ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «ОБРАЗОВАНИЕ»
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Н.Б. ЖУРАВЛЕВ

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Москва

2008

Инновационная образовательная программа
Российского университета дружбы народов

«Создание комплекса инновационных образовательных программ и формирование инновационной образовательной среды, позволяющих эффективно реализовывать государственные интересы РФ через систему экспорта образовательных услуг»

Экспертное заключение –

кандидат физико-математических наук, профессор *Г.А. Каменский*

Журавлев Н.Б.

Гиперболические периодические решения нелинейных дифференциально-разностных уравнений: Учеб. пособие. – М.: РУДН, 2008. – 195 с.

В учебном пособии рассматривается свойство гиперболичности периодических решений дифференциальных уравнений: излагается связь поведения траекторий в окрестности периодического решения со свойствами уравнения в вариациях. В случае дифференциально-разностных уравнений описываются современные методы проверки условий гиперболичности.

Для студентов, обучающихся в магистратуре по направлению «Математика. Прикладная математика».

Учебное пособие выполнено в рамках инновационной образовательной программы Российского университета дружбы народов, направление «Комплекс экспортоориентированных инновационных образовательных программ по приоритетным направлениям науки и технологий», и входит в состав учебно-методического комплекса, включающего описание курса, программу и электронный учебник.

Оглавление

Введение

К исследованию свойств решений функционально-дифференциальных уравнений приводят многочисленные задачи в различных областях естествознания. Характерной особенностью возникновения таких уравнений является зависимость состояния системы в данный момент времени от прошлых состояний. При этом периодические решения важны как при описании периодических режимов работы таких систем [10], так и при описании общей динамики, порождаемой такими системами [24]. Соответствующие примеры можно найти в теории искусственных нейронных сетей [22], теории управления с последействием, биофизике, экономике [14], при изучении свойств лазеров с запаздывающей обратной связью [29]. Наряду с устойчивыми периодическими решениями особый интерес представляют неустойчивые и, в частности, гиперболические решения [29].

В случае автономных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений широко известен метод исследования устойчивости точки покоя по первому приближению. При этом ключевую роль играют так называемые характеристические мультипликаторы (иногда их называют мультипликаторами Флоке). Если все мультипликаторы лежат внутри единичной окружности, то имеет место устойчивость. Если существуют мультипликаторы по модулю большие, чем 1, то устойчивости нет. Однако и такой случай может оказаться удобным для исследования. Если на единичной окружности мультипликаторов нет (т. е. точка покоя является гиперболической), то динамика нелинейного уравнения сохраняет некоторые качественные свойства соответствующей линеаризованной системы. Поведение траекторий в окрестности такой точки покоя (имеет место седловая точка покоя) хорошо известно.

Аналогичные методы исследования также давно известны и для периодических решений с учетом того факта, что эти решения всегда имеют мультипликатор, равный единице. Оказывается, аналогичную теорию можно построить и для функционально-дифференциальных уравнений [20, 21, 16].

Итак, мультипликаторы Флоке определяют динамику в окрестности периодической орбиты как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, так и в случае функционально-дифференциальных уравнений. С помощью мультипликаторов Флоке исследовалась бифуркация из ветви периодических орбит семейства дифференциально-разностных уравнений [17, 30], экспоненциальная устойчивость [15, 5], гиперболичность [2, 28, 31], существование и структура глобального аттрактора [24]. J. Mallet-Paret и G. Sell изучили кратности упорядоченной последовательности мультипликаторов Флоке [25]. При помощи мультипликаторов Флоке X. Xie исследовал устойчивость периодических решений уравнений рассматриваемого типа, содержащих малый параметр [33]. P. Dormayer и B. Lani-Wayda для исследования повторных бифуркаций из ветви периодических решений провели численный анализ мультипликаторов Флоке [18]. В действительности работ по интересующей нас тематике гораздо больше, и их количество постоянно увеличивается.

При работе с мультипликаторами Флоке трудность заключается в том, что в случае функционально-дифференциальных уравнений оператор монодромии (собственные значения которого называются мультипликаторами Флоке) является бесконечномерным в отличие от случая обыкновенных дифференциальных уравнений, а действие этого оператора определяется путем решения функционально-дифференциального уравнения. В предлагаемой работе внимание будет уделено именно этой проблеме. Для дифференциально-разностных уравнений мы подробно рассмотрим метод, позволяющий свести исследование спектра оператора монодромии к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащей спектральный параметр, и получить характеристическое уравнение. Этот метод применяется давно [15, 5, 17]. Однако рассматривались только случаи специальных пропорций между периодом исследуемого решения и запаздываниями. Отметим, что в свете работы R. D. Nussbauma [26] такие периодические решения могут рассматриваться как исключительные. Существенного обобщения удалось достичь Х.-О. Вальтеру (Walther) и А. Л. Скубачевскому. Они построили характеристическое уравнение в случае периодического решения с произвольным рациональным периодом [2, 28] и даже получили первые подобные результаты в случае иррационального периода [28]. Автору данного пособия удалось упростить некоторые обозначения и отказаться от некоторых использовавшихся ранее ограничений технического характера [6, 7, 8].

Цель данного пособия — первоначальное знакомство студентов с понятием гиперболичности периодического решения и методами исследования мультипликаторов Флоке в случае функционально-дифференциального уравнения. В учебной литературе эти методы излагаются впервые. В работе [16] во введении к главе «Периодические решения» [16, гл. XIV], посвященной связи мультипликаторов Флоке с поведением траекторий в окрестности периодической орбиты, особенно отмечается трудность исследования самих мультипликаторов Флоке (в случае обыкновенных дифференциальных уравнений такой трудности нет, поскольку оператор монодромии конечномерный). Поэтому методам отыскания мультипликаторов Флоке в случае функционально-дифференциального уравнения в данном пособии уделено большее внимание.

Мы ограничиваемся рассмотрением уравнений с гладкими правыми частями. В случае функции f, определенной в бесконечномерном банаховом пространстве, под непрерывной дифференцируемостью понимается существование производной Фреше (см. [1, §1]), которая будет обозначаться через ∂f. Другие производные в предлагаемом тексте не рассматриваются. Если функция f зависит от нескольких аргументов, то запись $\partial_x f$ следует понимать так, что при дифференцировании все аргументы функции f, кроме x, являются произвольными фиксированными параметрами.

Уровень строгости изложения в главах разный. В конце каждого параграфа предложены вопросы для самоконтроля.

Вкратце опишем структуру предлагаемого учебного пособия. Первая глава знакомит студентов с предметом исследований на примере обыкновенных дифференциальных уравнений. Сначала строится классическая теория Флоке для линейных однородных систем с периодической по времени правой частью. Затем рассматривается автономная система. К уравнению в вариациях вдоль периодического решения автономной системы применяется теория Флоке и дается определение характеристических мультипликаторов и гиперболичности периодического решения. Доказывается существование устойчивых и неустойчивых многообразий в окрестности гиперболической орбиты.

Во второй главе вводятся основные понятия, связанные с функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа. Доказываются теоремы о существовании, единственности, дифференцируемости и продолжаемости решений начальных задач для таких уравнений. Затем по схеме, использованной в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, определяются мультипликаторы Флоке и их связь с поведением траекторий в окрестности периодической орбиты.

В случае функционально-дифференциальных уравнений возникает ряд новых (по сравнению с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений) трудностей. Например, оператор монодромии не имеет ограниченного обратного оператора. В отдельных случаях в данном пособии даются только формулировки с указанием точных ссылок, поскольку подробное рассмотрение предполагает более глубокое изучение теории функционально-дифференциальных уравнений.

В третьей главе изучаются условия гиперболичности периодического решения дифференциально-разностного уравнения с одним запаздыванием. Само решение считается известным. Предполагается также, что период этого решения соизмерим с запаздыванием. Сначала разрабатывается подход к отысканию собственных значений оператора монодромии, затем — к анализу алгебраических кратностей этих собственных значений. Существенным является величина периода решения по сравнению с запаздыванием. Сначала рассматривается более простой случай большого периода.

Четвертая глава содержит обобщение методов, изложенных в главе 3, на случай, когда период решения не соизмерим с запаздыванием. Трудность заключается в том, что требование соизмеримости является необходимым для перехода к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, который лежит в основе этих методов. Оказывается, что для указанного обобщения необходимо рассмотреть более общее уравнение, чем в главе 3, а именно уравнение с несколькими запаздываниями. Сразу строить соответствующие методы для таких уравнений в рамках учебного курса невозможно ввиду сложности обозначений.

В пособии имеются приложения **A**, **B**, **C**, **D**. Приложение **A** содержит базовые понятия и теоремы из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В приложении **B** теорема об инвариантных многообразиях приведена с доказательством по причине важности этого утверждения при исследовании динамики в окрестности периодической орбиты. В приложении **C** теорема о представлении гладких периодических решений приводится с подробным доказательством, поскольку данное утверждение не является широко известным, однако играет ключевую роль при построении рациональной аппроксимации и позволяет строить примеры периодических решений автономных функционально-дифференциальных уравнений. Собранные в приложении **D** необходимые факты из спектральной теории линейных ограниченных операторов позволяют освободить основной текст от соответствующих отступлений.

Материал учебного пособия составлен и излагается таким образом, чтобы он был доступен для изучения студентами направления «Математика. Прикладная математика» в рамках курса, рассчитанного на один семестр.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору А. Л. Скубачевскому и доценту О. Э. Зубелевичу за оказанную поддержку при написании данного пособия.

Глава 1

Гиперболические периодические решения систем нелинейных дифференциальных уравнений

1.1. Гиперболичность периодических решений

В этом разделе дадим определение гиперболичности периодических решений. Оно формулируется в терминах параметров системы уравнений в вариациях, которая представляет собой линейную систему с периодическими коэффициентами. Поэтому сначала изучим некоторые свойства таких систем.

Рассмотрим систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$y' = A(t)y, \tag{1.1.1}$$

где матрица-функция $A(t)$ имеет период p: $A(t+p) = A(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 1.1.1 ([12, гл. 3, §19, п. А])**.** Невырожденная матрица C с постоянными компонентами называется основной матрицей для фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ системы (1.1.1), если $\Phi(t+\tau) = \Phi(t)C$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Эта матрица называется также матрицей монодромии [4, гл. III, §15]. □

Замечание 1.1.1. Отметим, что $\Psi(t) = \Phi(t+\tau)$ удовлетворяет системе (1.1.1). Поэтому ввиду теоремы $A.7$ для любой фундаментальной матрицы Φ существует единственная основная матрица. □

Лемма 1.1.1. *Пусть Φ и Ψ — две фундаментальные матрицы системы* (1.1.1)*. Пусть C и $\hat{C}$ соответствующие основные матрицы. Тогда найдется такая невырожденная матрица P, что $\hat{C} = P^{-1}CP$.*

Доказательство. Ввиду теоремы $A.7$ найдется такая невырожденная матрица P, что $\Psi(t) = \Phi(t)P$. В частности, $\Psi(t+\tau) = \Phi(t+\tau)P$. Тогда

$$\Psi(t+\tau) = \Phi(t+\tau)P = \Phi(t)CP = \Psi(t)P^{-1}CP.$$

Благодаря единственности основной матрицы получаем: $\hat{C} = P^{-1}CP$. $\square$

Покажем, что некоторые характеристики матрицы C являются характеристиками системы (1.1.1), т. е. не зависят от выбора фундаментальной матрицы Φ. Более того, они служат характеристиками целого класса систем.

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{Y} = B(t)Y, \tag{1.1.2}$$

где $B(t+\tau) = B(t)$.

Определение 1.1.2. Системы уравнений (1.1.1) и (1.1.2) называются эквивалентными, если существует линейное преобразование $Y = SX$ с периодической матрицей $S(t)$ периода τ, переводящее систему (1.1.1) в систему (1.1.2). $\square$

Лемма 1.1.2. *Системы уравнений* (1.1.1) *и* (1.1.2) *являются эквивалентными тогда и только тогда, когда существуют фундаментальные матрицы* Φ *и* Ψ *этих уравнений с одной и той же основной матрицей.*

Доказательство. Пусть системы (1.1.1) и (1.1.2) являются эквивалентными, и пусть $S(t)$ — соответствующая периодическая матрица. Обозначим через C основную матрицу для Φ. Тогда

$$\Psi(t+\tau) = S(t+\tau)\Phi(t+\tau) = S(t)\Phi(t+\tau) = S(t)\Phi(t)C = \Psi(t)C.$$

Отсюда следует необходимость.

Докажем достаточность. Пусть C — основная матрица для Φ и для Ψ. Тогда

$$\Phi(t+\tau) = \Phi(t)C, \qquad \Psi(t+\tau) = \Psi(t)C.$$

Отсюда следует, что

$$\Psi(t+\tau)\Phi^{-1}(t+\tau) = \Psi(t)C(\Phi(t)C)^{-1} = \Psi(t)\Phi^{-1}(t).$$

Таким образом, $S(t) = \Psi(t)\Phi^{-1}(t)$ соответствует определению эквивалентности систем (1.1.1) и (1.1.2). $\square$

Теорема 1.1.1. *Всякое уравнение* (1.1.1) *эквивалентно уравнению*

$$\dot{Y} = BY,$$

где B — постоянная матрица.

Доказательство. Пусть C — основная матрица некоторой фундаментальной матрицы Φ уравнения (1.1.1). Поскольку $\lambda = 0$ не является собственным значением матрицы C, то определена матрица $B = (\ln C)/\tau$. Тогда $e^{\tau B} = C$. При этом $\Psi(t) = e^{tB}$ является фундаментальной матрицей системы $\dot{Y} = BY$ и имеет основную матрицу C. $\square$

Из определения 1.1.2 и теоремы 1.1.1 непосредственно вытекает следующий важный результат.

Теорема 1.1.2 (теорема Флоке [4, гл. III, §15])**.** *Любая фундаментальная матрица $Y(t)$ системы* (1.1.1) *допускает представление вида*

$$Y(t) = Z(t)e^{Bt},$$

где $Z(t+p) = Z(t)$, а B — постоянная матрица.

Определение 1.1.3 ([12, §19, п. Д] или [13, гл. IV, §6])**.** Пусть C — основная матрица некоторой фундаментальной матрицы системы (1.1.1). Тогда собственное число λ матрицы C кратности k называется характеристическим числом (или мультипликатором, или мультипликатором

Флоке) кратности k уравнения (1.1.1). При этом число $(\ln \lambda)/\tau$ называется характеристическим показателем кратности k уравнения (1.1.1). $\square$

Замечание 1.1.2. Ввиду леммы 1.1.1 определение 1.1.3 инвариантно относительно выбора фундаментальной матрицы. Ввиду леммы 1.1.2 эквивалентные системы имеют одинаковые характеристические числа с учетом кратности. $\square$

Замечание 1.1.3. У искушенного читателя может возникнуть вопрос, как связано определение 1.1.3 с понятием характеристических показателей Ляпунова нетривиальных решений системы (1.1.1). Последние являются вещественными частями характеристических показателей из определения 1.1.3 (см. [4]). $\square$

Теорема 1.1.2 устанавливает связь мультипликаторов Флоке с решениями системы (1.1.1). Далее на основе полученных свойств линейных систем определим некоторые характеристики решений нелинейных автономных систем. Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\xi' = f(\xi), \tag{1.1.3}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^m$ (обратите внимание на размерность вектора ξ, это значение будет исползоваться в следующем разделе). Напомним, что $\xi = \eta(t, \xi_0)$ обозначает решение системы (1.1.3), для которого $\eta(0, \xi_0) = \xi_0$.

Определение 1.1.4. Пусть f — непрерывно дифференцируемая функция. Пусть функция $\gamma(t) = \eta(t, \xi_0)$ периодическая. Пусть C — основная матрица уравнения в вариациях вдоль решения $y = \eta(t, \xi_0)$. Тогда оператор, матрица которого равна C, называется оператором монодромии, ассоциированным с периодическим решением $y = \eta(t, \xi_0)$ уравнения (1.1.3). Соответствующие мультипликаторы называются мультипликаторами решения $y = \eta(t, \xi_0)$. $\square$

Определение 1.1.5. Периодическое решение $y = \eta(t, \xi_0)$ уравнения (1.1.3) называется гиперболическим, если кратность мультипликатора $\lambda = 1$ равна 1 и на единичной окружности нет других мультипликаторов. $\square$

В следующем разделе исследуем связь мультипликаторов периодического решения с поведением траекторий в окрестности периодической орбиты. Завершая данный раздел, приведем соответствующие определения.

Определение 1.1.6. Пусть $\tilde{\phi}:\ [\tau, +\infty) \to \mathbb{R}^m$ — решение уравнения $\xi' = f(t, \xi)$. Пусть $t_0 > \tau$, $x_0 = \tilde{\phi}(t_0)$. Тогда решение $\tilde{\phi}$ называется устойчивым по Ляпунову, если выполнены условия:
1) существует такое число $\rho > 0$, что при $|x_1 - x_0| < \rho$ решение $\phi(t, t_0, x_1)$ определено для всех значений $t \geqslant t_0$;
2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $|x_1 - x_0| < \delta$ выполнено неравенство $|\phi(t, t_0, x_1) - \tilde{\phi}(t)| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$. $\square$

Определение 1.1.7. Устойчивое по Ляпунову решение $\tilde{\phi}$ называется асимптотически устойчивым, если существует такое $\sigma > 0$, что при $|x_1 - x_0| < \sigma$ существует предел $\lim\limits_{t \to +\infty} |\phi(t, t_0, x_1) - \tilde{\phi}(t)| = 0$. $\square$

Далее введем понятие орбитальной устойчивости, которое является более естественным для автономных систем.

Определение 1.1.8. Пусть $y = \phi(t)$ — решение уравнения (1.1.3) на интервале (r_1, r_2). Множество $\mathcal{C}(\phi) = \{y : \ y = \phi(t), t \in (r_1, r_2)\}$ называется траекторией решения ϕ. Траектория периодического решения называется его орбитой. $\square$

Определение 1.1.9 (см. [4, гл. IV, §19, определение 2]). Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что если $\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta$, то $\rho(y(t), \mathcal{C}(\eta)) < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$ (здесь и далее ρ обозначает расстояние). Тогда решение $\eta = \eta(t)$ $(t_0 \leqslant t < \infty)$ системы (1.1.3) называется орбитально-устойчивым при $t \to \infty$. $\square$

Определение 1.1.10 ([4, гл. IV, §19, определение 3]). Орбитально-устойчивое решение $\eta(t)$ называется асимптотически орбитально-устойчивым, если существует такое $\Delta_0 > 0$, что для всех решений $y(t)$, удовлетворяющих неравенству $\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \Delta_0$, выполнено предельное соотношение $\rho(y(t), \mathcal{C}(\eta)) \to 0$ при $t \to \infty$. $\square$

Замечание 1.1.4. Приведенные определения устойчивости инвариантны относительно случайного выбора начальных значений t_0, x_0 решения $\phi(t)$ (см. теорему о непрерывной зависимости решения от начальных значений). $\square$

Определение 1.1.11 ([4, гл. IV, §19, определение 4]). Будем говорить, что решение $\eta(t)$ имеет свойство асимптотической фазы, если для каждого решения $y(t)$, удовлетворяющего начальному неравенству $\|y(t_0) - \eta(t)\| < \Delta_0$, где Δ_0 достаточно мало, существует число $c = c(y)$ (асимптотическая фаза) такое, что

$$\|y(t + c) - \eta(t)\| \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty.$$

$\square$

В теории гиперболических решений основную роль играют следующие понятия.

Определение 1.1.12. Пусть $\gamma = \eta(t, t_0, \xi_0)$ — периодическое решение уравнения (1.1.3) и $\mathcal{C}$ — его орбита. Тогда множества

$$\mathcal{S}(\varepsilon, \mathcal{C}) = \{\xi : \ \rho(\eta(t,\xi), \mathcal{C}) < \varepsilon \text{ при } t \geqslant 0, \ \rho(\eta(t,\xi), \mathcal{C}) \to 0 \text{ при } t \to \infty\},$$

$$\mathcal{U}(\varepsilon, \mathcal{C}) = \{\xi : \ \rho(\eta(t,\xi), \mathcal{C}) < \varepsilon \text{ при } t \leqslant 0, \ \rho(\eta(t,\xi), \mathcal{C}) \to 0 \text{ при } t \to -\infty\}$$

называются соответственно устойчивым и неустойчивым множествами.

□

Задания и вопросы для самоконтроля

1. Докажите, что $\mu = e^{\lambda\tau}$ является мультипликатором системы (1.1.1) тогда и только тогда, когда эта система имеет решение вида $y(t) = p(t)e^{\lambda t}$, где $p(t) = p(t+\tau)$.

2. Пусть существует такое $\sigma > 0$, что при $|x_1 - x_0| < \sigma$ существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty} |\phi(t, t_0, x_1) - \tilde{\phi}(t)| = 0$. Следует ли отсюда устойчивость решения $\tilde{\phi}$ по Ляпунову?

3. Почему приведенные определения устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости инвариантны относительно случайного выбора начальных значений t_0, x_0 решения $\phi(t)$?

4. Исследовать траектории системы $dx/dt = x, dy/dt = 0$ на устойчивость по Ляпунову и на орбитальную устойчивость.

5. Пусть $\eta(t)$ — периодическое решение с периодом ω ($\omega > 0$) автономной системы (1.1.3), не сводящееся к постоянной ($\eta(t) \not\equiv 0$). Доказать, что такое решение не может быть асимптотически устойчивым.

6. Вытекает ли свойство орбитальной устойчивости из свойства устойчивости по Ляпунову?

7. Является ли орбитально-устойчивое решение $\eta(t)$ с асимптотической

фазой асимптотически орбитально-устойчивым?

8. Опишем траектории решений следующей системы (при $x \neq 0$ и $y \neq 0$):

$$\begin{cases} x' = yx^2 + y^3, \\ y' = -x^3 - xy^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y(x^2 + y^2), \\ y' = -x(x^2 + y^2). \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \ \ldots$$

Что можно сказать про устойчивость решения $x = \sin t, y = \cos t$?

9. Почему для автономных уравнений более естественно понятие орбитальной устойчивости?

1.2. Динамика в окрестности гиперболической орбиты

В этом разделе опишем динамику, порождаемую автономной системой (1.1.3) в окрестности орбиты периодического решения $y = \eta(t, \xi_0)$ в терминах мультипликаторов этого решения. Нас будет интересовать, в частности, асимптотическая орбитальная устойчивость и существование устойчивых и неустойчивых многообразий. Будем предполагать, что выполнено предположение А.1 и следующее предположение.

Предположение 1.2.1. Пусть функция $\gamma(t) = \eta(t, 0)$ периодическая с наименьшим периодом p и $f(0) = e_m$, где $e_m = (0, \ldots, 0, 1)^T$.

Замечание 1.2.1. Пусть функция $\gamma(t) = \eta(t, \xi_0)$ периодическая с наименьшим периодом p и выполнено предположение $A.1$. Тогда для уравнения (1.1.3) существует аффинное преобразование зависимой переменной, которое приводит к системе, удовлетворяющей предположению 1.2.1. $\square$

Обозначим через π плоскость, ортогональную к вектору e_m, т. е. $y \in \pi$ тогда и только тогда, когда скалярное произведение $(y, e_m) = 0$.

Замечание 1.2.2. Пусть предположения $A.1$ и 1.2.1 выполнены. Тогда из теоремы $A.3$ следует, что при достаточно малых $\|\xi_0\|$ решения $\eta(t,\xi_0)$ существуют на некотором открытом t-интервале, содержащем отрезок $[0,p]$. □

Лемма 1.2.1 ([13, гл. IX, лемма 10.1])**.** *Пусть предположения $A.1$ и 1.2.1 выполнены. Тогда существует единственная вещественная функция $t=\tau(\xi_0)$ из класса C^1 при малых $\|\xi_0\|$, такая, что $\tau(0)=p$ и $\eta(t,\xi_0)\in\pi$ при $t=\tau(\xi_0)$, т. е. $(\eta(t,\xi_0),e_m)=0$.*

Доказательство. Уравнение $(\eta(t,\xi_0),e_m)=0$ удовлетворяется при $t=p$ и $\xi_0=0$. Производная $(\eta'(t,\xi_0),e_m)=(f(\eta(t,\xi_0)),e_m)$ в точке $(t,\xi_0)=(p,0)$ равна $(f(\gamma(p)),e_m)=(f(0),e_m)=\|e_m\|^2=1$. Применение теоремы о неявной функции (теорему B.2) завершает доказательство. □

Рассмотрим оператор T, отображающий одну малую окрестность точки $\xi=0$ в гиперплоскости π на другую и действующий по формуле

$$\xi_1=T\xi_0=\eta(\tau(\xi_0),\xi_0).$$

Такое отображение называется *отображением Пуанкаре* (см. рис.1).

ξ_1

ξ_0 $\quad$ $\xi=\eta(t,\xi_0)$

0

π

$\xi=\gamma(t)$

Рис. 1.

Лемма 1.2.2 ([13, гл. IX, §10, лемма 10.2]). *Пусть предположения A.1 и 1.2.1 выполнены. Пусть $\Psi(t)$ — фундаментальная матрица уравнения в вариациях, для которой $\Psi(0) = I$. Тогда последний столбец матрицы $\Psi(p)$ равен e_m, а после вычеркивания из матрицы $\Psi(p)$ последнего столбца и последней строки получается матрица Якоби отображения T в точке $\xi_0 = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $H(t, \xi_0) = \partial_{\xi_0}\eta(t, \xi_0)$, где не требуется принадлежности $\xi_0 \in \pi$. Из теорем $A.4$ и $A.5$ следует, что

$$H'(t, \xi_0) = \partial_\xi f(\eta(t, \xi_0))H(t, \xi_0), \qquad H(0, \xi_0) = I.$$

В частности, при $\xi_0 = 0$ имеем

$$H'(t, 0) = \partial_\xi f(\gamma(t))H(t, 0), \qquad H(0, 0) = I.$$

Таким образом, $H(t, 0)$ — фундаментальная матрица уравнения в вариациях.

Функция $\gamma'(t)$ является решением уравнения в вариациях. Поэтому

$$e_m = f(0) = \gamma'(0) = \gamma'(p) = H(p, 0)\gamma'(0) = H(p, 0)e_m.$$

Следовательно, последний столбец матрицы $H(p, 0)$ равен e_m.

По-прежнему не требуя принадлежности $\xi_0 \in \pi$, рассмотрим Якобиан

$$\partial_{\xi_0}\eta(\tau(\xi_0), \xi_0) = \eta'(\tau, \xi_0)\partial_{\xi_0}\tau + H(\tau, \xi_0).$$

При $\xi_0 = 0$ отсюда следует, что

$$\partial_{\xi_0}\eta(\tau(\xi_0), \xi_0)|_{\xi_0=0} = f(0)\partial_{\xi_0}\tau(0) + H(p, 0).$$

Первое слагаемое — это матрица $(f^i(0)\ \partial\tau(0)/\partial\xi_0^j)$. Ее первые $(m-1)$ строк состоят из нулей. Таким образом, матрица Якоби отображения T в точке $\xi_0 = 0$ получается из $H(p, 0)$ после вычеркивания последней строки и последнего столбца. Теорема доказана. $\square$

Замечание 1.2.3. Матрица $\Psi(p)$ является основной матрицей. Поэтому следующие свойства непосредственно вытекают из леммы 1.2.2. Во-первых, число $\lambda = 1$ всегда является мультипликатором периодического решения. Во-вторых, собственные значения матрицы Якоби отображения T в точке $\xi_0 = 0$ за исключением $\lambda = 1$ совпадают с мультипликаторами соответствующего периодического решения с учетом кратности. Кратность собственного значения $\lambda = 1$ на единицу меньше кратности мультипликатора $\lambda = 1$. □

Следствие 1.2.1. Пусть выполнены условия леммы 1.2.2. Пусть мультипликаторы $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}\}$ по абсолютной величине меньше единицы, а мультипликаторы $\{\lambda_d, \ldots, \lambda_m\}$ по абсолютной величине больше или равны единице ($\lambda_d = 1$). Тогда с помощью линейной замены переменных в системе (1.1.3) можно привести отображение $T : (y_0, z_0) \to (y_1, z_1)$ к виду

$$T:\ y_1 = Ay_0 + Y(y_0, z_0), \quad z_1 = Cz_1 + Z(y_0, z_0), \tag{1.2.1}$$

где $Y, Z \in C^1$ при малых $\|y_0\|$, $\|z_0\|$. Отображения Y и Z и их матрицы Якоби равны нулю при $(y_0, z_0) = 0$. При этом $\dim y_0 = d$, $(y_0, z_0) = (\xi^1, \ldots, \xi^{m-1})$. Спектры матриц A и C равны соответственно $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}\}$ и $\{\lambda_{d+1}, \ldots, \lambda_m\}$.

Доказательство. Рассмотрим преобразование $R:\ \zeta = Z_0(\xi)$, принадлежащее классу C^1 вместе с обратным преобразованием $R^{-1}:\ \xi = X_0(\zeta)$. Пусть плоскость π инвариантна относительно этого преобразования. Тогда отображение Пуанкаре примет вид $\hat{T} = RTR^{-1}$. Ввиду леммы 1.2.2 достаточно использовать линейное преобразование R, переводящее матрицу $\Psi(p)$ в матрицу $\mathrm{diag}\{A, C\}$, последний столбец которой равен e_m (см. [13, гл. IX, §2]). □

Следующее вспомогательное утверждение будет использовано для доказательства признака асимптотической орбитальной устойчивости.

Лемма 1.2.3. *Пусть последовательность* $\{t_n\}$ *удовлетворяет неравенству* $|t_n - t_{n-1}| < La^n$*, где* $L > 0$ *и* $a \in (0, 1)$*. Тогда существует предел* $t_0 = \lim_{n\to\infty} t_n$ *и имеет место оценка* $|t_0 - t_n| \leqslant La^n/(1-a)$*.*

Доказательство. Для любых n и $N > n$ получаем

$$|t_n - t_N| \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} |t_k - t_{k-1}| \leqslant La^n/(1-a).$$

Следовательно, последовательность $\{t_n\}$ сходится. Далее аналогично:

$$|t_0 - t_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} |t_k - t_{k-1}| + |t_0 - t_N|.$$

При $N \to \infty$ получаем требуемую оценку. □

Определение 1.2.1 ([12, гл. 5, §28])**.** Периодическое решение называется предельным циклом, если существует окрестность орбиты этого решения, в которой нет других замкнутых траекторий. □

Теорема 1.2.1 ([13, гл. IX, теорема 11.1.] или [4, гл. IV, §20])**.** *Пусть выполнено предположение* A.1*. Пусть* $\xi = \gamma(t)$ *— периодическое решение системы* (1.1.3) *с минимальным периодом* $p > 0$*. Пусть* $m-1$ *мультипликаторов этого решения лежат внутри единичной окружности. Тогда* $\xi = \gamma(t)$ *— предельный цикл, который асимптотически орбитально устойчив с асимптотической фазой.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что предположение 1.2.1 выполнено (см. замечание 1.2.1). Из леммы 1.2.2 следует, что действие оператора T можно записать в виде

$$T\xi_0 = A\xi_0 + \Theta(\xi_0), \qquad \xi_0 \in \pi,$$

где $\Theta(\xi_0)$ принадлежит классу C^1 при малых $\|\xi_0\|$ и обращается в нуль вместе с первыми производными при $\xi_0 = 0$; спектр матрицы A состоит из мультипликаторов решения $\xi = \gamma(t)$, за исключением $\lambda = 1$ (см. лемму 1.2.2). Поэтому $\|A\| < a < 1$, и если норма $\|\xi_0\|$ достаточно мала, то $\|T\xi_0\| \leqslant a\|\xi_0\|$. Отсюда следует, что значения $\xi_n = T^n\xi_0$ определены при $n \in \mathbb{N}$ и $\|\xi_n\| \leqslant a^n\|\xi_0\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Из теоремы A.3 вытекает, что если $\varepsilon > 0$ произвольно, то существует такое $\delta = \delta_\varepsilon$, что при условии $\rho(\mathcal{C}(\gamma), \xi^0) < \delta$ найдется наименьшее положительное значение $t = \tau^0(\xi^0)$, для которого $\eta(t, \xi^0)$ существует при $t \in [0, \tau^0]$ и $\eta(\tau^0, \xi^0) \in \pi$, $\|\eta(\tau^0, \xi^0)\| < \varepsilon$. Пусть $\xi_0 = \eta(\tau^0, \xi^0) \in \pi$. Положим $\tau^1 = \tau(\xi_0) + \tau^0$ и $\tau^n = \tau(\xi_{n-1}) + \tau^{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что по построению τ^n имеем

$$|(\tau^n - np) - (\tau^{n-1} - (n-1)p)| = |\tau(\xi_{n-1}) - p|.$$

Так как $\tau(0) = p$ и $\tau(\xi) \in C^1$, то $|\tau(\xi_{n-1}) - p| \leqslant L_1\|\xi_{n-1}\| \leqslant L_1a^n\|\xi_0\|$ при некоторой постоянной L_1. По лемме 1.2.3 существует конечный предел $t_0 = \lim_{n\to\infty} |\tau^n - np|$, для которого $|(\tau^n - np) - t_0| \leqslant L_1a^n\|\xi_0\|/(1-a)$.

