Ю.О. Беляева

ПРАКТИКУМ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Учебно-методическое пособие

Москва
Российский университет дружбы народов
2023

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.1
Б44

У т в е р ж д е н о
РИС Ученого совета
Российского университета
дружбы народов

Беляева, Юлия Олеговна.
Б44 Практикум по обыкновенным дифференциальным уравнениям : учебно-методическое пособие / Ю. О. Беляева. – Москва : РУДН, 2023. – 22 с. : ил.

Пособие содержит краткий теоретический материал по теории линейных систем дифференциальных уравнений первого порядка (о структуре решения линейной неоднородной системы, о фундаментальной системе решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений, о методах нахождения частных решений неоднородной системы), примеры решений типовых задач и варианты индивидуальных заданий.

Издание переназначено для студентов-бакалавров, обучающихся по направлениям 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

ISBN 978-5-209-11701-8

Содержание

1 Введение

В настоящем учебно-методическом пособии изложены основные факты теории систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка: теорема о структуре решения неоднородной системы, теоремы о фундаментальной системе решений системы с постоянными коэффициентами, методы нахождения частных решений неоднородной системы с постоянными коэффициентами. Теоретическое изложение сопровождается примерами решения типовых задач и вариантами индивидуальных заданий. Данное учебно-методическое пособие является дополнением к существующим учебникам и задачникам по дифференциальным уравнениям и отражает содержание читаемых лекций для студентов второго курса направлений «Математика и компьютерные науки» и «Фундаментальная информатика и информационные технологии» по дисциплине «Дифференциальные уравнения».

2 Теория линейных систем

2.1 Линейные системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть x — независимая переменная, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – неизвестные функции. Система дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + ... + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + ... + a_{2n}(x)y_n(x) + b_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + ... + a_{nn}(x)y_n(x) + b_n(x) \end{cases} \tag{1}$$

называется линейной. Кратко систему (1) можно записать в матричном виде:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + B(x). \tag{2}$$

В формуле (2) используются обозначения:

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ ... \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \ \frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ ... \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}, \ A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & ... & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & ... & a_{2n}(x) \\ ... & & & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & ... & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \ B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ ... \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

Если $B(x) \equiv 0$, то систему называют однородной. В противном случае систему называют неоднородной.

Свойства решений линейных систем.

- Пусть $v(x)$ — решение неоднородной системы, а $w(x)$ — решение однородной системы. Тогда $u(x) = v(x) + w(x)$ является решением неоднородной системы.
- Пусть $v(x)$ и $w(x)$ — решения неоднородной системы. Тогда $u(x) = v(x) - w(x)$ является решением однородной системы.
- Пусть $v(x)$ и $w(x)$ — решения однородной системы. Тогда $u(x) = v(x) + w(x)$ является решением однородной системы.
- Пусть $v(x)$ — решение однородной системы и $C \in \mathbb{R}$. Тогда $Cv(x)$ является решением однородной системы.

- Пусть $v^i(x)$ — решения однородной системы и $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда $u(x) = C_1 v^1(x) + C_2 v^2(x) + ... + C_n v^n(x)$ является решением однородной системы.

Теорема 1. *Общее решение $y_{о.н.}$ неоднородной системы (1) равно сумме общего решения $y_{о.о.}$ однородной системы и частного решения $y_{ч.н.}$ неоднородной системы:*

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}.$$

2.2 Общее решение однородной системы

Определение 1. *Пусть $x \in (a, b)$. Система вектор-функций $y^1(x), ..., y^n(x)$ называется линейно зависимой на интервале (a, b), если существует нетривиальная комбинация этих вектор-функций, такая, что*

$$C_1 y^1(x) + ... + C_n y^n(x) \equiv 0.$$

Определение 2. *Пусть $y^1(x) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) \\ y_2^1(x) \\ ... \\ y_n^1(x) \end{pmatrix}, ..., y^n(x) = \begin{pmatrix} y_1^n(x) \\ y_2^n(x) \\ ... \\ y_n^n(x) \end{pmatrix}$ — набор вектор-функций, являющихся решениями однородной системы*

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y. \tag{3}$$

Определителем Вронского системы решений $y^1(x), ..., y^n(x)$ называют определитель вида

$$W = \begin{vmatrix} y_1^1(x) & y_1^2(x) & ... & y_1^n(x) \\ y_2^1(x) & y_2^2(x) & ... & y_2^n(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_n^1(x) & y_n^2(x) & ... & y_n^n(x) \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть $y^1(x), y^2(x), ..., y^n(x)$ — решения однородной системы (3). Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Система вектор-функций $y^1(x), y^2(x), ..., y^n(x)$ линейно зависима на интервале (a, b).*
2. *Для любого фиксированного $\tilde{x} \in (a, b)$ система векторов $y^1(\tilde{x}), y^2(\tilde{x}), ..., y^n(\tilde{x})$ линейно зависима.*
3. *Существует такое $\tilde{x} \in (a, b)$, что система векторов $y^1(\tilde{x}), y^2(\tilde{x}), ..., y^n(\tilde{x})$ линейно зависима.*
4. *$W(x) \equiv 0$ для всех $x \in (a, b)$.*
5. *Существует такое $\tilde{x} \in (a, b)$, что $W(\tilde{x}) \equiv 0$.*

