определение 7.** *Отображение* $f: M \to N$, *где* $M, N$ *топологические пространства, называется* *<u>непрерывным</u>, если* $f^{-1}(U)$ *открыто в* $M$ *для всякого открытого множества* $U$ *в* $M$.

**Определение 8.** *Пусть* $f: M \to N$ *есть биекция топологических пространств. Тогда* $f: M \to N$ *называется* *<u>гомеоморфизмом</u>* *топологических пространств, если отображения* $f: M \to N$ *и* $f^{-1}: N \to M$ *непрерывны.*

**Определение 8.** *Набор открытых множеств* $\{U_\alpha\}$*:* $U_\alpha \subset M$, *такой, что* $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ *называется* *<u>покрытием</u>* *пространства* $M$.

**Определение 10.** *Пространство* $M$ *называется* *<u>хаусдорфовым</u>* *топологическим пространством, если для любых точек* $x, y \in M$ *существуют такие окрестности* $U$ *и* $V$, *что* $x \in U, y \in V$ *и* $U \bigcap V = \varnothing$. Иногда хаусдорфово пространство называют <u>отделимым</u> пространством.

**Определение 9.** *Топологическое пространство* $M$ *называется* *<u>компактным</u> топологическим пространством (или просто <u>компактом</u>), если из любого покрытия* $\{U_\alpha\}$ *пространства* $M$ *можно выделить открытое конечное покрытие* $\{U_{\alpha_i}\}$*:* $U_{\alpha_i} \subset M$, $\bigcup_{i=1}^{i=N} U_{\alpha_i} = M$.

*<u>Подпространство</u>* $Y$ *<u>называется компактным</u>, если оно компактно как топологическое пространство с индуцированной топологией.*

**Теорема 1.** *1). Пусть* $M$ *компакт,* $f: M \to N$ *есть непрерывное сюръективное отображение топологических пространств, тогда* $N$ *является компактом. 2). Если* $F$ *замкнутое подмножество в компактном пространстве* $M$, *то* $F$ *компактно как подпространство* *топологического пространства $M$. 3). Компактное подмножество $F$ хаусдорфова пространства замкнуто.*

Доказательство: 1). Рассмотрим покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $N$. Из непрерывности $f \Rightarrow$ $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ является покрытием пространства $M$. Из компактности $M \Rightarrow$ существует конечное покрытие $\{f^{-1}(U_{\alpha_i})\}, i = 1,....,n.$ Следовательно, $\{U_{\alpha_i}\}, i = 1,...,n$ образуют покрытие пространства $M$, $\Rightarrow M$ компакт.

2). Если $\{V_\alpha\}$ покрытие подпространства $F$, то $V_\alpha = F \bigcap U_\alpha$, где $U_\alpha$ открытое множество в $M$. Так как $F$ замкнуто, то $U = M \setminus F$ открыто. Тогда множества $U_\alpha$ вместе с $U$ образуют покрытие пространства $M$. Из компактности $M$ следует, что $\exists$ конечное покрытие $M$: $U_1,...,U_n,U.$ По построению $V_1,...,V_n$ образует покрытие подпространства $F$. Следовательно, $F$ компактно.

3). Пусть $F \neq M, \varnothing$, так как в противном случае доказательство очевидно. Если $x \in M \setminus F$, то для $\forall\, y \in F \,\exists$ непересекающиеся открытые множества $U_y, V_y$, так что $x \in U_y, y \in V_y.$ Тогда система множеств $\{V_y\}_{y \in F}$ образует покрытие для $F.$ Из компактности $F \Rightarrow \exists$ конечное покрытие $V_1,...,V_n$ для множества $F.$ Тогда множество $U = U_1 \bigcap U_2 \bigcap ... \bigcap U_n$ открыто , не пересекается ни с одним $V_i$ и $x \in U.$ Поэтому $U \subset M \setminus F.$ Следовательно $\forall x \in M \setminus F$ содержится в открытом множестве, лежащем в $M \setminus F$. Следовательно, $M \setminus F$ открыто $\Rightarrow F$ замкнуто.

**Теорема 2** *(<u>Теорема о гомеоморфизме</u>). Пусть $M$ компакт, $f : M \to N$ - непрерывная биекция, $N$ - хаусдорфово* *топологическое пространство, то* $f: M \to N$ *является гомеоморфизмом.*

Доказательство: так как $f$ биекция $\Rightarrow \exists$ обратное отображение $f^{-1}$, которое непрерывно, тогда и только тогда, когда $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ замкнуто для всякого множества $F$, замкнутого в $M$. Если $F$ замкнуто в $M \Rightarrow F$ компактное подпространство. Следовательно, $f(F)$ компактно как подпространство в $N$, $\Rightarrow f(F)$ замкнуто в $N$. Таким образом, $f^{-1}$ непрерывно.

**Пример.** <u>*Топология группы*</u> $SO(3, R)$.

Группа $SO(3, R)$ гомеоморфна проективному пространству $RP^3$. Явный гомеоморфизм $f: RP^3 \to SO(3, R)$ задается следующей формулой:

$$f(a_0 : a_1 : a_2 : a_3) = \frac{1}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 & 2(a_1a_0 + a_2a_3) & 2(a_2a_0 - a_1a_3) \\ 2(a_1a_0 + a_2a_3) & -a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 & 2(a_2a_1 - a_0a_3) \\ 2(a_2a_0 - a_1a_3) & 2(a_2a_1 - a_0a_3) & -a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ произвольная точка проективного пространства $RP^3$.

## Приложение 2. Основные сведения из общей теории групп

**Определение 1**. *Множество* $G$ *называется* <u>*группой*</u>*, если в нем задана бинарная операция* $G \times G \to G$ *,записываемая как* $(x, y) \to xy$ *и называемая умножением*.

Операция обязана обладать следующими свойствами:

1). *Ассоциативность*. $x(yz) = (xy)z, \forall x, y, z \in G.$

2). *Наличие единицы*. Существует элемент $e \in G$, такой, что $ex = xe = x, \forall x \in G.$

3). *Наличие обратного элемента*. Для $\forall x \in G \exists y \in G$, что $xy = yx = e.$

**Следствия**. Единица определена однозначно, так как если $\bar{e}$ другая единица, то по определению $e = e\bar{e} = \bar{e}.$ Обратный элемент определен однозначно, ибо если $\bar{y}$ другой обратный элемент, то по определению $x\bar{y} = \bar{y}x = e \Rightarrow y = ye = y(x\bar{y}) = (yx)\bar{y} = e\bar{y} = \bar{y}.$

**Определение 2**. *Группа называется <u>коммутативной группой</u>, если для всяких* $x, y \in G \Rightarrow xy = yx.$ В этом случае принято записывать бинарную операцию как сложение $xy \leftrightarrow x + y.$

**Пример.** Пусть $M$ произвольное множество. *<u>Преобразованием множества</u>* $M$ называется взаимно однозначное отображение множества $M$ на себя (синоним – биекция). Тогда $T(M)$ - множество всех преобразований множества $M$. Групповая операция в $T(M)$ есть композиция отображений: $f, g \in T(M) \Rightarrow (f \circ g)(x) = (f(g(x))) \forall x \in M$. Единицей в множестве $T(M)$ является тождественное преобразование $I(x) = x \forall x \in M$, при этом $f \circ I = I \circ f = f, \forall f \in T(M)$. Обратным элементом $f^{-1} \in T(M)$ называется отображение, обратное к преобразованию $f \in T(M)$, так что $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in M.$

**Определение 3**. *Отображение* $f$ *группы* $G$ *в группу* $\overline{G}$ *называется <u>гомоморфизмом</u> группы* $G$ *в группу* $\overline{G}$, *если* $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) \forall g_1, g_2 \in G.$

**Определение 4**. *Прообраз* $f^{-1}\left(\bar{e}\right) \subset G$ *называется* <u>*ядром*</u> *гомоморфизма* $f$ *и обозначается* $Kerf$. Здесь $\bar{e}$ - единица в $\bar{G}$.