Поскольку $\eta(t, \xi^0) \in C^1$, имеем

$$\|\eta(t + \tau^n, \xi^0) - \gamma(t)\| = \|\eta(t, \xi_n) - \eta(t, 0)\| \leqslant L_2\|\xi_n\| \leqslant L_2a^n\|\xi_0\|$$

при некоторой постоянной L_2 и $t \in [0, p]$. Следовательно, из ограниченности $f(\xi)$ в окрестности орбиты $\mathcal{C}(\gamma)$ следует, что

$$\|\eta(t + \tau^n, \xi^0) - \eta(t + np + t_0, \xi^0)\| \leqslant L_3a^n\|\xi_0\|.$$

Поэтому при $t \in [0, p]$ имеем

$$\|\eta(t + np + t_0, \xi^0) - \gamma(t)\| \leqslant (L_2 + L_3)a^n\|\xi_0\|.$$

Заменяя $t + np$ на t, получаем

$$\|\eta(t + t_0, \xi^0) - \gamma(t)\| \leqslant (L_2 + L_3)e^{\alpha t/p}\|\xi_0\|$$

при $t \in [np, np + p]$, $\alpha = \ln a < 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Теорема доказана. □

Замечание 1.2.4. Пусть условия теоремы 1.2.1 выполнены. Из предложенного доказательства видно, что траектории, близкие к орбите такого периодического решения, сходятся к ней экспоненциально. $\square$

Далее рассмотрим случай, когда количество мультипликаторов, лежащих внутри единичной окружности, меньше $(m-1)$.

Теорема 1.2.2 ([13, гл. IX, §11, теорема 11.2])**.** *Пусть выполнено предположение A.1. Пусть $\xi = \gamma(t)$ — периодическое решение системы* (1.1.3) *с минимальным периодом $p > 0$. Пусть количество мультипликаторов решения $\xi = \gamma(t)$, лежащих внутри единичной окружности, равно в точности d $(\leqslant m-1)$. Тогда множество точек ξ в окрестности орбиты $\mathcal{C}(\gamma)$, лежащих на решениях $\xi = \xi(t)$ системы* (1.1.3) *и удовлетворяющих соотношению*

$$\rho(\mathcal{C}(\gamma), \xi(t))e^{\varepsilon t} \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to \infty \tag{1.2.2}$$

при некотором $\varepsilon > 0$, образует $(d+1)$-мерное многообразие S класса C^1.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что предположение 1.2.1 выполнено (см. замечание 1.2.1). С помощью линейной замены переменных в плоскости π можно привести отображение T к виду (B.1), где $Y, Z \in C^1$ при малых $\|y_0\|$, $\|z_0\|$. Отображения Y и Z и их матрицы Якоби равны нулю при $(y_0, z_0) = 0$. Здесь $\dim y_0 = d$, $(y_0, z_0) = (\xi^1, \ldots, \xi^{m-1})$, $a = \|A\| < 1$ и $1/c = \|C^{-1}\| \leqslant 1 + \theta$, где $\theta > 0$ сколь угодно мало. Пусть $y = g(z)$ — многообразие, существование которого утверждается в лемме B.2. Тогда $T^n(y_0, z_0)$ определены при $n \in \mathbb{N}$ и $\|T^n(y_0, z_0)\| \to 0$ экспоненциально при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $z_0 = g(y_0)$.

Если $\|\xi_0\|$ мало и $\xi_0 \in \pi$, то существует такая точка (y_0, z_0), что $\xi_0 = (y_0, z_0, 0)$, где последняя координата есть нуль — вещественное число. Рассмотрим множество Σ точек ξ : $\xi = \eta(t, \xi_0)$, для которых $\xi_0 = (y_0, g(y_0), 0) \in \pi$ и $0 \leqslant t \leqslant \tau(\xi_0)$.

Остается проверить, что подмножество S точек Σ, лежащих в малой открытой окрестности орбиты $\mathcal{C}(\gamma)$, удовлетворяет утверждению теоремы. Пусть значение $t_0 = \tau^0(\xi)$ определено в доказательстве теоремы 1.2.1, т. е. $\xi_1 = \eta(t_0, \xi) \in \pi$ и $\|\xi_1\| < \varepsilon$. Решение $\eta(t, \xi_1)$ удовлетворяет соотношению (1.2.2) тогда и только тогда, когда $\xi_1 = (y_0, g(y_0), 0)$. Следовательно, решение $\eta(t, \xi) = \eta(t - t_0, \xi_1)$ удовлетворяет соотношению (1.2.2) тогда и только тогда, когда $\xi \in S$. $\square$

Теорема 1.2.3 (см. [13, гл. IX, §11, стр. 306])**.** *Пусть выполнено предположение А.*1*. Пусть* $\eta(t, 0)$ *— гиперболическое периодическое решение системы* (1.1.3)*. Тогда существуют* $(d+1)$*-мерное устойчивое многообразие и* $(m-d)$*-мерное неустойчивое многообразие, пересекающиеся вдоль* $\mathcal{C}(\gamma)$ *трансверсально.*

Доказательство. Существование устойчивого многообразия следует из теоремы 1.2.2. Заменяя переменную t на $-t$ в системе 1.1.3, получим

$$\xi' = -f(\xi).$$

Полученная система имеет p-периодическое решение $\hat{\gamma}(t) = \gamma(-t)$. Орбита этого решения совпадает с $\mathcal{C}(\gamma)$, а его мультипликаторами являются числа $\mu = 1/\lambda$, где λ — мультипликаторы решения $\gamma(t)$ (поскольку оператор мнодромии, ассоциированный с решением γ, является обратным для оператора монодромии, ассоциированного с решением $\hat{\gamma}$). Из теоремы 1.2.2 следует существование $(m-d)$-мерного устойчивого многообразия для решения $\hat{\gamma}$. Очевидно, это многообразие является неустойчивым многообразием для решения γ. Наконец, трансверсальность этих многообразий вдоль $\mathcal{C}(\gamma)$ в линейном приближении очевидна, а при малых возмущениях это свойство не нарушается. $\square$

Задания и вопросы для самоконтроля

1. Укажите преобразование, о котором идет речь в замечании 1.2.1.

2. В чем суть леммы 1.2.1 и где она используется?

3. Почему матрица Якоби отображения T в точке $\xi_0 = 0$ получается из $H(p, 0)$ после вычеркивания последней строки и последнего столбца (см. доказательство теоремы 1.2.2)?

4. Что можно сказать о том, является ли периодическое решение предельным циклом или нет, зная его мльтипликаторы?

5. Как в доказательстве теоремы 1.2.1 выводится оценка для $\|\eta(t + \tau^n, \xi^0) - \eta(t + np + t_0, \xi^0)\|$?

6. Является ли гиперболическое периодическое решение предельным циклом?

7. Может ли предельный цикл не являться гиперболическим периодическим решением?

8. Может ли мультипликатор $\lambda = 1$ быть кратным в случае предельного цикла?

9. Как в доказательстве теоремы 1.2.2 делается заключение о выполнении соотношения (1.2.2)?

10. Пусть выполнены условия теоремы 1.2.2. Пусть $\xi_0 \in S$. Докажите существование таких чисел t_0 и $c > 0$, для которых $\|\eta(t+t_0, \xi_0) - \gamma(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

11. Пусть $\gamma = \eta(t, \xi_0)$ — гиперболическое периодическое решение системы (1.1.3). Докажите, что любое решение системы (1.1.3) с начальными данными из малой окрестности орбиты $\mathcal{C}(\gamma)$ либо покидает эту окрестность за конечное время, либо сходится к $\mathcal{C}(\gamma)$ экспоненциально.

12. Пусть один мультипликатор периодического решения автономной системы дифференциальных уравнений лежит вне единичной окружности. Может ли это решение быть орбитально устойчивым?

13. Что можно сказать про мультипликаторы решения, исследовавшегося в 8-ом вопросе предыдущего раздела.

14. Имеет ли смысл исследовать свойства периодических решений нелинейных автономных уравнений в скалярном случае?

15. Исследуйте на орбитальную устойчивость периодическое решение $y(t)$ системы (1.1.3), если

$$y(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ cost \end{pmatrix}; \qquad f(\xi) = \begin{pmatrix} \xi^2 \\ -\xi^1 - \mu\xi^2\left((\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 - 1\right) \end{pmatrix},$$

где ξ^i — компоненты вектора ξ; $\mu \in \mathbb{R}$ — параметр.

Глава 2

Гиперболические периодические решения систем нелинейных дифференциально-разностных уравнений

2.1. Функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего типа

В этом разделе введем понятия функционально-дифференциального уравнения, начальной задачи для такого уравнения и решения начальной задачи, а также рассмотрим основные свойства этих решений.

Пусть $r > 0$ — заданное вещественное число, $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных функций, определенных на отрезке $[-r, 0]$, с нормой $\|\phi\| = \max\limits_{-r \leqslant \theta \leqslant 0} |\phi(\theta)|$. Если $\sigma \in \mathbb{R}$, $A \geqslant 0$ и $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$, то для любого $t \in [\sigma, \sigma + A]$ определим элемент $x_t \in C$ соотношением $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-r \leqslant \theta \leqslant 0$. Если $D \subset \mathbb{R} \times C$, $f: \ D \to \mathbb{R}^n$ — данная функция и $\dot{x}$ — правосторонняя производная, то скажем, что

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{2.1.1}$$

есть *запаздывающее функционально-дифференциальное уравнение*, определенное на D. Не будем рассматривать другие типы функционально-дифференциальных уравнений. Отметим только, что в уравнениях запаздывающего типа значение производной от искомой функции рассматривается только в текущий момент времени, а значения самой функции — только в текуший и предыдущие моменты времени.

Определение 2.1.1. Функция x называется решением функционально-дифференциального уравнения (2.1.1) на $[\sigma - r, \sigma + A]$, если $(t, x_t) \in D$ и $x(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1.1) для $t \in [\sigma, \sigma + A]$. Для данных

$\sigma \in \mathbb{R}$ и $\phi \in C$ назовем $x(\sigma, \phi)$ решением уравнения (2.1.1) с начальным значением ϕ в момент σ, или проще решением, начинающимся в (σ, ϕ), если имеется такое $A > 0$, что $x(\sigma, \phi)$ есть решение уравнения (2.1.1) на $[\sigma - r, \sigma + A]$ и $x_\sigma(\sigma, \phi) = \phi$. $\square$

Уравнение (2.1.1) — это очень общий тип уравнения, он охватывает, в частности, обыкновенные уравнения (при $r = 0$) и дифференциально-разностные уравнения вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - r_1), \ldots, x(t - r_k)), \tag{2.1.2}$$

где запаздывания $r_i > 0$, если не оговорено противное, пронумерованы по возрастанию и $r_n = r$.

Будем говорить, что уравнение (2.1.1) линейное, если $f(t, \phi) = L(t, \phi) + h(t)$, где $L(t, \phi)$ линейное по ϕ. Если $h(t) \equiv 0$, то получаем линейное однородное уравнение. Уравнение (2.1.1) называется *автономным*, если $f(t, \phi) \equiv g(\phi)$.

Лемма 2.1.1. *Пусть $x \in C([\sigma - r, \sigma + \alpha], \mathbb{R}^n)$. Тогда $x_t : [\sigma, \sigma + \alpha] \to C$ является непрерывной функцией.*

Доказательство. Так как на отрезке $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$ функция $x(t)$ непрерывна, то она равномерно непрерывна на нем. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых $t, \tau \in [\sigma - r, \sigma + \alpha - r]$ при $|t - \tau| < \delta$ имеем $|x(t) - x(\tau)| < \varepsilon$. Следовательно, для $t, \tau \in [\sigma, \sigma + \alpha]$ при $|t - \tau| < \delta$ имеем

$$\|x_t - x_\tau\| = \sup_{-r \leqslant \theta \leqslant 0} |x(t + \theta) - x(\tau + \theta)| < \varepsilon.$$

$\square$

Следствие 2.1.1. Если $\sigma \in \mathbb{R}$ и $\phi \in C$ заданы и $f(t, \phi)$ непрерывна, то отыскание решения уравнения (2.1.1), начинающегося в точке (σ, ϕ), эквивалентно решению интегрального уравнения

$$x_\sigma = \phi; \qquad x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s)ds, \quad t \geqslant \sigma. \tag{2.1.3}$$

Для уравнения (2.1.2) теорему о существовании и единственности решения можно доказать методом шагов. При помощи этого метода можно решать начальные задачи для дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа.

Лемма 2.1.2. *Пусть функция $\phi \in C$ задана. Пусть правая часть уравнения* (2.1.2) *непрерывна по совокупности своих аргументов в некоторой области D, где* $(0, \phi(0), \ldots, \phi(-r_k)) \in D$, *и является непрерывно дифференцируемой по второму аргументу. Тогда существуют $\alpha > 0$ и единственная функция $\tilde{x}$, определенная на* $[-r, \alpha)$, *которая совпадает с ϕ на* $[-r, 0)$ *и удовлетворяет уравнению* (2.1.2) *для* $t \in [0, \alpha)$. *Разумеется, при $t = 0$ производная в уравнении* (2.1.2) *представляет собой правостороннюю производную. Если функция f принадлежит классу C^∞, то функция $\tilde{x}$ с возрастанием t становится все более гладкой.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. При $t \in (0, r_1)$ соответствующая начальная задача для уравнения (2.1.2) принимает вид

$$x'(t) = f(t, x(t), \phi(t - r_1), \ldots, \phi(t - r_n)), \qquad x(0) = \phi(0),$$

где функция ϕ — заданная. По теореме А.1 полученная начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения имеет единственное решение $\tilde{x}$, определенное на некотором полуинтервале $[0, \alpha_1)$. Нами совершен первый шаг, где $\alpha_1 \in (0, r_1]$.

Если $\alpha_1 = r_1$ и $X = \lim_{t \to \alpha_1 - 0}(t, \tilde{x}(t), \ldots, \tilde{x}(t - r_k)) \in D$, то при $t \in (r_1, 2r_1)$ рассматриваемая начальная задача для уравнения (2.1.2) принимает вид

$$x'(t) = f(t, x(t), \tilde{x}(t - r_1), \ldots, \tilde{x}(t - r_n)), \qquad x(r_1) = x_1,$$

где x_1 — вторая компонента вектора X, значения функции $\tilde{x}$ известны после первого шага. Снова получена начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения. Поэтому решение $\tilde{x}$ исходной начальной задачи можно продолжить единственным образом на полуинтервал $[-r, \alpha_2)$, где $\alpha_2 \in (r_1, 2r_1]$. Нами совершен второй шаг.

Эта процедура либо допускает неограниченное число шагов (в этом случае решение, не продолжаемое вправо, определено на полуинтервале $[-r, \infty)$), либо получаем непродолжаемое решение $\tilde{x}$ на конечном шаге.

Очевидно, правая часть уравнения, решаемого на первом шаге, непрерывна. Поэтому $\tilde{x} \in C^1((0, \alpha_1), \mathbb{R}^n)$. Если f непрерывно дифференцируема и на первом шаге не получено непродолжаемое решение, то правая часть уравнения, решаемого на втором шаге, непрерывно дифференцируема. Поэтому $\tilde{x} \in C^2((r_1, \alpha_2), \mathbb{R}^n)$. При этом функция $\tilde{x}$ непрерывна на интервале $(-r, \alpha_2)$. Поэтому $\tilde{x} \in C^1((0, \alpha_2), \mathbb{R}^n)$. Таким образом, доказана вторая часть утверждения леммы. $\square$

Для произвольного функционально-дифференциального уравнения запаздывающего типа такой способ не подходит, однако (как будет показано в в дальнейшем) эффект возрастания гладкости сохраняется.

Для функционально-дифференциальных уравнений (так же как обыкновенных дифференциальных уравнений) теорему о существовании решения начальной задачи (при различных требованиях к гладкости правой части) можно доказывать разными способами. Нас интересуют уравнения с гладкими правыми частями. Поэтому используем доказательство, основанное на применении теоремы о неявной функции [1]. Такой подход к доказательству позволяет одновременно получить дифференцируемость решения по параметрам (например, начальным данным).

Ниже через C_α обозначается банахово пространство $C([-r,\alpha],\mathbb{R}^n)$ (в частности C_1 при $\alpha = 1$); через $\tilde{\phi}$ обозначена функция

$$\tilde{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{при} \quad t \in [-r, 0], \\ \phi(0) & \text{при} \quad t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Лемма 2.1.3. *Существует семейство линейных взаимнооднозначных отображений $X_\alpha : C_1 \to C_\alpha$ и функция $T : \mathbb{R} \times C \times C_1 \to C_1$ со следующими свойствами. При $\alpha > 0$ функция $\tilde{x} : [-r,\alpha] \to \mathbb{R}^n$ является решением уравнения (2.1.1), начинающимся в $(0,\phi)$, тогда и только тогда, когда функция $\tilde{y} = X_\alpha^{-1}\tilde{x}$ является решением уравнения $T(r-\alpha,\phi,y) = 0$. Кроме того, если функция $f(t,\phi)$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по ϕ на $\Omega \subset \mathbb{R} \times D$, то функция T на своей области определения непрерывна по первой переменной и непрерывно дифференцируема по второй и третьей переменным. При этом $T(r,\phi,\tilde{\phi}) = 0$ и $\partial_y T(r,\phi,\tilde{\phi}) = I$ при всех ϕ, таких что $(0,\phi) \in \Omega$.*

Доказательство. Следствие 2.1.1 можно сформулировать следующим образом: функция $x(\phi) : [-r,\alpha] \to \mathbb{R}^n$ является решением уравнения (2.1.1), начинающимся в точке $(0,\phi)$, тогда и только тогда, когда $T_\alpha(\phi,x) = 0$, где $\alpha > 0$ и

$$T_\alpha(\phi,x)(t) = \begin{cases} x(t) - \phi(t), & t \in [-r,0], \\ x(t) - \phi(0) - \int_0^t f(\tau,x_\tau)d\tau, & t \in [0,\alpha]. \end{cases}$$

В дальнейшем заменим переменную t так, чтобы пространство, в котором будет действовать аналог оператора T_α, не зависело от α. Для этого «разграничим» аргументы функции f. Пусть функция $F : \mathbb{R} \times C_\alpha \to \mathbb{R}^n$ определена по формуле $F(t,x) = f(t,x_t)$ при $t \in [0,\alpha]$. Очевидно, непрерывная дифференцируемость $F(t,x)$ по x (при $t \in [0,\alpha]$) следует из непрерывной дифференцируемости $f(t,\phi)$ по ϕ. При этом уравнение

(2.1.1) при $t \in [0, \alpha]$ примет вид

$$\dot{x}(t) = F(t, x).$$

Теперь заменим переменную t на s по формуле $t = bs - r$, где $b = r + \alpha$. Тогда $x(t) = x(bs - r) = y(s)$. При этом уравнение (2.1.1) при $s \in [r/b, 1]$ (что соответствует $t \in [0, \alpha]$) примет вид

$$\dot{y}(s) = bF(bs - r, Xy), \tag{2.1.1$'$}$$

где $X: \ C_1 \to C_\alpha$, $Xy(t) = y((t + r)/b)$. Другими словами, функция $\tilde{x}: \ [-r, \alpha] \to \mathbb{R}^n$ является решением начальной задачи (при $\sigma = 0$) для уравнения (2.1.1) тогда и только тогда, когда $\tilde{x}(t) = y((t + r)/b)$ и y удовлетворяет уравнению (2.1.1$'$) при $s \in [r/b, 1]$ и условию $y(s) = \phi(bs - r)$. Определим функцию $T: \ \mathbb{R} \times C \times C_1 \to C_1$ по формуле

$$T(b, \phi, y)(s) = \begin{cases} y(s) - \phi(bs - r), & s \in [-r, r/b], \\ y(s) - \phi(0) - b\displaystyle\int_{r/b}^{s} F(b\tau - r, Xy)d\tau, & s \in [r/b, 1]. \end{cases}$$

Функция T удовлетворяет первому утверждению леммы.

Непрерывная дифференцируемость отображения $G(s, y) = F(bs - r, Xy)$ по y вытекает из линейности X и непрерывной дифференцируемости $F(t, x)$ по x. Поэтому непосредственным вычислением можно доказать, что функция T удовлетворяет второму утверждению. $\square$

Далее термин «единственность» решения понимается в том смысле, что любое другое решение совпадает с найденным на пересечении областей определения.

Теорема 2.1.1. *Пусть функция $f(t, \phi)$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по ϕ на $\Omega \subset \mathbb{R} \times D$. Тогда для любой пары $(\sigma, \phi) \in \Omega$ существует единственное решение $x(\sigma, \phi)$ уравнения* (2.1.1), *начинающееся в (σ, ϕ) и определенное на некотором полуинтервале $[-r + \sigma, \alpha + \sigma)$, $\alpha > 0$. Кроме того, для каждого $t \in [\sigma, \alpha + \sigma)$ производная $\partial_\phi x(\sigma, \phi)(t)$*

является линейным оператором из C в $\mathbb{R}^n$, и для любых $\phi, \psi \in C$ функция $\partial_\phi x(\sigma, \phi)\psi(t)$ является решением начальной задачи

$$\dot{z}(t) = \partial_\phi f(t, x_t(\sigma, \phi))z_t, \qquad z_\sigma = \psi.$$

Доказательство. Начальную задачу для $\partial_\phi x(\sigma, \phi)\psi(t)$ можно получить, формально продифференцировав по ϕ в направлении вектора $\psi \in C$ равенства 2.1.3 при каждом фиксированном t и при $x = x(\sigma, \phi)$. Поэтому достаточно доказать существование, единственность и дифференцируемость по ϕ решения $x(\sigma, \phi)$

Без ограничения общности положим $\sigma = 0$ (в общем случае после замены переменной по формуле $t = \sigma + s$ начальные данные (σ, ϕ) принимают вид $(0, \phi)$). Рассмотрим уравнение $T(b, \phi, y) = 0$, где оператор T определен в доказательстве леммы 2.1.3. По теореме $B.1$ для любого $\phi_0 \in D$ существует единственное решение $y = y(b, \phi)$ этого уравнения, определенное в произведении шаровых окрестностей $V_{\rho_1}(r) \times U_{\rho_2}(\phi_0)$ и непрерывно дифференцируемое по ϕ. Пусть $0 < \alpha < \rho_1$. По лемме 2.1.3 функция $x(0, \phi)$, равная $X_\alpha y(r + \alpha, \phi)$, является решением уравнения (2.1.1), начинающимся в (σ, ϕ) и определенным на полуинтервале $[-r, \alpha)$. Ввиду линейности X_α и дифференцируемости $y(b, \phi)$ функция $x(0, \phi)$ также непрерывно дифференцируема по ϕ.

Допустим $x^1(0, \phi)$ и $x^2(0, \phi)$ являются решениями уравнения (2.1.1), начинающимися в (σ, ϕ) и определенными на полуинтервале $[-r, \alpha)$. Тогда функции $X_\alpha^{-1}x^1(0, \phi)$ и $X_\alpha^{-1}x^2(0, \phi)$ удовлетворяют уравнению $T(b, \phi, y) = 0$ (значениям b при $r < b < r + \alpha$ соответствуют сужения функций x^1 и x^2 на меньшие интервалы). По теореме $B.1$ они совпадают. Следовательно, совпадают функции x^1 и x^2. □

Теорема 2.1.2 ([20, теорема 2.3.2])**.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ — открытое множество, $f :\ \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, отображающая* *каждое замкнутое (в $\mathbb{R} \times C$) ограниченное множество из Ω в ограниченное множество $\mathbb{R}^n$. Пусть x — непродолжимое решение уравнения* (2.1.1) *на* $[\sigma - r, b)$. *Тогда для всякого замкнутого ограниченного множества $U \subset \Omega$ имеется такое t_U, что $(t, x_t) \notin U$ при $t \in [t_U, b)$.*

Доказательство. В случае $r = 0$ доказываемое утверждение следует из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $r > 0$. Если $b = \infty$, утверждение доказано. Пусть $b < \infty$. Допустим, утверждение теоремы неверно. Тогда имеется последовательность вещественных чисел $t_k \to b-0$, такая что $(t_k, x_{t_k}) \in U$ для всех k. Так как $r > 0$, отсюда следует, что решение $x(t)$, $\sigma - r \leqslant t < b$, ограничено. Поэтому множество $Q = \{(t, x_t) : \ \sigma \leqslant t < b\}$ ограничено. Пусть $(\tau_k, x_{\tau_k}) \to (\tau, y)$ при $k \to \infty$. Допустим, $(\tau, y) \notin Q$. Тогда $\tau_k \to b$. Допустим, $(b, y) \in \partial\Omega$. Выберем открытое множество W так, чтобы $U \subset W$ и $\overline{W} \subset \Omega$. Тогда $|t_k - \tau_k| \to 0$ в то время, как $\|x_{t_k} - x_{\tau_k}\| \geqslant \operatorname{dist}(\partial W, \partial U) > 0$ при достаточно больших k. Это противоречит ограниченности производной $\dot{x}$ в точках $(t, x(t)) \in \overline{W}$ (см. ограничения на f). Мы доказали, что $\overline{Q} \subset \Omega$. Следовательно, множество $f(Q)$ ограничено. Таким образом, функция $x(t)$ равномерно непрерывна на $[\sigma - r, b)$. Поэтому существует предел $\lim_{t \to b-0} x(t)$, и после доопределения функции $x(t)$ имеем $(x_b, b) \in \overline{Q} \subset \Omega$. Последнее противоречит непродолжимости решения $x(t)$. □

Замечание 2.1.1. В теореме 2.1.2 требование ограниченности функции f можно заменить на требование компактности множества U (см. [20, теорема 2.3.1]). □

Определение 2.1.2. Отображение сдвига $T(t, \sigma)$ вдоль решений уравнения (2.1.1) определяется по формуле $T(t, \sigma)\phi = x_t(\sigma, \phi)$. Область определения D этого отображения состоит из таких функций ϕ, для которых решение $x(\sigma, \phi)(s)$ существует и единственно при $s \in [\sigma - r, t]$. □

Очевидно, для автономного функционально-дифференциального уравнения имеем $T(t,\sigma) = T(t-\sigma, 0)$. Для таких уравнений будем использовать обозначение $T(t) = T(t,0)$ при $t \geqslant 0$. Легко видеть, что $T(0) = I$; при $t \geqslant 0$ и $\tau \geqslant 0$ выполнено $T(t)T(\tau) = T(t+\tau)$ (здесь подразумевается, что $t+\tau$ принимает значения на интервале, который может зависеть от ϕ); $T(t)\phi$ непрерывно дифференцируемо по t и по ϕ.

Теорема 2.1.3 ([20, следствие 3.6.2]). *Пусть $f : \mathbb{R}\times C \to \mathbb{R}^n$ — ограниченное непрерывное отображение, а отображение $T(t,\sigma) :\ C \to C$ равномерно ограничено на компактных множествах из $[\sigma, \infty)$. Тогда при $t \geqslant \sigma + r$ отображение $T(t,\sigma)$ вполне непрерывно.*

Доказательство. Пусть $B \in C$ — произвольное ограниченное множество и $t \geqslant \sigma+r$. Тогда множество $V = \bigcup_{s\in[t-r,t]} T(s,\sigma)B$ ограничено. Следовательно, ограниченным является множество $\bigcup_{s\in[t-r,t]} f(s, T(s,\sigma)B)$. Пусть M — соответствующая константа. Тогда для любого $\phi \in B$ решение уравнения (2.1.1) удовлетворяет неравенству $|\dot{x}(\sigma,\phi)(s)| \leqslant M$ при $s \in [t-r, t]$, т. е. функции $x_t(\sigma,\phi)(s) = [T(t,\sigma)\phi](s)$ непрерывны по s равномерно по $\phi \in B$. По теореме Арцела—Асколи из ограниченности и равностепенной непрерывности множества $T(t,\sigma)B$ следует его предкомпактность (замыкание компактно). Теорема доказана. $\square$

Задания и вопросы для самоконтроля

1. Существует ли у решения начальной задачи для дифференциально-разностного уравнения производная в точке $t = 0$?
2. Найти решение уравнения $\dot{x}(t) = x(t) - x^2(t-1)$, начинающееся в $(1, e^t)$ и определенное на отрезке $[0, 3]$.
3. Имеет ли при $t \geqslant \sigma + r$ оператор $T(t,\sigma)$ ограниченный обратный оператор?

4. Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений:

$$\dot{x}(t) = 2y(t), \quad \dot{y}(t) = -z(t) + x(t-1), \quad \dot{z}(t) = 2y(t-1).$$

Пусть $X(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ — решение этой системы с произвольными начальными данными. Докажите, что $X(t)$ при всех $t \geqslant 1$ ортогонален постоянному вектору $(1, -2, -1)^T$.

5. Пусть $x(t)$ — решение функционально-дифференциального уравнения на $[\sigma - r, b)$. Пусть существует такая ограниченная последовательность $\{(t_k, x_{t_k})\}$, что $t_k \to b - 0$. Докажите ограниченность функции $x: \ [\sigma - r, b) \to \mathbb{R}^n$.

6. Докажите теорему 2.1.2, заменив требование ограниченности функции f на требование компактности множества U.

7. Как в теореме 2.1.3 решается проблема единственности и продолжаемости решений?

8. Почему в теореме 2.1.3 доказывается вполне непрерывность отображения $T(t, \sigma)$ только при $t \geqslant \sigma + r$?

2.2. Линейные периодические уравнения

Данный раздел посвящен изучению свойств линейного функционально-дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = L(t, x_t) \tag{2.2.1}$$

с периодической по времени правой частью, т. е. $L(t+\omega, \phi) = L(t, \phi)$ при всех t и ϕ.

От функции $L(t, \phi)$ потребуем существование такой непрерывной функции $m(t)$, что $|L(t, \phi)| \leqslant m(t)|\phi|$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $\phi \in C$. Тогда, используя неравенство Гронуолла (см. теорему А.6), получаем, что на области определения решения $x(t)$ уравнения (2.2.1), начинающегося в (σ, ϕ), имеет место оценка

$$|x_t| < |\phi| \exp\left[\int_\sigma^t m(s)ds\right].$$

Поэтому (подробнее см. доказательство в [20, теорема 6.1.1]) из теорем 2.1.1 и 2.1.2 следует, что для любых $\sigma \in \mathbb{R}$ и $\phi \in C$ существует решение $x = x(\sigma, \phi)$ уравнения (2.2.1), определенное на $[\sigma - r, \infty)$ и x_t непрерывно по (t, σ, ϕ).

Как обычно, обозначим $T(t,s)\phi = x_t(s,\phi)$ для всех $t \geqslant s$, $\phi \in C$. Оператор $T(t,s)$ удовлетворяет условию $T(t,s)T(s,\tau) = T(t,\tau)$ для всех $t \geqslant s \geqslant \tau$, и из периодичности уравнения (2.2.1) следует, что $T(t+\omega, s) = T(t,s)T(s+\omega, s)$ для всех $t \geqslant s$. Из приведенной выше оценки и теоремы 2.1.3 следует, что линейный оператор $T(t,\sigma)$ непрерывен, равномерно ограничен на компактных множествах из $[\sigma, \infty)$, и при $t \geqslant \sigma + r$ является вполне непрерывным.