Следствие 1. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Система вектор-функций $y^1(x), y^2(x), ..., y^n(x)$ линейно независима на интервале (a, b).*
2. *Для любого фиксированного $\tilde{x} \in (a, b)$ система векторов $y^1(\tilde{x}), y^2(\tilde{x}), ..., y^n(\tilde{x})$ линейно независима.*
3. *Существует такое $\tilde{x} \in (a, b)$, что система векторов $y^1(\tilde{x}), y^2(\tilde{x}), ..., y^n(\tilde{x})$ линейно независима.*
4. *$W(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.*

5. *Существует такое $\tilde{x} \in (a, b)$, что $W(\tilde{x}) \neq 0$.*

Определение 3. *Набор n линейно независимых решений системы* (3) *называется фундаментальной системой решений.*

Теорема 3. *Пусть $i = 1, 2, ..., n$, $C_i \in \mathbb{R}$ и $y^1(x), y^2(x), ..., y^n(x)$ — произвольная фиксированная фундаментальная система решений. Общее решение однородной системы* (3) *имеет вид*

$$y_{o.o.} = C_1 y^1(x) + C_2 y^2(x) + ... + C_n y^n(x). \tag{5}$$

2.3 Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейную однородную систему дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. То есть, пусть $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ (где $i, j = 1, 2, ..., n$) — заданные числа. Тогда система имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + ... + a_{1n}y_n(x), \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + ... + a_{2n}y_n(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + ... + a_{nn}y_n(x), \end{cases} \tag{6}$$

или кратко

$$\frac{dy}{dx} = Ay. \tag{7}$$

В данном случае матрица A является числовой:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы 3, для того чтобы найти общее решение однородной системы 6, нам нужно найти ее фундаментальную систему решений. Наиболее результативным вариантом для поиска такой системы решений являются наборы функций вида

$$y = \begin{pmatrix} h_1 e^{\lambda x} \\ h_2 e^{\lambda x} \\ ... \\ h_n e^{\lambda x} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где λ — собственное число матрицы A, а вектор $h = (h_1, h_2, ..., h_n)^T$ — соответствующий этому λ собственный вектор.

Лемма 1. *Для того чтобы функция вида* (8) *была решением однородной системы* (6)*, необходимо и достаточно, чтобы h было собственным вектором матрицы A, а λ — соответствующим собственным значением.*

Из теории матриц нам известно, что у произвольной вещественной матрицы размерности $n \times n$ ровно n собственных значений с учетом кратности. Все эти собственные значения являются корнями характеристического уравнения:

$$\det |A - \lambda I| = 0. \tag{9}$$

2.4 Случай простых корней характеристического уравнения

Обозначим $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ собственные значения матрицы A, а через $h^1, h^2, ..., h^n$ будем обозначать соответствующие этим собственным значениям собственные векторы.

Теорема 4. *Пусть все собственные значения матрицы A вещественные и простые. Тогда вектор-функции*

$$h^1 e^{\lambda_1 x}, h^2 e^{\lambda_2 x}, ..., h^n e^{\lambda_n x}$$

образуют фундаментальную систему решений системы (6).

В случае комплексных корней поступают аналогичным образом. Для этого можно рассмотреть систему, отличающуюся от исходной тем, что в ней допускаются комплекснозначные решения:

$$\dot{z} = Az. \tag{10}$$

Теорема 5. *Пусть все собственные значения матрицы A простые (как вещественные, так и комплексные). Тогда вектор-функции*

$$h^1 e^{\lambda_1 x}, h^2 e^{\lambda_2 x}, ..., h^n e^{\lambda_n x}$$

образуют фундаментальную систему решений системы (10).

Теорема 6. *Пусть все собственные значения, как вещественные $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ так и комплексные $\alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_2 \pm i\beta_2, ..., \alpha_q \pm i\beta_q$ (здесь $n = p+2q$) матрицы A простые, и пусть $h^1, h^2, ..., h^p$, $u^1 \pm iv^1$, $u^2 \pm iv^2$, ..., $u^q \pm iv^q$ соответствующие им собственные вещественные и комплексные векторы. Тогда вектор-функции*

$$\begin{gathered} h^1 e^{\lambda_1 t}, h^2 e^{\lambda_2 x}, ..., h^p e^{\lambda_p x}, \\ Re\left((u^1 + iv^1) e^{(\alpha_1 + i\beta_1)x}\right),\ Re\left((u^2 + iv^2) e^{(\alpha_2 + i\beta_2)x}\right), ..., Re\left((u^q + iv^q) e^{(\alpha_q + i\beta_q)x}\right), \\ Im\left((u^1 + iv^1) e^{(\alpha_1 + i\beta_1)x}\right),\ Im\left((u^2 + iv^2) e^{(\alpha_2 + i\beta_2)x}\right), ...,\ Im\left((u^q + iv^q) e^{(\alpha_q + i\beta_q)x}\right) \end{gathered}$$

образуют фундаментальную систему решений системы (6).