**Определение 5**. *Множество* $H \subset G$, *где* $G$ *группа, называется* <u>*подгруппой*</u>, *если из условий* $g_1, g_2 \in H \Rightarrow g_1 g_2^{-1} \in H$.

**Следствие**. $\forall g \in H \Rightarrow gg^{-1} = e \in H \Rightarrow g^{-1} \in H \forall g \in H$.

**Определение 6**. *Подгруппа* $H$ *называется* <u>*нормальным*</u> *делителем группы* $G$, *если для всякого* $g \in G$ *верно* $gH = Hg$, *т.е.* $\forall g \in G, \forall h_1 \in H \Rightarrow \exists h_2 \in H$, *что* $gh_1 = h_2 g$.

**Определение 7.** *Всякое множество вида* $g_0 H$ *называется* <u>*левым смежным классом*</u> *(*<u>*правым смежным классом*</u> *называется множество вида* $Hg_0$*).* Здесь предполагается, что рассматривается объединение всех элементов вида $g_0 h$, когда $h$ пробегает всю подгруппу $H$.

**Следствие.** Любые два смежных класса либо совпадают, либо не пересекаются (доказать самостоятельно).

**Следствие**. Левые смежные классы совпадают с правыми, если $H$ - нормальный делитель (следует из определения).

**Определение.** *Множество смежных классов по* <u>*нормальной*</u> *подгруппе* $H$ *называется фактор-пространством и обозначается* $G/H$.

**Теорема 1**. *Если - нормальный делитель группы* $G$*, то* $G/H$ *является группой.*

**Доказательство**. Произведение классов смежности определяется так : $(Hg_1)(Hg_2) = Hg_1 g_2$. Определение не зависит от выбора представителей в смежных классах. Действительно, $\overline{g_1} \in Hg_1, \overline{g_2} \in Hg_2 \Rightarrow \overline{g_1} = h_1 g_1, \overline{g_2} = h_2 g_2$. Так как $g_1 h_2 = \overline{h_2} g_1$ при некотором

$\overline{h_2} \in H \Rightarrow \overline{g_1}\,\overline{g_2} = (h_1 g_1)(h_2 g_2) = h_1(g_1 h_2)g_2 = h_1 \overline{h_2} g_1 g_2 \Rightarrow$

$H\overline{g_1}\,\overline{g_2} = Hh_1\overline{h_2}g_1g_2 = Hg_1g_{2.}$. Аналогично проверяются все аксиомы группы, при этом единицей будет класс смежности, совпадающий с подгруппой $H$.

**Теорема 2.** *Если* $f$ *- гомоморфизм групп* $G \to \overline{G}$, *то выполнены следующие условия:*

*1)* $f(e) = \overline{e}$;

*2)* $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$;

*3)* $f$ *отображает каждую подгруппу* $H$ *группы* $G$ *на подгруппу* $\overline{H}$ *группы* $\overline{G}$;

*4)* $f$ *отображает каждый нормальный делитель* $H$ *группы* $G$ *на нормальный делитель* $\overline{H}$ *группы* $\overline{G}$;

*5)* $Kerf$ *- нормальный делитель группы* $G$.

Доказательство: 1). Пусть $\hat{e} = f(e)$; $\overline{e}$- единица в $\overline{G} \Rightarrow \hat{e}\hat{e} = f(e)f(e) = f(ee) = f(e) = \hat{e} = \hat{e}\overline{e}.$ Умножим слева все на $\hat{e}^{-1} \Rightarrow \hat{e} = \overline{e}.$

2). $f(g)f(g^{-1}) = f(g^{-1})f(g) = f(gg^{-1}) = f(e) = \overline{e}.$

3). $f(h_1)f(h_2)^{-1} = f(h_1h_2^{-1}) \in f(H).$

4). Пусть $H$ - нормальный делитель, $\overline{g} \in f(G) \Rightarrow \overline{g} = f(g)$ для

$g \in G \Rightarrow \overline{g}f(H) = f(g)f(H) = f(gH) = f(Hg);$

$\Rightarrow f(H)f(g) = f(H)\overline{g}.$

5). Пусть $Kerf = H \Rightarrow f(H) = \overline{e};$ при этом $h_1, h_2 \in H \Rightarrow f(h_1) = \overline{e}, f(h_2) = \overline{e} \Rightarrow f(h_1 h_2^{-1}) = f(h_1) f(h_2)^{-1} = \overline{e}.$ Так как $h_1 h_2^{-1} \in H \Rightarrow H$ подгруппа $G$. Для всякого $g \in G \Rightarrow f(gHg^{-1}) = f(g) f(H) f(g^{-1}) = f(g)\overline{e}(f(g))^{-1} = \overline{e}.$ Поэтому $gHg^{-1} \subset H \Rightarrow gH \subset Hg.$ Заменяя $g^{-1}$ на $g$ и умножая обе части полученного соотношения слева и справа на $g$, получим

$Hg \subset gH$. Следовательно, $Hg = gH$, что и требовалось доказать.

**Приложение 3. Темы рефератов**

1. Групповая классификация линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.
2. Групповые свойства уравнений пограничного слоя. Случай заданного давления. Групповая классификация.
3. Стационарный пограничный слой. Групповая классификация.
4. Уравнения газовой динамики. Решение определяющих уравнений. Групповая классификация.
5. Локальные группы преобразований банахова пространства. Теоремы Ли в бесконечномерном случае.
6. Классификация инвариантных решений. Классификация по рангу. Оптимальные системы решений.
7. Частично инвариантные решения. Необходимые условия существования. Типы частично инвариантных решений.
8. Частично инвариантные решения. Проблема редукции. Теорема редукции. Примеры.
9. Частично инвариантные решения. Кратные волны. Решения типа бегущих волн.

10. Частично инвариантные решения. Кратные волны. Простые волны. Двойные волны. Пример волнового уравнения. Уравнения газовой динамики.
11. Дифференциальные инварианты. Базис инвариантов. Бесконечные группы Ли. Инварианты бесконечных групп.
12. Дифференциальные инварианты. Автоморфные системы. Классификация автоморфных систем.
13. Дифференциальные инварианты. Групповое расслоение. Дифференциально-инвариантное решение.
14. Касательные преобразования. Специальное расширение пространства. Продолжение касательного преобразования.
15. Касательные преобразования высших порядков. Группы Ли - Бэклунда.
16. Инвариантные краевые задачи. Инвариантные решения задачи Коши. Инвариантность сильного разрыва.
17. Инвариантные краевые задачи для уравнений Навье - Стокса. Инвариантные задачи со свободной границей.
18. Законы сохранения. Инвариантность функционалов относительно однопараметрических семейств преобразований.
19. Теорема Нетер. Законы сохранения в теореме Нетер. Обращение теоремы Нетер.
20. Теорема Нетер для бесконечных групп Ли.
21. Вариационные симметрии. Тривиальные законы сохранения. Характеристики законов сохранения.
22. Дивергентные симметрии для интегральных функционалов. Исследование дивергентных симметрий волнового уравнения.

**Приложение 4. Задачи по курсу группового анализа**

Здесь предлагается несколько задач по курсу. Первые задачи служат для самопроверки. Решив, их читатель может определить, насколько он владеет материалом. Последние задачи могут служить основой курсовых и дипломных работ.

1. Восстановить группу по инфинитезимальному оператору

$$v = kx\partial_x + z\partial_y - y\partial_z.$$

2. Используя данную симметрию уравнения, написать дифференциальное уравнение для инвариантного решения

$$u_t = u_{xx} + uu_x, v = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u.$$

3. Восстановить группу по инфинитезимальному оператору

$$v = x\partial_x - \frac{1}{2}y^2\partial_z.$$

4. Используя данную симметрию уравнения, написать дифференциальное уравнение для инвариантного решения

$$u_t + uu_x = ((\exp u)u_x)_x, v = t\partial_t + (x+t)\partial_x + \partial_u.$$

5. Вычислить симметрии уравнения

$$u_t + uu_x = ((\exp u)u_x)_x.$$

6. Вычислить симметрии уравнения

$$u_t + uu_x = (u^m u_x)_x.$$

7. Для линейного дифференциального уравнения первого порядка $Lu = \sum_{i=1}^{n} a^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0$ оператор $V = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \partial_{x^i}$ допускается уравнением в смысле классического определения Ли тогда и только тогда, когда выполнено условие $\left[L,V\right] = \lambda(x)L$, где $\lambda(x)$ - некоторая гладкая функция.