Определим *оператор монодромии* $U: \ C \to C$ по формуле

$$U\phi = T(\omega, 0)\phi.$$

Так как $\omega > 0$, то существует целое $m > 0$, такое, что $m\omega \geqslant r$. Поэтому оператор $U^m = T(m\omega, 0)$ вполне непрерывен. Из теоремы $D.3$ следует, что спектр $\sigma(U)$ оператора U не более чем счетный, причем его точкой накопления может быть только ноль. Для каждого собственного значения $\mu \in \sigma(U) \setminus \{0\}$ имеется $\phi \neq 0$ в C такая, что $U\phi = \mu\phi$.

Определение 2.2.1. Всякое $\mu \in \sigma(U) \setminus \{0\}$ называется характеристическим мультипликатором уравнения (2.2.1). Всякое λ, для которого $\mu = e^{\lambda\omega}$, называется характеристическим показателем. □

Лемма 2.2.1. *Число* $\mu = e^{\lambda\omega}$ *является характеристическим мультипликатором уравнения* (2.2.1) *тогда и только тогда, когда имеется функция* $\phi \neq 0$ *в* C, *такая, что* $T(t+\omega, 0)\phi = \mu T(t,0)\phi$ *для всех* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $\mu \in \sigma(U) \setminus \{0\}$. Тогда имеется $\phi \neq 0$ в C такая, что $U\phi = \mu\phi$. Из периодичности уравнения (2.2.1) следует, что $T(t+\omega, 0)\phi = \mu T(t, 0)\phi$ для всех $t \geqslant 0$. Обратное утверждение доказывается аналогично: $\mu T(t, 0)\phi = T(t+\omega, 0)\phi = T(\omega, 0)T(t, 0)\phi$. $\square$

Благодаря теореме $D.3$ (так как U^m вполне непрерывен) для каждого характеристического мультипликатора μ уравнения (2.2.1) в C имеются два замкнутых подпространства, E_μ, K_μ, такие, что:

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad E_\mu \text{ конечномерно;}\\
&(ii) \quad E_\mu \oplus K_\mu = C;\\
&(iii) \quad UE_\mu \subset E_\mu, \quad UK_\mu \subset K_\mu;\\
&(iv) \quad \sigma(UE_\mu) = \{\mu\}, \quad \sigma(U|K_\mu) = \sigma(U) \setminus \{\mu\}.
\end{aligned}
$$

Размерность пространства E_μ называется кратностью мультипликатора μ.

Пусть $\phi_1, \ldots, \phi_{d_\mu}$ — базис для E_μ, $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_{d_\mu})$. Так как $UE_\mu \subset E_\mu$, то имеется $d_\mu \times d_\mu$-матрица $M = M_\mu$ такая, что $U\Phi = \Phi M$, и из свойства (iv) следует, что единственное собственное значение матрицы M есть $\mu \neq 0$. Поэтому существует $d_\mu \times d_\mu$-матрица $B = B_\mu$ такая, что $B = \omega^{-1} \ln M$. Определим вектор-строку $P(t)$ с элементами из C формулой $P(t) = T(t, 0)\Phi e^{-Bt}$. Тогда для $t \geqslant 0$

$$
\begin{aligned}
P(t+\omega) = T(t+\omega, 0)\Phi e^{-B(t+\omega)} = T(t, 0)T(\omega, 0)\Phi e^{-B\omega}e^{-Bt} = \\
= T(t, 0)U\Phi e^{-B\omega}e^{-Bt} = T(t, 0)\Phi M e^{-B\omega}e^{-Bt} = P(t),
\end{aligned}
$$

т. е. $P(t)$ периодичен с периодом ω. Таким образом, $T(t, 0)\Phi = P(t)e^{Bt}$, $t \geqslant 0$. Продолжим функцию $P(\cdot)$ до ω-периодической на весь интервал $(-\infty, \infty)$. Тогда функция $x_t(0, \Phi) = T(t, 0)\Phi = P(t)e^{Bt}$ будет определена для $-\infty < t < \infty$, и легко показать, что каждый столбец этой матрицы есть решение уравнения (2.2.1) на $(-\infty, \infty)$. Следовательно, имеет место следующий результат.

Лемма 2.2.2 ([20, лемма 8.1.2]). *Пусть μ есть мультипликатор уравнения* (2.2.1) *и Φ есть базис для E_μ размерности d_μ. Тогда имеются $n \times d_\mu$-матрица $P(t)$, столбцы которой принадлежат C при каждом t, и $d_\mu \times d_\mu$-матрица $B \in \mathbb{R}^{d_\mu \times d_\mu}$, обладающие следующими свойствами: $\sigma(e^{B\omega}) = \{\mu\}$; $P(t+\omega) = P(t)$ при $t \in \mathbb{R}$; если $\phi = \Phi b$, то $x_t(\phi)$ определено для $t \in \mathbb{R}$ и*

$$x_t(0,\phi) = P(t)e^{Bt}b, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Поэтому, в частности, $\mu = e^{\lambda\omega}$ есть мультипликатор уравнения (2.2.1) *тогда и только тогда, когда имеется нетривиальное решение уравнения* (2.2.1) *вида*

$$x(t) = p(t)e^{\lambda t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

где $p(t+\omega) = p(t)$.

Следствие 2.2.1. Решения уравнения (2.2.1) с начальным значением из E_μ имеют тип Флоке, а именно, если $\mu = e^{\lambda\omega}$, то упомянутые решения имеют вид произведения $e^{\lambda t}$ на полином от времени с коэффициентами, ω-периодическими по t.

Доказательство. Так как $x_t(0,\phi)(\theta) = x(0,\phi)(t+\theta) = x_{t+\theta}(0,\phi)(0)$ при $\theta \in [-r,0]$ и $\phi \in E_\mu$, то отсюда следует, что $P(t)(\theta) = P(t+\theta)(0)e^{B\theta}$ при $\theta \in [-r,0]$. Поэтому, если положим $\tilde{P}(t+\theta) = P(t+\theta)(0)$, то $\Phi(\theta) = \tilde{P}(\theta)e^{B\theta}$ и

$$x(0,\phi)(t) = \tilde{P}(t)e^{Bt}b, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad \phi = \Phi b.$$

Теперь доказываемое утверждение очевидно. $\square$

Нами определуны мультипликаторы уравнения (2.2.1) через оператор U сдвига вдоль решения на период уравнения (2.2.1), начиная с начального момента $t = 0$. В действительности мультипликаторы не зависят от начального момента времени.

Лемма 2.2.3 ([20, лемма 8.1.3]). *Характеристические мультипликаторы уравнения* (2.2.1) (*с учетом кратности*) *не зависят от начального момента времени. Для любых $\mu \in \sigma(U) \setminus \{0\}$ и $t, s \in \mathbb{R}$ оператор $T(t, s)$ осуществляет гомеоморфизм множеств $E_\mu(s)$ и $E_\mu(t)$.*

Доказательство. Для произвольного $s \in \mathbb{R}$ положим $U(s) = T(s + \omega, s)$. Зафиксируем $\mu \in \sigma(U(s)) \setminus \{0\}$. Тогда, как и ранее, существуют два замкнутых подпространства $E_\mu(s)$ и $K_\mu(s)$ из C, для которых имеют место свойства (i) — (iv) (с необходимыми изменениями обозначений). Пусть $\Phi^{(s)}$ — базис для $E_\mu(s)$, $U(s)\Phi^{(s)} = \Phi^{(s)}M(s)$, $\sigma(M(s)) = \{\mu\}$. Как и для случая $s = 0$, можно определить $T(t, x)\Phi^{(s)}$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Для любого $\tau \in \mathbb{R}$

$$U(\tau)T(\tau, s)\Phi^{(s)} = T(\tau + \omega, \tau)T(\tau, s)\Phi^{(s)} = T(\tau + \omega, s)\Phi^{(s)} = \\ = T(\tau, s)T(s + \omega, s)\Phi^{(s)} = T(\tau, s)\Phi^{(s)}M(s).$$

Если $Q(s) = \mu I - M(s)$, то $Q(s)$ нильпотентна и

$$[\mu I - U(\tau)]T(\tau, s)\Phi^{(s)} = T(\tau, s)\Phi^{(s)}Q(s).$$

Предположим, что из $T(t, s)\Phi^{(s)}b = 0$ следует равенство $b = 0$. Тогда $\mu \in \sigma(U(\tau))$ и размерность $E_\mu(\tau)$ не меньше, чем размерность $E_\mu(s)$. Так как s и τ можно в этом рассуждении поменять местами, то остается доказать справедливость сделанного предположения.

Пусть имеется такое t, что $T(t, s)\Phi^{(s)}b = 0$, и $s + m\omega \geqslant t$. Тогда

$$0 = T(s + m\omega, s)\Phi^{(s)}b = U^m(s)\Phi^{(s)}b = \Phi^{(s)}M^m(s)b.$$

Так как собственным значением $M^m(s)$ является только $\mu^m \neq 0$, то результат следует незамедлительно. □

Теперь рассмотрим, как представление Флоке в каждом собственном пространстве связано с решением $x_t(\phi, s)$ для произвольной $\phi \in C$. Пусть $\sigma(U) = \{0\} \cup \{\mu_m\}$, где $\{\mu_m\}$ — множество (конечное или счетное) всех мультипликаторов, пронумерованных в порядке убывания. Пусть $P_m(s): C \to E_{\mu_m}(s)$, $I - P_m(s): \ C \to K_{\mu_m}(s)$ суть проекторы на множества $E_{\mu_m}(s)$ и $K_{\mu_m}(s)$, определенные выше и обладающие свойствами (i) — (iv).

Теорема 2.2.1. *Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ существуют такие постоянные $\delta = \delta(\alpha) > 0$ и $M = M(\alpha, s) > 0$, что*

$$\left\| x_t(s,\phi) - \sum_{|\mu_n| \geqslant \exp \alpha\omega} x_t(s, P_n(s)\phi)) \right\| \leqslant M e^{(\alpha-\delta)(t-s)} \|\phi\|,$$

где $\phi \in C$, $t \geqslant s$.

Доказательство. Будем считать, что $s = 0$. На случай произвольного $s \in \mathbb{R}$ доказательство обобщается без привлечения дополнительных идей, однако обозначения становятся более громоздкими (см. [20, теорема 8.1.1]).

Зафиксируем $\alpha > 0$. Выберем $k = k(\alpha)$ так, чтобы $|\mu_k| \geqslant \exp \alpha\omega$ и $|\mu_{k+1}| < \exp \alpha\omega$. Тогда имеет место разложение

$$C = E_{\mu_1} \oplus \ldots \oplus E_{\mu_k} \oplus F_k,$$

где все E_{μ_j} и F_k инвариантны относительно U и

$$\sigma(U|F_k) = \sigma(U) \setminus \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}.$$

Положим $R_k(\phi) = \phi - \sum_{j=1}^{k} P_j(0)\phi$. Тогда $R_k(\phi) \in F_k$ и $x_{m\omega}(0, R_k\phi) \in F_k$ для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$ и $\phi \in C$. Если $e^{\gamma\omega} = |\mu_{k+1}|$, то спектральный радиус оператора U_1 равного $U|F_k = UR_k$ равен $e^{\gamma\omega}$, где $\gamma < \alpha$. Поэтому (см. лемму D.1) $\lim_{n\to\infty} \|U_1^n\|^{1/n} = e^{\gamma\omega}$. Следовательно, для любого $\beta > 0$ имеем $e^{-\beta\omega} = \lim_{n\to\infty} e^{-(\gamma+\beta)\omega} \|U_1^n\|^{1/n}$. Тогда существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant N$ имеем $e^{-(\gamma+\beta)n\omega}\|U_1^n\| = (e^{-\beta\omega} + \varepsilon_n)^n$, где значение $e^{-\beta\omega} + \varepsilon_n \leqslant L < 1$. Поэтому $e^{-(\beta+\gamma)n\omega}\|U_1^n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Из равномерной ограниченности (см. начало данного раздела) оператора $T(t,s)$ следует существование константы B такой, что $\|T(t,0)\| \leqslant B$ для любого $t \in [0,\omega]$. Для произвольного $\beta > 0$ положим

$$M = M(\beta) = Be^{|\beta+\gamma|\omega} \max_{n \geqslant 0} e^{-(\beta+\gamma)n\omega} \|U_1^n\|.$$

Тогда для любых $t \in [0,\omega]$ и $\phi \in C$ имеем

$$\|T(t,0)\phi\| \leqslant \|T(t,0)\| \, \|\phi\| \leqslant B\|\phi\| \leqslant Me^{(\beta+\gamma)t}\|\phi\|.$$

Если же $t \geqslant \omega$, то имеется целое n такое, что $t \in [n\omega, n\omega+\omega)$ и

$$\begin{aligned}\|T(t,0)R_k\phi\| &= \|T(t-n\omega,0)T(n\omega,0)R_k\phi\| \leqslant B\|U_1^n\| \, \|\phi\| = \\ &= \left[Be^{-(\beta+\gamma)(t-n\omega)}e^{-(\beta+\gamma)n\omega}\|U_1^n\|\right] e^{(\beta+\gamma)t}\|\phi\| \leqslant Me^{(\beta+\gamma)t}\|\phi\|\end{aligned}$$

при любых $\phi \in C$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\beta + \gamma < \alpha - \delta$. Поскольку оператор $T(t,s)$ линеен, теорема доказана. □

Следствие 2.2.2. Решение $x = 0$ уравнения (2.2.1) равномерно асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все характеристические мультипликаторы уравнения (2.2.1) по модулю меньше, чем 1.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 2.2.1 при $\alpha = 0$. Необходимость получается из представления Флоке с любым характеристическим мультипликатором, который по модулю не меньше, чем 1. □

Аналогично получается следующий результат.

Следствие 2.2.3. Если $\sum_m P_m(s)$ сходится, где сумма берется по всем проекторам $P_m(s)$, связанным с отличными от нуля мультипликаторами μ_m, и если $R\phi = \phi - \sum_m P_m(s)\phi$, то для всякого вещественного α имеем

$$e^{\alpha t}\|x_t(s,R\phi)\| \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Завершая этот раздел, покажем на примере простого уравнения, как можно определять характеристические мультипликаторы уравнения (2.2.1). Рассмотрим скалярное дифференциально-разностное уравнение

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} B_j(t)x(t - k_j\omega), \tag{2.2.2}$$

где $B_j(t+\omega) = B_j(t)$ и каждое $k_j \in \mathbb{N}$. Согласно лемме 2.2.2 число $\mu = e^{\lambda\omega}$ является характеристическим мультипликатором уравнения (2.2.2) тогда и только тогда, когда имеется ненулевая функция $v(t) = v(t + \omega)$ такая, что $x(t) = v(t)e^{\lambda t}$ удовлетворяет уравнению (2.2.2). После подстановки $x(t)$ в уравнение (2.2.2) получаем

$$\dot{v}(t) = \left[-\lambda + \sum_{j=0}^{m} B_j(t)e^{-k_j\omega\lambda}\right] v(t). \tag{2.2.3}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v(t) = c\exp\left\{\int_0^t \left[-\lambda I + \sum_{j=0}^{m} B_j(s)e^{-k_j\omega\lambda}\right] ds\right\}.$$

Подставляя эту функцию в равенство $v(0) = v(\omega)$ и учитывая, что параметр λ может быть определен только с точностью до целого кратного $2\pi i/\omega$, получаем характеристическое уравнение

$$\lambda = \sum_{j=0}^{m} B_{j0}e^{-k_j\omega\lambda},$$

где $B_{j0} = \omega^{-1}\int_0^\omega B_j(t)dt$.

В рассмотренном примере использованы запаздывания, кратные периоду уравнения. В последующих разделах, посвященных методам исследования характеристических мультипликаторов, этот подход рассматривается для более широкого класса задач.

Задания и вопросы для самоконтроля

1. Функция x, определенная на $[0, \infty)$, стремится к нулю быстрее любой экспоненты, если $x(t)e^{kt} \to 0$ при $t \to \infty$ для любого $k \in \mathbb{R}$. Построить пример решения неавтономного линейного однородного запаздывающего

функционально-дифференциального уравнения с ограниченными коэффициентами, приближающегося к нулю быстрее любой экспоненты при $t \to \infty$ и не принимающего нулевых значений.

2. Проверьте, что спектр оператора сдвига $T(\sigma + 2\pi, \sigma)$ для уравнения $\dot{x}(t) = (\sin t)x(t - 2\pi)$ равен $\{0, 1\}$.

3. Проверьте, что уравнение $\dot{x}(t) = (\sin t)x(t - 2\pi)$ имеет решения, стремящиеся к нулю быстрее любой экспоненты.

4. Известно [20, теорема 3.3.1], что для автономного линейного запаздывающего функционально-дифференциального уравнения любое решение $x(t)$, стремящееся к нулю быстрее любой экспоненты, является финально нулевым ($x_t = 0$ при $t > t_0$ при некотором $t_0 < \infty$). Имеет ли место для функционально-дифференциальных уравнений точный аналог теоремы 1.1.1?

5. Пусть решение уравнения (2.2.1) имеет вид $x(t) = p(t)e^t$ при $t \geqslant 0$, где функция $p(t)$ имеет период ω. Постройте продолжение этого решения для $t \in (-\infty, \infty)$. Результат обосновать.

6. Для уравнения (2.2.1) докажите равенство $T(t + \omega, s) = T(t, s)T(s + \omega, s)$. В тексте есть важные примеры использования этого соотношения. Укажите один из этих примеров.

7. Может ли функция $\phi(t) = \sqrt[3]{t}$ принадлежать какому-либо из множеств E_μ?

8. Отметьте существенные отличия оператора монодромии в случае функционально-дифференциального уравнения от основной матрицы в случае обыкновенного дифференциального уравнения.

9. На что надо обратить внимание, когда говорится о существовании матрицы $B = \ln M$ и почему $e^{B(a+b)} = e^{Ba}e^{Bb}$?

10. Завершите доказательство следствия 2.2.1.

11. Обратим ли оператор $T(t, 0)|E_\mu$?

12. Какие из следующих объектов определяются однозначно для заданного линейного функционально-дифференциального уравнения с периодической по времени правой частью: оператор монодромии; характеристические мультипликаторы; характеристические показатели?
13. Опишите подробнее, как в доказательстве леммы 2.2.3 из нильпотентности матрицы $Q(s)$ и линейной независимости элементов вектора $T(\tau, s)\Phi^{(s)}$ делается вывод о том, что $\mu \in \sigma(U(\tau))$ и размерность $E_\mu(\tau)$ не меньше, чем размерность $E_\mu(s)$.

2.3. Динамика в окрестности гиперболической орбиты

В предыдущем разделе нам удалось получить все свойства линейных периодических систем, которые использовались при доказательстве существования устойчивых и неустойчивых многообразий в окрестности периодической орбиты автономной системы в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. В данном разделе опишем схему исследования указанного вопроса и сформулируем соответствующие результаты для функционально-дифференциальных уравнений.

Рассмотрим автономное уравнение

$$\dot{x}(t) = F(x_t), \tag{2.3.1}$$

где правая часть $F(\phi)$ непрерывно дифференцируема. Пусть ω-периодическое решение $\tilde{x}$ этого уравнения нам известно, где $\omega > 0$ является минимальным периодом функции $\tilde{x}$. Этому решению соответствует *уравнение в вариациях*

$$\dot{y}(t) = L(t, y_t),$$

где $L(t, \phi) = \partial F(\tilde{x}_t)\phi$. Таким образом, линейное уравнение в вариациях есть линейное ω-периодическое уравнение, для которого применимы все результаты предыдущего раздела.

Определение 2.3.1. Оператором монодромии, ассоциированным с ω-периодическим решением уравнения (2.3.1), называется линейный оператор $\mathcal{M}(\alpha): C \to C$, осуществляющий сдвиг вдоль решений вариационного уравнения на период ω, начиная с начального момента $t = \alpha$. Мультипликаторами решения $\tilde{x}$ называются мультипликаторы соответствующего уравнения в вариациях. $\square$

Замечание 2.3.1. Так как $\dot{\tilde{x}} = F(\tilde{x}_t)$ для $t \in \mathbb{R}$, то отсюда следует, что $\ddot{\tilde{x}}$ существует и $\ddot{\tilde{x}}(t) = L(t, \dot{\tilde{x}}_t)$. Таким образом, $\mu = 1$ всегда является мультипликатором периодического решения. $\square$

Замечание 2.3.2. Определение 2.3.1 инвариантно относительно замены начального момента времени (см. лемму 2.2.3). $\square$

В качестве примера рассмотрим дифференциально-разностное уравнение (2.1.2)

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - r_1), \ldots, x(t - r_k)),$$

где $r_i > 0$. В этом случае оператор монодромии $\mathcal{M}: C \to C$ действует по формуле

$$\mathcal{M}\phi = v^{\phi}_{\omega},$$

где $v^{\phi}: [-r_k, \infty) \to \mathbb{C}$ — решение начальной задачи

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i(t) v(t - r_i), \tag{2.3.2}$$

$$v_0 = \phi \in C, \tag{2.3.3}$$

для $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, k$ использовано обозначение

$$\alpha_i(t) = \partial_{y_i} f(y_0(t),\, y_1(t),\, \ldots,\, y_k(t))\,\Big|_{y_j(t)=\tilde{x}(t-r_j), \quad j=0,\ldots,k.} \tag{2.3.4}$$

Определение 2.3.2. Периодическое решение (орбита периодического решения) называется невырожденным, если мультипликатор $\mu = 1$ этого решения имеет кратность, равную единице. Невырожденное периодическое решение (невырожденная орбита периодического решения) называется гиперболическим, если на единичной окружности нет других мультипликаторов, кроме $\mu = 1$. □

Определение 2.3.3 ([21, §10.3, определение 3.2])**.** Индексом $i(\gamma)$ гиперболической орбиты γ называется количество (с учетом кратности) мультипликаторов Флоке, лежащих вне единичной окружности. □

Приступим к исследованию поведения траекторий в окрестности периодической орбиты. Как и раньше, $T(t)\phi$ обозначает решение уравнения (2.3.1) с начальными данными ϕ при $t = 0$. Зафиксируем $\alpha \in [0, \omega)$, и пусть Σ_α является гладкой поверхностью, трансверсальной к γ в точке $\tilde{x}_\alpha$, с коразмерностью, равной единице. Докажем утверждение, аналогичное лемме 1.2.1.

Лемма 2.3.1. *Для любого $j > 0$ существует единственная непрерывно дифференцируемая функция $t = t(\phi)$, определенная в малой окрестности точки $\tilde{x}_\alpha$ на поверхности Σ_α и удовлетворяющая условиям: $T(t(\phi))\phi \in \Sigma_\alpha$ и $t(\tilde{x}_\alpha) = j\omega$.*

Доказательство. Гладкая поверхность Σ_α в окрестности $D_\alpha \subset C$ точки $\tilde{x}_\alpha$ определяется уравнением $G(\phi) = 0$, где скалярная функция G непрерывно дифференцируема. Рассмотрим уравнение $G(T(t)\phi) = 0$. Производная $\partial_t G(T(t)\phi)$ в точке $(t, \phi) = (j\omega, \tilde{x}_\alpha)$ равна $A = \partial G(\tilde{x}_\alpha)\dot{\tilde{x}}_\alpha$, где $A \neq 0$, поскольку поверхность Σ_α трансверсальна к γ в точке $\tilde{x}_\alpha$ (отображение, соответствующее в данном случае производной Фреше, определяется умножением на число A и, очевидно, обратимо). Ввиду периодичности решения $\tilde{x}$ имеем $T(j\omega)\tilde{x}_\alpha = \tilde{x}_\alpha \in \Sigma_\alpha$. Поэтому имеем $G(T(j\omega)\tilde{x}_\alpha) = 0$. Теперь утверждение леммы следует из теоремы B.1. $\square$

Определим отображение $\pi_\alpha : \ D(\pi_\alpha) \to \Sigma_\alpha$ по формуле $\pi_\alpha(\phi) = T(t(\phi))\phi$. Напомним (см. предыдущий раздел), что для оператора монодромии $\mathcal{M}(\alpha)$ имеет место разложение

$$C = C^s(\alpha) \oplus C^0(\alpha) \oplus C^u(\alpha)$$

на подпространства, инвариантные относительно $\mathcal{M}(\alpha)$. Собственные значения сужения оператора $\mathcal{M}(\alpha)$ на эти подпространства лежат соответственно внутри единичной окружности, на единичной окружности и вне единичной окружности. Такое разложение имеет место и для производной $D\pi_\alpha = \partial\pi_\alpha(\tilde{x}_\alpha)$ от отображения Пуанкаре π_α в точке $\tilde{x}_\alpha$. Это видно из следующего утверждения, которое является аналогом леммы 1.2.2.

Лемма 2.3.2 ([16, гл. XIV, теорема 4.5]). .
(i) *Имеет место равенство* $\sigma(\mathcal{M}(\alpha)) \setminus \{0,1\} = \sigma(D\pi_\alpha) \setminus \{0,1\}$.
(ii) *Для каждого* $\lambda \in \sigma(\mathcal{M}(\alpha)) \setminus \{0,1\}$ *соответствующие обобщенные собственные подпространства операторов* $\mathcal{M}(\alpha)$ *и* $D\pi_\alpha$ *изоморфны.*
(iii) *Пусть кратность мультипликатора* $\lambda = 1$ *равна единице. Тогда* $1 \notin \sigma(D\pi_\alpha)$.

Таким образом, отображение Пуанкаре π_α в окрестности точки $\tilde{x}_\alpha$ гиперболической орбиты может быть представлено в виде, аналогичном выражению (B.1) из следствия 1.2.1. В соответствии со схемой исследований (которой мы следуем), проведенных в разделе 1.2, необходимо доказать существование неустойчивого многообразия и устойчивого многообразия точки покоя $\tilde{x}_\alpha$ отображения π_α:

$$W^s(\tilde{x}_\alpha, V) = \{\phi \in \Sigma_\alpha : \ \pi_\alpha^m \phi \in V \text{ при } m \geqslant 0, \ \pi_\alpha^m \phi \to \tilde{x}_\alpha \text{ при } m \to \infty\},$$
$$W^u(\tilde{x}_\alpha, V) = \{\phi \in \Sigma_\alpha : \ \pi_\alpha^m \phi \in V \text{ при } m \leqslant 0, \ \pi_\alpha^m \phi \to \tilde{x}_\alpha \text{ при } m \to -\infty\}.$$

Этот факт действительно имеет место. Однако его доказательство существенно усложняется по сравнению с тем, как мы действовали в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. Соответствующие построения можно найти в доказательстве теоремы [20, теорема 9.2.3], где используется спектральное разложение в формуле вариации произвольных постоянных. Это непростая и громоздкая техника. Ограничимся формулировкой результата.

Лемма 2.3.3. *Пусть F — непрерывно дифференцируемая функция. Пусть γ — гиперболическая орбита уравнения* (2.3.1). *Тогда для любого α на поверхности Σ_α, трансверсальной к γ в точке $\tilde{x}_\alpha$, существует такая окрестность V точки $\tilde{x}_\alpha$, что $W^s(\tilde{x}_\alpha, V)$ и $W^u(\tilde{x}_\alpha, V)$ являются гладкими подмногообразиями пространства C с разметностью* $\dim W^u(\tilde{x}_\alpha, V) = i(\gamma)$ *и* $\operatorname{codim} W^s(\tilde{x}_\alpha, V) = i(\gamma) - 1$.

Поверхности Σ_α, $\alpha \in [0, \omega)$, можно построить так, чтобы для любого ϕ из достаточно малой окрестности V орбиты γ существовала единственная поверхность Σ_α, содержащая ϕ (см. [20, §10.3]). На каждой из этих поверхностей имеются устойчивое многообразие и неустойчивое многообразие точки покоя $\tilde{x}_\alpha$ отображения π_α. Добавляя координату α, получаем *устойчивое многообразие* и *неустойчивое многообразие* гиперболической орбиты γ:

$$W^s(\gamma, V) = \{\phi \in C : \ x_t(\cdot, \phi) \in V \text{ при } t \geqslant 0, \ x_t(\cdot, \phi) \to \gamma \text{ при } t \to \infty\},$$
$$W^u(\gamma, V) = \{\phi \in C : \ x_t(\cdot, \phi) \in V \text{ при } t \leqslant 0, \ x_t(\cdot, \phi) \to \gamma \text{ при } t \to -\infty\}.$$

Теорема 2.3.1 ([21, §10.3, теорема 3.2]). *Пусть F является непрерывно дифференцируемой функцией. Пусть γ является гиперболической орбитой уравнения* (2.3.1). *Тогда существует такая окрестность V орбиты γ, что $W^s(\gamma, V)$ и $W^u(\gamma, V)$ являются гладкими подмногообразиями пространства C с размерностью $\dim W^u(\gamma, V) = i(\gamma) + 1$ и $\mathrm{codim} W^s(\gamma, V) = i(\gamma)$.*

Отметим, что аналог теоремы 1.2.1 об асимптотической орбитальной устойчивости и наличии свойства асимптотической фазы в случае функционально дифференциальных уравнений также имеет место (см. [16, гл. XIV, теорема 3.3]).

Таким образом, в случае функционально-дифференциальных уравнений мультипликаторы Флоке определяют поведение траекторий в окрестности периодической орбиты так же, как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. Ранее отмечались некоторые отличия, связанные с выводом этого факта. Еще раз отметим существенное отличие, связанное с использованием этого факта.

Замечание 2.3.3. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений мультипликаторы Флоке являются собственными значениями некоторой матрицы, которую всегда можно найти с использованием численных методов. В случае функционально-дифференциальных уравнений оператор монодромии является бесконечномерным и его действие определяется путем решения функционально-дифференциального уравнения. Это существенно усложняет задачу отыскания мультипликаторов Флоке. Данной проблеме посвящены все последующие разделы. □

Задания и вопросы для самоконтроля

1. Что является точкой орбиты периодического решения функционально-дифференциального уравнения?

2. Докажите, что орбита периодического решения является компактным множеством.

3. Почему для периодического решения $\tilde{x}$ функционально дифференциального уравнения (2.3.1) с минимальным периодом $\omega > 0$ имеет место соотношение $\dot{\tilde{x}}_t \neq 0$?

4. Обоснуйте существование разложения $C = C^s(\alpha) \oplus C^0(\alpha) \oplus C^u(\alpha)$ для оператора монодромии.

5. Допустим, γ — гиперболическая орбита и Σ_α — гиперплоскость. Выпишите представление отображения π_α, аналогичное выражению (B.1).

6. Сформулируйте признак асимптотической орбитальной устойчивости в терминах мультипликаторов Флоке.

Глава 3

Условия гиперболичности периодических решений дифференциально-разностных уравнений с одним запаздыванием

В этой главе изучаются условия гиперболичности периодического решения $\tilde{x}$ дифференциально-разностного уравнения

$$x'(t) = f(x(t), x(t-1)). \tag{3.1}$$

Конкретнее: строятся конструктивные условия гиперболичности этого решения. Само решение $\tilde{x}$ считается известным. Предполагается также, что период T этого решения является рациональным числом (т.е. соизмерим с запаздыванием). Сначала разрабатывается подход к отысканию собственных значений оператора монодромии, затем — к анализу алгебраических кратностей этих собственных значений. Существенным является величина периода решения по сравнению с запаздыванием. Сначала рассматривается более простой случай большого периода.

В случае уравнения с одним запаздыванием *оператор монодромии* $\mathcal{M} : C([-1,0],\mathbb{C}) \to C([-1,0],\mathbb{C})$ действует по формуле $\mathcal{M}\phi(t) = v^{\phi}(t+T)$, где v^{ϕ} — решение следующей начальной задачи:

$$v'(t) = \alpha_0(t)v(t) + \alpha_1(t)v(t-1) \qquad (t > 0), \tag{3.2}$$

$$v(t) = \phi(t) \qquad (t \in [-1,0]), \tag{3.3}$$

коэффициенты α_0 и α_1 определены по формуле (2.3.4).