2.5 Случай кратных корней характеристического уравнения

Лемма 2. *Для того, чтобы функция вида*

$$y = (h^1 x + h^2) e^{\lambda x}$$

была решением системы (6), *необходимо и достаточно, чтобы λ было собственным значением матрицы A, h^1 — соответствующим ему собственным вектором, а h^2 — присоединенным к h^1 вектором, то есть*

$$\begin{gathered} Ah^1 = \lambda h^1, \\ Ah^2 = \lambda h^2 + h^1. \end{gathered}$$

Лемма 3. *Для того, чтобы функция вида*

$$y = (h^1 \frac{x^l}{l!} + h^2 \frac{x^{l-1}}{(l-1)!} + ... + h^l) e^{\lambda x}$$

была решением системы (6), *необходимо и достаточно, чтобы* λ *было собственным значением матрицы* A, h^1 — *соответствующим ему собственным вектором, а* $h^2, ..., h^l$ — *цепочкой присоединенных к* h^1 *векторов, то есть*

$$\begin{gathered} Ah^1 = \lambda h^1, \\ Ah^2 = \lambda h^2 + h^1, \\ Ah^3 = \lambda h^3 + h^2, \\ ... \\ Ah^l = \lambda h^l + h^{l-1}. \end{gathered}$$

Перед тем, как сформулировать теорему о фундаментальной системе решений для случая кратных корней, приведем важный факт из теории алгебры матриц.

Теорема 7. *(Жордана). Для любой матрицы* A *существует такая невырожденная матрица* T, *что* $A = TJT^{-1}$, *где* J — *матрица жордановой формы (составленная из диагональных блоков, каждый из которых содержит на диагонали собственное значение* λ, *непосредственно над диагональю — единички, а остальные элементы, так же как и внедиагональные блоки, — нули). Столбцы матрицы* T *состоят из собстенных и присоединенных векторов матрицы* A, *совокупность этих векторов образует базис в пространстве* $\mathbb{R}^n$. *Каждому блоку жордановой формы* J *соответствует цепочка из собственных и присоединенных векторов.*

Теорема 8. *Пусть цепочки собственных и присоединенных векторов матрицы* A

$$\begin{gathered} h^{11}, h^{12}, ..., h^{1k_1}; \\ h^{21}, h^{22}, ..., h^{2k_2}; \\ ... \\ h^{l1}, h^{l2}, ..., h^{lk_l} \end{gathered}$$

образуют жорданов базис и соответствуют собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l$ *(при этом* $k_1 + ... + k_l = n$*). Собственные значения и отвечающие им собственные и присоединенные векторы могут быть как вещественными, так и комплексными. Тогда вектор-функции*

$$\begin{gathered} h^{11}e^{\lambda_1 x}, (h^{11}x + h^{12})e^{\lambda_1 x}, ..., \left(h^{11}\frac{x^{k_1-1}}{(k_1-1)!} + h^{12}\frac{x^{k_1-2}}{(k_1-2)!} + ... + h^{1k_1} \right) e^{\lambda_1 x}; \\ h^{21}e^{\lambda_2 x}, (h^{21}x + h^{22})e^{\lambda_2 x}, ..., \left(h^{21}\frac{x^{k_2-1}}{(k_2-1)!} + h^{22}\frac{x^{k_2-2}}{(k_2-2)!} + ... + h^{2k_2} \right) e^{\lambda_2 x}; \\ ... \\ h^{l1}e^{\lambda_l x}, (h^{l1}x + h^{l2})e^{\lambda_l x}, ..., \left(h^{l1}\frac{x^{k_l-1}}{(k_l-1)!} + h^{l2}\frac{x^{k_l-2}}{(k_l-2)!} + ... + h^{lk_l} \right) e^{\lambda_l x} \end{gathered}$$

образуют фундаментальную систему решений системы (10).

2.6 Общий подход при решении задач

При решении задач используется следующий подход, вытекающий из сформулированных выше теорем. Для каждого λ_i нужно найти соответствующее решение (определенного вида, в зависимости от кратности λ_i) и затем сложить полученные решения.

1. Каждому простому корню λ_i будет соответствовать решение $C_i h^i e^{\lambda_i x}$.
2. В случае кратных собственных значений матрицы A возможны две ситуации.

Если для кратного корня λ имеется столько линейно независимых собственных векторов, какова его кратность (будем обозначать ее k), то такому корню соответствует решение $C_1 h^1 e^{\lambda x} + ... + C_k h^k e^{\lambda x}$.

Если для корня λ существует m линейно независимых собственных векторов, где $m < k$, то решение, соответсвующее этому λ можно искать в виде произведения многочлена степени $k - m$ на $e^{\lambda x}$, то есть в виде

$$\begin{cases} y_1 = (a + bx + ... + dx^{k-m})e^{\lambda x}, \\ ... \\ y_n = (p + qx + ... + sx^{k-m})e^{\lambda x}. \end{cases}$$

2.7 Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов

Если правая часть неоднородной системы

$$\frac{dy}{dx} = Ay + f(x) \tag{11}$$

имеет структуру

$$f_i(x) = P_{m_i}(x)e^{\gamma x} \tag{12}$$

или в более общем виде

$$f_i(x) = e^{\alpha x}\left(P_{m_i}(x)\cos\beta x + Q_{l_i}(x)\sin\beta x\right), \tag{13}$$

где $P_{m_i}(x)$ и $Q_{l_i}(x)$ — многочлены степени m_i и l_i соответственно, то частное решение неоднородной системы (11) можно найти методом неопределенных коэффициентов.