8. Вычислить алгебру симметрий волнового уравнения с осевой симметрией $u_{tt} - u_{xx} + \frac{u}{x} = 0.$

9. Вычислить алгебру симметрии и построить инвариантные решения для следующей интегродифференциальной системы уравнений

А). Одномерный случай. $\begin{cases} f_t + vf_x = -p_x f_v; \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{xx}(v)^2 dv = -p_{xx}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f dv = 1. \end{cases}$

Б). Трехмерный случай.

$$\begin{cases} f_t + \vec{v} \cdot grad_x f = -grad_x p \ \cdot grad_v f; \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\vec{v} \cdot grad_x)^2 f d\vec{v} = -(grad_x)^2 p, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f d\vec{v} = 1. \end{cases}$$

Здесь $p-$давление, $f(t,x,v)-$искомая функция распределения. Эти уравнения моделируют несжимаемую гидродинамику. Они «придуманы» Б.Б. Кадомцевым для моделирования турбулентных процессов в несжимаемой жидкости.

10. Уравнения продольных одномерных высокочастотных движений бесстолкновительной плазмы. ([28])

Вычислить алгебру симметрии для следующей интегро-дифференциальной системы:

$$\begin{cases} f_t + vf_x - Ef_v = 0; \\ E_t = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} vf dv, E_x = 1 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f dv, E_v = 0. \end{cases}$$

Здесь неизвестные функции $E(t,x), f(t,x,v)$. $t \geq 0, x \in (-\infty,+\infty), v \in (-\infty,+\infty)$.

11. Провести групповую классификацию интегродифференциального уравнения

$$f_t + vf_x + \Phi(A^0, A^2) f_v = 0; A^n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(v)^n dv.$$

Здесь $\Phi$ - гладкая произвольная функция. Исследовать зависимость алгебры симметрии от вида функции $\Phi$.

# ОПИСАНИЕ КУРСА И ПРОГРАММА

***<u>Цели и задачи курса</u>***

- представленный в курсе материал относится к области дифференциальных уравнений в частных производных и интегро-дифференциальных уравнений (математика)

- курс лекций посвящен изложению основных методов выявления и анализа теоретико-групповых и бифуркационных структур, связанных с дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями и системами, возникающих в биофизике в связи с моделированием разнообразных задач переноса. Классические симметрии позволяют проводить моделирование биофизических процессов на основе наиболее широкой группы симметрии, возможной в системе, находить точные решения систем уравнений. Изучены типичные бифуркационные задачи некоторых уравнений биофизики, которые можно свести к одномерным и двумерным. На примере основных конечномерных динамических систем, возникающих в биофизике, изучена бифуркация рождения цикла ( Хопфа-Коула)

- курс предназначен для магистерской программы обучения

- рекомендуется в качестве спецкурса по выбору для студентов физико-математических факультетов вузов и университетов, обучающихся по направлению *«Математика»*

- курс носит теоретический характер

- курс рассчитан на 144 часа учебной нагрузки (один семестр, 4 кредита), из которых 36 часов отводится на лекции, 36 часов – на практические занятия, 72 часов – на самостоятельную работу студентов

***Инновационность курса***

- изложенный в курсе материал опирается на современные исследования и содержит ряд новых результатов, в том числе и результаты автора, которые до настоящего момента не были отражены в учебно-методической литературе. По методике преподавания лекции и практические занятия по данному курсу будут проводиться в мультимедийном классе, что позволит сочетать изложение новых математических результатов и применение современных вычислительных средств и средств визуализации для лучшего усвоения знаний студентами.

- курс готовится с учетом реализации в рамках кредитно-модульной системы

***Структура курса***

**Тема 1. Локальные однопараметрические группы преобразований**. (лекции-2 часа, практические занятия-2 часа, самостоятельная работа-4 часа.).

Основные определения и результаты общей теории групп. Краткое изложение основных определений общей топологии, теорема о гомеоморфизме. Группы преобразований произвольного множества. Представления групп группами преобразований. Точные, локально точные и тривиальные представления. Действие группы на множестве. Однопараметрические группы преобразований евклидового пространства и их действия. Однопараметрические подгруппы группы линейных гомеоморфизмов евклидова пространства. Основные примеры: растяжения, вращения. Локальные однопараметрические группы. Подобие локальных групп. Примеры.

**Тема 2. Инфинитезимальные операторы** ( лекции- 2 часа, практические занятия- 2 часа, самостоятельная работа- 4 часа).

Инфинитезимальный оператор однопараметрической группы. Уравнения Ли. Обобщение однопараметрической группы. Канонический параметр. Касательное векторное поле однопараметрической группы. Связь касательных векторных полей подобных групп. Примеры.

**Тема3. Инвариантные отображения и многообразия** (лекции- 2 часа, практические занятия- 2 часа, самостоятельная работа- 4 часа).

Инвариант локальной однопараметрической группы. Критерий инвариантности отображения. Функционально независимые инварианты. Базисные инварианты. Примеры. Сведение однопараметрической группы невырожденным преобразованием к группе сдвигов. Инвариантные поверхности (многообразия). Теорема об инвариантности многообразия. Формулировка теоремы через инвариантные функции.

**Тема 4**. **Продолжение преобразований** (лекции- 2 часа, практические занятия- 2 часа, самостоятельная работа- 4 часа).

Продолжение точечных преобразований. Вывод формул продолжения первого и второго порядка. Вывод формул продолжения через разложение рядов. Явные формулы продолжения для случая двух независимых переменных и одной зависимой.

**Тема 5. Группы, допускаемые системой дифференциальных уравнений. Примеры для уравнений из биофизики** (лекции- 4 часа, практические занятия- 4 часа, самостоятельная работа- 8 часов).

Определение инвариантности системы дифференциальных уравнений относительно однопараметрической группы. Построение системы определяющих уравнений. Основная группа, допускаемая системой дифференциальных уравнений. Решение системы определяющих уравнений для уравнения теплопроводности. Бесконечномерное векторное пространство касательных векторных полей, допускаемых линейной системой дифференциальных уравнений. Решение системы определяющих уравнений для уравнений Бюргерса и Фишера, системы уравнений Белоусова-Жаботинского, уравнения нелинейной диффузии.

**Тема 6. Локальные топологические группы. Алгебры Ли. Основные определения и конструкции** ( лекции- 2 часа, практические занятия- 2 часа, самостоятельные работа- 4 часа).

Локальные топологические группы. Подгруппы локальных групп. Локальный изоморфизм локальных групп. Локальная группа Ли. Простые и полупростые группы. Алгебра Ли (определение). Подалгебра, идеал, центр алгебры Ли. Структурные константы алгебры Ли. Примеры. Комплексное расширение алгебры Ли. Примеры комплексных алгебр. Прямая сумма алгебр Ли. Гомоморфизмы и изоморфизмы алгебр Ли. Конструкция факторалгебры Ли.

**Тема 7. Метод построения инвариантных многообразий. Максимальная алгебра инвариантности системы дифференциальных уравнений** ( лекции- 2 часа, практические занятия- 2 часа, самостоятельная работа- 4 часа).

Ранг отображения. Регулярно заданные многообразия. Обобщение инвариантности на многопараметрическую группу. Критерий инвариантности отображения. Ранг группы в точке и общий ранг группы. Целочисленные характеристики группы преобразований. Инвариантные многообразия многопараметрических групп преобразований. Критерий инвариантности многообразия. Метод построения инвариантных многообразий. Особые и неособые многообразия. Теорема об инвариантности неособого многообразия. Ранг неособого инвариантного многообразия. Пространство векторных полей на открытом множестве. Коммутатор векторных полей. Коммутатор инфинитезимальных операторов. Структура алгебры Ли в пространстве векторных полей. Основная теорема о коммутаторе векторных полей, допускаемых системой дифференциальных уравнений. Максимальная алгебра инвариантности системы дифференциальных уравнений. Таблицы коммутаторов. Действие группы преобразований на множестве решений дифференциальных уравнений.