3.1. Метод исследования собственного подпространства оператора монодромии

В этом разделе, предполагая, что $T \in \mathbb{Q}$ и $T > 1$, опишем метод решения уравнения

$$\mathcal{M}\phi - \lambda\phi = 0. \tag{3.1.1}$$

Используя определение оператора монодромии, запишем это уравнение в виде

$$v(t+T) - \lambda v(t) = 0, \qquad t \in [-1, 0], \tag{3.1.2}$$

где функция v является решением начальной задачи (3.2), (3.3) (очевидно, уравнение (3.2) надо рассматривать только на интервале $(0, T)$).

Лемма 3.1.1. *Пусть* $\lambda \neq 0$. *Тогда формула* (3.3) *определяет изоморфизм пространства решений системы уравнений* (3.1.2), (3.2) *на пространство решений уравнения* (3.1.1).

Доказательство. Очевидно, функция ϕ является решением уравнения (3.1.1) тогда и только тогда, когда она определена по формуле (3.3) при каком-либо решении v системы уравнений (3.1.2), (3.2). Отображение, заданное по формуле (3.3), является линейным. Покажем тривиальность ядра этого отображения. Пусть $\phi = 0$. Тогда $v = 0$ как решение начальной задачи (3.2), (3.3). □

Для исследования системы уравнений (3.1.2), (3.2) воспользуемся соизмеримостью периода и запаздывания. Пусть $T = N/M$ и $\tau = 1/M$, где $N, M \in \mathbb{N}$. Тогда $T = N\tau$, $1 = M\tau$. Рассмотрим систему уравнений

$$u_i(t) = u_{i+N}(t)/\lambda \qquad (i = 1 - M, \ldots, 0,\ t \in [0, \tau]), \tag{3.1.3}$$

$$u_i'(t) = \alpha_0(t + (i-1)\tau)u_i(t) + \alpha_1(t + (i-1)\tau)u_{i-M}(t)$$
$$(i = 1, \ldots, N,\ t \in (0, \tau)), \tag{3.1.4}$$

$$u_i(0) = u_{i-1}(\tau) \qquad (i = 2 - M, \ldots, N) \tag{3.1.5}$$

относительно неизвестных функций $u_{1-M}, \ldots, u_N$.

Лемма 3.1.2. *Пусть* $\lambda \neq 0$. *Тогда формула*

$$u_i(t) = v(t + (i-1)\tau) \qquad (i = 1 - M, \ldots, N,\ t \in [0, \tau]) \tag{3.1.6}$$

определяет изоморфизм пространства решений системы (3.1.2), (3.2) *на пространство решений системы* (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5).

Доказательство. 1. Очевидно, заданное по формуле (3.1.6) отображение является линейным и взаимнооднозначным.
2. Пусть функция $v \in C^1([-1, T])$ связана с функциями $u_{1-M}, \ldots, u_N$ по формуле (3.1.6).
3. Легко видеть, что формулы (3.1.3), (3.1.4) получены соответственно из формул (3.1.2), (3.2) заменой переменной t на выражение $t + (i-1)\tau$ и подстановкой функции $u_i(t)$ вместо $v(t + (i-1)\tau)$.
4. Поэтому функции $u_{1-M}, \ldots, u_N$ удовлетворяют уравнениям (3.1.3) и (3.1.4) тогда и только тогда, когда функция v удовлетворяет системе уравнений (3.1.1), (3.2) на интервалах $(i\tau - \tau, i\tau)$ при $i = 1 - M, \ldots, N$.
5. Равенства (3.1.5) необходимы и достаточны для непрерывности функции v в точках $i\tau$, $i = 1 - M, \ldots, N - 1$.
6. Таким образом (см. п. 4 и п. 5), функции $u_{1-M}, \ldots, u_N$ удовлетворяют уравнениям (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5) тогда и только тогда, когда функция v удовлетворяет системе уравнений (3.1.2), (3.2) на интервале $(-1, T)$. $\square$

Замечание 3.1.1. Утверждения лемм 3.1.1 и 3.1.2 выполнены также в случае малого периода, поскольку предположение $T > 1$ пока не использовалось. $\square$

В формуле (3.1.3) функции $u_{1-M}, \ldots, u_{-1}, u_0$ выражены через функции $u_1, \ldots, u_N$ ($1 - M + N > 1$, т. к. $T > 1$). Подставляя эти выражения в формулу (3.1.4), получаем

$$\begin{aligned} u_i'(t) &= \alpha_{0i}(t)u_i(t) + \alpha_{1i}(t)u_{i-M+N}(t)/\lambda, \qquad i = 1, \ldots, M, \\ u_i'(t) &= \alpha_{0i}(t)u_i(t) + \alpha_{1i}(t)u_{i-M}(t), \qquad i = M+1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

где $t \in (0, \tau)$, $\alpha_{ki}(t) = \alpha_k(t+(i-1)\tau)$, $k \in \{0, 1\},\ i = 1, \ldots, N$. Равенства (3.1.5) после той же подстановки принимают вид

$$u_{i+N}(0)/\lambda = u_{i-1+N}(\tau)/\lambda \qquad (i = 2-M, \ldots, 0), \tag{3.1.8}$$

$$\begin{gathered} u_1(0) = u_N(\tau)/\lambda, \\ u_i(0) = u_{i-1}(\tau) \qquad (i = 2, \ldots, N). \end{gathered} \tag{3.1.9}$$

Замечание 3.1.2. Равенства (3.1.8) являются следствием равенств (3.1.9), т. е. системы уравнений (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5) и (3.1.3), (3.1.7), (3.1.9) эквивалентны. При этом краевую задачу (3.1.7), (3.1.9) для системы линейных однородных дифференциальных уравнений относительно вектор-функции $U = (u_1, \ldots, u_N)^T$ можно решать независимо от уравнений (3.1.3). □

Теорема 3.1.1. *Пусть* $\lambda \neq 0$. *Тогда формула*

$$\phi(t) = u_{i+N}(t-(i-1)\tau)/\lambda \qquad (t \in [i\tau - \tau, i\tau],\ i = 1-M, \ldots, 0) \tag{3.1.10}$$

определяет изоморфизм пространства решений краевой задачи (3.1.7), (3.1.9) *на пространство решений уравнения* (3.1.1).

Доказательство. Используя формулы (3.3) и (3.1.3) в равенстве (3.1.6), получим

$$u_{i+N}(t)/\lambda = \phi(t + (i-1)\tau) \qquad (i = 1-M, \ldots, N,\ t \in [0, \tau]).$$

Заменяя переменную t на выражение $t - (i-1)\tau$, получим формулу (3.1.10). Таким образом, утверждение теоремы следует из леммы 3.1.1, леммы 3.1.2 и замечания 3.1.2. □

Пусть $S_\lambda(t)$ — фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений (3.1.7). Тогда $U(t) = S_\lambda(t)c$ — общее решение этой системы. Подставляя его в краевые условия (3.1.9), получаем систему алгебраических уравнений

$$Q(\lambda)c = 0, \tag{3.1.11}$$

где

$$Q(\lambda) = \begin{pmatrix} e_{1\lambda}(0) - e_{N\lambda}(\tau)/\lambda \\ e_{2\lambda}(0) - e_{1\lambda}(\tau) \\ \dots\dots\dots \\ e_{N\lambda}(0) - e_{N-1,\lambda}(\tau) \end{pmatrix}, \tag{3.1.12}$$

через $e_{i\lambda}$ обозначается i-ая строка матрицы S_λ.

Обозначим $N_q = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \ \mathrm{det}Q(\lambda) = 0\}$.

Теорема 3.1.2. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Тогда* $\dim \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I) = N - \mathrm{rank}Q(\lambda)$. *В частности,* $\sigma(\mathcal{M}) \setminus \{0\} = N_q$.

Доказательство. Нуль-пространство $\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)$ является пространством решений уравнения (3.1.1). Величина $N - \mathrm{rank}Q(\lambda)$ является размерностью пространства решений уравнения (3.1.11), которая совпадает с размерностью пространства решений краевой задачи (3.1.7), (3.1.9) по причине невырожденности фундаментальной матрицы. Таким образом, утверждение данной теоремы следует из теоремы 3.1.1. □

Задания и вопросы для самоконтроля

1. Где используется предположение, что период больше запаздывания?
2. Почему для решения уравнения (3.1.1) уравнение (3.2) рассматривается только на интервале $(0, T)$?
3. Почему функция ϕ является решением уравнения (3.1.1) тогда и только тогда, когда она определена по формуле (3.3) при каком-либо решении v системы уравнений (3.1.2), (3.2)?

4. Почему оператор сужения $P: \ C([-1,T]) \to C([-1,0])$, определенный на множестве решений системы уравнений (3.2), (3.1.2), имеет тривиальное ядро $\mathcal{N}(P) = \varnothing$?

5. Почему отображение, заданное по формуле (3.1.6), является взаимно-однозначным?

6. Почему предложенный метод исследования уравнения (3.1.1) не применим, если период и запаздывание не соизмеримы?

7. Почему множество решений системы (3.1.2), (3.2) является векторным пространством?

8. Каким образом делается заключительный вывод в доказательстве леммы 3.1.2?

9. По какому принципу уравнения из формулы (3.1.4) разбиты на две группы при получении формулы (3.1.7)?

10. Пространство решений системы уравнений (3.1.3), (3.1.7), (3.1.9) изоморфно пространству решений системы уравнений (3.1.7), (3.1.9). Почему это так, и какое значение это имеет для доказательства теоремы 3.1.1?

11. Почему величина $N - \mathrm{rank} Q(\lambda)$ является размерностью пространства решений краевой задачи (3.1.7), (3.1.9)?

12. Почему второе утверждение теоремы 3.1.2 является частным случаем первого утверждения?

13. Пусть $\tilde{x} = \sin(4\pi t/3)$. Выписать задачу на собственные функции оператора монодромии и свести ее к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

3.2. Метод исследования алгебраической кратности собственных значений оператора монодромии

В этом разделе, сохраняя те же предположения относительно периода ($T \in \mathbb{Q}$ и $T > 1$), опишем метод решения уравнения

$$(\mathcal{M} - \lambda I)^2 \phi = 0. \tag{3.2.1}$$

Нашей целью является критерий простоты собственных значений оператора монодромии.

Замечание 3.2.1. В этом разделе уравнение (3.2.1) исследуется так же, как в предыдущем разделе исследовалось уравнение (3.1.1). Многое повторяется дословно. Такая форма изложения выбрана по трем причинам. Во-первых, результаты данного раздела не являются прямым следствием результатов предыдущего раздела, и наоборот, например, получаемая в этом разделе вспомогательная система содержит в два раза больше уравнений, и при проверке условий гиперболичности целесообразно использовать ее только при $\lambda = 1$. Во-вторых, повторение способствует овладению предлагаемыми методами. В-третьих, полное изложение в данном случае проще, короче и нагляднее, чем указание отличий от предыдущего раздела. □

Используя определение оператора монодромии, запишем уравнение (3.2.1) в виде

$$v(t + 2T) - 2\lambda v(t + T) + \lambda^2 v(t) = 0, \qquad t \in [-1, 0], \tag{3.2.2}$$

где функция v является решением начальной задачи (3.2), (3.3) (очевидно, уравнение (3.2) надо рассматривать теперь на интервале $(0, 2T)$).

Лемма 3.2.1. *Пусть* $\lambda \neq 0$. *Тогда формула* (3.3) *определяет изоморфизм пространства решений системы уравнений* (3.2.2), (3.2) *на пространство решений уравнения* (3.2.1).

Доказательство. Очевидно, функция ϕ является решением уравнения (3.2.1) тогда и только тогда, когда она определена по формуле (3.3) при каком-либо решении v системы уравнений (3.2.2), (3.2). Отображение, заданное по формуле (3.3), является линейным. Покажем тривиальность ядра этого отображения. Пусть $\phi = 0$. Тогда $v = 0$ как решение начальной задачи (3.2), (3.3). $\square$

Для исследования системы уравнений (3.2.2), (3.2) воспользуемся соизмеримостью периода и запаздывания. Пусть $T = N/M$ и $\tau = 1/M$, где $N, M \in \mathbb{N}$. Тогда $T = N\tau$, $1 = M\tau$. Рассмотрим систему уравнений:

$$u_i(t) = 2u_{i+N}(t)/\lambda - u_{i+2N}(t)/\lambda^2 \qquad (i = 1-M, \ldots, 0,\ t \in [0, \tau]), \tag{3.2.3}$$

$$u_i'(t) = \alpha_0(t + (i-1)\tau)u_i(t) + \alpha_1(t + (i-1)\tau)u_{i-M}(t)$$
$$(i = 1, \ldots, 2N,\ t \in (0, \tau)), \tag{3.2.4}$$

$$u_i(0) = u_{i-1}(\tau) \qquad (i = 2 - M, \ldots, 2N) \tag{3.2.5}$$

относительно неизвестных функций $u_{1-M}, \ldots, u_{2N}$.

Лемма 3.2.2. *Пусть* $\lambda \neq 0$. *Тогда формула*

$$u_i(t) = v(t + (i-1)\tau) \qquad (i = 1 - M, \ldots, 2N,\ t \in [0, \tau]) \tag{3.2.6}$$

определяет изоморфизм пространства решений системы (3.2.2), (3.2) *на пространство решений системы* (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5).

Доказательство. 1. Очевидно, заданное по формуле (3.2.6) отображение является линейным и взаимнооднозначным.

2. Пусть функция $v \in C^1([-1, 2T])$ связана с функциями $u_{1-M}, \ldots, u_{2N}$ по формуле (3.2.6).

3. Легко увидеть, что формулы (3.2.3), (3.2.4) получены соответственно из формул (3.2.2), (3.2) заменой переменной t на выражение $t+(i-1)\tau$ и подстановкой функции $u_i(t)$ вместо $v(t+(i-1)\tau)$.

4. Таким образом, функции $u_{1-M},\dots,u_{2N}$ удовлетворяют уравнениям (3.2.3), (3.2.4) тогда и только тогда, когда функция v удовлетворяет системе уравнений (3.2.1), (3.2) на интервалах $(i\tau-\tau,i\tau)$ при $i=1-M,\dots,2N$.

5. Равенства (3.2.5) необходимы и достаточны для непрерывности функции v в точках $i\tau$, $i=1-M,\dots,2N-1$.

6. Таким образом (см. п. 4 и п. 5), функции $u_{1-M},\dots,u_{2N}$ удовлетворяют уравнениям (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5) тогда и только тогда, когда функция v удовлетворяет системе уравнений (3.2.2), (3.2) на интервале $(-1,2T)$. $\square$

Замечание 3.2.2. Утверждения лемм 3.2.1 и 3.2.2 выполнены также в случае малого периода, поскольку предположение $T>1$ пока не использовалось. $\square$

В формуле (3.2.3) функции $u_{1-M},\dots,u_0$ выражены через функции $u_1,\dots,u_{2N}$ ($1-M+N>1$, так как $T>1$). Подставляя эти выражения в формулу (3.2.4), получаем

$$\begin{cases} u_i'(t)=\alpha_{0i}(t)u_i(t)+\alpha_{1i}(t)\left(\dfrac{2u_{i-M+N}(t)}{\lambda}-\dfrac{u_{i-M+2N}(t)}{\lambda^2}\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=1,\dots,M, \\ \\ u_i'(t)=\alpha_{0i}(t)u_i(t)+\alpha_{1i}(t)u_{i-M}(t), \qquad i=M+1,\dots,2N, \end{cases} \tag{3.2.7}$$

где $t\in(0,\tau)$, $\alpha_{ki}(t)=\alpha_k(t+(i-1)\tau)$, $k\in\{0,1\}$, $i=1,\dots,2N$. Равенства (3.2.5) после той же подстановки принимают вид

$$\frac{2u_{i+N}(0)}{\lambda}-\frac{u_{i+2N}(0)}{\lambda^2}= \\ =\frac{2u_{i-1+N}(\tau)}{\lambda}-\frac{u_{i-1+2N}(\tau)}{\lambda^2}, \quad i=2-M,\dots,0, \tag{3.2.8}$$

$$
\begin{aligned}
u_1(0) &= \frac{u_N(\tau)}{\lambda} - \frac{u_{2N}(\tau)}{\lambda^2}, \\
u_i(0) &= u_{i-1}(\tau), \qquad i = 2, \ldots, 2N.
\end{aligned} \tag{3.2.9}
$$

Замечание 3.2.3. Равенства (3.2.8) являются следствием равенств (3.2.9), т. е. системы уравнений (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5) и (3.2.3), (3.2.7), (3.2.9) эквивалентны. При этом краевую задачу (3.2.7), (3.2.9) для системы линейных однородных дифференциальных уравнений относительно вектор-функции $U = (u_1, \ldots, u_{2N})^T$ можно решать независимо от уравнений (3.2.3). Иначе говоря (не строго), по формуле (3.2.3) определяется изоморфизм пространства решений краевой задачи (3.2.7), (3.2.9) на пространство решений системы уравнений (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5). □

Рассмотрим соотношение

$$
\phi(t) = \frac{u_{i+N}(t-(i-1)\tau)}{\lambda} - \frac{u_{i+2N}(t-(i-1)\tau)}{\lambda^2}, \tag{3.2.10}
$$

где $t \in [i\tau - \tau, i\tau],\ i = 1 - M, \ldots, 0$.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $\lambda \neq 0$*. Тогда формула* (3.2.10) *определяет изоморфизм пространства решений краевой задачи* (3.2.7), (3.2.9) *на пространство решений уравнения* (3.2.1).

Доказательство. Используя формулу (3.3) и формулу (3.2.3) в равенстве (3.2.6), получим

$$
\frac{u_{i+N}(t)}{\lambda} - \frac{u_{i+2N}(t)}{\lambda^2} = \phi(t + (i-1)\tau) \qquad (i = 1 - M, \ldots, N,\ t \in [0, \tau]).
$$

Заменяя переменную t на выражение $t - (i-1)\tau$, получим формулу (3.1.10). Таким образом, утверждение теоремы следует из леммы 3.1.1, леммы 3.1.2 и замечания 3.1.2. □

Пусть $\hat{S}_\lambda(t)$ — фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений (3.2.7). Тогда $U(t) = \hat{S}_\lambda(t)c$ — общее решение этой системы. Подставляя его в краевые условия (3.2.9), получаем систему алгебраических уравнений

$$\hat{Q}(\lambda)c = 0, \tag{3.2.11}$$

где

$$\hat{Q}(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{e}_{1\lambda}(0) - \dfrac{2\hat{e}_{N\lambda}(\tau)}{\lambda} + \dfrac{\hat{e}_{2N,\lambda}(\tau)}{\lambda^2} \\ \hat{e}_{2\lambda}(0) - \hat{e}_{1\lambda}(\tau) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \hat{e}_{2N,\lambda}(0) - \hat{e}_{2N-1,\lambda}(\tau) \end{pmatrix}, \tag{3.2.12}$$

через $\hat{e}_{i\lambda}$ обозначается i-ая строка матрицы $\hat{S}_\lambda$.

Обозначим $N_{\hat{q}} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \ \det\hat{Q}(\lambda) = 0\}$.

Лемма 3.2.3. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Тогда* $\dim\left(\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^2\right) = 2N - \mathrm{rank}\hat{Q}(\lambda)$. *В частности,* $\sigma(\mathcal{M}) \setminus \{0\} = N_{\hat{q}}$.

Доказательство. Нуль-пространство $\mathcal{N}\left((\mathcal{M} - \lambda I)^2\right)$ является пространством решений уравнения (3.2.1). Величина $2N - \mathrm{rank}\hat{Q}(\lambda)$ является размерностью пространства решений уравнения (3.2.11), которая совпадает с размерностью пространства решений краевой задачи (3.2.7), (3.2.9) ввиду невырожденности фундаментальной матрицы. Таким образом, первое доказываемое утверждение следует из теоремы 3.2.1.

Докажем второе утверждение. Из первого утверждения следует, что $\lambda \in N_{\hat{q}}$ тогда и только тогда, когда $\dim\mathcal{N}\left((\mathcal{M} - \lambda I)^2\right) > 0$. При этом $\lambda \in \sigma(\mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда $\dim\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I) > 0$. Остается доказать, что

$$\dim\mathcal{N}\left((\mathcal{M} - \lambda I)^2\right) > 0 \Rightarrow \dim\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I) > 0,$$

поскольку обратное очевидно. Пусть $\phi \in \mathcal{N}\left((\mathcal{M}-\lambda I)^2\right)$, при этом $\phi \neq 0$. Тогда либо $(\mathcal{M}-\lambda I)\phi = 0$ (т. е. $\phi \in \mathcal{N}(\mathcal{M}-\lambda I)$), либо $(\mathcal{M}-\lambda I)\psi = 0$, где $\psi = (\mathcal{M}-\lambda I)\phi \neq 0$ (т. е. $\psi \in \mathcal{N}(\mathcal{M}-\lambda I)$). В обоих случаях $\mathcal{N}(\mathcal{M}-\lambda I) \neq \varnothing$. □

Лемма 3.2.3 приводит к критерию простоты собственных значений оператора монодромии. Покажем это.

Лемма 3.2.4. *Собственное значение* $\lambda \neq 0$ *оператора монодромии является простым тогда и только тогда, когда* $\mathrm{rank}\hat{Q}(\lambda) = 2N-1$.

Доказательство. Алгебраической кратностью $m(\lambda)$ собственного значения λ оператора $\mathcal{M}$ называется размерность ядра $\mathcal{N}\left((\mathcal{M}-\lambda I)^k\right)$, где $k \in \mathbb{N}$ — такое число, что $\mathcal{N}\left((\mathcal{M}-\lambda I)^k\right) = \mathcal{N}\left((\mathcal{M}-\lambda I)^{k+1}\right)$. Если $m(\lambda) = 1$, то , очевидно, $\dim\left(\mathcal{N}(\mathcal{M}-\lambda I)^2\right) = 1$. Докажем обратное. Если $\dim\left(\mathcal{N}(\mathcal{M}-\lambda I)^2\right) = 1$, то (см. вторую часть доказательства леммы 3.2.3)

$$0 \leqslant \dim\mathcal{N}(\mathcal{M}-\lambda I) \leqslant \dim\left(\mathcal{N}(\mathcal{M}-\lambda I)^2\right) = 1,$$

т. е. $\dim\mathcal{N}(\mathcal{M}-\lambda I) = \dim\left(\mathcal{N}(\mathcal{M}-\lambda I)^2\right) = 1$. Лемма доказана. □

Таким образом, мы пришли к критерию гиперболичности.

Теорема 3.2.2. *Периодическое решение* $\tilde{x}$ *уравнения* (3.1) *с периодом* $T \in \mathbb{Q}$ *при* $T > 1$ *является гиперболическим тогда и только тогда, когда* $\Gamma_1(0) \cap N_q = \{1\}$ *и* $\mathrm{rank}\hat{Q}(1) = 2N-1$.

Доказательство. По определению решение $\tilde{x}$ является гиперболическим тогда и только тогда, когда на единичной окружности нет других собственных значений оператора монодромии, кроме $\lambda = 1$, которое является простым. Остается применить теорему 3.1.2 и лемму 3.2.3. □

Задания и вопросы для самоконтроля

1. Каким образом решения уравнения (3.2.1) связаны с алгебраической кратностью соответствующего собственного значения?
2. Позволяет ли уравнение (3.2.1) определять алгебраическую кратность собственных значений, если последняя не равна единице?
3. Почему уравнение (3.2.1) можно записать в виде (3.2.2)?
4. Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в некотором банаховом пространстве. Пусть $\mathcal{N}(A^k) = \mathcal{N}(A^{k+1})$. Доказать, что $\mathcal{N}(A^{k+p}) = \mathcal{N}(A^k)$ для любого $p \in \mathbb{N}$.
5. Можно ли в утверждении теоремы 3.2.2 заменить множество N_q на множество $N_{\hat{q}}$? Если можно, то каковы преимущества и недостатки получаемого утверждения?
6. Заменив номера формул (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4), (3.1.6), (3.1.7), (3.1.9) соответственно на (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4), (3.2.6), (3.2.7), (3.2.9) , номер леммы 3.1.2 на номер 3.2.2 и T на $2T$, дайте ответы на вопросы 2,3,4,5,7,8,9,11,12 из предыдущего раздела.
7. Пусть $\tilde{x} = \sin(4\pi t/3)$. Выписать систему уравнений, решениями которой являются функции из $\mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^2)$, и свести ее к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

3.3. Особенности построения вспомогательных краевых задач в случае малого периода исследуемого решения

В этом разделе построим критерий гиперболичности для периодических решений с малым рациональным периодом.

Пусть $\tilde{x}$ — заданное T-периодическое решение. Пусть $T \in \mathbb{Q}$ и $T < 1$.

I. Обобщим метод отыскания собственных значений оператора монодромии на случай малого периода.

Рассмотрим уравнение (3.1.1):

$$\mathcal{M}\phi - \lambda\phi = 0.$$

В соответствии с леммами 3.1.1 и 3.1.2 (см. замечание 3.1.1) это уравнение сводится к системе уравнений (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5) относительно вектор-функции $(u_{1-M}, \ldots, u_N)^T$.

Лемма 3.3.1. *Соотношения* (3.1.3) *эквивалентны соотношениям*

$$u_i = u_{i+k_iN}\lambda^{-k_i} \qquad (i = 1-M, \ldots, N), \tag{3.3.1}$$

где $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} : \ i + pN > 0\}$.

Доказательство. При $i = 1, \ldots, N$ имеем $k_i = 0$. Поэтому формула (3.3.1) имеет вид $u_i = u_i$.

Рассмотрим формулу (3.1.3):

$$u_i = u_{i+N}/\lambda \qquad (i = 1-M, \ldots, 0).$$

Легко видеть, что формулы (3.1.3) и (3.3.1) однозначно определяют функции $u_{1-M}, \ldots, u_0$ через произвольные функции $u_1, \ldots, u_N$. Поэтому достаточно доказать, что из (3.3.1) следует (3.1.3). Подставим равенство (3.3.1) в формулу (3.1.3):

$$\begin{aligned} &u_{i+N}/\lambda = u_{i+N}/\lambda && (i = 1-N, \ldots, 0), \\ &u_{i+k_iN}\lambda^{-k_i} = u_{(i+N+k_{i+N}N)}\lambda^{-k_{i+N}-1} && (i = 1-M, \ldots, -N). \end{aligned}$$

Мы получили тождества, поскольку $k_{i+N} = k_i - 1$. $\square$

Рассмотрим формулу (3.1.4):

$$u_i'(t) = \alpha_0(t + (i-1)\tau)u_i(t) + \alpha_1(t + (i-1)\tau)u_{i-M}(t)$$
$$(i = 1, \ldots, N, \ t \in (0, \tau)).$$

Подставляя выражения (3.3.1) (при этом удобно использовать обозначение k_i вместо k_{i-M}), получаем

$$u_i'(t) = \alpha_{0i}(t)u_i(t) + \alpha_{1i}(t)u_{i-M+k_iN}(t)\lambda^{-k_i}, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{3.3.2}$$

где $t \in (0, \tau)$, $\alpha_{ji}(t) = \alpha_j(t + (i-1)\tau)$, $j \in \{0, 1\}$, $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} : i - M + pN > 0\}$.

Рассмотрим равенства (3.1.5):

$$u_i(0) = u_{i-1}(\tau) \qquad (i = 2 - M, \ldots, N).$$

Подставляя выражения (3.3.1), получаем

$$u_{i+k_iN}(0)\lambda^{-k_i} = u_{i-1+k_{i-1}N}(\tau)\lambda^{k_{i-1}} \qquad (i = 2 - M, \ldots, 0), \tag{3.3.3}$$

$$\begin{gathered} u_1(0) = u_N(\tau)/\lambda, \\ u_i(0) = u_{i-1}(\tau) \qquad (i = 2, \ldots, N), \end{gathered} \tag{3.3.4}$$

где $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} : \ i + pN > 0\}$. Сформулируем полученный результат.

Лемма 3.3.2. *Системы уравнений* (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5) *и* (3.3.1), (3.3.2), (3.3.4) *эквивалентны.*

Доказательство. Нам осталось показать, что равенства (3.3.3) являются следствием равенств (3.3.4). Пусть $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} : \ i + pN > 0\}$. Тогда $i \in \{-k_iN + 1, \ldots, -k_iN + N\}$. При $i \neq k_iN + 1$ получаем $k_i = k_{i-1}$ и $i + k_iN \in \{2, \ldots, N\}$. При $i = k_iN + 1$ имеем $i - 1 = k_iN$, поэтому $k_{i-1} = k_i + 1$, $i + k_iN = 1$, $i - 1 + k_{i-1}N = N$. Утверждение доказано. $\square$

Замечание 3.3.1. Краевую задачу (3.3.2), (3.3.4) для системы линейных однородных дифференциальных уравнений относительно вектор-функции $U = (u_1, \ldots, u_N)^T$ можно решать независимо от (3.3.1). $\square$

Рассмотрим соотношение

$$\phi(t) = u_{i+k_iN}(t - (i-1)\tau)\lambda^{-k_i}, \tag{3.3.5}$$

где $t \in [i\tau - \tau, i\tau]$, $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} : \ i + pN > 0\}$, $i = 1 - M, \ldots, 0$.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $\lambda \neq 0$. *Тогда формула* (3.3.5) *определяет изоморфизм пространства решений краевой задачи* (3.3.2), (3.3.4) *на пространство решений уравнения* (3.1.1).

Доказательство. Используя формулы (3.3) и (3.3.1) в равенстве (3.1.6), получим

$$u_{i+k_iN}(t)\lambda^{-k_i} = \phi(t+(i-1)\tau),$$

где $t \in [0,\tau]$, $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} :\ i + pN > 0\}$, $i = 1-M,\dots,N$. Заменяя переменную t на выражение $t-(i-1)\tau$, получим формулу (3.3.5). Таким образом, утверждение теоремы следует из лемм 3.1.1, 3.1.2 и 3.3.2 и замечания 3.3.1. $\square$

Пусть $S_\lambda(t)$ — фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений (3.3.2). Тогда $U(t) = S_\lambda(t)c$ — общее решение этой системы. Подставляя его в краевые условия (3.3.4), получаем систему алгебраических уравнений (3.1.11):

$$Q(\lambda)c = 0,$$

где матрица $Q(\lambda)$ определена по формуле (3.1.12):

$$Q(\lambda) = \begin{pmatrix} e_{1\lambda}(0) - e_{N\lambda}(\tau)/\lambda \\ e_{2\lambda}(0) - e_{1\lambda}(\tau) \\ \dots\dots\dots \\ e_{N\lambda}(0) - e_{N-1,\lambda}(\tau) \end{pmatrix},$$

через $e_{i\lambda}$ обозначается i-ая строка матрицы S_λ.

Обозначим $N_q = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} :\ \det Q(\lambda) = 0\}$.

Теорема 3.3.2. *Для любого* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *имеет место равенство* $\dim \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I) = N - \mathrm{rank} Q(\lambda)$. *В частности,* $\sigma(\mathcal{M}) \setminus \{0\} = N_q$.

Доказательство. Действуем так же, как при доказательстве теоремы 3.1.2. Размерность пространства решений краевой задачи (3.3.2), (3.3.4) равна $N - \mathrm{rank} Q(\lambda)$. Поэтому утверждение данной теоремы следует из теоремы 3.3.1. $\square$

II. Обобщим метод проверки простоты собственных значений оператора монодромии на случай малого периода.

Рассмотрим уравнение (3.2.1):

$$(\mathcal{M} - \lambda I)^2 \phi = 0.$$

В соответствии с леммами 3.2.1 и 3.2.2 (см. замечание 3.2.2) это уравнение сводится к системе уравнений (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5) относительно вектор-функции $(u_{1-M}, \ldots, u_N)^T$. Исследуем эту систему.

Лемма 3.3.3. *Соотношения* (3.2.3) *эквивалентны соотношениям*

$$u_i = \frac{(k_i + 1) u_{i+k_i N}}{\lambda^{k_i}} - \frac{k_i u_{i+(k_i+1)N}}{\lambda^{k_i+1}} \qquad (i = 1 - M, \ldots, 2N), \tag{3.3.6}$$

где $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} : \ i + pN > 0\}$.