Теорема 9. *Пусть вектор-функция $f(x)$ имеет вид* (13), *тогда частное решение системы* (11) *можно найти в виде*

$$y_i(x) = e^{\alpha x}\left(T^i_{m+s}(x)\cos\beta x + R^i_{m+s}(x)\sin\beta x\right), \tag{14}$$

где $T^i_{m+s}(x)$ и $R^i_{m+s}(x)$ многочлены степени $m + s$, $m = \max(m_i, l_i)$, s равно нулю, если число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения и равно кратности этого корня, если $\alpha + i\beta$ корень характеристического уравнения.

Исходя из общих свойств линейных систем, в случае если правая часть представляет собой сумму различных функций указанного вида с разными α, β и γ, то отдельно ищется частное решение, отвечающее каждому из слагаемых правой части, а затем найденные частные решения складываются.

2.8 Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных

Общее решение неоднородной системы можно искать методом вариации произвольных постоянных. Для этого сначала нужно найти общее решение соответствующей однородной системы. Далее, заменить произвольные постоянные C_i на неизвестные функции $C_i(x)$. Такие выражения будут определять формулу общего решения неоднородной системы. Полученные выражение нужно подставить в исходную неоднородную систему и из этой системы найти $C_i(x)$.

3 Примеры решения задач

Пример 1

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z, \end{cases}$$

при заданных собственных значениях $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Запишем матрицу системы, она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Видим, что собственные значения вещественные и простые. Тогда, согласно теореме 4, для построения фундаментальной системы решений, а значит, и общего решения рассматриваемой системы, нам нужно найти соотвествующие собственные векторы для каждого λ_i.

1. Пусть $\lambda_1 = 1$. Найдем соответствующий собственный вектор $h^1 = \begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \\ h_3^1 \end{pmatrix}$. Для этого рассмотрим систему алгебраических уравнений $(A - \lambda_1)h^1 = 0$. Получим, что

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \\ h_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда при $\lambda_1 = 1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \\ h_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После умножения получим систему:

$$\begin{cases} h_1^1 - h_2^1 + h_3^1 = 0, \\ h_1^1 + h_2^1 - h_3^1 = 0, \\ h_1^1 - h_2^1 + h_3^1 = 0. \end{cases}$$

Первое и третье уравнения совпадают, а сложив первое и второе уравнения получим, что $h_1^1 = 0$. Тогда оставшиеся компоненты собственного вектора выберем из соотношения $h_2^1 = h_3^1$. Положим $h_2^1 = h_3^1 = 1$. Тогда собственному значению $\lambda_1 = 1$ соответствует собственный вектор $h^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Пусть теперь $\lambda_2 = 2$. Найдем соответствующий собственный вектор $h^2 = \begin{pmatrix} h_1^2 \\ h_2^2 \\ h_3^2 \end{pmatrix}$. Аналогично предыдущему пункту, для $\lambda_2 = 2$ получим выражение

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^2 \\ h_2^2 \\ h_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После умножения получим систему:

$$\begin{cases} -h_2^2 + h_3^2 = 0, \\ h_1^2 - h_3^2 = 0, \\ h_1^2 - h_2^2 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, выполняется соотношение $h_1^2 = h_2^2 = h_3^2$. Тогда в качестве собственного вектора можно взять вектор $h^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Осталось рассмотреть случай $\lambda_3 = 3$. Найдем собственный вектор $h^3 = \begin{pmatrix} h_1^3 \\ h_2^3 \\ h_3^3 \end{pmatrix}$. Получаем равенство

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^3 \\ h_2^3 \\ h_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После умножения получим систему:

$$\begin{cases} -h_1^3 - h_2^3 + h_3^3 = 0, \\ h_1^3 - h_2^3 - h_3^3 = 0, \\ h_1^3 - h_2^3 - h_3^3 = 0. \end{cases}$$

Второе и третье уравнения совпадают, сложив первое уравнение со вторым получим, что $h_2^3 = 0$, тогда оставшиеся компоненты будем выбирать из соотношения $h_1^3 = h_3^3$. Например, можно положить $h_1^3 = h_3^3 = 1$, тогда $h^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Итак, мы построили фундаментальную систему решений

$$h^1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \; h^2 e^{\lambda_2 t} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; h^3 e^{\lambda_3 t} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \\ z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}. \end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3 — вещественные константы.

Пример 2

Решить систему уравнений
$$\begin{cases}\dot{x} = 2x + 2z - y,\\ \dot{y} = x + 2z,\\ \dot{z} = y - 2x - z,\end{cases}$$
при заданных собственных значениях $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm i$. Запишем матрицу системы, она имеет вид
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$
Рассмотрим сначала пару комплексно сопряженных корней $\lambda_{2,3} = \pm i$. Согласно теореме 6 достаточно рассмотреть только один корень из пары комплексно сопряженных. Пусть, например, $\lambda = i$.