**Тема 8. Инвариантные решения. Точные решения уравнений Бюргерса, Фишера, системы Белоусова-Жаботинского** ( лекции- 2 часа, практические занятия- 2 часа, самостоятельная работа- 4 часа).

Инвариантное решение для многопараметрической группы. Необходимые условия существования инвариантных решений. Теорема-алгоритм построения инвариантных решений системы дифференциальных уравнений. Построение факторсистемы.

Построение инвариантных решений для уравнения Бюргерса, Фишера, уравнения нелинейной диффузии и системы Белоусова-Жаботинского относительно однопараметрических групп преобразований, допускаемых соответствующими уравнениями и системой. Сведение задач к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

**Тема 9**. **Симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений. Симметрии систем обыкновенных дифференциальных уравнений** (лекции- 4 часа, практические занятия- 2 часа, самостоятельная работа- 6 часов).

Интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Интегрирование в квадратурах уравнения, допускающего однопараметрическую группу. Построение интегрирующего множителя для уравнения, допускающего однопараметрическую группу. Понижение порядка уравнения высокого порядка, если оно допускает группу преобразований. Дифференциальные инварианты. Построение общего вида дифференциальных уравнений, допускающих данную однопараметрическую группу.

Уравнение Лиувилля для функции, преобразованной однопараметрической группой. Ряд Ли. Собственные функции инфинитезимального оператора. Преобразование системы обыкновенных дифференциальных уравнений однопараметрической группой преобразований. Оператор преобразованной системы. Формула Хаусдорфа. Симметрия динамической системы. Понижение порядка системы с помощью симметрии. Случай динамической системы на плоскости. Расширенное определение симметрии динамической системы. Понижение порядка систем уравнений. Принцип «суперпозиции» в нелинейных системах.

**Тема 10. Биологические осцилляторы и инвариантные решения модельных систем типа бегущих волн** ( лекции- 2 часа, практические занятия-4 часа, самостоятельная работа- 6 часов).

Кинематические волны – пространственные структуры без диффузии. Бегущая волна для уравнения Фишера. Асимптотическая форма и устойчивость волновых решений уравнения Фишера. Бегущие волны для реакции Белоусова-Жаботинского, сравнение с экспериментом. Бегущие волны для уравнения Фишера с нелинейным конвективным членом, анализ их устойчивости.

**Тема 11. Симметрии интегро-дифференциальных уравнений** (лекции- 4 часа, практические занятия- 2 часа, самостоятельная работа- 6 часов). Представление некоторых интегро-дифференциальных уравнений, возникающих при математическом моделировании процессов переноса в виде бесконечных систем дифференциальных уравнений с частными производными. Определение алгебры инвариантности интегро-дифференциального уравнения как алгебры инвариантности бесконечной системы дифференциальных уравнений, полученной в результате предельного перехода по $n \to \infty$, где $n$ число уравнений в усеченной системе. Зависимость алгебры инвариантности от способа представления интегро-дифференциального уравнения в виде бесконечной системы дифференциальных уравнений. Групповой анализ системы Бенни, возникающей при описании нелинейной динамики гравитационных волн в завихренной жидкости. Групповая классификация интегро- дифференциального уравнения власовского типа с произвольной нелинейностью. Вычисление алгебры симметрии для уравнений одномерных продольных высокочастотных движений бесстолкновительной плазмы. Групповая классификация интегродифференциального кинетического уравнения Бхатнагара-Гросса-Крука (БГК-уравнение).

**Тема 12. Бифуркации стационарных решений и устойчивость бифуркационных решений в одномерном и двумерном случаях** ( лекции-4 часа, практические занятия- 4 часа, самостоятельная работа- 8 часов).

Одномерный случай. Классификация точек кривых, изображающих решения. Двойные точки, точки возврата и сопряженные точки. Двойная точка бифуркации и теорема о неявной функции. Бифуркация в точке возврата. Тройная точка бифуркации. Теорема о достаточных условиях устойчивости. Теорема о факторизации в одномерном случае. Смена устойчивости в упомянутых видах точек.

Двумерный случай. Вид стационарных бифуркационных решений. Классификация трех типов бифуркаций. Исследование устойчивости всех типов бифуркационных решений.

Применение полученных результатов к исследованию автомодельных решений и бегущих волн для уравнения Фишера, Белоусова-Жаботинского и нелинейного диффузионного уравнения.

**Тема 13. Теорема Хопфа о бифуркации и предельные циклы** (лекции-4 часа, практические занятия- 6 часов, самостоятельная работа- 10 часов).

Теорема о центральном многообразии. Теорема о центральном многообразии для потоков. Отображение Пуанкаре. Теорема Хопфа на плоскости и в n-мерном пространстве. Математическая модель роста опухоли, её бифуркационный анализ.

***<u>Система контроля знаний</u>***

включает

- промежуточный контроль в форме письменной контрольной работы

- написание реферата по выбранной теме

- итоговый контроль в форме письменной итоговой работы

На письменную контрольную работу отводится одно практическое занятие на 8-10 неделе семестра. Целью работы является проверка усвоения первой части курса, в котором были введены основные конструкции и алгоритмы группового анализа дифференциальных уравнений с частными производными (темы 1-7). Контрольная работа состоит из двух задач по указанным темам. Работа выполняется в аудитории с возможностью использования справочного материала по теории продолжения дифференциальных операторов, так как используемые выражения являются весьма громоздкими и требуют значительного времени для своего вывода. Оцениваются как ход решения, так и правильность полученного ответа. Точное содержание контрольной работы студентам заранее неизвестно. Примерные варианты приведены ниже.

**Вариант 1**

1. Восстановить группу по инфинитезимальному оператору

$$v = kx\partial_x + z\partial_y - y\partial_z.$$

2. Используя данную симметрию уравнения написать дифференциальное уравнение для инвариантного решения

$$u_t = u_{xx} + uu_x, v = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u.$$

**Вариант 2**

1. Восстановить группу по инфинитезимальному оператору

$$v = x\partial_x - \frac{1}{2}y^2\partial_z.$$

2. Используя данную симметрию уравнения написать дифференциальное уравнение для инвариантного решения

$$u_t + uu_x = ((\exp u)u_x)_x, v = t\partial_t + (x+t)\partial_x + \partial_u.$$

Написание реферата является самостоятельной внеаудиторной формой работы студента в семестре. Распределение тем рефератов происходит в течение первых двух недель, а представление рефератов – не позднее, чем за неделю до проведения итогового контроля. Целью написания реферата является более глубокое усвоение студентом изучаемого предмета, включая связи с другими областями математики и математической физики, а также выработка навыков самостоятельной работы с монографической и журнальной математической литературой. При оценке реферата учитываются логика изложения, соответствие реферата поставленной задаче, умение выделить основные моменты проблемы.

При подготовке реферата недопустимо включать в свою работу выдержки из работ других авторов без указания на это, пересказывать чужую работу близко к тексту без отсылки к ней, использовать чужие идеи без указания первоисточников (это касается и источников, найденных в Интернете). Все случаи плагиата должны быть исключены. В конце работы даётся исчерпывающий список всех использованных источников.

В конце обучения проводится итоговая работа, охватывающая весь материал курса. Задание к итоговой работе включает два теоретических вопроса и одну задачу. Один из вопросов должен отражать раздела 1, а другой вопрос и задача должны отражать темы разделов 2,3.. Перечень вопросов и основные типы задач, выносимых на итоговую работу, даются за неделю до неё. Каждый студент выполняет итоговую работу в аудитории, письменно отвечая по памяти, «своими словами». Время, выделяемое на написание итоговой работы – не более двух академических часов. В ходе итогового контроля проверяются способность свободно ориентироваться в пройденном материале и наличие практических навыков по его применению. Ниже приведены возможные варианты заданий к итоговой работе.