Доказательство. При $i = 1, \ldots, 2N$ имеем $k_i = 0$. Поэтому формула (3.3.6) имеет вид $u_i = u_i$.

Рассмотрим формулу (3.2.3):

$$u_i = 2u_{i+N}/\lambda - u_{i+2N}/\lambda^2 \qquad (i = 1 - M, \ldots, 0).$$

Легко видеть, что каждая из формул (3.2.3) и (3.3.6) однозначно определяет функции $u_{1-M}, \ldots, u_0$ через произвольные функции $u_1, \ldots, u_{2N}$. Поэтому достаточно доказать, что из (3.2.3) следует (3.3.6).

Пусть имеют место равенства (3.2.3). Используем метод математической индукции. Допустим, что при $i \in \{1 - M, \ldots, -kN + N\}$ $(k \in \mathbb{N})$ имеют место равенства

$$u_i = \frac{(k+1) u_{i+kN}}{\lambda^k} - \frac{k u_{i+(k+1)N}}{\lambda^{k+1}}. \tag{3.3.7}$$

Во-первых, это действительно так при $k = 1$ (ср. (3.2.3)). Во-вторых, эти равенства совпадают с (3.3.6) при $i \in \{1 - \min\{M, kN\}, \ldots, -kN + N\}$. В соответствии с методом математической индукции достаточно доказать, что при $i \in \{1-M, \ldots, -kN+N\}$ (если последнее множество пусто, то доказательство заканчивается на предыдущем шаге индукции) имеют место равенства

$$u_i = \frac{(k+2)u_{i+(k+1)N}}{\lambda^{k+1}} - \frac{(k+1)u_{i+(k+2)N}}{\lambda^{k+2}}.$$

Используя формулу (3.2.3) в равенствах (3.3.7), получаем

$$u_i = \frac{(k+1)}{\lambda^k}\left(\frac{2u_{i+kN+N}}{\lambda} - \frac{u_{i+kN+2N}}{\lambda^2}\right) - \frac{ku_{i+(k+1)N}}{\lambda^{k+1}}.$$

Приведение подобных завершает доказательство. □

Рассмотрим формулу (3.1.4):

$$u_i'(t) = \alpha_0(t+(i-1)\tau)u_i(t) + \alpha_1(t+(i-1)\tau)u_{i-M}(t) \qquad (i = 1, \ldots, N,\ t \in (0,\tau)).$$

Подставляя выражения (3.3.6) (при этом удобно использовать обозначение k_i вместо k_{i-M}), получаем

$$u_i'(t) = \alpha_{0i}(t)u_i(t) + \alpha_{1i}(t)(k_i+1)u_{i-M+k_iN}(t)\lambda^{-k_i} - \alpha_{1i}(t)k_iu_{i-M+k_iN+N}(t)\lambda^{-k_i-1}, \qquad i = 1, \ldots, 2N, \quad (3.3.8)$$

где $t \in (0,\tau)$, $\alpha_{ji}(t) = \alpha_j(t+(i-1)\tau)$, $j \in \{0,1\}$, $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} : i - M + pN > 0\}$.

Рассмотрим равенства (3.1.5):

$$u_i(0) = u_{i-1}(\tau) \qquad (i = 2-M, \ldots, N).$$

Подставляя выражения (3.3.6), получаем

$$\frac{(k_i+1)u_{i+k_iN}(0)}{\lambda^{k_i}} - \frac{k_iu_{i+k_iN+N}(0)}{\lambda^{k_i+1}} = \frac{(k_{i-1}+1)u_{i-1+k_{i-1}N}(\tau)}{\lambda^{k_{i-1}}} - \frac{k_{i-1}u_{i-1+k_{i-1}N+N}(\tau)}{\lambda^{k_{i-1}+1}} \qquad (i = 2-M, \ldots, 0), \quad (3.3.9)$$

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 2u_N(\tau)\lambda^{-1} - u_{2N}(\tau)\lambda^{-2}, \\ u_i(0) &= u_{i-1}(\tau) \qquad (i = 2, \ldots, 2N), \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

где $k_i = \min\{p \in \mathbb{N}: \; i + pN > 0\}$.

Лемма 3.3.4. *Системы уравнений* (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5) *и* (3.3.6), (3.3.8), (3.3.10) *эквивалентны.*

Доказательство. Остается доказать, что равенства (3.3.9) следуют из равенств (3.3.10). Пусть равенства (3.3.10) являются тождествами. Пусть $k_i = \min\{p \in \mathbb{N}: \; i + pN > 0\}$. Тогда $i \in \{-k_iN + 1, \dots, -k_iN + N\}$. При $i \neq k_iN + 1$ получаем $k_i = k_{i-1}$ и $j = i + k_iN \in \{2, \dots, N\}$. Тогда формула (3.3.9) принимает вид

$$\frac{k_i+1}{\lambda^{k_i}} u_j(0) - \frac{k_i}{\lambda^{k_i+1}} u_{j+N}(0) = \frac{k_i+1}{\lambda^{k_i}} u_{j-1}(\tau) - \frac{k_i}{\lambda^{k_i+1}} u_{j+N-1}(\tau)$$

и поэтому являются следствием тождеств (3.3.10).

При $i = k_iN + 1$ имеем $i - 1 = k_iN$, поэтому $k_{i-1} = k_i + 1$, $i + k_iN = 1$, $i - 1 + k_{i-1}N = N$. Тогда соответствующее равенство из формулы (3.3.9) принимает вид

$$\frac{(k_i+1)u_1(0)}{\lambda^{k_i}} - \frac{k_i u_{1+N}(0)}{\lambda^{k_i+1}} = \frac{(k_i+2)u_N(\tau)}{\lambda^{k_i+1}} - \frac{(k_i+1)u_{2N}(\tau)}{\lambda^{k_i+2}},$$

т. е. является следствием 1-го и N-го равенств из формулы (3.3.10). Что и требовалось доказать. □

Отметим, что краевую задачу (3.3.8), (3.3.10) для системы линейных однородных дифференциальных уравнений относительно вектор-функции $U = (u_1, \dots, u_{2N})^T$ можно решать независимо от уравнений (3.3.6).

Рассмотрим соотношение

$$\phi(t) = (k_i+1)u_{i+k_iN}(t-(i-1)\tau)\lambda^{-k_i} - k_i u_{i+k_iN+N}(t-(i-1)\tau)\lambda^{-k_i-1}, \tag{3.3.11}$$

где $t \in [i\tau - \tau, i\tau]$, $k_i = \min\{p \in \mathbb{N}: \; i + pN > 0\}$, $i = 1 - M, \dots, 0$.

Теорема 3.3.3. *Пусть* $\lambda \neq 0$. *Тогда формула* (3.3.11) *определяет изоморфизм пространства решений краевой задачи* (3.3.8), (3.3.10) *на пространство решений уравнения* (3.2.1).

Доказательство. Используя формулы (3.3) и (3.3.6) в равенстве (3.1.6), получим

$$\frac{(k_i+1)u_{i+k_iN}(t)}{\lambda^{k_i}} - \frac{k_i u_{i+k_iN+N}(t)}{\lambda^{k_i+1}} = \phi(t+(i-1)\tau),$$

где $t \in [0,\tau]$, $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} : \ i+pN > 0\}$, $i = 1-M,\dots,0$. Заменяя переменную t на выражение $t-(i-1)\tau$, получим формулу (3.3.11). Таким образом, утверждение теоремы следует из лемм 3.2.1, 3.2.2 и 3.3.4. $\square$

Пусть $\hat{S}_\lambda(t)$ — фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений (3.3.8). Тогда $U(t) = \hat{S}_\lambda(t)c$ — общее решение этой системы. Подставляя его в краевые условия (3.3.10), получаем систему алгебраических уравнений (3.2.11):

$$\hat{Q}(\lambda)c = 0,$$

где матрица $Q(\lambda)$ определена по формуле (3.2.12):

$$\hat{Q}(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{e}_{1\lambda}(0) - \dfrac{2\hat{e}_{N\lambda}(\tau)}{\lambda} + \dfrac{\hat{e}_{2N,\lambda}(\tau)}{\lambda^2} \\ \hat{e}_{2\lambda}(0) - \hat{e}_{1\lambda}(\tau) \\ \dots\dots\dots \\ \hat{e}_{2N,\lambda}(0) - \hat{e}_{2N-1,\lambda}(\tau) \end{pmatrix},$$

через $\hat{e}_{i\lambda}$ обозначается i-ая строка матрицы $\hat{S}_\lambda$.

Обозначим $N_{\hat{q}} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \ \det\hat{Q}(\lambda) = 0\}$.

Лемма 3.3.5. *Для любого* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *имеет место равенство* $\dim\left(\mathcal{N}(\mathcal{M}-\lambda I)^2\right) = 2N - \mathrm{rank}\hat{Q}(\lambda)$. *В частности,* $\sigma(\mathcal{M}) \setminus \{0\} = N_{\hat{q}}$.

Доказательство. Будем действовать так же, как в доказательстве леммы 3.2.3. Размерность пространства решений уравнения (3.2.11) совпадает с размерностью пространства решений задачи (3.3.8), (3.3.10). Таким образом, первая часть доказываемой леммы следует из теоремы 3.3.3. Доказательство второго утверждения повторяется дословно. $\square$

Замечание 3.3.2. Из леммы 3.3.5 следует, что число $\lambda \neq 0$ является простым собственным значением оператора монодромии тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}\hat{Q}(\lambda) = 2N - 1$. (Доказательство этого факта дословно повторяет доказательство леммы 3.2.4.) $\square$

Таким образом, мы пришли к критерию гиперболичности.

Теорема 3.3.4. *Периодическое решение $\tilde{x}$ уравнения* (3.1) *с периодом $T \in \mathbb{Q}$ при $T > 1$ является гиперболическим тогда и только тогда, когда $\Gamma_1(0) \cap N_q = \{1\}$ и $\operatorname{rank}\hat{Q}(1) = 2N - 1$.*

Доказательство. По определению решение $\tilde{x}$ является гиперболическим тогда и только тогда, когда на единичной окружности нет других собственных значений оператора монодромии, кроме $\lambda = 1$, которое является простым. Остается применить теорему 3.3.2 и замечание 3.3.2. $\square$

Замечание 3.3.3. Все результаты и формулы, полученные в этом разделе, остаются верными при $T > 1$. $\square$

Задания и вопросы для самоконтроля

1. Почему не рассматривается случай $T = 1$? Может ли уравнение (3.1) иметь решение $\tilde{x} = \sin 2\pi t$?

2. Опишите порядок использования полученных результатов при исследовании гиперболичности заданного периодического решения $\tilde{x}$.

3. Допустим, $\alpha_0(t) = \sin(6\pi t)$, $\alpha_1(t) = \cos(6\pi t)$, $\tilde{x}(t) = \sin(3\pi t)$. Запишите краевую задачу (3.3.2), (3.3.4). Могут ли предполагаемому периодическому решению $\tilde{x}$ соответствовать заданные коэффициенты α_0 и α_1?

4. При подстановке равенств (3.3.1) в формулу (3.1.5) были получены равенства (3.3.3), (3.3.4). По какому принципу они разбиты на две группы?

5. Каким образом утверждение теоремы 3.3.1 следует из лемм 3.1.1, 3.1.2 и 3.3.2 и замечания 3.3.1?

6. Докажите лемму 3.3.3 по аналогии с леммой 3.3.1. В чем преимущество доказательства, приведенного в основном тексте?

7. Функция $\tilde{x} = \sin(8\pi t/3)$ является решением линейного уравнения $x'(t) = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}(x(t) + 2x(t-1))$. Исследуйте данное решение на гиперболичность с помощью вспомогательной краевой задачи (3.3.2), (3.3.4).

8. Какую роль играет лемма 3.3.4 в построении критерия простоты собственных значений оператора монодромии?

9. Каким образом утверждение теоремы 3.3.3 следует из лемм 3.2.1, 3.2.2 и 3.3.4?

10. Можно ли в случае малого периода для проверки условия гиперболичности использовать только одну вспомогательную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (см. теорему 3.3.4)?

11. Исследуйте решение из шестого задания на гиперболичность с помощью вспомогательной краевой задачи (3.3.8), (3.3.10).

Глава 4

Условия гиперболичности периодических решений дифференциально-разностных уравнений с несколькими запаздываниями

Целью этой главы является обобщение методов, изложенных в главе 3, на случай, когда период решения не соизмерим с запаздыванием. Трудность заключается в том, что требование соизмеримости является необходимым для перехода к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, который лежит в основе этих методов. Оказывается, что для указанного обобщения необходимо рассмотреть более общее уравнение, чем в главе 3, а именно

$$x'(t) = f(x(t), x(t - r_1), \ldots, x(t - r_n)), \tag{4.1}$$

где $0 < r_i \in \mathbb{Q}$. Сразу строить соответствующие методы для таких уравнений в рамках учебного курса невозможно ввиду сложности обозначений. Последующий материал можно условно разбить на две части. В разделах 4.1, 4.2 и 4.3 обобщаются результаты главы 3. В разделах 4.4, 4.5 и 4.6 эти обобщения используются для построения сравнительно нового метода.

4.1. Резольвента оператора монодромии

В этом разделе опишем действие резольвенты оператора монодромии с помощью решения вспомогательной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащей спектральный параметр (см. лемму 4.1.1). Собственные значения этой задачи (за исключением точки $\lambda = 0$) будут совпадать с собственными значениями оператора монодромии (без учета алгебраической кратности).

Предположим, что существует T-периодическое решение $\tilde{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ уравнения (4.1), где $T \in \mathbb{Q}$, и рассмотрим следующее уравнение:

$$\mathcal{M}\phi - \lambda\phi = \psi, \tag{4.1.1}$$

где $\psi \in C_{\mathbb{C}}$ — заданная функция. Очевидно, это уравнение необходимо решать совместно с уравнениями (2.3.2) и (2.3.3), причем уравнение (2.3.2) рассматривается только на интервале $(0, T)$.

Воспользуемся соизмеримостью периода и запаздывания. Пусть $r_1 = \tilde{N}_1/\tilde{M}_1, \ldots, r_n = \tilde{N}_n/\tilde{M}_n$ и $T = \tilde{N}_0/\tilde{M}_0$, где $\tilde{N}_i, \tilde{M}_i \in \mathbb{N}$, $i = 0, \ldots, n$. Определим число M как наименьшее общее кратное чисел $\tilde{M}_0, \ldots, \tilde{M}_n$. Тогда $N = \tilde{N}_0 M/\tilde{M}_0 \in \mathbb{N}$ и $M_i = \tilde{N}_i M/\tilde{M}_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $\tau = 1/M$. Тогда $T = N\tau$, $r_i = M_i\tau$. Положим также $M_0 = 0$ (при этом $r_0 = M_0\tau = 0$) и $N^* = \min\{N, M_n\}$.

Теперь произведем в системе уравнений (4.1.1), (2.3.2), (2.3.3) замену искомой функции v и произвольной фиксированной функции ψ по формулам:

$$u_i(t) = v(t + (i-1)\tau) \qquad (i = 1 - M_n, \ldots, N,\ t \in [0, \tau]), \tag{4.1.2}$$

$$b_i(t) = \psi(t + (i - 1 - M_n)\tau) \qquad (i = 1, \ldots, M_n,\ t \in [0, \tau]). \tag{4.1.3}$$

Тогда уравнения (2.3.3), (4.1.1), (2.3.2) превратятся соответственно в следующие системы уравнений:

$$\phi(t) = u_i(t-(i-1)\tau) \qquad (i = 1-M_n, \dots, 0,\ t \in [i\tau-\tau, i\tau]). \quad (4.1.4)$$

$$u_i(t) = u_{i+N}(t)/\lambda - b_{i+M_n}(t)/\lambda \qquad (i = 1-M_n, \dots, 0,\ t \in [0,\tau]), \quad (4.1.5)$$

$$u_i'(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(t+(i-1)\tau)u_{i-M_k}(t) \qquad (i = 1, \dots, N,\ t \in (0,\tau)). \quad (4.1.6)$$

Если пара функций (ϕ, v) является решением системы (4.1.1), (2.3.2), (2.3.3), то функции $u_{1-M_n}, \dots, u_N$, определенные по формуле (4.1.2), очевидно, удовлетворяют системе уравнений (4.1.5), (4.1.6). Обратное, вообще говоря, не верно: если функции $u_{1-M_n}, \dots, u_N$ удовлетворяют системе уравнений (4.1.5), (4.1.6), то пара функций (ϕ, v), определенная по формулам (4.1.2) и (4.1.4), должна удовлетворять уравнениям (4.1.1), (2.3.2), (2.3.3) лишь на интервалах $(i\tau-\tau, i\tau)$, $i = 1-M_n, \dots, N$. На концах этих интервалов функция v может иметь разрыв. Рассмотрим уравнения

$$u_i(0) = u_{i-1}(\tau) \qquad (i = 2-M_n, \dots, N). \quad (4.1.7)$$

Очевидно, система уравнений (4.1.1), (2.3.2), (2.3.3) эквивалентна (с учетом замены переменных по формулам (4.1.2) и (4.1.4)) системе уравнений (4.1.5), (4.1.6), (4.1.7).

Преобразуем систему уравнений (4.1.5), (4.1.6), (4.1.7). При $i > -N$ в правой части формулы (4.1.5) индекс функции u больше нуля. Если $M_n > N$ и $-M_n < i_0 < 1-N$, то, используя формулу (4.1.5) дважды, имеем

$$u_{i_0}(t) = \frac{u_{i_0+2N}(t)}{\lambda^2} - \sum_{j=0}^{1} \frac{b_{M_n+i_0+jN}(t)}{\lambda^{j+1}}.$$

Используя метод математической индукции, формулу (4.1.5) легко привести к следующему виду:

$$u_i(t) = \frac{u_{i+k_iN}(t)}{\lambda^{k_i}} - \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{b_{M_n+i+jN}(t)}{\lambda^{j+1}}, \quad (4.1.8)$$

где $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} : i + pN > 0\}$, $i = 1 - M_n, \ldots, 0$. Полученные равенства дают явное представление функций $u_{1-M_n}, \ldots, u_0$ через функции $u_1, \ldots, u_N$.

Замечание 4.1.1. Везде далее предполагается, что если верхний предел индексов суммирования меньше нижнего предела, то в такой сумме нет слагаемых (т. е. она равна нулю). □

Из замечания 4.1.1 следует, что при $i \in \{1, \ldots, N\}$ формула (4.1.8) имеет вид $u_i(t) = u_i(t)$. Поэтому, используя представление (4.1.8) в формуле (4.1.6), получим

$$u_i'(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ki}(t) \left(\frac{u_{i-M_k+d_{ki}N}(t)}{\lambda^{d_{ki}}} - \sum_{j=0}^{d_{ki}-1} \frac{b_{M_n+i-M_k+jN}(t)}{\lambda^{j+1}} \right), \tag{4.1.9}$$

где $d_{ki} = \min\{p \in \mathbb{N} : i - M_k + pN > 0\}$, $i = 1, \ldots, N$,

$$\alpha_{ki}(t) = \alpha_k(t + (i-1)\tau).$$

Отметим, что при $k = 0$ и $i > 0$ по определению имеем $d_{ki} = 0$.

Теперь, используя формулу (4.1.8), преобразуем равенства (4.1.7). При $i = 1$ получим

$$u_1(0) = u_N(\tau)/\lambda - b_{M_n}(\tau)/\lambda. \tag{4.1.10}$$

Далее зафиксируем произвольное число $i \in \{1 - M_n, \ldots, 0\}$ и положим $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} :\ i + pN > 0\}$. Если $i \neq 1 - k_i N$, то $k_{i-1} = k_i$ и

$$u_i(0) - u_{i-1}(\tau) = \frac{u_{i+k_iN}(0) - u_{i+k_iN-1}(\tau)}{\lambda^{k_i}} - \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{b_{M_n+i+jN}(0) - b_{M_n+i+jN-1}(\tau)}{\lambda^{j+1}}.$$

Тогда, используя определение функций b_j и непрерывность функции ψ, имеем

$$u_i(0) - u_{i-1}(\tau) = (u_{i+k_iN}(0) - u_{i+k_iN-1}(\tau))/\lambda^{k_i}.$$

Если же $i = 1 - k_i N$, то $k_{i-1} = k_i + 1$ и

$$u_i(0) - u_{i-1}(\tau) = \frac{u_{i+k_iN}(0)}{\lambda^{k_i}} - \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{b_{M_n+i+jN}(0)}{\lambda^{j+1}} -$$
$$-\frac{u_{i+(k_i+1)N-1}(\tau)}{\lambda^{k_i+1}} + \sum_{j=0}^{k_i} \frac{b_{M_n+i+jN-1}(\tau))}{\lambda^{j+1}}.$$

Тогда, используя определение функций b_j, непрерывность функции ψ и равенство $i + k_i N = 1$, имеем

$$u_i(0) - u_{i-1}(\tau) = \frac{(u_1(0) - u_N(\tau)/\lambda + b_{M_n}(\tau)/\lambda)}{\lambda^{k_i}}.$$

Таким образом, равенства (4.1.7) при $i = 1 - M_n, \dots, 1$ являются следствием формул (4.1.8), (4.1.10) и равенств

$$u_i(0) = u_{i-1}(\tau) \qquad (i = 2, \dots, N). \tag{4.1.11}$$

Из вышесказанного следует, что система уравнений (4.1.1), (2.3.2), (2.3.3) эквивалентна (с учетом замены переменных по формулам (4.1.2) и (4.1.4)) системе уравнений (4.1.8), (4.1.9), (4.1.10), (4.1.11). Иначе говоря, для каждого решения ϕ уравнения (4.1.1) по формуле

$$u_i(t) = v^{\phi}(t + (i-1)\tau) \qquad (i = 1, \dots, N, \ t \in [0, \tau]) \tag{4.1.12}$$

однозначно определяется некоторое решение U краевой задачи (4.1.9), (4.1.10), (4.1.11); каждая такая пара функций ϕ и U удовлетворяет следующей формуле (которая является следствием формул (4.1.8) и (4.1.4)):

$$\phi(t) = \frac{u_{i+k_iN}(t - (i-1)\tau)}{\lambda^{k_i}} - \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{b_{M_n+i+jN}(t - (i-1)\tau)}{\lambda^{j+1}}, \tag{4.1.13}$$

где $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} : i + pN > 0\}$, $i = 1 - M_n, \dots, 0$, $t \in [i\tau - \tau, i\tau]$, и для любого решения U краевой задачи (4.1.9), (4.1.10), (4.1.11) соответствующее решение ϕ уравнения (4.1.1) восстанавливается по формуле (4.1.13).

Таким образом, заданные по формулам (4.1.12) и (4.1.13) отображения являются взаимно обратными, и имеет место следующее утверждение.

Лемма 4.1.1. *Пусть* $\lambda \neq 0$, *и пусть для произвольной фиксированной функции* $\psi \in C_{\mathbb{C}}$ *по формуле* (4.1.3) *определены функции* b_i $(i = 1, \dots, M_n)$. *Тогда формула* (4.1.13) *определяет взаимно однозначное отображение пространства решений краевой задачи* (4.1.9), (4.1.10), (4.1.11) *на пространство решений уравнения* (4.1.1).

Рассмотрим однородную систему дифференциальных уравнений

$$u_i'(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ki}(t) \frac{u_{i-M_k+d_{ki}N}(t)}{\lambda^{d_{ki}}}, \tag{4.1.14}$$

где $d_{ki} = \min\{p \in \mathbb{N} : \ i - M_k + pN > 0\}$, $i = 1, \dots, N$. Пусть S_λ — такая фундаментальная матрица этой системы, для которой $S_\lambda(0) = E$. Выпишем общее решение системы дифференциальных уравнений (4.1.9) по формуле Коши:

$$U(t) = S_\lambda(t)c + S_\lambda(t) \int_0^t S_\lambda^{-1}(s)\Psi(s)b(s)ds, \tag{4.1.15}$$

где Ψ — матрица-функция, для которой

$$(\Psi(t)b)_i = -\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{d_{ki}-1} \alpha_{ki}(t) \frac{b_{M_n+i-M_k+jN}}{\lambda^{j+1}}. \tag{4.1.16}$$

(При $k = 0$ имеем $d_{ki} = 0$.) Подставляя выражение (4.1.15) в краевые условия (4.1.10), (4.1.11), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора $c \in \mathbb{C}^N$. Запишем ее в векторной форме:

$$Q(\lambda)c = L(\lambda)\psi, \tag{4.1.17}$$

где

$$Q(\lambda) = \begin{pmatrix} e_{1\lambda}(0) - e_{N\lambda}(\tau)/\lambda \\ e_{2\lambda}(0) - e_{1\lambda}(\tau) \\ \dots\dots\dots \\ e_{N\lambda}(0) - e_{N-1,\lambda}(\tau) \end{pmatrix}, \tag{4.1.18}$$

через $e_{i\lambda}$ обозначается i-ая строка матрицы S_λ,

$$L(\lambda)\psi = \begin{pmatrix} -\dfrac{\psi(0)}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda}\left(S_\lambda(\tau)\displaystyle\int_0^\tau S_\lambda^{-1}(s)\Psi(s)b(s)ds\right)_N \\ \left(S_\lambda(\tau)\displaystyle\int_0^\tau S_\lambda^{-1}(s)\Psi(s)b(s)ds\right)_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(S_\lambda(\tau)\displaystyle\int_0^\tau S_\lambda^{-1}(s)\Psi(s)b(s)ds\right)_{N-1} \end{pmatrix}, \qquad (4.1.19)$$

вектор-функция b зависит от функции ψ по формуле (4.1.3).

Обозначим $N_q = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \ \det Q(\lambda) = 0\}$.

Теорема 4.1.1. *Если* $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, *то* $\dim \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I) = N - \mathrm{rank} Q(\lambda)$. *В частности,* $\sigma(\mathcal{M}) \setminus \{0\} = N_q$.

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$. При $\psi = 0$ уравнения (4.1.1) и (4.1.17) примут вид $(\mathcal{M} - \lambda I)\phi = 0$ и $Q(\lambda)c = 0$ соответственно. Поскольку фундаментальная матрица S_λ невырождена, то она осуществляет изоморфизм нуль-пространства матрицы $Q(\lambda)$ на пространство решений краевой задачи (4.1.9), (4.1.10), (4.1.11). Поэтому, используя лемму 4.1.1 (при $\psi = 0$ отображения (4.1.12) и (4.1.13) являются линейными), при $\lambda \neq 0$ получим, что нуль-пространство матрицы $Q(\lambda)$ изоморфно пространству решений уравнения (4.1.1). $\square$

Задания и вопросы для самоконтроля

1. Пусть период рассматриваемого решения равен $5/3$, а запаздывания $r_1 = 1/2$ и $r_2 = 2$. Определите параметры N, M и τ.

2. Допустим, $\tilde{x} = \sin(6\pi t/5)$ решение дифференциально-разностного уравнения с запаздываниями $r_1 = 1/2$ и $r_2 = 2$. Этому решению соответствует решение уравнения в вариациях и, следовательно, решение вспомогательной краевой задачи. Выпишите эти решения.

3. В основном тексте неоднократно используются функции вида $d_{k,i} = \min\{p \in \mathbb{N} : \ i - M_k + pN > 0\}$. При заданных параметрах $T = 1/3$,

$n = 2$, $r_1 = 3/4$, $r_2 = 4$ определите значение $d_{1,5}$.

4. Проверьте допустимость следующего равенства:

$$Q(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda^2 & 2+\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Принимая это равенство как данное, сделайте выводы о мультипликаторах Флоке.

5. Функция $\tilde{x} = \sin(4\pi t/3)$ является решением уравнения

$$x'(t) = \frac{4\pi t}{3\sqrt{3}}[4x^2(t-1) + 4x^2(t-2) + 4x(t-1)x(t-2) + \\ + x(t-1) - x(t-2) - 3].$$

Выпишите соответствующую краевую задачу (4.1.9), (4.1.10), (4.1.11). Одно из решений этой задачи заранее известно. Предъявите это решение и проверьте выполнение равенств (4.1.9), (4.1.10), (4.1.11).

6. В предыдущей главе мы работали с однородными линейными уравнениями. В чем причина появления неоднородных линейных уравнений в данном разделе?

7. Каким образом результат леммы 4.1.1 позволяет описать действие резольвенты оператора монодромии?

4.2. Характеристическая функция

Развивая результаты предыдущего раздела, опишем действие резольвенты оператора монодромии и докажем, что при некоторых дополнительных ограничениях алгебраическая кратность ненулевого собственного значения λ оператора монодромии совпадает с кратностью λ как нуля функции

$$q(\lambda) = \mathrm{det}Q(\lambda).$$

Для каждого числа $k \in \{1, \ldots, n\}$ определим набор $\overline{M}_k$ индексов $j \in \{1, \ldots, N-1\}$ по следующему правилу: $j \in \overline{M}_k$, если

$$\begin{aligned} &1.\ \ j \in \{1, \ldots, N-1\}, \quad j \leqslant M_k; \\ &2.\ \ \alpha_{kj}(\tau) \neq 0; \\ &3.\ \ j + M_{k+i} - M_k \notin \overline{M}_{k+i} \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-k). \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Замечание 4.2.1. Наборы индексов $\overline{M}_k$ строятся в порядке убывания индекса: $\overline{M}_n, \overline{M}_{n-1}, \ldots, \overline{M}_1$. □

Зададим общую нумерацию всех индексов, вошедших в множества $\overline{M}_1, \ldots, \overline{M}_n$, в произвольном порядке (одинаковые индексы, входящие в разные множества $\overline{M}_k$, нумеруются отдельно). Обозначим через M^* общее число элементов во всех наборах $\overline{M}_k$. Теперь каждому номеру $\nu \in \{1, \ldots, M^*\}$ соответствуют единственный индекс $j = j_\nu$ и множество $\overline{M}_k$, которому принадлежит именно этот индекс j_ν (индексы с равными значениями могут принадлежать разным множествам). Таким образом, для каждого номера ν однозначно определено число $k = k_\nu$.

Определим векторы B_ν ($\nu = 1, \ldots, M^*$) с координатами $B_{\nu\gamma}$, заданными по формуле: $B_{\nu 1} = 0$

$$B_{\nu\gamma} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k\gamma}(\tau)\delta_{M_k, M_{k_\nu}+\gamma-1-j_\nu} \qquad (\gamma = 2, \ldots, N). \tag{4.2.2}$$

При любой допустимой паре значений ν и γ полученная сумма может содержать не более одного ненулевого слагаемого. Определим также вектор $B_0 = (1, 0, \ldots, 0)^T$.

В работе [6] доказано следующее утверждение.

Лемма 4.2.1. *Если* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, *то* $B_\nu \in \mathcal{R}(L(\lambda))$ *при* $\nu = 0, 1, \ldots, M^*$.

Доказательство. Поскольку образ $\mathcal{R}(L(\lambda))$ конечномерный, он замкнут в $\mathbb{C}^N$. Поэтому для доказательства леммы достаточно найти последовательность функций $\tilde{\psi}_{\nu h} \in C_{\mathbb{C}}$, $(\nu = 0, 1, \ldots, M^*\,,\ h \in \mathbb{N})$ таких, что $L(\lambda)\tilde{\psi}_{\nu h} \to B_\nu$ при $h \to \infty$.