Найдем соответствующий собственный вектор $h^1 = \begin{pmatrix} h_1^1\\ h_2^1\\ h_3^1\end{pmatrix}$. Для этого рассмотрим систему алгебраических уравнений $(A-\lambda)h^1 = 0$. Получим, что
$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2\\ 1 & -\lambda & 2\\ -2 & 1 & -1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1^1\\ h_2^1\\ h_3^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$
Тогда при $\lambda = i$ имеем
$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 & 2\\ 1 & -i & 2\\ -2 & 1 & -1-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1^1\\ h_2^1\\ h_3^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$
После умножения получим систему:
$$\begin{cases}(2-i)h_1^1 - h_2^1 + 2h_3^1 = 0,\\ h_1^1 - ih_2^1 + 2h_3^1 = 0,\\ -2h_1^1 + h_2^1 - (1+i)h_3^1 = 0.\end{cases}$$
Имеем
$$\begin{cases}h_2^1 = (2-i)h_1^1 + 2h_3^1,\\ h_1^1 = ih_2^1 - 2h_3^1,\\ h_2^1 = 2h_1^1 + (1+i)h_3^1.\end{cases}$$
Тогда, приравнивая значения из первой и третьей строки, получим
$$\begin{cases}(2-i)h_1^1 + 2h_3^1 = 2h_1^1 + (1+i)h_3^1,\\ h_1^1 = ih_2^1 - 2h_3^1.\end{cases}$$
Приведем подобные, тогда
$$\begin{cases}-ih_1^1 = (-1+i)h_3^1,\\ h_1^1 = ih_2^1 - 2h_3^1.\end{cases}$$

Положим $h_1^1 = 1$, тогда

$$h_3^1 = \frac{i}{(1-i)} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+i}{2},$$
$$h_1^1 = ih_2^1 - 2h_3^1,$$
$$1 = ih_2^1 - (-1+i),$$
$$ih_2^1 = i,$$
$$h_2^1 = 1.$$

Итак, для $\lambda = i$ мы нашли собственный вектор $h^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим теперь выражение

$$e^{\lambda t} h^1 = e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \cos t + i \sin t \\ \frac{-1+i}{2}(\cos t + i \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \cos t + i \sin t \\ \frac{(-1+i)}{2} \cos t + \frac{(-1-i)}{2} \sin t \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \cos t + i \sin t \\ -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t) + \frac{1}{2} i (\cos t - \sin t) \end{pmatrix}$$

В качестве функций для фундаментальной системы решений можно взять вещественную и мнимую части $e^{\lambda t} h^1$, то есть функции вида

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \\ -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}, \text{ и } \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t \\ \frac{1}{2}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}$$

Остается рассмотреть $\lambda_1 = 1$. Запишем систему для нахождения координат соответствующего собственного вектора:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^2 \\ h_2^2 \\ h_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда после умножения получим систему:

$$\begin{cases} h_1^2 - h_2^2 + 2h_3^2 = 0, \\ h_1^2 - h_2^2 + 2h_3^2 = 0, \\ -2h_1^2 + h_2^2 - 2h_3^2 = 0. \end{cases}$$

Первые два уравнения совпадают, а сложив первое и третье получим, что $h_1^2 = 0$. Остальные координаты выберем из оставшегося соотношения $h_2^2 = 2h_3^2$. Например, пусть $h_2^2 = 2h_3^2 = 2$, тогда получим собственный вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Итак, теперь мы готовы записать фундаментальную систему решений:

$$h^2 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \ Re(h^1 e^{\lambda_2 t}) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \\ -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}, \ Im(h^1 e^{\lambda_2 t}) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t \\ \frac{1}{2}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \\ -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t \\ \frac{1}{2}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x = C_2 \cos t + C_3 \sin t, \\ y = 2C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t, \\ z = C_1 e^t - \frac{1}{2} C_2 (\cos t + \sin t) + \frac{1}{2} C_3 (\cos t - \sin t), \end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3 — вещественные константы.

Пример 3

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 2x + y - z, \end{cases}$$

при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -1$.

Запишем матрицу системы, она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай кратных корней, то есть $\lambda_{2,3} = -1$. Запишем матрицу вида $(A - \lambda E)$ для $\lambda = -1$:

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Порядок матрицы $(A - \lambda E)$ обозначим через n, а ее ранг через r, в нашем случае $n = 3$ и $r = 2$. Корень $\lambda = -1$ имеет кратность $k = 2$. Количество линейно независимых собственных векторов равно $m = n - r = 1$. Так как $k > m$, то решение будем искать в виде произведения многочлена степени $k - m = 1$ на $e^{\lambda} t$, то есть в виде

$$\begin{cases} x = (a + bt)e^{-t}, \\ y = (c + dt)e^{-t}, \\ z = (f + gt)e^{-t}. \end{cases}$$

Подставим записанные выше выражения в исходную систему и найдем коэффициенты a, b, c, d, f, g. Получаем систему

$$\begin{cases} be^{-t} - (a + bt)e^{-t} = (c + dt)e^{-t} - 2(f + gt)e^{-t} - (a + bt)e^{-t}, \\ de^{-t} - (c + dt)e^{-t} = 4(a + bt)e^{-t} + (c + dt)e^{-t}, \\ ge^{-t} - (f + gt)e^{-t} = 2(a + bt)e^{-t} + (c + dt)e^{-t} - (f + gt)e^{-t}. \end{cases}$$