**Вариант 1**

1.Сформулировать необходимые условия существования инвариантного решения относительно многопараметрической группы.

2. Сформулировать теорему Хопфа.

3. Вычислить симметрии уравнения

$$u_t + uu_x = ((\exp u)u_x)_x.$$

**Вариант 2**

1. Доказать, что допускаемые операторы образуют алгебру Ли.
2. Доказать формулу Хаусдорфа.
3. Вычислить симметрии уравнения

$$u_t + uu_x = (u^m u_x)_x.$$

Для оценки работы студента применяется балльная система. Наилучшему результату соответствуют 100 баллов, которые распределяются по видам контроля следующим образом:

- промежуточная контрольная работа – от 0 до 30 баллов;
- реферат – от 0 до 20 баллов;
- итоговая работа – от 0 до 50 баллов.

Соответствие суммарного количества набранных баллов итоговой оценке (по пятибалльной шкале и европейскому стандарту) показано в таблицах.

| Баллы | 0-50 | 51-68 | 69-85 | 86-100 |
|---|---|---|---|---|
| Оценка | неуд. | удовл. | хорошо | отлично |

| Баллы | 0-30 | 31-50 | 51-62 | 63-73 | 74-83 | 84-92 | 93-100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Оценка | F | FX | E | D | B | C | A |

Методика выставления и шкала итоговых оценок отвечают принятым в РУДН для теоретических дисциплин.

## Программа курса

***Аннотированное содержание курса***

**Раздел 1.**

**Темы:** 1-8

**Трудоемкость:**- 2 кредита, 72 часа, из них

**- лекции**-18 часов,

**- практические занятия**- 18 часов,

**- самостоятельная работа**- 36 часов.

В курсе изучаются основные структуры группового анализа дифференциальных уравнений, прежде всего группового анализа дифференциальных с частными производными и некоторые обобщения классических структур группового анализа дифференциальных уравнений на интегро-дифференциальные уравнения. Методы построения точных решений дифференциальных уравнений с частными производными приводят к анализу нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В связи с этим фактом в курсе изложены некоторые теоретико-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и элементарные бифуркационные методы, необходимые для анализа структурных изменений решений систем, возникающие при изменении параметров в задачах. При этом довольно подробно рассматриваются задачи, возникающие при изучении процессов переноса в задачах биофизики. Физические механизмы, впрочем, носят универсальный характер, поэтому получаемые результаты носят достаточно общий характер и имеют более чем специальный интерес.

В первом разделе курса рассматриваются в конспективном плане основные определения и результаты общей теории групп: определение группы, единственность единичного и обратного элементов, группа преобразований произвольного множества, гомоморфизм и изоморфизм групп, ядро группы, образ группы, подгруппы в группе. Вводятся левые и правые смежные классы по подгруппе, понятие нормальной подгруппы и, как следствие определений, понятие факторгруппы, характеризация гомоморфизма групп по ядру и образу группы.

Кратко изложены основные определения общей топологии: задание топологии с помощью системы открытых или замкнутых множеств, база топологии, база окрестностей в точке. Классификация топологических пространств, отделимые и хаусдорфовы пространства. Непрерывность отображений. Критерий непрерывности отображений. Гомеоморфизмы топологических пространств. Произведение топологий, отделимость произведения. Компактность топологического пространства. Доказана основная теорема о гомеоморфизме, позволяющая топологическую эквивалентность различных представлений основных линейных групп: если $X$ - компактное, а $Y$ - отделимое топологическое пространство и отображение $f : X \to Y$ непрерывно, то множество $f(X)$ компактно в $Y$. Если, кроме того, отображение взаимно однозначно, то $f$ гомеоморфизм пространства $X$ на пространство $f(X)$.

Ведены основные понятия теории представлений групп (точные, тривиальные представления группы $T(M)$ преобразований произвольного множества $M$). На основе определения локально точного представления аддитивной группы действительных чисел, определяется ключевое понятие однопараметрической группы преобразований пространства $R^n$. Введено определение гладкого действия группы на множестве и на этой основе сформулирован полный набор условий на действие, чтобы оно порождало однопараметрическую группу преобразований пространства $R^n$.

Выведен общий вид однопараметрических групп линейных гомеоморфизмов пространства $R^n$, доказано что все они реализуются с помощью матричной экспоненты. Приведены примеры групп растяжений, вращений, сдвигов, полной евклидовой группы, групп Лоренца и Пуанкаре.

Переход на локальные преобразования пространства $R^n$ позволяет сформулировать ключевое для группового анализа понятие локальной однопараметрической группой Ли локальных преобразований евклидова пространства. Сформулированы основные свойства действия локальной однопараметрической группы Ли локальных преобразований пространства $R^n$. Дальнейший анализ производится уже с локальной точки зрения.

На основе понятии подобия групп, как для общих групп, так и локальных однопараметрических,  вводится отношение эквивалентности на множестве действий групп, приведены основные примеры.

Показано, что каждая однопараметрическая группа полностью определяется своим первым членом тейлоровского разложения по параметру, т. е. доказана основная теорема Ли: пусть $f(x,a)$ удовлетворяет свойству $f(f(x,a),b)=f(x,a+b)\quad \forall a,b,a+b\in\Delta, x\in V$ и имеет место разложение $f(x,a)=x+\xi(x)a+o(a)$, тогда $f$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка ( уравнения Ли) с начальным условием $\dfrac{df}{da}=\xi(f), f(a=0,x)=x.$ Наоборот, для всякого гладкого векторного поля решение удовлетворяет групповому свойству. ( Здесь $V\subset R^n, \Delta\subset R.$) Проанализирован случай неканонического параметра однопараметрической группы, т.е. когда групповая операция не является сложением, приведены примеры решения уравнений Ли и восстановления групповой операции.

Введено понятие орбиты однопараметрической группы и построено касательное векторное поле группы $G^1$ на области евклидова пространства. Изучено подобие локальных однопараметрических групп на языке касательных векторных полей, получена формула подобия векторных полей. Рассматривая произвольные гладкие отображения евклидовых пространств на орбитах однопараметрической группы, естественно возникает понятие инфинитезимального оператора $\xi \cdot \partial = \sum_i \xi^i \cdot \partial^i$, с помощью которого изучаются дифференциальные характеристики всех гладких функций на группах. Изучены инфинитезимальные операторы основных стандартных однопараметрических групп в евклидовом пространстве.

Определяются инварианты однопараметрических групп. Сформулирована теорема об инвариантном отображении на основе инфинитезимального оператора. На основе этого доказывается теорема о существовании базиса функционально независимых инвариантов. Изучены инварианты классических и неклассических однопараметрических групп. Доказана важнейшая в техническом плане теорема о возможности сведения невырожденной заменой переменных произвольной группы $G^1$ к группе сдвигов относительно некоторой оси в декартовом пространстве.

На основе инвариантных отображений определяется инвариантность алгебраических уравнений, точнее, инвариантность множества решений системы $F^i(x) = 0, i = 1,....s.$, где все функции являются гладкими. На языке инфинитезимальных операторов сформулирована и доказана теорема о критерии инвариантности гладкого вложенного многообразия в евклидовом пространстве. Построены примеры инвариантных относительно $G^1$ гладких многообразий. Доказана теорема об общем виде инвариантных поверхностей, как произвольной функции от базисных инвариантов. Построены инварианты и инвариантные поверхности для проективной группы.

Ключевой конструкцией в групповом анализе дифференциальных уравнений является продолжение преобразований. Переменные в евклидовом пространстве разделены на независимые и зависимые - $x = (x_1, ...., x_n), u = (u_1, ...., u_m)$. Заданы преобразования зависимых и независимых переменных, причем эти преобразования образуют однопараметрическую группу, так что $\bar{u} = f(x, u, a), \bar{x} = \varphi(x, u, a)$. Требуется выбрать преобразования таким образом, чтобы в новых переменных сохранялись операции дифференцирования. С использованием инфинитезимального оператора группы продолжения преобразований находятся в явном виде двумя способами - используя дифференциальные формы, а также в самом прямом виде, фактически лишь используя инвариантность первого дифференциала относительно замены переменных. Строится теория продолжения для любого порядка дифференцирования, т.е. для дифференциальных уравнений произвольного порядка.