Построим последовательность функций $\tilde{\psi}_{0h} \in C_{\mathbb{C}}$. Для каждого $h \in \mathbb{N}$ при $h > 1/\tau$ положим $\tilde{\psi}_{0h} = -\lambda\tilde{\psi}^0_{0h}$, где $\tilde{\psi}^0_{0h} \in C_{\mathbb{C}}$ является такой неотрицательной функцией, для которой $\tilde{\psi}^0_{0h}(0) = 1$, $\tilde{\psi}^0_{0h}(t) \leqslant 1$ при $t \in \left[-\frac{1}{h}, 0\right]$, $\mathrm{supp}\tilde{\psi}^0_{0h} \subset \left[-\frac{1}{h}, 0\right]$. По формуле (4.1.3) при $\psi = \tilde{\psi}_{0h}$ определим вектор-функцию $b = \tilde{b}_{0h}$

$$\tilde{b}_{0h}(s) = \Big(0, \ldots, 0,\, \tilde{\psi}_{0h}(s-\tau)\Big)^T \qquad (s \in [0,\, \tau]).$$

Тогда в силу (4.1.19) координаты $(L(\lambda)\tilde{\psi}_{0h})_j$ запишутся следующим образом:

$$(L(\lambda)\tilde{\psi}_{0h})_1 = 1 + \frac{1}{\lambda}\left(S_\lambda(\tau)\int\limits_{\tau-1/h}^{\tau} S_\lambda^{-1}(s)\Psi(s)\tilde{b}_{0h}(s)ds\right)_N,$$

$$(L(\lambda)\tilde{\psi}_{0h})_j = \left(S_\lambda(\tau)\int\limits_{\tau-1/h}^{\tau} S_\lambda^{-1}(s)\Psi(s)\tilde{b}_{0h}(s)ds\right)_{j-1} \quad \text{для } j = 2, \ldots, N.$$

Очевидно, $L(\lambda)\tilde{\psi}_{0h} \to B_0 = (1, 0, \ldots, 0)^T$ при $h \to \infty$.

Использованный подход также позволяет построить вектора B_ν при $\nu = 1, \ldots, M^*$ (как это сделано в работе [6]). Однако эта процедура является очень громоздкой и ее приведение здесь нецелесообразно. $\square$

Обозначим через $\tilde{Q}^j(\lambda)$ j-ую строку матрицы $\tilde{Q}(\lambda)$, присоединенной к матрице $Q(\lambda)$. Через $j(\lambda)$ обозначим порядок числа $\lambda \neq 0$ как нуля функции $q(\lambda) = \mathrm{det}Q(\lambda)$ (если $q(\lambda) \neq 0$, то положим $j(\lambda) = 0$), а через $m(\lambda)$ обозначим алгебраическую кратность числа λ как собственного значения оператора $\mathcal{M}$.

Теорема 4.2.1. *Пусть зафиксировано число* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Тогда*

$$m(\lambda) \leqslant j(\lambda)(N - \mathrm{rank} Q(\lambda)).$$

Если, кроме того, существуют такие числа $\eta \in \{N - N^* + 1, \ldots, N\}$ *и* $\nu \in \{0, \ldots, M^*\}$, *что*

$$\tilde{Q}^\eta(\lambda) \cdot B_\nu \neq 0, \tag{4.2.3}$$

где вектор B_ν *определен по формуле* (4.2.2), *то* $m(\lambda) = j(\lambda)$. *При этом для каждого* $\lambda \in \sigma(\mathcal{M}) \setminus \{0\}$ *имеем* $dim\,\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I) = 1$.

Доказательство. 1. Докажем, что аналитическая оператор-функция

$$\mathbb{C} \setminus \big(\sigma(\mathcal{M}) \cup \{0\}\big) \ni \lambda \mapsto q(\lambda)(\mathcal{M} - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(C_{\mathbb{C}}, C_{\mathbb{C}})$$

допускает непрерывное продолжение H на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Пусть заданы число $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(\mathcal{M}) \cup \{0\})$ и функция $\psi \in C_{\mathbb{C}}$. Положим $\phi = (\mathcal{M} - \lambda I)^{-1}\psi$. Тогда, сделав в формуле (4.1.13) замену переменной по формуле (4.1.3), получим

$$\phi(t) = \frac{u_{i+k_iN}(t - (i-1)\tau)}{\lambda^{k_i}} - \sum_{j=0}^{k_i - 1} \frac{\psi(t + jT)}{\lambda^{j+1}},$$

где $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} :\ i + pN > 0\}$, $i = 1 - M_n, \ldots, 0$, $t \in [i\tau - \tau, i\tau]$, вектор-функция $U = (u_1, \ldots, u_N)$ определена по формуле

$$U(t) = S_\lambda(t)\left(Q^{-1}(\lambda)L(\lambda)\psi\right) + S_\lambda(t)\int_0^t S_\lambda^{-1}(s)\Psi(s)b^\psi(s)ds \qquad (t \in [0, \tau]),$$

вектор-функция b^ψ зависит от ψ по формуле (4.1.3). Последнее равенство получено из формул (4.1.15) и (4.1.17). Тогда для $t \in [i\tau - \tau, i\tau]$ и $i = 1 - M_n, \ldots, 0$ значения функции $q(\lambda)\phi(t) = q(\lambda)\left(\mathcal{M} - \lambda I\right)^{-1}\psi(t)$ определяются формулой

$$q(\lambda)\phi(t) = \frac{q(\lambda)u_{i+k_iN}(t - (i-1)\tau)}{\lambda^{k_i}} - \sum_{j=0}^{k_i - 1} \frac{q(\lambda)\psi(t + jT)}{\lambda^{j+1}}, \tag{4.2.4}$$

где $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} :\ i + pN > 0\}$. Очевидно,

$$q(\lambda)U = A(\lambda)\psi + B(\lambda)\psi,$$

где $A(\lambda)$, $B(\lambda)$: $C([-r_n, 0], \mathbb{C}) \to C([0, \tau], \mathbb{C}^N)$ — линейные ограниченные операторы вида:

$$(A(\lambda)\psi)(t) = S_\lambda(t)\tilde{Q}(\lambda)L(\lambda)\psi,$$
$$(B(\lambda)\psi)(t) = q(\lambda)S_\lambda(t)\int_0^t S_\lambda^{-1}(s)\Psi(s)b^\psi(s)ds.$$

Эти операторы определены для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(\mathcal{M}) \cup \{0\})$. Из леммы 4.1.1 следует, что $\|B(\lambda)\| \to 0$ при $\lambda \to \lambda_0 \in \sigma(\mathcal{M}) \setminus \{0\}$. Оператор-функция $\lambda \mapsto S_\lambda$, действующая из $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ в банахово пространство непрерывных отображений $[0, \tau] \to \mathbb{C}^{N\times N}$, непрерывна. Следовательно, существует непрерывное продолжение оператор-функции $A(\lambda)$ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2. Докажем теперь, что $m(\lambda) \leqslant j(\lambda)(N - \mathrm{rank}Q(\lambda))$.

Если $\lambda \notin \sigma(\mathcal{M})$, то по определению $m(\lambda) = 0$. Пусть $0 \neq \lambda \in \sigma(\mathcal{M})$. Положим $\varkappa = \varkappa_\lambda = \min\{k \in \mathbb{N} : \ \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^k = \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^{k+1}\}$. Поскольку $(\mathcal{M} - \lambda I)^{-1} = q^{-1}(\lambda)H(\lambda)$, то порядок полюса резольвенты оператора $\mathcal{M}$ в точке $\lambda \neq 0$ не превосходит $j(\lambda)$ (см. определение D.2). По теореме D.2 имеем

$$\varkappa \leqslant j(\lambda).$$

С другой стороны, из теоремы 4.1.1 , в силу теоремы D.3 имеем

$$m(\lambda) = \dim \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^\varkappa = \sum_{k=1}^{\varkappa}(\dim \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^k -$$
$$- \dim \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^{k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{\varkappa}(N - \mathrm{rank}Q(\lambda)).$$

Из последних двух неравенств следует, что $m(\lambda) \leqslant j(\lambda)(N - \mathrm{rank}Q(\lambda))$.

3. Зафиксируем произвольное значение $\lambda \in \sigma(\mathcal{M}) \setminus \{0\}$. Пусть выполнено условие (4.2.3). Допустим, что $H(\lambda)\psi = 0$ для всех $\psi \in C_\mathbb{C}$. В таком случае, поскольку при $\lambda \in \sigma(\mathcal{M}) \setminus \{0\}$ второе слагаемое в формуле (4.2.4) равно нулю, для всех $\psi \in C_\mathbb{C}$ равны нулю координаты вектор-функции $q(\lambda)U$, входящие в формулу (4.2.4). Если $T \leqslant r_n$

(т. е. $N \leqslant M_n$), то в формулу (4.2.4) входят все компоненты вектор-функции $q(\lambda)U$ (при этом $N - N^* + 1 = 1$); если $T > r_n$ (т.е. $N > M_n$), то в формулу (4.2.4) входят компоненты вектор-функции $q(\lambda)U$ с номерами $\eta \in \{N - M_n + 1, \dots, N\}$ (при этом $N^* = M_n$). Другими словами, $q(\lambda)u_\eta = 0$ при $\eta \in \{N - N^* + 1, \dots, N\}$ для всех $\psi \in C_{\mathbb{C}}$. Поскольку $S_\lambda(0) = E$, то координаты вектор-функции $\tilde{Q}(\lambda)L(\lambda)\psi$ с номерами $\eta \in \{N - N^* + 1, \dots, N\}$ равны нулю.

Однако по условию теоремы существуют такие числа $\nu \in \{0, \dots, M^*\}$ и $\eta \in \{N - N^* + 1, \dots, N\}$, для которых выполнено условие (4.2.3), где вектор B_ν определен по формуле (4.2.2) и принадлежит $\mathcal{R}(L(\lambda))$. Иначе говоря, существует функция $\psi \in C_{\mathbb{C}}$, для которой $(\tilde{Q}(\lambda)L(\lambda)\psi)_\eta \neq 0$. Это противоречит тому, что $H(\lambda) = 0$.

4. Докажем теперь, что $m(\lambda) = j(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(\mathcal{M}) \cup \{0\})$, то в силу теоремы 4.1.1 имеем $m(\lambda) = 0 = j(\lambda)$. Пусть $0 \neq \lambda \in \sigma(\mathcal{M})$. Из условия (4.2.3) и теоремы 4.1.1 вытекает равенство $\dim \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I) = 1$. Тогда, продолжая рассуждения из п. 2 настоящего доказательства, получаем

$$m(\lambda) = \sum_{k=1}^{\kappa} \left(dim\,\mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^k) - dim\,\mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^{k-1}) \right) = \sum_{k=1}^{\kappa} 1 = \kappa.$$

Поскольку $(\mathcal{M} - \lambda I)^{-1} = q^{-1}(\lambda)H(\lambda)$ и $H(\lambda) \neq 0$, то порядок полюса резольвенты оператора $\mathcal{M}$ в точке λ равен $j(\lambda)$. В силу теоремы D.2 имеем $j(\lambda) = \kappa$. Таким образом, $m(\lambda) = \kappa = j(\lambda)$. $\square$

В завершение настоящего раздела получим необходимые и достаточные условия гиперболичности. (Здесь необходимые условия отличаются от достаточных. В разделе 4.3 будут выведены другие условия.)

Теорема 4.2.2. *Пусть $\tilde{x}$ является T-периодическим решением уравнения* (4.1) *и $T \in \mathbb{Q}$.*

Тогда, если $\Gamma_1(0) \cap N_q = \{1\}$, $\mathrm{rank} Q(1) = N - 1$ *и* $q'(1) \neq 0$, *то решение* $\tilde{x}$ *— гиперболическое.*

Обратно, если решение $\tilde{x}$ *— гиперболическое и, кроме того, найдутся соответствующие числа* η *и* ν, *для которых выполнено неравенство* (4.2.3), *то* $\Gamma_1(0) \cap N_q = \{1\}$, $\mathrm{rank} Q(1) = N - 1$ *и* $q'(1) \neq 0$.

Доказательство. 1. Пусть $\Gamma_1(0) \cap N_q = \{1\}$, $\mathrm{rank} Q(1) = N - 1$ и $q'(1) \neq 0$. В силу теоремы 4.1.1 имеем $\Gamma_1(0) \cap \sigma(\mathcal{M}) = \{1\}$. Ввиду теоремы 4.2.1 получаем

$$m(1) \leqslant j(1)(N - \mathrm{rank} Q(1)) = 1.$$

Поскольку $1 \in \sigma(\mathcal{M})$, то $m(1) > 0$. Таким образом, $m(1) = 1$.

2. Пусть теперь T-периодическое решение $\tilde{x}$ уравнения (4.1) является гиперболическим, и пусть для каких-либо чисел η и ν выполнено неравенство (4.2.3). По теореме 4.1.1 имеем $\Gamma_1(0) \cap N_q = \Gamma_1(0) \cap \sigma(\mathcal{M}) = \{1\}$, а благодаря теореме 4.2.1 имеем $j(1) = m(1) = 1$. Поэтому $q'(1) \neq 0$. Из равенства $q(1) = 0$ и неравенства (4.2.3) следует, что $\mathrm{rank} Q(1) = N - 1$. □

Задания и вопросы для самоконтроля

1. Допустим, известно, что $n = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ и $T = 3/2$. Допустим, $\alpha_k(t) = \sin(4k\pi t/3)$. Постройте вектор B_1.

2. В чем состоят каждый из двух подходов к исследованию алгебраической кратности, изложенные соответственно в главе 3 и в главе 4?

3. В чем преимущества каждого из этих подходов?

4. Как можно использовать утверждение теоремы 4.2.1, если неравенство (4.2.3) не выполнено?

5. Известно, что кратность корня уравнения $\det(Q - \lambda I) = 0$ равна $N - \mathrm{rank}(Q - \lambda I)$. Быть может, $j(\lambda) = N - \mathrm{rank} Q(\lambda)$?

6. Откуда в теореме 4.2.1 вытекает равенство $\dim \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I) = 1$?

7. Почему $\dim \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^k - \dim \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^{k-1} \leqslant N - \mathrm{rank} Q(\lambda)$?

8. В основном тексте требование выполнения неравенства (4.2.3) носит технический характер. Существуют ли примеры, когда это неравенство не выполнено?
9. Опишите причины, по которым неравенство $k \leqslant j(\lambda)$ следует из представления $(\mathcal{M} - \lambda I)^{-1} = q^{-1}(\lambda)H(\lambda)$ (см. доказательство теоремы 4.2.1).

4.3. Критерий простоты собственных значений оператора монодромии

В этом разделе, предполагая $T \in \mathbb{Q}$, установим связь между функциями из $\mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^2)$ при $\lambda \neq 0$ и решениями линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе этой системы получим критерий простоты для собственных значений оператора монодромии и затем критерий гиперболичности для периодических решений уравнения (4.1) с рациональным периодом.

Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{M} - \lambda I)^2 \phi = 0. \tag{4.3.1}$$

Функция ϕ является решением уравнения (4.3.1) тогда и только тогда, когда пара функций (ϕ, v^{ϕ}) является решением системы уравнений (4.3.1), (2.3.2), (2.3.3). При этом решение уравнения (2.3.2) нам необходимо знать только при $t \in (-r_n, 2T)$.

Воспользуемся соизмеримостью периода и запаздывания ($T = N\tau$, $r_i = M_i\tau$) и в системе, состоящей из уравнений (4.3.1), (2.3.2), (2.3.3), произведем следующую замену переменной:

$$u_i(t) = v(t + (i-1)\tau) \qquad (i = 1 - M_n, \ldots, 2N,\ t \in [0, \tau]). \tag{4.3.2}$$

При этом из уравнения (2.3.3) получаем

$$\phi(t) = u_i(t - (i-1)\tau) \qquad (t \in [i\tau - \tau, i\tau],\ i = 1 - M_n, \dots, 0), \quad (4.3.3)$$

а уравнения (4.3.1) и (2.3.2) превратятся в следующие системы уравнений соответственно:

$$u_i(t) = \frac{2u_{i+N}(t)}{\lambda} - \frac{u_{i+2N}(t)}{\lambda^2} \qquad (i = 1 - M_n, \dots, 0,\ t \in [0, \tau]), \quad (4.3.4)$$

$$u_i'(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(t + (i-1)\tau) u_{i-M_k}(t) \qquad (i = 1, \dots, 2N,\ t \in (0, \tau)). \quad (4.3.5)$$

Если пара функций (ϕ, v) удовлетворяет системе уравнений (4.3.1), (2.3.2), (2.3.3), то определенные по формуле (4.3.2) функции u_i удовлетворяют системе уравнений (4.3.4) и (4.3.5).

Обратное не верно. Если функции u_i, $i = 1 - M_n, \dots, 2N$ удовлетворяют системе уравнений (4.3.4) и (4.3.5), то пара функций (ϕ, v), определенных в соответствии с формулами (4.3.3) и (4.3.2), обязаны удовлетворять системе уравнений (4.3.1), (2.3.2), (2.3.3) лишь на интервалах $(i\tau, i\tau + \tau)$, где $i = -M_n, \dots, 2N - 1$. На концах интервалов эти функции могут иметь разрыв. Используя формулу (4.3.2), условие непрерывности функции v (а, следовательно, и ϕ, см. уравнение (2.3.3)) в этих точках можно записать в виде

$$u_i(0) = u_{i-1}(\tau) \qquad (i = 2 - M_n, \dots, 2N). \quad (4.3.6)$$

Легко видеть, что система уравнений (4.3.1), (2.3.2), (2.3.3) эквивалентна (с учетом замены переменных (4.3.2) и (4.3.3)) системе уравнений (4.3.4), (4.3.5), (4.3.6).

Формула (4.3.4) при $i \in \{-\min\{N, M_n\}, \dots, 0\}$ дает представление функций u_i через функции $u_1, \dots, u_{2N}$. Если $M_n > N$, то зафиксируем

$i_0 \in \{-M_n, \ldots, -N\}$. Рассмотрим равенство (4.3.4) при $i = i_0$, и к первому слагаемому правой части применим равенство (4.3.4) при $i = i_0 + N$:

$$u_{i_0} = \frac{2}{\lambda}\left(\frac{2u_{i_0+2N}}{\lambda} - \frac{u_{i_0+3N}}{\lambda^2}\right) - \frac{u_{i_0+2N}}{\lambda^2} = \frac{(2\cdot 2-1)u_{i_0+2N}}{\lambda^2} - \frac{2u_{i_0+3N}}{\lambda^3}.$$

Если $M_n > kN$ и при $i_0 \in \{-M_n, \ldots, -kN\}$ имеет место равенство

$$u_{i_0} = \frac{(a_k+1)u_{i_0+kN}}{\lambda^k} - \frac{a_k u_{i_0+(k+1)N}}{\lambda^{k+1}},$$

то, аналогичным образом используя $(i_0 + kN)$-ое уравнение системы (4.3.4), получаем

$$u_{i_0} = \frac{(a_k+2)u_{i_0+(k+1)N}}{\lambda^{k+1}} - \frac{(a_k+1)u_{i_0+(k+2)N}}{\lambda^{k+2}}.$$

Применяя метод математической индукции, перепишем систему (4.3.4) в виде

$$u_i = \frac{(k_i+1)u_{i+k_iN}}{\lambda^{k_i}} - \frac{k_i u_{i+(k_i+1)N}}{\lambda^{k_i+1}} \qquad (i = 1 - M_n, \ldots, 0), \tag{4.3.7}$$

где $k_i = \min\{p \in \mathbb{N}: \ i + pN > 0\}$. Эта система уравнений эквивалентна системе (4.3.4) и дает явное представление функций $u_{1-M_n}, \ldots, u_0$ через функции $u_1, \ldots, u_{2N}$.

Используя представление (4.3.7) и то, что формально при $i > 0$ равенство (4.3.7) имеет вид $u_i = u_i$ (в этом случае $k_i = 0$), исключим функции $u_{-M_n+1}, \ldots, u_0$ из уравнений (4.3.5):

$$u_i'(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ki}(t)\left(\frac{(d_{ki}+1)u_{i-M_k+d_{ki}N}(t)}{\lambda^{d_{ki}}} - \frac{d_{ki}u_{i-M_k+(d_{ki}+1)N}(t)}{\lambda^{d_{ki}+1}}\right) \tag{4.3.8}$$
$$(i = 1, \ldots, 2N, \ (t \in (0, \tau)),$$

где $\alpha_{ki}(t) = \alpha_k(t + (i-1)\tau)$, $d_{ki} = \min\{p \in \mathbb{N}: \ i - M_k + pN > 0\}$, $i \in \{1, \ldots, 2N\}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Таким образом, система (4.3.4), (4.3.5) эквивалентна системе (4.3.7), (4.3.8).

Используя представление (4.3.7) при $i = 0$, из формулы (4.3.6) при $i = 1$ получаем

$$u_1(0) = 2u_N(\tau)/\lambda - u_{2N}(\tau)/\lambda^2. \tag{4.3.9}$$

Зафиксируем произвольное значение $i \in \{2 - M_n, \dots, 0\}$ и положим $k = \min\{p \in \mathbb{N} : \ i + pN > 0\}$. Если $i \neq 1 - kN$, то, используя представление (4.3.7), получим

$$\begin{aligned} u_i(0) - u_{i-1}(\tau) = (k+1)\frac{u_{i+kN}(0) - u_{i+kN-1}(\tau)}{\lambda^k} - \\ - k\frac{u_{i+(k+1)N}(0) - u_{i+(k+1)N-1}(\tau)}{\lambda^{k+1}} \qquad (i = -M_n + 2, \dots, 0). \end{aligned}$$

Если же $i = 1 - kN$, то, используя представление (4.3.7) и формулу (4.3.9), получим

$$\begin{aligned} u_{i-1}(\tau) = (k+2)\frac{u_{i-1+(k+1)N}(\tau)}{\lambda^{k+1}} - (k+1)\frac{u_{i-1+(k+2)N}(\tau)}{\lambda^{k+2}} = \\ = \frac{k+2}{\lambda^{k+1}}u_N(\tau) - \frac{k+1}{\lambda^{k+2}}u_{2N}(\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_i(0) = (k+1)\frac{u_{i+kN}(0)}{\lambda^k} - k\frac{u_{i+(k+1)N}(0)}{\lambda^{k+1}} = \\ = (k+1)\frac{u_1(0)}{\lambda^k} - k\frac{u_{N+1}(0)}{\lambda^{k+1}} = \frac{k+1}{\lambda^k}\left(\frac{2u_N(\tau)}{\lambda} - \frac{u_{2N}(\tau)}{\lambda^2}\right) - k\frac{u_{N+1}(0)}{\lambda^{k+1}}, \end{aligned}$$

то есть

$$u_i(0) - u_{i-1}(\tau) = \frac{k}{\lambda^{k+1}}(u_N(\tau) - u_{N+1}(0)).$$

Таким образом, уравнения (4.3.6) при $i = 2 - M_n, \dots, 0$ являются следствиями других уравнений системы (4.3.7), (4.3.6), (4.3.9) и их можно исключить из этой системы. Следовательно, в формуле (4.3.6) будут использоваться только уравнения

$$u_i(0) = u_{i-1}(\tau) \qquad (i = 2, \dots, 2N). \tag{4.3.10}$$

Из сказанного следует, что система уравнений (4.3.1), (2.3.2), (2.3.3) эквивалентна (с учетом замены переменных (4.3.2) и (4.3.3)) системе уравнений (4.3.7), (4.3.8), (4.3.9), (4.3.10). Иначе говоря, для каждого решения уравнения (4.3.1) по формуле

$$u_i(t) = v^{\phi}(t + (i-1)\tau) \qquad (t \in [0, \tau])$$

однозначно определяется некоторое решение $U = (u_1, \dots, u_{2N})^T$ краевой задачи (4.3.8), (4.3.9), (4.3.10); при этом функции ϕ и U удовлетворяют соотношению (являющемуся следствием формул (4.3.7) и (4.3.3))

$$\phi(t) = \frac{(k_i+1)u_{i-k_iN}(t-(i-1)\tau)}{\lambda^{k_i}} - \frac{k_i u_{i-(k_i+1)N}(t-(i-1)\tau)}{\lambda^{k_i+1}},$$

где $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} : i + pN > 0\}$, $i = 1 - M_n, \dots, 0$, $t \in [i\tau - \tau, i\tau]$, и для любого решения $U = (u_1, \dots, u_{2N})^T$ краевой задачи (4.3.8), (4.3.9), (4.3.10) при помощи последнего соотношения восстанавливается соответствующее решение ϕ уравнения (4.3.1). Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.3.1. *При* $\lambda \neq 0$ *множество решений уравнения* (4.3.1) *изоморфно множеству решений краевой задачи* (4.3.8), (4.3.9), (4.3.10).

Рассмотрим краевую задачу (4.3.8), (4.3.9), (4.3.10) при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Любое решение этой задачи можно представить в виде

$$U(t) = \hat{S}_\lambda(t)c,$$

где $\hat{S}_\lambda : [0,\tau] \to \mathbb{C}^{2N\times 2N}$ — фундаментальная матрица системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.3.8), вектор $c \in \mathbb{C}^{2N}$ определяется из краевых условий (4.3.9), (4.3.10). Подставляя общий вид решения в краевые условия, получаем систему алгебраических уравнений. Запишем эту систему в матричной форме:

$$\hat{Q}(\lambda)c = 0,$$

где матрица $\hat{Q}(\lambda) \in \mathbb{C}^{2N\times 2N}$ определена по формуле

$$\hat{Q}(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{e}_{\lambda 1}(0) - \dfrac{2\hat{e}_{\lambda N}(\tau)}{\lambda} + \dfrac{\hat{e}_{\lambda,2N}(\tau)}{\lambda^2} \\ \hat{e}_{\lambda 2}(0) - \hat{e}_{\lambda 1}(\tau) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \hat{e}_{\lambda,2N}(0) - \hat{e}_{\lambda,2N-1}(\tau) \end{pmatrix}, \qquad (4.3.11)$$

$\hat{e}_{\lambda j}$ обозначает j-ую строку матрицы $\hat{S}_\lambda$. Поскольку при $t \in [0, \tau]$ матрица $\hat{S}_\lambda(t)$ невырождена, то при каждом $\lambda \neq 0$ матричная функция $\hat{S}_\lambda(\cdot)$ осуществляет изоморфизм между нуль-пространством матрицы $\hat{Q}(\lambda)$ и множеством решений краевой задачи (4.3.8), (4.3.9), (4.3.10).

Таким образом, из леммы 4.3.1 следует, что множество решений уравнения (4.3.1) изоморфно нуль-пространству матрицы $\hat{Q}(\lambda)$. Запишем этот результат, используя обозначение $N_{\hat{q}} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \ \det\hat{Q}(\lambda) = 0\}$.

Теорема 4.3.1. *Если* $\lambda \neq 0$, *то* $\dim\mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^2) = 2N - \mathrm{rank}\hat{Q}(\lambda)$. *В частности,* $\sigma(\mathcal{M}) \setminus \{0\} = N_{\hat{q}}$.

Лемма 4.3.2. *Алгебраическая кратность ненулевого собственного значения* λ *оператора монодромии равна единице тогда и только тогда, когда* $\mathrm{rank}\hat{Q}(\lambda) = 2N - 1$.

Доказательство. Алгебраической кратностью $m(\lambda)$ собственного значения λ оператора $\mathcal{M}$ называется размерность ядра $\mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^k)$, где $k \in \mathbb{N}$ — такое число, что $\mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^k) = \mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^{k+1})$. Из равенства $m(\lambda) = 1$ вытекает $\dim(\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^2) = 1$. Если $\dim(\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^2) = 1$, то легко доказать, что $\dim(\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)) = 1$ и, следовательно, $m(\lambda) = 1$. Остается применить теорему 4.3.1. $\square$

Теорема 4.3.2. *Решение* $\tilde{x}$ *является гиперболическим тогда и только тогда, когда* $\Gamma_1(0) \cap N_q = \{1\}$ *и* $\mathrm{rank}\hat{Q}(1) = 2N - 1$.

Доказательство. Из теоремы 4.1.1 следует, что $\sigma(\mathcal{M}) \setminus \{0\} = N_q$. Другими словами, оператор $\mathcal{M}$ имеет на единичной окружности $\Gamma_1(0)$ единственное собственное значение $\lambda = 1$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_1(0) \cap N_q = \{1\}$. Из леммы 4.3.2 следует, что $m(1) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{rank}\hat{Q}(1) = 2N - 1$. $\square$

Замечание 4.3.1. В теореме 4.3.2 можно заменить N_q на $N_{\hat{q}}$. Мы использовали N_q, поскольку система уравнений (4.1.14) проще, чем система уравнений (4.3.8). $\square$

Задания и вопросы для самоконтроля

1. Возможна ли следующая цепочка неравенств:

$$\dim \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^k = \dim \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^{k+1} < \dim \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^{k+2}?$$

2. Опишите порядок действий при использовании утверждения теоремы 4.3.2.

3. Опишите общую схему доказательства леммы 4.3.1.

4. Опишите действие оператора P, ставящего в соответствие решениям уравнения (4.3.1) решения краевой задачи (4.3.8), (4.3.9), (4.3.10).

5. Исследуйте на гиперболичность (используя теорему 4.3.2) решение $\tilde{x}(t) = \sin(4\pi t/3)$ уравнения $x'(t) = 4\pi[x(t-1) - x(t-2)]/(3\sqrt{3})$.

4.4. Рациональная аппроксимация

В этом разделе начнем исследование T-периодических решений уравнения (4.1) при $T \notin \mathbb{Q}$. Здесь и далее будем требовать, чтобы правая часть уравнения f принадлежала $C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$. При исследовании поведения решений уравнения (4.1), траектории которых не покидают некоторой окрестности периодической орбиты решения $\tilde{x}$, дополнительное требование ограниченности функции f в $C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ не является ограничительным, так как. этого всегда можно добиться умножением на соответствующую срезающую функцию.

Для построения критерия гиперболичности нам понадобится понятие рациональной аппроксимации, предложенное впервые в работе [28]. Целью данного раздела является выведение метода построения рациональной аппроксимации.

Определение 4.4.1. Будем говорить, что T-периодическое решение $\tilde{x}$ уравнения (4.1) допускает рациональную аппроксимацию, если существует последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ такая, что

$$\|f_k - f\|_{C^1(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{при} \quad k \to \infty$$

и уравнения

$$x'(t) = f_k\big(x(t), x(t-r_1), \ldots, x(t-r_n)\big)$$

имеют T_k-периодические решения $\tilde{x}_k(t)$ такие, что

$$\|\tilde{x}_{k0} - \tilde{x}_0\|_C \to 0, \qquad |T_k - T| \to 0 \qquad \text{при} \quad k \to \infty,$$

где T_k — рациональные числа. □

В дальнейшем при построении рациональной аппроксимации будет удобно ввести в правую часть уравнения (4.1) некоторое количество формальных запаздываний, от которых фактически правая часть уравнения (4.1) не зависит.

Пусть $n_A \in \mathbb{N}$ — некоторое число, $n_A \geqslant n$. Определим функцию $G \in C^1(\mathbb{R}^{n_A+1}, \mathbb{R})$ по формуле

$$G(y_0, \ldots, y_{n_A}) = f(y_0, \ldots, y_n). \tag{4.4.1}$$

Очевидно, решение $\tilde{x}$ уравнения (4.1) является решением уравнения

$$x'(t) = G(x(t), x(t-r_1), \ldots, x(t-r_{n_A})) \tag{4.4.2}$$

при любых положительных значениях запаздываний r_i $(i = n+1, \ldots, n_A)$.

Пусть $r = \max\{r_i,\ i = 1, \ldots, n_A\}$. Обозначим через $\mathcal{M}_G$ оператор монодромии, ассоциированный с решением $\tilde{x}$ уравнения (4.4.2). Тогда, по определению, оператор $\mathcal{M}_G :\ C([-r,0],\mathbb{C}) \to C([-r,0],\mathbb{C})$ действует по формуле $\mathcal{M}_G\phi(t) = v_G^{\phi}(t+T)$, $t \in [-r, 0]$, где v_G^{ϕ} – решение уравнения

$$v'(t) = \sum_{k=0}^{n_A} \alpha_{Gk}(t) v(t - r_k),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$v(t) = \phi(t) \qquad\qquad (t \in [-r, 0]), \tag{4.4.3}$$

где

$$\alpha_{Gi}(t) = \frac{\partial}{\partial y_i} G(y_1, \ldots, y_{n_A})\Bigg|_{y_0 = \tilde{x}(t), \ldots, y_{n_A} = \tilde{x}(t - r_{n_A})}. \tag{4.4.4}$$

Очевидно, $\alpha_{Gi} = \alpha_i$ при $i = 0, \ldots, n$, $\alpha_{Gi} = 0$ при $i = n+1, \ldots, n_A$. Следовательно, функцию v_G^{ϕ} можно определять как решение начальной задачи (2.3.2) (используя метод шагов, легко видеть, что задача (2.3.2), (4.4.3) однозначно разрешима в $C([-r, 0], \mathbb{R})$). Поэтому при $\phi \in C([-r, 0], \mathbb{C})$ имеем

$$v_G^{\phi}(t) = v^{P\phi}(t) \qquad (t \in [-r_n, T]), \tag{4.4.5}$$

$$P\mathcal{M}_G\phi = \mathcal{M}P\phi, \tag{4.4.6}$$

где оператор $P : \ C([-r, 0], \mathbb{R}) \to C([-r_n, 0], \mathbb{R})$ действует по формуле $Px(t) = x(t)$, $t \in [-r_n, 0]$. Это линейный ограниченный оператор.