После деления на e^{-t} приравняем коэффициенты при подобных членах в каждом из уравнений:

$$\begin{cases} b-a=c-2f-a, \\ -b=d-2g-b, \\ d-c=4a+c, \\ -d=4b+d, \\ g-f=2a+c-f, \\ -g=2b+d-g, \end{cases} \quad \begin{cases} b=c-2f, \\ d=2g, \\ d=4a+2c, \\ d=-2b, \\ g=2a+c, \\ d=-2b, \end{cases} \quad \begin{cases} b=-g, \\ d=2g, \\ c=g-2a, \\ f=-a+g. \end{cases}$$

Таким образом, все неизвестные выражены через a и g. Положим $a=C_1$ и $g=-C_2$, тогда $b=C_2$, $d=-2C_2$, $c=-C_2-2C_1$, $f=-C_1-C_2$. Тогда часть решения, соответствующая кратному корню $\lambda=-1$ имеет вид

$$\begin{cases} x=(C_1+C_2t)e^{-t}, \\ y=((-C_2-2C_1)-2C_2t)e^{-t}, \\ z=(-C_1-C_2-C_2t)e^{-t}. \end{cases}$$

Осталось рассмотреть простой корень $\lambda_1=1$. Запишем систему для нахождения соответствующего собственного вектора:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \\ h_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда после умножения получим систему:

$$\begin{cases} h_1^2-h_2^2+2h_3^2=0, \\ h_1^2-h_2^2+2h_3^2=0, \\ -2h_1^2+h_2^2-2h_3^2=0. \end{cases}$$

Заметим, что первая и вторая строка совпадают. Сложив первое и третье уравнение мы получим равенство $h_1^2=0$. Тогда положим $h_2^2=2h_2^3=2$. Получили собственный вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Итак, теперь мы готовы записать общее решение:

$$\begin{cases} x=(C_1+C_2t)e^{-t}, \\ y=((-C_2-2C_1)-2C_2t)e^{-t}+2C_3e^t, \\ z=(-C_1-C_2-C_2t)e^{-t}+C_3e^t. \end{cases}$$

Пример 4

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}=2x-y, \\ \dot{y}=2y-x-5e^t\sin t, \end{cases}$$

Система неоднородная, а ее правая часть $f(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ -5e^t\sin t \end{pmatrix}$ имеет структуру вида (13). Найдем сначала общее решение соответствующей однородной системы, а затем найдем частное решение методом неопределенных коэффициентов. Запишем соответствующую однородную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x. \end{cases}$$

Ее удобно решить, например, методом исключения. Действительно, из второго уравнения получим $x = -\dot{y} + 2y$. Подставим это выражение в первое уравнение, тогда $-\ddot{y} + 2\dot{y} = 2(-\dot{y} + 2y) - y$. Приведя подобные получим уравнение $\ddot{y} - 4\dot{y} + 3y = 0$. Корнями характеристического уравнения $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ являются $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$. Тогда получим, что $y = C_1e^t + C_2e^{3t}$. Возвращаясь к формуле $x = -\dot{y} + 2y$, получим, что $x = -(C_1e^t + 3C_2e^{3t}) + 2(C_1e^t + C_2e^{3t}) = C_1e^t - C_2e^{3t}$. Итак, решение соответствующей однородной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1e^t - C_2e^{3t}, \\ y = C_1e^t + C_2e^{3t}. \end{cases}$$

Согласно теореме 9, частное решение будем искать в виде

$$\begin{cases} x_1 = e^t \left(A\sin t + B\cos t\right), \\ y_1 = e^t \left(D\sin t + E\cos t\right), \end{cases}$$

так как число $\alpha + i\beta = 1 + i$ не является корнем характеристического уравнения. Подставим это выражение в исходное уравнение, получим

$$\begin{cases} e^t \left(A\sin t + B\cos t\right) + e^t \left(A\cos t - B\sin t\right) = 2e^t \left(A\sin t + B\cos t\right) - e^t \left(D\sin t + E\cos t\right), \\ e^t \left(D\sin t + E\cos t\right) + e^t \left(D\cos t - E\sin t\right) = 2e^t \left(D\sin t + E\cos t\right) - e^t \left(A\sin t + B\cos t\right) - 5e^t\sin t. \end{cases}$$

Разделим на e^t правую и левую часть и приравняем коэффициенты при синусах и косинусах соответственно. Получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов:

$$\begin{cases} A - B = 2A - D, \\ B + A = 2B - E, \\ D - E = 2D - A - 5, \\ E + D = 2E - B. \end{cases}$$

Приведем подобные, тогда

$$\begin{cases} A - D + B = 0, \\ B - E - A = 0, \\ D - A + E - 5 = 0, \\ E - B - D = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения мы будем иметь $A = D - B$, а из четвертого $E = D + B$. Подставим эти выражения во второе уравнение, тогда $0 = B - E - A = B - (D + B) - (D - B)$, откуда получим, что $B = 2D$. Тогда $A = -D$, $E = 3D$. Подставим эти выражения в третье уравнение предыдущей системы, тогда из уравнения $D - A + E - 5 = 0$ мы получим $D + D + 3D - 5 = 0$, а значит $D = 1$. Тогда $B = 2$, $E = 3$, $A = -1$. Таким образом, мы нашли частное решение исходной неоднородной системы:

$$\begin{cases} x_1 = e^t \left(-\sin t + 2\cos t\right), \\ y_1 = e^t \left(\sin t + 3\cos t\right). \end{cases}$$