На основе теории продолжения строится принципиальная схема анализа групповых структур, возникающих в теории дифференциальных уравнений. Дифференциальное уравнений рассматривается как гладкое многообразие в пространстве расширенного числа переменных, соответствующих производным соответствующего порядка. Ищутся генераторы продолженных однопараметрических групп, которые оставляют инвариантным многообразие в расширенном пространстве, при этом основным техническим инструментом является доказанная ранее теорема об инвариантных многообразиях. В расширенном пространстве образуются система уравнений полиномиального вида, причем системы являются, как правило, переопределенными. Расщепляя полиномиальные тождества относительно независимых переменных в пространстве производных, мы получаем систему дифференциальных уравнений на коэффициенты (функции) инфинитезимального оператора однопараметрической группы. Эти уравнение называются определяющими уравнениями, причем эти уравнения являются линейными и однородными относительно коэффициентов оператора. Решение определяющих уравнений является первой задачей группового анализа дифференциальных уравнений.

Рассматривая все однопараметрические группы, допускаемые дифференциальными уравнениями, получаем понятие основной группы, допускаемой системой дифференциальных уравнений, как конечно-порожденным множеством преобразований, принадлежащих однопараметрическим группам $G^1$, допускаемым системой дифференциальных уравнений. Рассматривается ряд примеров, как классических, так и достаточно новых. Проанализировано уравнение теплопроводности, решена система определяющих уравнений. Построены инфинитезимальные операторы всех гладких однопараметрических групп, допускаемых уравнением теплопроводности. Доказана бесконечномерность пространства решений определяющих уравнений. Как пример нелинейной задачи рассмотрено уравнение Бюргерса, которое может быть заменой Хопфа-Коула в классе определенных функций сведено к уравнению теплопроводности. Применяя алгоритм группового анализа дифференциальных уравнений, найдены все инфинитезимальные операторы, допускаемые уравнением Бюргерса. Пространство решений является конечномерным, что в данном случае является следствием нелинейности исходной задачи.

Изучение структуры основной группы, допускаемой уравнениями, приводит к обобщениям однопараметрических групп, а именно к определению групп Ли и групп Ли преобразований, рассматриваемых, как и прежде, с локальной точки зрения. Дается определения локальной топологической группы, с указанием ограничений по областям определения групповых операций, локальной подгруппы, инвариантной подгруппы локальной группы (топологический вариант нормальной подгруппы). Вводится локальный изоморфизм локальных групп и на отношение эквивалентности его основе на множестве локальных групп. Локальная группа, в которой введены аналитические координаты в окрестности единицы называется группой Ли $G^r$. Даются определения и приводятся основные свойства разрешимых групп Ли, простых групп Ли и полупростых групп Ли.

Рассматриваются основные определения и конструкции алгебр Ли. Сами алгебры Ли определяются аксиоматически, как линейное пространство с коммутатором, удовлетворяющим свойствам Якоби. Даются определения подалгебры, идеала и центра в алгебре Ли. Вводятся и изучаются основные свойства тензора структурных констант коммутатора в алгебре Ли. Приводятся основные примеры алгебр Ли, прежде всего матричных. Рассматриваются комплексные расширения алгебр Ли. Изучаются комплексные алгебры Ли. Приводятся основные примеры алгебр Ли, связанные с билинейными формами. Строятся прямые суммы алгебр Ли, факторалгебра Ли по идеалу алгебры Ли. Как основной пример изучается алгебра Пуанкаре, заданная через коммутаторы образующих базисных векторов. На множестве алгебр Ли вводится отношение эквивалентности на основе изоморфизма алгебр Ли.

На основе введенных понятий в алгебре инфинитезимальных операторов вводится структура алгебры Ли. На пространстве гладких векторных полей в области евклидова пространства вводится понятие коммутатора векторных полей. Интерпретируя касательное векторное поле как инфинитезимальный оператор однопараметрической группы, вводится корректное определение коммутатора операторов первого порядка. Для коммутатора инфинитезимальных операторов проверяются все аксиомы алгебры Ли, включая свойство Якоби. Интерпретируя геометрически коммутатор, можно доказать теорему о том, что множество решений определяющих уравнений образует алгебру Ли, вообще говоря, бесконечномерную. В качестве примера вычислены коммутаторы в алгебре Ли инфинитезимальных операторов, допускаемых уравнением Бюргерса.

Используя полученные структуры, для дифференциальных уравнений удается развить общие методы нахождения точных решений, из которых важнейшими являются инвариантные решения. Основная группа, допускаемая системой уравнений (как алгебраических так и дифференциальных) переводит любое решение уравнений в решение. Среди всех решений выделяются инвариантные решения, т.е. такие, что переходят под действием некоторой группы сами в себя. Инвариантные решения для некоторой многопараметрической группы существуют не всегда и должны удовлетворять ряду необходимых условий, которые достаточно подробно изучаются. Вводятся понятия ранга группы в точке, общего ранга группы. Изучаются особые и неособые инвариантные многообразия. Формулируется алгоритм-теорема нахождения инвариантных решений.

Рассматриваются примеры нахождения инвариантных решения для некоторого класса нелинейных уравнений, в основном взятых из биофизики, а именно уравнений Бюргерса, уравнения Фишера и уравнений Белоусова-Жаботинского. Рассматриваются частные инвариантные решения относительно однопараметрических групп преобразований. Тогда инвариантные решения являются решениями некоторых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые как правило, зависят еще от одного или нескольких параметров. Изучаются также инвариантные решения для уравнения Кортевега-де-Фриза. Многопараметрические инвариантные решения анализируются для уравнений газовой динамики политропного газа. Приводится полная алгебра операторов, допускаемая уравнениями. При некотором показателе адиабаты полученная система совпадает с уравнениями мелкой воды со свободной поверхностью. Это позволяет строить точные решения для движений с неизвестной свободной поверхностью, типа растекания капли по поверхности, т.е. имеющие непосредственный физический смысл.

**Раздел 2.**

**Темы:** 9-11

**Трудоемкость:**- 1 кредит, 36 часов, из них

**- лекции**-10 часов,

**- практические занятия**- 8 часов,

**- самостоятельная работа**- 18 часов.

В данном разделе изучаются конечномерные динамические системы и уравнения и бесконечномерные с алгебраической точки зрения некоторые интегро-дифференциальные уравнения.

Так как инвариантные и другие точные решения дифференциальных уравнений с частными производными сводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и систем, то ниже приводятся некоторые теоретико-групповые методы непосредственного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Выводится критерий инвариантности обыкновенного дифференциального первого порядка относительно однопараметрической группы преобразований. Доказывается возможность интегрирования уравнения в квадратурах в этом случае. Приведены примеры. Рассмотрена произвольная дифференциальная форма первого порядка. Доказана теорема Ли об интегрирующем множителе, который строится в явном виде, если известна однопараметрическая группа, допускаемая дифференциальной формой. Для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков наличие однопараметрической группы преобразований позволяет понизить порядок уравнения, соответствующий результат приведен в настоящем разделе.

Изучены дифференциальные инварианты локальных групп. На основе изложенных результатов получен общий вид обыкновенных дифференциальных уравнений соответствующего порядка, инвариантных относительной заданной однопараметрической группы. Приведены соответствующие примеры.