Рассмотрим следующие два уравнения со спектральным параметром:

$$(\mathcal{M}_G - \lambda I)\phi = 0, \tag{4.4.7}$$

$$(\mathcal{M} - \lambda I)\phi = 0. \tag{4.4.8}$$

Замечание 4.4.1. В двух последних равенствах через I обозначаются разные операторы. Здесь и далее предполагаем, что из контекста каждый раз ясно, в каком пространстве действует тождественный оператор I. При этом, если $r = r_n$, то оператор $\mathcal{M}_G$ действует в пространстве $C_{\mathbb{C}}$, и уравнения (4.4.7) и (4.4.8) совпадают. □

Лемма 4.4.1. *Множество собственных значений $\lambda \neq 0$ оператора $\mathcal{M}$ совпадает с множеством собственных значений $\lambda \neq 0$ оператора $\mathcal{M}_G$ с учетом кратности.*

Доказательство. Случай $r = r_n$ тривиален. Поэтому предположим, что $r > r_n$. Отметим, что все итерации $\mathcal{M}_G^j$ при $\mathbb{Z} \ni j > r/T$ являются компактными операторами. Поэтому все точки $\lambda \neq 0$ спектра оператора $\mathcal{M}_G$ являются его изолированными собственными значениями конечной кратности, т. е. $\dim \mathcal{N}(\mathcal{M}_G - \lambda I) < \infty$ при $\lambda \neq 0$.

1. Покажем, что при $\lambda \neq 0$ оператор P отображает взаимно однозначно пространство $\mathcal{N}(\mathcal{M}_G - \lambda I)$ на пространство $\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)$. Если ϕ_G – решение уравнения (4.4.7), то благодаря (4.4.6) функция $P\phi_G(t)$ является решением уравнения (4.4.8). Пусть ϕ – решение уравнения (4.4.8). Тогда $v^{\phi}(t) = \lambda^{-1}v^{\phi}(t+T)$ при $t \in [-r_n, 0]$. Пусть $i_0 = \max\{p \in \mathbb{N} : r_n + pT < r\}$. Определим функцию $\overline{v}$ по итерационной формуле

$$\overline{v}(t) = \begin{cases} v^{\phi}(t), & t \in [-r_n, T], \\ \lambda^{-1}\overline{v}(t+T), & t \in [-r_n - iT, -r_n - (i-1)T),\ i = 1, \dots, i_0, \\ \lambda^{-1}\overline{v}(t+T) & t \in [-r, -r_n - i_0T). \end{cases}$$

Поскольку

$$\overline{v}(-r_n - iT + 0) = \frac{v^{\phi}(-r_n)}{\lambda^i} = \frac{v^{\phi}(-r_n + T)}{\lambda^{i+1}} = \overline{v}(-r_n - iT - 0)$$

при $i = 1, \dots, i_0$, то $\overline{v} \in C([-r, T], \mathbb{R})$. Определим функцию ϕ_G как сужение функции $\overline{v}$ на отрезок $[-r_n, 0]$. Очевидно, функция ϕ_G является решением уравнения (4.4.7) и такова, что $P\phi_G = \phi$.

Допустим, что $P\phi = 0$ и $\phi \in \mathcal{N}(\mathcal{M}_G - \lambda I)$. Тогда из формулы (4.4.5) получаем, что $v_G^{\phi}(t) = 0$ при $t > -r_n$. Для произвольного фиксированного значения $i \in \{0, \dots, i_0 - 1\}$ из $v_G^{\phi}(t) = 0$ при $t \geqslant -r_n - iT$ следует, что $v_G^{\phi}(t) = \frac{1}{\lambda}v_G^{\phi}(t+T) = 0$ при $t \geqslant -r_n - (i+1)T$. Для $i = i_0$ из $v_G^{\phi}(t) = 0$ при $t \geqslant -r_n - i_0T$ следует, что $v_G^{\phi}(t) = \frac{1}{\lambda}v_G^{\phi}(t+T) = 0$ при $t \geqslant -r$. Поэтому $\phi(t) = v_G^{\phi}(t) = 0$ при $t \in [-r, 0]$.

2. Применяя метод математической индукции, предположим, что оператор P отображает взаимно однозначно пространство $\mathcal{N}((\mathcal{M}_G - \lambda I)^{k-1})$

на пространство $\mathcal{N}((\mathcal{M}-\lambda I)^{k-1})$, и докажем, что оператор P отображает взаимно однозначно пространство $\mathcal{N}((\mathcal{M}_G-\lambda I)^k)$ на пространство $\mathcal{N}((\mathcal{M}-\lambda I)^k)$.

Пусть $\phi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M}_G-\lambda I)^k)$. Тогда либо $\phi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M}_G-\lambda I)^{k-1})$, либо $\mathcal{M}_G\phi_G = \lambda\phi_G+\psi_G$, где $\psi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M}_G-\lambda I)^{k-1})$. В первом случае из предположения индукции получаем $P\phi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M}-\lambda I)^{k-1}) \subset \mathcal{N}((\mathcal{M}-\lambda I)^k)$. Во втором случае благодаря (4.4.6) имеем $\mathcal{M}P\phi_G = \lambda P\phi_G + P\psi_G$. Из предположения индукции следует, что $P\psi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M}-\lambda I)^{k-1})$. Таким образом, $P\phi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M}-\lambda I)^k)$.

Пусть $\phi \in \mathcal{N}((\mathcal{M}-\lambda I)^k)$. Тогда имеет место либо $\phi \in \mathcal{N}((\mathcal{M}-\lambda I)^{k-1})$, либо $\mathcal{M}\phi = \lambda\phi + \psi$, где $\psi \in \mathcal{N}((\mathcal{M}-\lambda I)^{k-1})$. Если $\phi \in \mathcal{N}((\mathcal{M}-\lambda I)^{k-1})$, то из предположения индукции следует, что существует такая функция $\phi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M}_G-\lambda I)^{k-1}) \subset \mathcal{N}((\mathcal{M}_G-\lambda I)^k)$, для которой $P\phi_G = \phi$. Рассмотрим второй случай. Из предположения индукции получаем, что существует такая функция $\psi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M}_G-\lambda I)^{k-1})$, для которой $P\psi_G = \psi$. Следовательно, при $t \in [-r_n, 0]$ имеем $v^\phi(t) = \frac{1}{\lambda}(v^\phi(t+T)-\psi_G(t))$. Пусть $i_0 = \max\{p \in \mathbb{N}:\ r_n + pT < r\}$. Определим функцию $\overline{v}$ по итерационной формуле

$$\overline{v}(t) = \begin{cases} v^\phi(t), & t \in [-r_n, T], \\ \lambda^{-1}(\overline{v}(t+T)-\psi_G(t)), & \\ & t \in [-r_n - iT, -r_n-(i-1)T),\ i = 1,\ldots,i_0, \\ \lambda^{-1}(\overline{v}(t+T)-\psi_G(t)), & t \in [-r, -r_n - i_0T). \end{cases}$$

Тогда при $i = 1,\ldots,i_0$ будем иметь

$$\overline{v}(-iT+0)-\overline{v}(-iT-0) =$$
$$= (\overline{v}(-(i-1)T+0)-\psi_G(-iT))/\lambda - (\overline{v}(-(i-1)T-0)-\psi_G(-iT))/\lambda =$$
$$= (\overline{v}(-(i-1)T+0)-\overline{v}(-(i-1)T-0))/\lambda.$$

За конечное число подобных переходов получаем

$$\begin{gathered}\overline{v}(-iT+0)-\overline{v}(-iT-0)=(\overline{v}(-T+0)-\overline{v}(-T-0))/\lambda^{i-1}=\\=\left((v^{\phi}(+0)-\psi_G(-T))-(v^{\phi}(-0)-\psi_G(-T))\right)/\lambda^{i}=\\=(v^{\phi}(+0)-v^{\phi}(-0))/\lambda^{i}=0.\end{gathered}$$

Следовательно, $\overline{v}\in C([-r,0],\mathbb{R})$. Определим функцию ϕ_G как сужение функции $\overline{v}$ на отрезок $[-r_n,0]$. Легко видеть, что функция ϕ_G обладает свойством $P\phi_G=\phi$, и благодаря свойству (4.4.5) является решением уравнения $\phi_G=\lambda^{-1}(\mathcal{M}_G\phi_G-\psi_G)$. Таким образом, $\phi_G\in\mathcal{N}(\mathcal{M}_G-\lambda I)^k$.

Предположим, что $P\phi_G=0$ и $\phi_G\in\mathcal{N}((\mathcal{M}_G-\lambda I)^k)$. Тогда, если $\phi_G\in\mathcal{N}((\mathcal{M}_G-\lambda I)^{k-1})$, то из предположения индукции получаем $\phi_G=0$. В противном случае существует функция $\psi_G\in\mathcal{N}((\mathcal{M}_G-\lambda I)^{k-1})$ такая, что $\mathcal{M}_G\phi_G=\lambda\phi_G+\psi_G$. По формуле (4.4.6) имеем $\mathcal{M}P\phi_G=\lambda P\phi_G+P\psi_G$. Равенство $P\phi_G=0$ дает $P\psi_G=0$. Из предположения индукции получаем, что $\psi_G=0$. В таком случае $\mathcal{M}_G\phi_G=\lambda\phi_G$, т. е. $\phi_G\in\mathcal{N}(\mathcal{M}_G-\lambda I)$. Поскольку $P\phi_G=0$, из первой части доказательства получаем $\phi_G=0$.

3. Используя метод математической индукции, получаем равенство $\dim\mathcal{N}((\mathcal{M}_G-\lambda I)^k)=\dim\mathcal{N}((\mathcal{M}-\lambda I)^k)$ при любом $k\in\mathbb{N}$ и $\lambda\neq 0$. $\square$

Лемма 4.4.1 делает естественным следующее обобщение.

Определение 4.4.2. Решение $\tilde{x}$ уравнения (4.1) допускает рациональную аппроксимацию в обобщенном смысле, если рациональную аппроксимацию допускает решение $\tilde{x}$ уравнения (4.4.2). Другими словами, для некоторого числа $n_A\in\mathbb{N}$ ($n\leqslant n_A$) найдутся такие числа $0<r_i\in\mathbb{Q}$ ($i=n+1,\dots,n_A$) и такая последовательность $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}\subset C^1(\mathbb{R}^{n_A+1},\mathbb{R})$, что

$$\|G_k-G\|_{C^1(\mathbb{R}^{n_A+1},\mathbb{R})}\to 0\qquad\text{при}\quad k\to\infty\tag{4.4.9}$$

и уравнения

$$x'(t) = G_k\left(x(t), x(t-r_1), \ldots, x(t-r_{n_A})\right) \qquad (4.4.10)$$

имеют T_k-периодические решения $\tilde{x}_k(t)$ такие, что

$$\|\tilde{x}_k - \tilde{x}\|_{C[-r,0]} \to 0 \qquad \text{при} \quad k \to \infty, \qquad (4.4.11)$$

$$|T_k - T| \to 0 \qquad \text{при} \quad k \to \infty, \qquad (4.4.12)$$

где T_k — рациональные числа, функция G определена по формуле (4.4.1), $r = \max\{r_i,\ i = 1, \ldots, n_A\}$. $\square$

Построение рациональной аппроксимации

Используя теорему C.2, построим рациональную аппроксимацию (в смысле определения 4.4.2) без каких-либо дополнительных требований относительно уравнения (4.1) и его решения $\tilde{x}$.

Пусть $\tilde{x} \in C_T$ – периодическое решение уравнения (4.1). Тогда функция $\overline{x} \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, определенная по формуле $\overline{x}(t) = \tilde{x}(\beta t)$, является решением уравнения

$$x'(t) = \beta f(x(t), x(t-r_1/\beta), \ldots, x(t-r_n/\beta))$$

(это проверяется непосредственной подстановкой и заменой переменной по формуле $\beta t = s$). В таком случае $\overline{x}$ является также решением уравнения

$$x'(t) = \beta f(x(t), x(t-r_1) + \Delta(t,1,\beta), \ldots, x(t-r_n) + \Delta(t,n,\beta)),$$

где $\Delta(t,i,\beta) = \overline{x}(t-r_i/\beta) - \overline{x}(t-r_i) = \tilde{x}(\beta t - r_i) - \tilde{x}(\beta t - \beta r_i)$. Пусть числа $n_0 \in \mathbb{N}$, $0 < q_i \in \mathbb{Q}$, $i = 2, \ldots, n_0$ и $1 < \beta_0 \in \mathbb{R}$, а также семейство функций $W(\cdot, \ldots, \cdot, i, \beta) \in C^1(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})$ определены в соответствии с теоремой C.2. Тогда при $\beta \in [1, \beta_0]$, $q_1 = 0$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем

$$\Delta(t,i,\beta) = W(\tilde{x}(\beta t - \beta q_1), \ldots, \tilde{x}(\beta t - \beta q_{n_0}), r_i/\beta, \beta) -$$
$$- W(\tilde{x}(\beta t - \beta q_1), \ldots, \tilde{x}(\beta t - \beta q_{n_0}), r_i, \beta).$$

Определим семейство функций $F(\cdot,\ldots,\cdot,p,\beta)\in C^1(\mathbb{R}^{n_0},\mathbb{R})$ по формуле

$$F(y_1,\ldots,y_{n_0},p,\beta)=W(y_1,\ldots,y_{n_0},p/\beta,\beta)-W(y_1,\ldots,y_{n_0},p,\beta).$$

Из теоремы C.2 следует, что для любого $i\in\{1,\ldots,n\}$

$$F(\overline{x}(t-q_1),\ldots,\overline{x}(t-q_{n_0}),r_i,\beta)=\Delta(t,i,\beta)\qquad(t\in\mathbb{R}),$$

$$\|F(\cdot,\ldots,\cdot,r_i,\beta)\|_{C^1(\mathbb{R}^{n_0},\mathbb{R})}\to 0 \text{ при } \beta\to 1.$$

Определим функцию $G\in C^1(\mathbb{R}^{n_0+n},\mathbb{R})$ по формуле

$$G(y_1,z_1,\ldots,z_n,y_2\ldots,y_{n_0})=f(y_1,z_1,\ldots,z_n),$$

где $n_0\in\mathbb{N}$ определено выше.

Поставим в соответствие каждому числу $k\in\mathbb{N}$ такое число $\beta_k\in[1,\beta_0]$, что $0<\beta_k-1<1/k$ и $\beta_kT\in\mathbb{Q}$. Пусть

$$G_k(y_1,z_1,\ldots,z_n,y_2\ldots,y_{n_0})=$$
$$=\beta_kf(y_1,z_1+F(y_1,\ldots,y_{n_0},r_1,\beta_k),\ldots,z_n+F(y_1,\ldots,y_{n_0},r_n,\beta_k)),\tag{4.4.13}$$

где функция F определена выше.

Лемма 4.4.2. *Функции G_k, определенные по формуле* (4.4.13), *удовлетворяют определению* 4.4.2 *при $n_A=n_0+n-1$ и $0<r_i=q_{i-n+1}$, $i=n+1,\ldots,n_A$.*

Доказательство. Рассмотрим при $i\in\{2,\ldots,n_0\}$ производные

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_i}G_k(y_1,z_1,\ldots,z_n,y_2,\ldots,y_{n_0})\right|=$$
$$=\left|\beta_k\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_j}f(y_1,z_1+F(y_1,\ldots,y_{n_0},r_1,\beta_k),\ldots,z_n+\right.$$
$$\left.+F(y_1,\ldots,y_{n_0},r_n,\beta_k))\frac{\partial}{\partial y_i}F(y_1,\ldots,y_{n_0},r_j,\beta_k)\right|\leqslant$$
$$\leqslant n\beta_k\|f\|_{C^1(\mathbb{R}^{n+1})}\max_{j=1,\ldots,n}\|F(\cdot,\ldots,\cdot,r_j,\beta_k)\|_{C^1(\mathbb{R}^{n_0},\mathbb{R})}.$$

Поскольку $\beta_k \to 1$ при $k \to \infty$, имеем $\|F(\cdot, \dots, \cdot, r_i, \beta_k)\|_{C^1(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})} \to 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial y_i} G_k(y_1, z_1, \dots, z_n, y_2, \dots, y_{n_0}) \to 0 \qquad \text{при } k \to \infty.$$

Аналогично получается, что при $k \to \infty$

$$\frac{\partial}{\partial y_1} G_k(y_1, z_1, \dots, z_n, y_2 \dots, y_{n_0}) \to \frac{\partial}{\partial y_1} f(y_1, z_1, \dots, z_n),$$
$$\frac{\partial}{\partial z_j} G_k(y_1, z_1, \dots, z_n, y_2 \dots, y_{n_0}) \to \frac{\partial}{\partial z_j} f(y_1, z_1, \dots, z_n) \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Таким образом, из сходимости $\|F(\cdot, \dots, \cdot, r_i, \beta_k)\|_{C(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})} \to 0$ при $k \to \infty$ следует сходимость (4.4.9).

Поскольку $\beta_k \in [1, \beta_0]$, имеем

$$\begin{aligned} &G_k(\tilde{x}(\beta_k t), \tilde{x}(\beta_k t - \beta_k r_1), \\ &\qquad \dots, \tilde{x}(\beta_k t - \beta_k r_n), \tilde{x}(\beta_k t - \beta_k q_2), \dots, \tilde{x}(\beta_k t - \beta_k q_{n_0})) = \\ &\qquad\qquad = \beta_k f(\tilde{x}(\beta_k t), \tilde{x}(\beta_k t - r_1), \dots, \tilde{x}(\beta_k t - r_n)). \end{aligned}$$

Тогда, подставляя функцию $x(t) = \tilde{x}_k(t) = \tilde{x}(\beta_k t)$ в уравнение (4.4.10), получаем

$$\frac{d\tilde{x}(\beta_k t)}{dt} = \beta_k f(\tilde{x}(\beta_k t), \dots, \tilde{x}(\beta_k t - r_n)).$$

Последнее равенство является тождеством, так как $\tilde{x}$ является решением уравнения (4.1). Следовательно, $\tilde{x}_k$ является решением уравнения (4.4.10). При этом каждая функция $\tilde{x}_k(t) = \tilde{x}(\beta_k t)$ имеет период $T/\beta_k \in \mathbb{Q}$. Наличие свойств (4.4.11) и (4.4.12) очевидно. $\square$

Из леммы 4.4.2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.4.1. *Любое периодическое решение уравнения* (4.1) *допускает рациональную аппроксимацию, понимаемую в смысле определения* 4.4.2.

Задания и вопросы для самоконтроля

1. Зачем в правую часть уравнения (4.1) вводятся дополнительно формальные запаздывания?

2. В чем отличие операторов $\mathcal{M}_G$ и $\mathcal{M}$?

3. Докажите равенство (4.4.6).

4. В чем заключается основная идея доказательства леммы 4.4.1?

5. На первом шаге построения рациональной аппроксимации мы делаем замену переменной в уравнении (4.1) по формуле $t = \beta s$ и получаем уравнение, решением которого является функция $\overline{x}(t) = \tilde{x}(\beta t)$. Очевидно, варьируя параметр β, легко получить последовательности f_β и $\overline{x}_\beta$, удовлетворяющие соотношениям (4.4.9), (4.4.11) и (4.4.12). В чем недостаток такого подхода и как эта проблема решается?

4.5. Свойство рациональной аппроксимации

Изучим теперь некоторые свойства рациональной аппроксимации решения $\tilde{x}$ уравнения (4.4.2), допускающего рациональную аппроксимацию. Определим для каждого $k \in \mathbb{N}$ линейный ограниченный оператор $\mathcal{M}_k: \ C([-r,0],\mathbb{C}) \to C([-r,0],\mathbb{C})$ по формуле

$$\mathcal{M}_k\phi(t) = v_k^\phi(t+T_k) \qquad (t \in [-r,0]), \tag{4.5.1}$$

где v_k^ϕ — решение начальной задачи

$$v'(t) = \sum_{j=0}^{n_A} \alpha_{kj}(t)v(t-r_j) \qquad (t > 0), \tag{4.5.2}$$

$$v(t) = \phi(t) \qquad (t \in [-r,0]), \tag{4.5.3}$$

а

$$\alpha_{kj}(t) = \frac{d}{dy_j}G_k(y_0,y_1,\ldots,y_{n_A})\Big|_{y_0 = \tilde{x}_k(t),\ldots,y_{n_A} = \tilde{x}_k(t-r_{n_A})}. \tag{4.5.4}$$

Определим операторы $\mathcal{V}, \mathcal{V}_k\colon C([-r,0],\mathbb{C}) \to C([-r,0],\mathbb{C})$ по формуле

$$\mathcal{V} = \mathcal{M}_G^m, \ \ \mathcal{V}_k = \mathcal{M}_k^m \ , \tag{4.5.5}$$

где $m = \min\{s \in \mathbb{N}: \ sT > r\}$. Из формулы (4.4.12) легко видеть, что $m = m_k = \min\{s \in \mathbb{N}: \ sT_k > r\}$ при достаточно больших значениях k.

Замечание 4.5.1. Сужения функций $\tilde{x}'$ и $\tilde{x}'_k$ на отрезок $[-r,0]$ являются собственными функциями операторов $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}_k$ соответственно. Им отвечает собственное значение $\lambda_0 = 1$. □

Теорема 4.5.1. *Если T-периодическое решение $\tilde{x}$ уравнения* (4.1) *допускает рациональную аппроксимацию в смысле определения* 4.4.2, *то*

$$\|\mathcal{V}_k - \mathcal{V}\| \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Доказательство. 1. По определению,

$$\mathcal{V}\phi(t) = v^\phi(t+mT), \qquad \mathcal{V}_k\phi(t) = v_k^\phi(t+mT_k) \qquad (t \in [-r,0]),$$

где v^ϕ и v_k^ϕ являются решениями начальных задач (2.3.2), (4.4.3) и (4.5.2), (4.5.3) соответственно. Далее будем писать v и v_k вместо v^ϕ и v_k^ϕ.

Интегрируя (2.3.2) и (4.5.2), будем иметь:

$$v(t) = \phi(0) + \int_0^t \alpha_{G0}(s)v(s)ds + \int_0^t \sum_{j=1}^{n_A} \alpha_{Gj}(s)v(s-r_j)ds, \tag{4.5.6}$$

$$v_k(t) = \phi(0) + \int_0^t \alpha_{k0}(s)v_k(s)ds + \int_0^t \sum_{j=1}^{n_A} \alpha_{kj}(s)v_k(s-r_j)ds, \tag{4.5.7}$$

где $t \in [0, i_m r_m]$, $r_m = \min\{r_i,\ i = 1,\dots,n_A\}$, $i_m = \min\{s \in \mathbb{N}: \ sr_m > mT\}$. Отметим, что $i_m r_m > mT_k$ при достаточно больших k.

2. Получим оценку для норм $\|v\|_{C[0,i_m r_m]}$ и $\|v_k\|_{C[0,i_m r_m]}$. Поскольку $\{G_k\}_{k=0}^\infty \subset C^1(\mathbb{R}^{n_A+1},\mathbb{R})$, из определений (4.4.4) и (4.5.4) и формулы (4.4.9) для всех $j = 0,1,\dots,n_A$ и $0 < k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\max_{s\in[0,i_m r_m]} |\alpha_{Gj}(s)| \leqslant C_1, \qquad \max_{s\in[0,i_m r_m]} |\alpha_{kj}(s)| \leqslant C_1. \tag{4.5.8}$$

Для $(i-1)r_m \leqslant t \leqslant ir_m$, $i = 1, \ldots, i_m$, из уравнений (4.5.6) и (4.5.7) следует

$$|v(t)| \leqslant \|v\|_{C[-r,0]} + \int_0^t |\alpha_{G0}(s)v(s)|ds + \sum_{j=1}^{n_A} C_1 i_m r_m \|v\|_{C[-r_j, ir_m - r_j]} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t |\alpha_{G0}(s)| \cdot |v(s)|ds + \big(1 + n_A C_1 i_m r_m\big) \|v\|_{C[-r, ir_m - r_m]},$$

$$|v_k(t)| \leqslant \int_0^t |\alpha_{k0}(s)| \cdot |v_k(s)|ds + \big(1 + n_A C_1 i_m r_m\big) \|v_k\|_{C[-r,(i-1)r_m]}.$$

Используя лемму Гронуолла (см. теорему A.6), получаем

$$|v(t)| \leqslant \big(1 + n_A C_1 i_m r_m\big) \|v\|_{C[-r,(i-1)r_m]} \exp\left(\int_0^t |\alpha_{G0}(s)|ds\right),$$

$$|v_k(t)| \leqslant \big(1 + n_A C_1 i_m r_m\big) \|v_k\|_{C[-r,(i-1)r_m]} \exp\left(\int_0^t |\alpha_{k0}(s)|ds\right),$$

где $t \in [ir_m - r_m, ir_m]$. Тогда, используя начальные условия (4.4.3) и (4.5.3), будем иметь

$$\|v\|_{C[0,i_m r_m]} \leqslant C_2 \|\phi\|_{C([-r,0],\mathbb{C})}, \tag{4.5.9}$$

$$\|v_k\|_{C[0,i_m r_m]} \leqslant C_2 \|\phi\|_{C([-r,0],\mathbb{C})}, \tag{4.5.10}$$

где $C_2 > 1$ не зависит от ϕ и k.

3. Теперь оценим норму разности

$$\|\mathcal{V}_k - \mathcal{V}\| = \sup_{\phi \in C([-r,0],\mathbb{C}):\ \|\phi\|=1} \|\mathcal{V}_k\phi - \mathcal{V}\phi\|_{C([-r,0],\mathbb{C})}.$$

Очевидно, для $t \in [-r, 0]$ имеет место неравенство

$$|\mathcal{V}_k\phi(t) - \mathcal{V}\phi(t)| \leqslant$$

$$\leqslant |v_k(t + mT_k) - v(t + mT_k)| + |v(t + mT_k) - v(t + mT)|. \tag{4.5.11}$$

Отметим, что $mT_k > r$, $mT > r$.

Из формул (4.5.6), (4.5.8) и (4.5.9) следует, что

$$|v(t+mT_k)-v(t+mT)| \leqslant C_1 C_2 (n_A+1) m |T_k - T| \qquad (t \in [-r, 0]) \tag{4.5.12}$$

для всех $\phi \in C([-r,0],\mathbb{C})$ таких, что $\|\phi\|_{C([-r,0],\mathbb{C})} = 1$.

Подставим решения $\tilde{x}_k$ и $\tilde{x}$ в уравнения (4.4.10) и (4.4.2) соответственно, затем вычтем правую и левую части уравнения (4.4.10) из правой и левой частей уравнения (4.4.2). Теперь проинтегрируем полученный результат на интервалах вида $(0, t)$:

$$\tilde{x}(t) - \tilde{x}_k(t) =$$

$$= \int\limits_0^t \big(G(\tilde{x}(t - r_0), \ldots, \tilde{x}(t - r_{n_A})) - G_k(\tilde{x}_k(t - r_0), \ldots, \tilde{x}_k(t - r_{n_A}))\big)\, ds,$$

где $t \in [ir_m - r_m, ir_m]$, $i = 1, \ldots, i_m$, $r_0 = 0$. Оценивая модуль подынтегрального выражения, получим

$$|\tilde{x}(t) - \tilde{x}_k(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t |G(\tilde{x}(s - r_0), \ldots, \tilde{x}(s - r_{n_A})) - G(\tilde{x}_k(s - r_0), \ldots, \tilde{x}_k(s - r_{n_A}))| ds+$$

$$+ \int_0^t |G(\tilde{x}_k(s - r_0), \ldots, \tilde{x}_k(s - r_{n_A})) - G_k(\tilde{x}_k(s - r_0), \ldots, \tilde{x}_k(s - r_{n_A}))| ds.$$

Учитывая условие $G \in C^1(\mathbb{R}^{n_A+1}, \mathbb{R})$, для оценки первого слагаемого используем теорему Лагранжа. Для оценки второго слагаемого используем условие (4.4.9). Таким образом,

$$|\tilde{x}(t) - \tilde{x}_k(t)| \leqslant \int_0^t \sum_{i=0}^{n_A} C_1 |\tilde{x}(s - r_i) - \tilde{x}_k(s - r_i)| ds + t\varepsilon(k) \leqslant$$

$$\leqslant C_1(n_A + 1) \int_{-r}^0 |\tilde{x}(s) - \tilde{x}_k(s)| ds + C_1(n_A + 1) \int\limits_0^t |\tilde{x}(s) - \tilde{x}_k(s)| ds + t\varepsilon(k),$$

где $\varepsilon(k) \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда, благодаря лемме Гроноулла и условию (4.4.11) имеем

$$\|\tilde{x} - \tilde{x}_k\|_{C[-r, i_m r_m]} \to 0 \qquad \text{при } k \to \infty.$$

В таком случае, используя определения (4.4.4) и (4.5.4) и условие (4.4.9), получим

$$\|\alpha_{Gi} - \alpha_{ki}\|_{C[0, i_m r_m]} \to 0 \qquad \text{при } k \to \infty. \tag{4.5.13}$$

Из формул (4.5.6) и (4.5.7) следует, что

$$|v_k(t+mT_k)-v(t+mT_k)| \leqslant \sum_{i=0}^{n_A} \int\limits_0^{t+mT_k} |\alpha_{Gi}(s)-\alpha_{ki}(s)|\,|v_k(s-r_i)|ds+$$
$$+\sum_{i=0}^{n_A} \int\limits_0^{t+mT_k} |\alpha_{Gi}(s)|\,|v(s-r_i)-v_k(s-r_i)|ds.$$

Используем для оценки первой суммы формулу (4.5.13) и оценку (4.5.10). Для оценки второй суммы используем неравенства (4.5.8). Таким образом, при $t \in [-r,0]$ выполнено неравенство

$$|v_k(t+mT_k)-v(t+mT_k)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{n_A} \int\limits_0^{t+mT_k} \varepsilon(k)\, C_2 \|\phi\|_{C([-r,0],\mathbb{C})} ds + \sum_{i=0}^{n_A} \int\limits_0^{t+mT_k} C_1\,|v(s-r_i)-v_k(s-r_i)|ds,$$

где $\varepsilon(k)\to 0$ при $k\to\infty$. Учитывая то, что

$$v_k(t)=\phi(t)=v(t) \qquad (t\in[-r,0])$$

и то, что $\|\phi\|_{C([-r,0],\mathbb{C})}=1$, получаем

$$|v_k(t+mT_k)-v(t+mT_k)| \leqslant$$
$$\leqslant (n_A+1)(t+mT_k)\varepsilon(k)\, C_2 + (n_A+1) \int\limits_0^{t+mT_k} C_1\,|v(s)-v_k(s)|ds.$$

Тогда из леммы Гронуолла вытекает:

$$|v_k(t+mT_k)-v(t+mT_k)| \leqslant$$
$$\leqslant (n_A+1)(t+mT_k)\varepsilon(t)\, C_2 \exp\big((n_A+1)(t+mT_k)C_1\big). \quad (4.5.14)$$

Наконец, подставляя неравенства (4.5.12) и (4.5.14) в (4.5.11), получаем

$$\|\mathcal{V}_k-\mathcal{V}\|\to 0 \qquad \text{при } k\to\infty. \qquad \square$$

Задания и вопросы для самоконтроля

1. Имеет ли место сходимость $\|\mathcal{M}_G=\mathcal{M}_k\|\to 0$ при $k\to\infty$, если $T<r$? Ответ обосновать.