Общее решение неоднородной системы тогда будет суммой общего решения соответствующей однородной системы и частного решения, которое мы нашли выше:

$$\begin{cases} x = C_1e^t - C_2e^{3t} + e^t \left(-\sin t + 2\cos t\right), \\ y = C_1e^t + C_2e^{3t} + e^t \left(\sin t + 3\cos t\right). \end{cases}$$

Пример 5

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + \frac{1}{e^t+1}, \\ \dot{y} = -y + \frac{2e^t}{e^t-1}. \end{cases} \tag{15}$$

Система (15) является неоднородной. Можно переписать ее в виде $\dot{u} = Au + f$, где

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \ u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ f = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^t+1} \\ \frac{2e^t}{e^t-1} \end{pmatrix}.$$

Решим систему методом вариации произвольных постоянных. Рассмотрим сначала соответствующую однородную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \tag{16}$$

и найдем ее общее решение. Находим собственные значения:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

откуда $(1-\lambda)(1+\lambda) = 0$ и $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

Пусть $\lambda_1 = 1$. Тогда соответствующий собственный вектор найдем из соотношения

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $h_2^1 = 0$, тогда положим $h_1^1 = 1$. Таким образом, для $\lambda_1 = 1$ мы построили собственный вектор $h^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пусть теперь $\lambda_2 = -1$. Рассматривая выражение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^2 \\ h_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

получаем соотношение $2h_1^2 + h_2^2 = 0$. Тогда в качестве собственного вектора можно взять вектор $h^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Общее решение соответствующей однородной системы (16) имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \\ y = -2C_2 e^{-t}. \end{cases}$$

Пусть теперь $C_1 = C_1(t)$ и $C_2 = C_2(t)$ — неизвестные функции. Для того, чтобы определить эти функции, подставим выражение

$$\begin{cases} x = C_1(t) e^t + C_2(t) e^{-t}, \\ y = -2C_2(t) e^{-t}, \end{cases}$$

в исходную неоднородную систему (15). Получим следующее выражение:

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + C_1(t)e^t + C_2'(t)e^{-t} - C_2(t)e^{-t} = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t} - 2C_2(t)e^{-t} + \frac{1}{e^t+1}, \\ -2C_2'(t)e^{-t} + 2C_2(t)e^{-t} = 2C_2(t)e^{-t} + \frac{2e^t}{e^t-1}, \end{cases}$$

После приведения подобных система будет иметь вид:

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^{-t} = \frac{1}{e^t+1}, \\ -2C_2'(t)e^{-t} = \frac{2e^t}{e^t-1}, \end{cases}$$

Из второго уравнения получим:

$$C_2'(t) = -\frac{e^{2t}}{e^t - 1}.$$

Проинтегрируем выражение $\frac{e^{2t}}{e^t-1}$:

$$\int \frac{e^{2t}}{e^t - 1} dt = \int \frac{e^t}{e^t - 1} d(e^t) = \int \frac{p}{p-1} dp = \int \frac{p-1+1}{p-1} dp =$$
$$= \int \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) dp = p + \ln|p-1| + C_3 = e^t + \ln|e^t - 1| + C_3.$$

Итак, мы получили, что

$$C_2(t) = -(e^t + \ln|e^t - 1| + C_3).$$

Осталось найти $C_1(t)$. Для этого умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым, тогда

$$C_1'(t) = \frac{1}{e^t(e^t+1)} + \frac{1}{e^t - 1}.$$

Далее проинтегрируем выражение, стоящее в правой части:

$$\int \left(\frac{1}{e^t(e^t+1)} + \frac{1}{e^t-1}\right) dt = \int \frac{1}{e^t(e^t+1)} dt + \int \frac{1}{e^t-1} dt =$$
$$\int \frac{1}{e^{2t}(e^t+1)} d(e^t) + \int \frac{1}{e^t(e^t-1)} d(e^t) = \int \frac{1}{p^2(p+1)} dp + \int \frac{1}{p(p-1)} dp. \tag{17}$$

Подынтегральные выражения являются рациональными дробями, представим каждую из них в виде суммы простых дробей с помощью метода неопределенных коэффициентов. Итак, имеем

$$\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{(p+1)} = \frac{Ap(p+1) + B(p+1) + Cp^2}{p^2(p+1)} = \frac{(A+C)p^2 + (A+B)p + B}{p^2(p+1)},$$
$$\frac{1}{p(p-1)} = \frac{D}{p} + \frac{E}{(p-1)} = \frac{D(p-1) + Ep}{p(p-1)} = \frac{(D+E)p - D}{p(p-1)}.$$

Приравнивая коэффициенты дробей справа и слева при одинаковых степенях p, получим две системы линейных уравнений для определения коэффициентов:

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ A + B = 0, \\ B = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} D + E = 0, \\ D = -1, \end{cases} \quad .$$