Изложен альтернативный к методу Ли метод группового анализа систем обыкновенных дифференциальных уравнений, когда автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений интерпретируется как векторное поле и соответствующая однопараметрическая группа. Изучаются функции на орбитах группы, выводится уравнение Лиувилля., строится ряд Ли, определяются инварианты и собственные функции инфинитезимального оператора. Изучается законы преобразования оператора при замене переменных. Выведены формулы преобразований динамической системы под действием другой динамической системы, заданной с помощью оператора. Получено уравнение, являющееся уравнением Лакса для динамических систем. Выведена формула Хаусдорфа для преобразованной системы. На основе полученной формулы определяется симметрия динамической системы. Доказано, что наличие симметрии позволяет понизить порядок задачи. Приведены некоторые обобщения полученных симметрий. На основе изложенных результатов доказан принцип «суперпозиции» для нелинейных динамических систем. Проанализированы конкретные динамические системы.

В данном разделе изложены также некоторые результаты группового анализа интегро-дифференциальных уравнений. Непосредственно каких либо общих методов, пригодных для поиска симметрий интегро-дифференциальных уравнений не существует. Естественно попытаться применить теоретический аппарат группового анализа дифференциальных уравнений, изложенных в разделе 1. Замена интегро-дифференциального уравнения бесконечной системой дифференциальных уравнений является естественным шагом. Ряд таких задач рассматривается в настоящем разделе.

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение, родственное уравнениям Власова, возникающим в кинетической теории плазмы

$$f_t + vf_x - f_v(\Phi(\int\limits_{-\infty}^{\infty} fdv))_x = 0.$$

Здесь $f$ искомая функция независимых переменных $t, x, v.$ Соответственно $\dfrac{\partial f}{\partial t} = f_t,$ и т.д., $\Phi(Z)$ - произвольная гладкая функция одной независимой переменной.

После перехода к моментам для функции $f$ по переменной $v$, так что $A^n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v^n fdv,$

получим бесконечную систему дифференциальных уравнений с частными производными $A_t^n + A_x^{n+1} + nA^{n-1}(\Phi(A^0))_x = 0, n \in N.$ Фиксируя произвольное число $n$, вычисляем алгебру операторов, допускаемых усеченной системой дифференциальных уравнений. После предельного перехода по n получаем по определению алгебру операторов, допускаемую бесконечной моментной системой. Допускаемая алгебра существенно зависит от произвольной функции, что и составляет предмет групповой классификации системы .

Считая, что общий вид инфинитезимального оператора имеет вид

$$X = \bar{t}\partial_t + \bar{x}\partial_x + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A^n}\partial_{A^n} \;,$$

где коэффициенты гладкие функции от конечного набора переменных $t, x, A^0, ..., A^n, ...$ строится классифицирующее уравнение для функции $\Phi$. Доказано, что на уровне точечных симметрий <u>нелинейного</u> нелокального кинетического уравнения , когда уравнение (1) допускает нетривиальные операторы, возможны лишь уравнение Бенни и уравнение, описывающее динамику ионосферной плазмы.

В качестве другого примера, рассмотрены группы симметрии и инвариантные решения уравнений, описывающих динамику высокочастотных колебаний электронной плазмы. Метод анализа аналогичен приведенному выше.

В качестве интегро-дифференциального уравнения другого типа рассмотрено кинетическое БГК-уравнение, являющееся одним из основных модельных уравнений кинетической теории газов. Изучены симметрии и построены точные решения уравнений, допускающие непосредственную физическую интерпретацию.

**Раздел 3.**

**Темы:** 12-13

**Трудоемкость:**- 1 кредит, 36 часов, из них

**- лекции**-8 часов,

**- практические занятия**- 10 часов,

**- самостоятельная работа**- 18 часов.

В данном разделе изложены основные результаты бифуркационного анализа алгебраических уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений, систем обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих при построении точных решений уравнений с частными производными и интегро-дифференциальных уравнений. Изучена устойчивость стационарных решений в одномерном и двумерном случаях, Рассмотрена теорема Хопфа о бифуркации возникновение предельных циклов. Для бесконечномерных систем изложена формальная техника анализа, позволяющая проанализировать проблему. Задача обоснования, как правило, основывающаяся на теореме о центральном многообразии или ее вариантов, здесь не рассматривается. Приведены примеры из биофизики, в частности изучена модель роста опухоли.

## Литература

***Обязательная***

*1.Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978 (темы 1-8, рефераты.)*

*2.Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд. СО АН СССР, 1962(темы 1-8).*

*3.Олвер П.Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М., Мир,1989 (темы 1-11, рефераты).*

*4.Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М., Наука,1983 (темы1-11, рефераты).*

*5. Марсден Дж., Мак-Кракен М.Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М., Мир, 1980 ( тема 13).*

*6. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М., Мир,1983(тема 12).*

*7. Мари Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М., Мир, 1983 (тема 8).*

*8. Murray J.D. Mathematical biology: An Introduction. N.Y. Springer, 2000 (тема 8).*

*9. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005, 256с (темы5-9).*

*10. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002, 432с ( темы5-11).*

*11. Скотт Э. Нелинейная наука. Рождение и развитие когерентных структур. М.: Физматлит, 2007,560 с ( тема 8).*

*12. Cantwell B.J. Introduction to symmetry analysis. Cambridge university press,2002, 612p(темы 1—11) .*

***Дополнительная***

*1. Лагно В.И., Спичак С.В., Стогний В.И. Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа. М., Институт компьютерных исследований, 2004 (темф 4-11, рефераты).*

*2. Галкин В.А. Уравнение Смолуховского. М., Физматлит, 2001,240 с. (тема 8).*

*3. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М., Институт компьютерных исследований, 2002 (темы 12-13).*

*4. Павловский Ю.Н. Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя. Ж. выч. мат. и мат. физ., т. 1, №2 (1975),с. 149-158(рефераты).*

*5. Ланкерович М.Я. Групповые свойства уравнений трехмерного пограничного слоя на произвольной поверхности. В сб. « Динамика сплошной среды», вып. 7,Новосибирск (1971), 12-24 (рефераты).*

*6.Ибрагимов. Н.Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. Новосибирск, «Наука», 1967 ( темы 3-8).*

*7. Бучнев А.А. Группа Ли, допускаемая уравнениями движения идеальной жидкости. В сб. « Динамика сплошной среды», вып. 7, Новосибирск (1971), с. 212-214 ( рефераты).*

*8. Овсянников Л.В. Аналитические группы. Новосибирск, НГ, 1972 (темы 5,6).*

*9. Овсянников Л.В. О бесконечных группах отображений, задаваемых дифференциальными уравнениями. ДАН СССР, т. 148, №1 ( 1963), с. 36-39 (темы 5,6).*

*10. Таранов В.Б. О симметрии одномерных высокочастотных движений бесстолкновительной плазмы. ЖТФ, т. 46 (1975), с. 1271-1277 ( тема 11).*

*11. Филиппов Ю.Г. Применение инвариантно-группового метода к решению задачи определения течений неоднородного океана. Изв. АН СССР. Физ атм. и океана, т. 4, № 6 (1968), с. 579-585 ( рефераты).*

*12. Bluman G,W., Cole J.D. The general similarity of the heat equation. J. Math. And Mech., v.18, №11(1969), p. 1025-1042 ( тема 8).*

*13.Лапко Б.В. Построение оптимальных систем подгрупп группы Ли преобразований, допускаемых уравнением газовой динамики. В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 15(1973), Новосибирск, с. 122-129 (рефераты)*

*14. Овсянников Л.В. Частичная инвариантность. ДАН СССР, т. 186, №1( 1969).с.22-25( рефераты).*

*15. Меньщиков В.М. К теории частично-инвариантных решений дифференциальных уравнений. В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 11 (1972), Новосибирск, с. 82-93 (рефераты).*

*16.Яненко Н.Н. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений. ДАН СССР, т. 109, №1(1956), с. 44-47 ( рефераты).*

*17. Овсянников Л.В. Групповое расслоение уравнений пограничного слоя. В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 1 (1969), Новосибирск, с. 24-359 (рефераты).*

*18. Верещагина Л.П. Групповое расслоение уравнений пространственного нестационарного пограничного слоя. Вестн. Ленингр. Ун-та, вып.3, №13(1973), с. 82-86 (рефераты).*

*19.Ибрагимов Н.Х., Андерсен Р.Д. Группы касательных преобразований Ли-Бэклунда. ДАН СССР, т. 227, №3 (1976), с. 539-542 ( рефераты).*

*20. Меньщиков В.М. О продолжении инвариантных решений уравнений газовой динамики через ударную волну. В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 4 (1969), Новосибирск, с. 163-169 (рефераты).*

*21.Пухначев В.В. Инвариантные решения уравнений Навье-Стокса, описывающие движения со свободной границей. Дан СССР, т. 202, №2 (1972), с. 302-303 ( рефераты).*

*23.Нетер Э. Инвариантные вариационные задачи. В сб. «Вариационные проблемы механики», М.: Физматгиз, 1959, с. 611-630 (рефераты).*
*24. Краснослободцев А.В. Газодинамические и кинетические аналогии в теории вертикально неоднородной мелкой воды. В сб. «Нелинейные волновые процессы», М.: Наука, Труды ИОФАН, т.18(1989), с.33-71 ( тема 11).*

### *Темы рефератов*

1. Групповая классификация линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.
2. Групповые свойства уравнений пограничного слоя. Случай заданного давления. Групповая классификация.
3. Стационарный пограничный слой. Групповая классификация.
4. Уравнения газовой динамики. Решение определяющих уравнений. Групповая классификация.
5. Локальные группы преобразований банахова пространства. Теоремы Ли в бесконечномерном случае.
6. Классификация инвариантных решений. Классификация по рангу. Оптимальные системы решений.
7. Частично инвариантные решения. Необходимые условия существования. Типы частично инвариантных решений.
8. Частично инвариантные решения. Проблема редукции. Теорема о редукции. Примеры.
9. Частично инвариантные решения. Кратные волны. Решения типа бегущих волн.
10. Частично инвариантные решения. Кратные волны. Простые волны. Двойные волны. Пример волнового уравнения. Уравнения газовой динамики.

11. Дифференциальные инварианты. Базис инвариантов. Бесконечные группы Ли. Инварианты бесконечных групп.
12. Дифференциальные инварианты. Автоморфные системы. Классификация автоморфных систем.
13. Дифференциальные инварианты. Групповое расслоение. Дифференциально-инвариантное решение.
14. Касательные преобразования. Специальное расширение пространства. Продолжение касательного преобразования.
15. Касательные преобразования высших порядков. Группы Ли-Бэклунда.
16. Инвариантные краевые задачи. Инвариантные решения задачи Коши. Инвариантность сильного разрыва.
17. Инвариантные краевые задачи для уравнений Навье-Стокса. Инвариантные задачи со свободной границей.
18. Законы сохранения. Инвариантность функционалов относительно однопараметрических семейств преобразований.
19. Теорема Нетер. Законы сохранения в теореме Нетер. Обращение теоремы Нетер.
20. Терема Нетер для бесконечных групп Ли.
21. Вариационные симметрии. Тривиальные законы сохранения. Характеристики законов сохранения.
22. Дивергентные симметрии для интегральных функционалов. Исследование дивергентных симметрий волнового уравнения.

## КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН

| № недели | Темы лекций | Число часов | Темы практических занятий | Число часов |
|---|---|---|---|---|
| **1** | Группы преобразований. Представления групп. Однопараметрические группы преобразований евклидова пространства. Основные примеры. | 2 | Однопараметрические подгруппы группы линейных гомеоморфизмов евклидова пространства. Основные примеры. Канонические изоморфизмы. | 2 |
| **2** | Инфинитезимальный оператор однопараметрической группы. Канонический параметр. Связь касательных полей подобных групп. Инварианты локальной однопараметрической группы. Базисные инварианты. | 2 | Построение инвариантов для однопараметрических и многопараметрических групп через инфинитезимальный оператор. | 2 |
| **3** | Инвариантные поверхности. Теорема об инвариантности многообразий (разные формы). | 2 | Точечные симметрии для О.Д.У. произвольного порядка. Вычисления. | 2 |
| **4** | Продолжение точечных преобразований. Продолжения первого и второго порядка. Продолжения произвольного порядка. | 2 | Точечные симметрии уравнений с частными производными. Вычисления. | 2 |

| № недели | Темы лекций | Число часов | Темы практических занятий | Число часов |
|---|---|---|---|---|
| **5** | Инвариантность системы дифференциальных уравнений относительно однопараметрической группы. Основная группа системы. Структура решений системы определяющих уравнений. Решение системы определяющих уравнения для уравнения Бюргерса. | 2 | Вычисление симметрии уравнения теплопроводности. Симметрии общих линейных уравнений. | 2 |
| **6** | Решение определяющих уравнений для уравнений Фишера и системы уравнений Белоусова-Жаботинского, уравнения нелинейной диффузии. | 2 | Вычисление симметрий уравнений второго порядка. | 2 |
| **7** | Локальные топологические группы. Локальная группа Ли. Локальные группы Ли преобразований. Алгебры Ли, основные определения . | 2 | Основные примеры Алгебр Ли. Изоморфизмы для низших классических алгебр Ли. | 2 |
| **8** | Метод построения инвариантных многообразий. Максимальная алгебра инвариантности дифференциальных уравнений. Ос- | 2 | Построение инвариантных решений лоя однопараметрических групп**.** | 2 |

| №<br>недели | Темы лекций | Число<br>часов | Темы практических<br>занятий | Число<br>часов |
|---|---|---|---|---|
| | новная теорема о коммутаторе векторных полей, допускаемых системой дифференциальных уравнений. Действие группы преобразований на множестве решений дифференциальных уравнений. | | | |
| **9** | Инвариантные решения систем дифференциальных уравнений. Теорема-алгоритм построения решений систем дифференциальных уравнений. | 2 | Инвариантные решения относительно многопараметрических групп преобразований**.** | 2 |
| **10** | Симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрирующий множитель и понижение порядка для обыкновенного дифференциального уравнения. Дифференциальные инварианты. Построение дифференциальных О.Д.У., допускающих однопараметрическую группу. | 2 | Понижение порядка и нахождение точных решений О.Д.У. Построение дифференциальных инвариантов. | 2 |

| № недели | Темы лекций | Число часов | Темы практических занятий | Число часов |
|---|---|---|---|---|
| **11** | Ряд Ли. Преобразование системы О.Д.У. однопараметрической группой. Формула Хасдорфа. Понижение порядка системы. Принцип «суперпозиции» в нелинейных динамических системах. | 2 | Инвариантные О.Д.У. в биофизике. Симметрии в О.Д.У. | 2 |
| **12** | Биологические осцилляторы и инвариантные решения модельных систем типа бегущих волн.Асимптотическая форма и устойчивость волновых решений уравнения Фишера. | 2 | Бегущие волны для системы Белоусова-Жаботинского. | 2 |
| **13** | Симметрии интегродифференциальных уравнений. Предельный переход. Симметрии системы Бенни. | 2 | Анализ структуры предельного перехода для интегродифференциальных систем. | 2 |
| **14** | Групповая классификация интегродифференциального уравнения власовского типа с произвольной нелинейностью. | 2 | Разрывные решения для интегро-дифференциальных уравнений власовского типа. | 2 |

| № недели | Темы лекций | Число часов | Темы практических занятий | Число часов |
|---|---|---|---|---|
| **15** | Бифуркации и устойчивость стационарных решений эволюционных уравнений в одномерном случае. | 2 | Устойчивость решений разрушающих бифуркацию(теория несовершенств). | 2 |
| **16** | Бифуркация стационарных решений и устойчивость бифуркационных решений в двумерном случае. | 2 | Примеры анализа устойчивости в двумерном случае. | 2 |
| **17** | Теорема Хопфа о бифуркации и предельные циклы. Теорема Хопфа на плоскости и многомерном пространстве. | 2 | Математическая модель роста опухоли, ее бифуркационный анализ. | 2 |
| **18** | Формальная схема бифуркационного анализа в бесконечномерном случае. Методы проекции для общих задач бифуркации в стационарные решения. | 2 | Бифуркационный анализ одного интегро-дифференциального уравнения. | 2 |