Тогда получим, что $A = -1, B = 1, C = 1, D = -1, E = 1$. Таким образом, справедливо следующее разложение:

$$\frac{1}{p^2(p+1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)},$$
$$\frac{1}{p(p-1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{(p-1)}.$$

Возвращаясь к 17, получим

$$\int \frac{1}{p^2(p+1)}dp + \int \frac{1}{p(p-1)}dp = -2\int \frac{1}{p}dp + \int \frac{1}{p^2}dp + \int \frac{1}{(p+1)}dp + \int \frac{1}{(p-1)}dp =$$
$$= -2\ln|p| - \frac{1}{p} + \ln|p+1| + \ln|p-1| + C_4 = -2t - e^{-t} + \ln|e^t+1| + \ln|e^t-1| + C_4$$

Итак, мы нашли $C_1(t)$:

$$C_1(t) = -(2t + e^{-t} - \ln|e^t+1| - \ln|e^t-1| - C_4).$$

Тогда, согласно методу вариации произвольной постоянной, мы можем записать общее решение системы (16):

$$\begin{cases} x = -e^t\left(2t + e^{-t} - \ln|e^t+1| - \ln|e^t-1| - C_4\right) - e^{-t}\left(e^t + \ln|e^t-1| + C_3\right), \\ y = 2e^{-t}\left(e^t + \ln|e^t-1| + C_3\right). \end{cases}$$

4 Варианты индивидуальных заданий

Решить системы уравнений (здесь $\dot{x}$ означает производную $\frac{dx}{dt}$ и т.д.). Для облегчения работы в задачах указаны корни характеристического уравнения.

Задача 1

1. $\dot{x} = Ax,$ где $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5.$

2. $\dot{x} = Ax,$ где $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 6.$

3. $\dot{x} = Ax,$ где $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -1.$

4. $\dot{x} = Ax,$ где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2.$

5. $\dot{x} = Ax,$ где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \sqrt{2}, \lambda_3 = -\sqrt{2}.$

6. $\dot{x} = Ax,$ где $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2\sqrt{2}, \lambda_3 = -2\sqrt{2}.$

7. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$

8. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \sqrt{3}, \lambda_3 = -\sqrt{3}.$

9. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3.$

10. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2.$

Задача 2

1. $\dot{x} = Ax$, где$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = \pm i.$

2. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}.$

3. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i.$

4. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i.$

5. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}i.$

6. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = 1 \pm i.$

7. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 5, \lambda_{2,3} = 3 \pm 2i.$

8. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 2 \pm i.$

9. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = -1 \pm 2i.$

10. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 1 \pm i.$

Задача 3

1. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 2$.

2. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ и $\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 2$.

3. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -2$.

4. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 3$.

5. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ и $\lambda_{1,2,3} = 2$.

6. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $\lambda_{1,2,3} = 2$.

7. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $\lambda_{1,2,3} = 3$.

8. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\lambda_{1,2,3} = 1$.

9. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 4, \lambda_{2,3} = 1$.

10. $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 3$.

Задача 4

1. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^{t}, \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^{t}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^{t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^{t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^{t}, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$

Задача 5

1. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = 3x + \frac{e^{2t}}{e^{2t}-1}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y - 2\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}(\sqrt{t}+1)}, \\ \dot{y} = x + y + \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}(\sqrt{t}+1)}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -2y, \\ \dot{y} = x + 2y + \frac{e^{t}}{\sin t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 2y + 2\frac{e^{9t}}{e^{4t}+1}, \\ \dot{y} = x + 3y + 3e^{t} + \frac{e^{9t}}{e^{4t}+1}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y + \frac{e^{5t}}{e^{2t}-1}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 3\sqrt{t+1}, \\ \dot{y} = x + 3y - \sqrt{t+1}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + \frac{1}{\sqrt{t}}, \\ \dot{y} = -2x - 2y - \frac{1}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y + \frac{1}{cos^2 t}, \\ \dot{y} = -x + y + \frac{1}{cos^2 t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = -2y + \operatorname{tg} 2t, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 3y + \operatorname{tg}^2 3t, \\ \dot{y} = -3x. \end{cases}$

5 Литература

1. Демиденко Г.В., Матвеева И.И., Обыкновенные дифференциальные уравнения в задачах: учебное пособие. — Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2021 — 248 с.

2. Эльсгольц Л.Э., Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М., 1969 — 424 с.

3. Петровский И.Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Издательство МГУ, 1984.— 296 с.

4. Понтрягин А.С., Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974 —332 с.

5. Филиппов А.Ф., Сборник задач по дифференциальным уравнениям: учебное пособие. —М.: ЛЕНАНД, 2015 — 240 с.

6. Perko L., Differential equations and dynamical systems. — Springer Science+Business Media, 2007 — 555 p.

Учебное издание

Беляева Юлия Олеговна

ПРАКТИКУМ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Издание подготовлено в авторской редакции

Технический редактор *Н.А. Ясько*

Тематический план изданий учебно-методической литературы
2022 г., № 24

Подписано в печать 10.12.2022 г. Формат 60×84/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,79. Тираж 100 экз. Заказ 1719.

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3.
Тел.: 8 (495) 955-08-74. E-mail: publishing@rudn.ru