2. Почему функции α_{kj} равностепенно ограничены?

3. Почему в формуле 4.5.11 отмечается, что $mT_k > r$ и $mT > r$?

4.6. Критерий гиперболичности

В этом разделе получим необходимые и достаточные условия гиперболичности периодического решения в случае иррационального периода. Доказательство будет основано на связи спектральных свойств оператора $\mathcal{V}$ и операторов $\mathcal{V}_k$, соответствующих рациональной аппроксимации (понимаемой в смысле определения 4.4.2).

Пусть $\tilde{x} \in C_T$ — периодическое решение уравнения (4.1). Определим числа $n_A \in \mathbb{N}$ и $0 < r_i \in \mathbb{Q}$ $(i = n+1, \ldots, n_A)$ и последовательности $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$, $\{G_k\}_{k=0}^{\infty} \subset C^1(\mathbb{R}^{n_A+1}, \mathbb{R})$ и $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ так же, как они были определены в разделе 4.5 (по построению эти числа и последовательности удовлетворяют определению 4.4.2). Операторы $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}_k$ определим по формуле (4.5.5). Как и прежде, $r = \max\{r_i,\ i = 1, \ldots, n_A\}$, $m = \min\{p \in \mathbb{N} :\ pT > r\}$.

I. Укажем способ исследования спектров операторов $\mathcal{V}_k$. Поскольку при каждом значении $0 < k \in \mathbb{N}$ решение $\tilde{x}_k$ уравнения (4.4.10) имеет рациональный период $T_k \in \mathbb{Q}$, можно использовать результаты раздела 4.3. Представим рациональные числа T_k $(k \in \mathbb{N})$ и r_i $(i = 1, \ldots, n_A)$ в виде дробей $T_k = \tilde{N}_{0k}/\tilde{M}_{0k}$, $r_i = \tilde{N}_i/\tilde{M}_i$. Обозначим через M_{0k} наименьшее общее кратное чисел $\tilde{M}_{0k}, \tilde{M}_1 \ldots, \tilde{M}_{n_A}$ и положим $\tau_k = 1/M_{0k}$. При этом $N_k = m\tilde{N}_{0k}M_{0k}/\tilde{M}_{0k} \in \mathbb{N}$ и $M_{ki} = \tilde{N}_i M_{0k}/\tilde{M}_i \in \mathbb{N}$. Тогда $mT_k = N_k\tau_k$ и $r_i = M_{ki}\tau_k$. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$u_i' = \sum_{j=0}^{n_A} \alpha_{kj}(t+(i-1)\tau_k)\frac{u_{i-M_{kj}+d_{kji}N_k}(t)}{\lambda^{d_{kji}}} \qquad (i=1,\ldots,N_k,\ t\in(0,\tau)),$$

где $d_{kji}=\min\{p\in\mathbb{N}:\ i-M_{kj}+pN_k>0\}$. Обозначим через $S_{k\lambda}$ такую фундаментальную матрицу этой системы, что $S_{k\lambda}(0)=E$. Пусть $e_{k\lambda i}$ — i-ая строка матрицы $S_{k\lambda}$. Определим матрицу $Q_k(\lambda)$ по формуле

$$Q_k(\lambda) = \begin{pmatrix} e_{k\lambda 1}(0) - \dfrac{e_{k\lambda N_k}(\tau)}{\lambda} \\ e_{k\lambda 2}(0) - e_{k\lambda 1}(\tau) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_{k\lambda N_k}(0) - e_{k\lambda, N_k-1}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через N_{kq} множество $N_{kq}=\{\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}:\ \det Q_k(\lambda)=0\}$. Рассмотрим также систему:

$$u_i' = \sum_{j=0}^{n_A} \alpha_{kj}(t+(i-1)\tau)\left(\frac{(d_{kji}+1)u_{i-M_{kj}+d_{kji}N_k}(t)}{\lambda^{d_{kji}}} - \right.$$
$$\left. - \frac{d_{kji}u_{i-M_{kj}+(d_{kji}+1)N_k}(t)}{\lambda^{d_{kji}+1}}\right) \qquad (i=1,\ldots,2N_k,\ t\in(0,\tau)),$$

где $d_{kji}=\min\{p\in\mathbb{N}:\ i-M_{kj}+pN_k>0\}$. Обозначим через $\hat{S}_{k\lambda}$ такую фундаментальную матрицу этой системы, что $\hat{S}_{k\lambda}(0)=E$. Пусть $\hat{e}_{k\lambda i}$ — i-ая строка матрицы $\hat{S}_{k\lambda}$. Определим матрицу $\hat{Q}_k(\lambda)$ по формуле

$$\hat{Q}_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{e}_{k\lambda 1}(0) - \dfrac{2\hat{e}_{k\lambda N_k}(\tau)}{\lambda} + \dfrac{\hat{e}_{k\lambda, 2N_k}(\tau)}{\lambda^2} \\ \hat{e}_{k\lambda 2}(0) - \hat{e}_{k\lambda 1}(\tau) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{e}_{k\lambda, 2N_k}(0) - \hat{e}_{k\lambda, 2N_k-1}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 4.1.1 и леммы 4.3.2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.6.1. *Пусть* $\lambda\neq 0$. *Тогда* $\dim\mathcal{N}(\mathcal{V}_k-\lambda I)^2 = 2N_k - \mathrm{rank}\hat{Q}_k(\lambda)$ *и* $\sigma(\mathcal{V}_k)\setminus\{0\}=N_{kq}$.

II. Опишем спектр $\sigma(\mathcal{V})$ в терминах нулей характеристических функций $q_k(\lambda) = \det Q_k(\lambda)$.

Обозначим через $\Lambda_{\mathcal{V}}$ множество чисел $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, удовлетворяющих следующим условиям: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $K \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geqslant K$ имеется $\lambda_k \in \big(\sigma(\mathcal{V}_k) \setminus \{0\}\big) \cap B_\varepsilon(\lambda)$. В частности, $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{V}}$, если $\lambda \in \big(\sigma(\mathcal{V}_k) \setminus \{0\}\big)$ для всех $k \geqslant K$.

Обозначим через Λ_q множество чисел $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, удовлетворяющих следующим условиям: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $K \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geqslant K$ имеется $\lambda_k \in N_{kq} \cap B_\varepsilon(\lambda)$. В частности, $\lambda \in \Lambda_q$, если $\lambda \in N_{q_k}$ для всех $k \geqslant K$.

Для каждого $\lambda \in \sigma(\mathcal{V}) \setminus \{0\}$ обозначим через ε_λ такое число, для которого $(\sigma(\mathcal{V}) \cup \{0\}) \cap \overline{B_{\varepsilon_\lambda}(\lambda)} = \{\lambda\}$. Оператор $\mathcal{V}$ является компактным, поэтому для каждого $\lambda \in \sigma(\mathcal{V}) \setminus \{0\}$ такое число ε_λ существует. Положим $N_{k\lambda\varepsilon} = N_{kq} \cap B_\varepsilon(\lambda)$.

Теорема 4.6.1. *Пусть* $\tilde{x} \in C_T$ *— решение уравнения* (4.1). *Тогда имеет место равенство* $\sigma(\mathcal{V}) \setminus \{0\} = \Lambda_q$, *и для любых значений* $\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{V}) \setminus \{0\}$ *и* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\lambda_0})$ *существует такое* $K_0 = K_0(\lambda_0, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, *что для всех* $k > K_0$ *имеем*

$$m(\mathcal{V}, \lambda_0) = \sum_{\lambda \in N_{k\lambda_0\varepsilon}} m(\mathcal{V}_k, \lambda). \qquad (4.6.1)$$

Доказательство. 1. Докажем справедливость формулы (4.6.1). Пусть $\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{V}) \setminus \{0\}$. По определению ε_λ имеем $\sigma(\mathcal{V}) \cap \overline{B_{\varepsilon_{\lambda_0}}(\lambda_0)} = \{\lambda_0\}$, где λ_0 — изолированное собственное значение оператора $\mathcal{V}$ ($\mathcal{V}$ — компактный оператор). С другой стороны, из компактности оператора $\mathcal{V}$ благодаря теореме D.4 следует, что оператор $\mathcal{V} - \lambda I$ фредгольмов для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (в частности, для всех $\lambda \in B_{\varepsilon_{\lambda_0}}(\lambda_0)$). Следовательно, оператор $\mathcal{V} - \lambda I$ является нормальным относительно границы $\Gamma_\varepsilon(\lambda_0)$ для всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_{\lambda_0}$.

Из существования резольвенты $R(\mathcal{V},\lambda)$ для всех $\lambda\in\Gamma_\varepsilon(\lambda_0)$ и ее непрерывности по λ на $\Gamma_\varepsilon(\lambda_0)$ вытекает, что

$$\sup_{\lambda\in\Gamma_\varepsilon(\lambda_0)}\|R(\mathcal{V},\lambda)\|=c_1<\infty,$$

где $c_1=c_1(\lambda_0,\varepsilon)>0$.

Из теоремы 4.5.1 следует, что $\mathcal{V}_k\to\mathcal{V}$ по операторной норме при $k\to\infty$. Поэтому существует $K_0=K_0(\lambda_0,\varepsilon)\in\mathbb{N}$ такое, что $\|\mathcal{V}_k-\mathcal{V}\|<(2c_1)^{-1}$ для $k\geqslant K_0$. Тогда выполнено неравенство

$$\|R(\mathcal{V},\lambda)(\mathcal{V}_k-\mathcal{V})\|<1/2\qquad(\lambda\in\Gamma_\varepsilon(\lambda_0)).$$

Используя это неравенство, из теоремы D.5 получим

$$m(\mathcal{V},\lambda_0)=m(\mathcal{V},\Gamma_\varepsilon(\lambda_0))=m(\mathcal{V}_k,\Gamma_\varepsilon(\lambda_0))=\sum_{\lambda\in\sigma(\mathcal{V}_k)\cap B_\varepsilon(\lambda_0)}m(\mathcal{V}_k,\lambda).$$

Суммирование производится по всем собственным значениям λ оператора $\mathcal{V}_k$ из круга $B_\varepsilon(\lambda_0)$. По лемме 4.6.1 имеем $N_{k\lambda_0\varepsilon}=\sigma(\mathcal{V}_k)\cap B_\varepsilon(\lambda_0)$.

2. Теперь докажем, что $\sigma(\mathcal{V})\setminus\{0\}=\Lambda_q$. Пусть $\lambda_0\in\sigma(\mathcal{V})\setminus\{0\}$. Тогда из формулы (4.6.1) получаем, что для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_{\lambda_0})$ существует такое $K=K(\lambda_0,\varepsilon)$, что при всех натуральных числах $k>K$ выполнено $N_{k\lambda_0\varepsilon}\neq\varnothing$. Таким образом, $\sigma(\mathcal{V})\setminus\{0\}\subset\Lambda_q$.

Пусть $\lambda_0\in\Lambda_q$. Тогда по лемме 4.6.1 $\lambda_0\in\Lambda_{\mathcal{V}}$. Другими словами, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $K=K(\lambda_0,\varepsilon)$, что

$$\text{для любого } k\geqslant K \text{ существует } \lambda_k\in\big(\sigma(\mathcal{V}_k)\setminus\{0\}\big)\cap B_\varepsilon(\lambda_0). \tag{4.6.2}$$

Из теоремы 4.5.1 следует, что $\mathcal{V}_k\to\mathcal{V}$ при $k\to\infty$. Предположим, что $\lambda_0\in\rho(\mathcal{V})$. Тогда в формуле (4.6.2) можно выбрать такие ε и $k>K=K(\lambda_0,\varepsilon)$, что

$$B_\varepsilon(\lambda_0)\subset\rho(\mathcal{V}),\qquad\varepsilon+\|\mathcal{V}_k-\mathcal{V}\|\leqslant\frac{1}{2\,\|R(\mathcal{V},\lambda_0)\|}.$$

Очевидно,

$$\mathcal{V}_k - \lambda I = \mathcal{V} - \lambda_0 I + (\lambda_0 - \lambda)I + \mathcal{V}_k - \mathcal{V} =$$
$$= (\mathcal{V} - \lambda_0 I)\left(I + R(\mathcal{V}, \lambda_0)((\lambda_0 - \lambda)I + (\mathcal{V}_k - \mathcal{V}))\right).$$

Тогда для любого $\lambda \in B_\varepsilon(\lambda_0)$ оператор $\mathcal{V}_k - \lambda I$ имеет ограниченный обратный

$$R(\mathcal{V}_k, \lambda) = \left(I + R(\mathcal{V}, \lambda_0)\left((\lambda_0 - \lambda)I + (\mathcal{V}_k - \mathcal{V})\right)\right)^{-1} R(\mathcal{V}, \lambda_0).$$

Это противоречит формуле (4.6.2). Следовательно, наше предположение было неверно, т. е. $\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{V})$. $\square$

III. Теперь исследуем условия простоты собственного значения $\lambda_0 \neq 0$ оператора $\mathcal{V}$.

Теорема 4.6.2. *Если для некоторого $0 \neq \lambda_0 \in \mathbb{C}$ имеет место включение*

$$\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{V}) \bigcap \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \sigma(\mathcal{V}_k) \right), \tag{4.6.3}$$

то собственное значение λ_0 оператора $\mathcal{V}$ является простым тогда и только тогда, когда существуют такие числа $0 < \varepsilon^* \in \mathbb{R}$ и $K_1 \in \mathbb{N}$, для которых условия $N_{k\lambda_0\varepsilon^*} = \{\lambda_0\}$ и $\mathrm{rank} Q_k(\lambda_0) = 2N_k - 1$ выполнены при всех $k \geqslant K_1$.

Доказательство. Пусть существуют такие числа $0 < \varepsilon^* \in \mathbb{R}$ и $K_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geqslant K_1$ имеют место равенства $\mathrm{rank} Q_k(\lambda_0) = 2N_k - 1$ и $N_{k\lambda_0\varepsilon^*} = \{\lambda_0\}$. В силу леммы 4.6.1 условие $\mathrm{rank} Q_k(\lambda_0) = 2N_k - 1$ эквивалентно требованию $m(\mathcal{V}_k, \lambda_0) = 1$. Поэтому из равенства (4.6.1) и предположения $N_{k\lambda_0\varepsilon} = \{\lambda_0\}$ следует, что при достаточно больших значениях $k > K_1$ выполнено

$$m(\mathcal{V}, \lambda_0) = \sum_{\lambda \in N_{k\lambda_0\varepsilon}} m(\mathcal{V}_k, \lambda) \leqslant \sum_{\lambda \in N_{k\lambda_0\varepsilon^*}} m(\mathcal{V}_k, \lambda) = m(\mathcal{V}_k, \lambda_0) = 1,$$

где $\varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_{\lambda_0}, \varepsilon^*\})$. Из формулы (4.6.3) получаем, что $m(\mathcal{V}, \lambda_0) \geqslant 1$. Следовательно, собственное значение λ_0 оператора $\mathcal{V}$ является простым.

2. Предположим теперь, что собственное значение λ_0 оператора $\mathcal{V}$ — простое. Из предположения (4.6.3) следует, что $m(\mathcal{V}_k, \lambda_0) \geqslant 1$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Из формулы (4.6.1) вытекает, что

$$1 = m(\mathcal{V}, \lambda_0) = m(\mathcal{V}_k, \lambda_0) + \sum_{\lambda \in N_{k\lambda_0\varepsilon} \setminus \{\lambda_0\}} m(\mathcal{V}_k, \lambda)$$

при любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\lambda_0})$ и $k > K_0 = K_0(\lambda_0, \varepsilon)$. По лемме 4.6.1 имеем $m(\mathcal{V}_k, \lambda) \geqslant 1$ при $\lambda \in N_{k\lambda_0\varepsilon}$. Поэтому при любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\lambda_0})$ и $k > K_0 = K_0(\lambda_0, \varepsilon)$ имеем $m(\mathcal{V}_k, \lambda_0) = 1$ и $N_{k\lambda_0\varepsilon} = \{\lambda_0\}$. Тогда по лемме 4.6.1 получаем, что $\mathrm{rank} Q_k(\lambda_0) = 2N_k - 1$. $\square$

IV. Наконец, сформулируем критерий гиперболичности периодического решения с иррациональным периодом.

Теорема 4.6.3. *Периодическое решение $\tilde{x} \in C_T$ уравнения* (4.1) *с иррациональным периодом T является гиперболическим тогда и только тогда, когда $\Lambda_q \cap \Gamma_1(0) = \{1\}$ и существуют такие числа $\varepsilon^* > 0$ и $K_1 = K_1(\varepsilon^*) \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geqslant K_1$ выполнены условия $N_{k1\varepsilon^*} = \{1\}$ и $\mathrm{rank}\hat{Q}_k(1) = 2N_k - 1$.*

Доказательство. 1. Благодаря лемме 4.4.2 свойство гиперболичности эквивалентно следующей совокупности требований: $\sigma(\mathcal{M}_G) \cap \Gamma_1(0) = \{1\}$ и $m(\mathcal{M}_G, 1) = 1$.

Покажем, что в последнем предложении можно заменить $\mathcal{M}_G$ на $\mathcal{V}$. Если $T > r$, то это очевидно (так как $\mathcal{V} = \mathcal{M}_G$). Допустим, что $T < r$, т. е. $\mathcal{V} = \mathcal{M}_G^m$ $(1 < m \in \mathbb{N})$. Тогда по теореме D.1 имеем

$$\sigma(\mathcal{V}) = \sigma(\mathcal{M}_G^m) = \bigl(\sigma(\mathcal{M}_G)\bigr)^m. \tag{4.6.4}$$

Пусть $\sigma(\mathcal{V}) \cap \Gamma_1(0) = \{\lambda_i,\ i = 1, \ldots, i^*\}$ ($i^* < \infty$, поскольку спектр компактного оператора может иметь точку накопления только в нуле).

Для каждого $i \in \{1, \ldots, i^*\}$ обозначим через $\{\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{ij_i}\}$ множество всех различных чисел $\lambda \in \sigma(\mathcal{M}_G)$, для которых $\lambda^m = \lambda_i$. Используя компактность оператора $\mathcal{M}_G^m$, по теореме D.3 получаем, что $j_i < \infty$ и $P(\mathcal{M}_G, \lambda_{ij}) < \infty$. Благодаря теореме D.1 имеем

$$P(\mathcal{V}, \lambda_i) = P(\mathcal{M}_G^m, \lambda_i) = \sum_{j=1}^{j_i} P(\mathcal{M}_G, \lambda_{ij}). \tag{4.6.5}$$

Поскольку $P(\mathcal{M}_G, \lambda)P(\mathcal{M}_G, \mu) = 0$ для любых двух изолированных собственных значений $\lambda \neq \mu$, по формуле (4.6.5) имеем

$$m(\mathcal{V}, \lambda_i) = \sum_{j=1}^{j_i} m(\mathcal{M}_G, \lambda_{ij}).$$

Из формулы (4.6.4) следует равенство $\sigma(\mathcal{M}_G) \cap \Gamma_1(0) = \{\lambda_{ij}, j = 1, \ldots, j_i, i = 1, \ldots, i^*\}$. Поэтому

$$\sum_{\lambda \in \sigma(\mathcal{V}) \cap \Gamma_1(0)} m(\mathcal{V}, \lambda) = \sum_{\lambda \in \sigma(\mathcal{M}_G) \cap \Gamma_1(0)} m(\mathcal{M}_G, \lambda). \tag{4.6.6}$$

Другими словами, операторы $\mathcal{M}_G$ и $\mathcal{V}$ имеют на единичной окружности одинаковое количество собственных значений с учетом алгебраической кратности. Благодаря включению $1 \in \sigma(\mathcal{M}_G) \cap \sigma(\mathcal{V})$ свойство гиперболичности эквивалентно следующим требованиям: $\sigma(\mathcal{V}) \cap \Gamma_1(0) = \{1\}$ и $m(\mathcal{V}) = 1$.

2. Пусть $\Lambda_q \cap \Gamma_1(0) = \{1\}$. Тогда по теореме 4.6.1 получаем равенство $\sigma(\mathcal{V}) \cap \Gamma_1(0) = \{1\}$. При этом, поскольку существуют такие числа $\varepsilon^* > 0$ и $K_1 = K_1(\varepsilon^*) \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geqslant K_1$ выполнены условия $N_{k1\varepsilon} = \{1\}$ и $\mathrm{rank} Q_k(1) = 2N_k - 1$, из теоремы 4.6.2 следует, что собственное значение $\lambda_0 = 1$ — простое (условие (4.6.3) выполнено, так как $\lambda_0 = 1$ является собственным значением всех операторов $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}_k$, см. замечание 4.5.1).

Теперь докажем обратное утверждение. Пусть $\sigma(\mathcal{V}) \cap \Gamma_1(0) = \{1\}$, $m(\mathcal{V}, 1) = 1$. Тогда по теореме 4.6.1 получаем $\Lambda_q \cap \Gamma_1(0) = \{1\}$; по теореме 4.6.2 для $\lambda_0 = 1$ существуют числа $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_{\lambda_0})$ и $K_1 = K_1(\lambda_0, \varepsilon^*) \in \mathbb{N}$

такие, что для всех $k \geqslant K_1$ выполнены следующие условия: $N_{k\lambda_0\varepsilon} = \{\lambda_0\}$ и $\mathrm{rank} Q_k(\lambda_0) = 2N_k - 1$. $\square$

Задания и вопросы для самоконтроля

1. Как используется рациональная аппроксимация при исследовании мультипликаторов Флоке?

2. Верно ли, что $\lambda \in \Lambda_q$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\lambda_k \to \lambda$, такая, что λ_k является корнем характеристического уравнения для j_k-ой задачи, соответствующей рациональной аппроксимации; причем $j_k \neq j_i$ при $k \neq i$?

3. Сформулируйте аналогично определение множества $\Lambda_{\mathcal{V}}$.

4. Почему для любого $\lambda \in \sigma(\mathcal{V}) \setminus \{0\}$ существует окрестность, не содержащая других собственных значений оператора $\mathcal{V}$? Имеет ли место аналогичное утверждение для $\lambda = 0$?

5. Может ли спектр оператора монодромии в случае функционально-дифференциального уравнения состоять из конечного числа точек?

6. Как используется операторное обобщение теоремы Руше при исследовании мультипликаторов Флоке?

7. При доказательстве существования резольвенты $R(\mathcal{V}_k, \lambda)$ используется тот факт, что если $\|A\| < 1$, то оператор $I - A$ обратим. Докажите это известное свойство.

8. В чем заключается противоречие, полученное при доказательстве теоремы 4.6.1?

9. Применима ли теорема 4.6.2 к исследованию кратности собственных значений $\lambda \neq 0$?

Приложения

А. Общие сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{A.1}$$

Здесь $y' = dy/dt$, $y = (y^1, \ldots, y^d)$ и $f = (f^1, \ldots, f^d)$ суть d-мерные векторы; вектор-функция $f(t, y)$ определена на некотором $(d+1)$-мерном (t, y)-множестве E. Вектор-функция $y = y(t)$, определенная на t-интервале J, содержащем точку $t = t_0$, называется *решением задачи Коши* (A.1), если $y(t_0) = y_0$, $(t, y(t)) \in E$, $y(t)$ дифференцируема и $y'(t) = f(t, y(t))$ для всех $t \in J$. При этом ясно, что производная функции $y(t)$ является непрерывной. Для решения задачи Коши (A.1) будем использовать также обозначения $y = \eta(t, t_0, y_0)$ и $\eta(t, y_0) = \eta(t, 0, y_0)$.

Если E и F — два подмножества из $\mathbb{R}^n$, то обозначения $\operatorname{dist}(E, F)$ и $\rho(E, F)$ эквивалентны и обозначают расстояние $\inf |x - y|$ для $x \in E$, $y \in F$ называется расстоянием между F и E. Если E — открытое множество в $\mathbb{R}^d$, то соотношение $f \in C^n(E)$, $0 \leqslant n < \infty$ означает, что вектор-функция $f(y)$ непрерывна на E и его компоненты имеют непрерывные частные производные всех порядков $k \leqslant n$ относительно $y^1, \ldots, y^d$. Будем также говорить, что f принадлежит классу C^n на множестве E. Через $\partial_y F(x, y)$ будем обозначать матрицу с коэффициентами $\partial F^i(x, y)/\partial y^j$.

Теорема А.1 (о существовании и единственности решения задачи Коши ([13, гл. II, теорема 1.1.])). *Пусть* $y, f \in \mathbb{R}^d$; *функция* $f(t, y)$ *непрерывна в параллелепипеде* $R: \ |t - t_0| \leqslant a, \ |y - y_0| \leqslant b$ *и удовлетворяет условию Липшица по* y. *Пусть* M *является верхней границей для* $|f(t, y)|$ *на* R *и* $\alpha = \min(a, b/M)$. *Тогда задача Коши* (А.1) *имеет на отрезке* $[t_0, t_0 + \alpha]$ *единственное решение* $y = \eta(t, t_0, y_0)$.

Определение А.1 ([12, гл. 1, §3, п. А]). Пусть $y_1 = \phi(t)$ и $y_2 = \psi(t)$ являются решениями уравнения (А.1) на интервалах (r_1, r_2) и (s_1, s_2) соответственно. Пусть $(s_1, s_2) \subset (r_1, r_2)$ и $\phi(t) = \psi(t)$ при $t \in (s_1, s_2)$. Тогда решение y_2 называется продолжением решения y_1. Решение называется непродолжаемым, если единственным его продолжением является само это решение. $\square$

Предположение А.1. Пусть функция $f(t, y)$ непрерывна на открытом (t, y)-множестве E и обладает там непрерывными частными производными первого порядка по компонентам вектора y.

Теорема А.2 ([12, гл. 1, §3, п. А]). *Пусть выполнено предположение* А.1. *Тогда для любых начальных данных из* E *существует единственное непродолжаемое решение* $y = \eta(t, t_0, y_0)$ *уравнения* (А.1).

Теорема А.3 ([12, гл. 4, теорема 14]). *Пусть выполнено предположение* А.1. *Множество* F *всех точек* (t, τ, ξ), *на которых определена функция* $\eta(t, t_0, y_0)$, *являющаяся непродолжаемым решением уравнения* (А.1) *с начальными значениями* (t_0, y_0), *есть открытое* (t, t_0, y_0)-*множество. При этом функция* $\eta(t, t_0, y_0)$ *непрерывна на множестве* F.

Пусть выполнено предположение $A.1$, и пусть непродолжаемое решение $y = \eta(t, t_0, y_0)$ определено на интервале (w_-, w_+). Предполагается, конечно, $w_- = w_-(t_0, y_0)$ и $w_+ = w_+(t_0, y_0)$. Обозначим через E_T множество точек (t, t_0, y_0) таких, что $(t_0, y_0) \in E$ и $t \in (w_-(t_0, y_0), w_+(t_0, y_0))$.

Теорема A.4 ([13, гл. V, теорема 3.1])**.** *Пусть выполнено предположение A.1. Тогда*
(i) решение $y = \eta(t, t_0, y_0)$ задачи Коши (A.1) *единственно и принадлежит классу C^1 в E_T;*
(ii) функция $x = \partial\eta(t, t_0, y_0)/\partial y_0^k$ является решением задачи Коши

$$x' = J(t)x, \qquad x(t_0) = e_k;$$

(iii) производная $\partial\eta(t, t_0, y_0)/\partial t_0$ определяется по формуле

$$\frac{\partial\eta}{\partial t_0} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial\eta}{\partial y_0^k} f^k(t_0, y_0).$$

Здесь e_k — вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме k-ой компоненты, равной единице. Теорема $A.4$ делает естественным следующее определение.

Определение A.2. Уравнение $x' = J(t)x$ называется для задачи Коши $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ уравнением в вариациях вдоль решения $y = \eta(t, t_0, y_0)$. $\square$

Из теоремы A.4 вытекает следующее утверждение.

Теорема A.5 ([13, гл. V, следствие 3.2.])**.** *Пусть выполнено предположение A.1. Тогда смешанные производные $\partial^2\eta/\partial y_0^k \partial t = \partial^2\eta/\partial t \partial y_0^k$ существуют и непрерывны.*

Теорема A.6 (неравенство Гронуолла ([13, гл. III, теорема 1.1.]))**.** *Пусть $u(t)$, $v(t)$ — неотрицательные функции, непрерывные на $[a, b]$; $C \geqslant 0$ — некоторая постоянная; кроме того,*

$$v(t) \geqslant C + \int_a^t v(s)u(s)ds, \qquad a \leqslant t \leqslant b.$$

Тогда

$$v(t) \leqslant C \exp \int_a^t u(s)ds, \qquad a \leqslant t \leqslant b.$$

В частности, если $C = 0$, то $v(t) \equiv 0$.

Неравенство Гронуолла в несколько более общем виде можно найти в [20, гл. 1, теорема 1.3.1].

Рассмотрим далее линейные системы дифференциальных уравнений

$$y' = A(t)y + f(t), \tag{A.2}$$

где $A(t)$ — $(d \times d)$-матрица, а $f(t)$ — непрерывная вектор-функция, $t \in [a, b]$. Каждой такой системе уравнений соответствует однородная система

$$y' = A(t)y. \tag{A.3}$$

Компоненты матрицы A и векторов f и y предполагаются комплексными. Однако система (A.2) эквивалентна вещественной системе для $2d$-мерного вектора, получаемой выделением вещественной и мнимой частей компонент вектора y. Очевидно, любая задача Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений удовлетворяет теореме $A.2$ при $t_0 \in [a, b]$ и имеет единственное решение.

Определение A.3. Фундаментальной матрицей системы (A.3) называется невырожденная квадратная матрица, столбцы которой являются решениями системы (A.3). □

Известно, что $H(t)$ является фундаментальной матрицей системы (A.3) тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $H'(t) = A(t)H(t)$, и матрица $H(0)$ невырожденная.

Теорема A.7 ([12, гл. 3, §17])**.** *Любая система однородных дифференциальных уравнений имеет фундаментальную матрицу. Пусть*

$Y(t)$ — фундаментальная матрица системы (A.3) *и C —произвольная невырожденная матрица (с постоянными коэффициентами) той же размерности. Тогда совокупность всех фундаментальных матриц системы* (A.3) *определяется по формуле $Y(t)C$. Совокупность всех решений системы* (A.2) *определяется по формуле*

$$y = Y(t)c + \int_{t_0}^{t} Y(t)Y^{-1}(s)f(s)ds,$$

где c — произвольный вектор с постоянными компонентами.

B. Инвариантные многообразия отображения

Рассмотрим отображение $T: \ (y_0, z_0) \to (y_1, z_1)$, заданное по формуле

$$T: \ y_1 = Ay_0 + Y(y_0, z_0), \quad z_1 = Cz_1 + Z(y_0, z_0) \tag{B.1}$$

на открытом (y_0, z_0)-множестве D, $\xi_0 \in D$ при $\xi_0 = 0$, $\dim y = d$, $\dim z = e$.

Определение B.1. Множество S называется инвариантным относительно отображения T, если $T(D \cap S) \subset S$. Множество S будем называть локально инвариантным (в точке $\xi_0 = 0$), если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\xi \in S$ при $\|\xi\| < \varepsilon$ выполнено $T\xi \in S$. □

Наша цель: при выполнении некоторых предположений доказать существование инвариантного множества со специальными свойствами.

Предположение B.1. Пусть для $a = \|A\|$ и $c = \|C^{-1}\|^{-1}$ выполнены неравенства $a < c$ и $a < 1$. Пусть функции Y и Z принадлежат классу C^1 при малых $\|y_0\|$ и $\|z_0\|$. Пусть функции Y и Z и матрицы Якоби $\partial_{y_0}Y$, $\partial_{z_0}Y$, $\partial_{y_0}Z$, $\partial_{z_0}Z$ обращаются в ноль в точке $(y_0, z_0) = 0$.

Лемма B.1 ([13, гл. IX, §3, лемма 3.1])**.** *Пусть выполнено предположение B.1. Пусть $\theta > 0$ — произвольное число. Тогда существует* *такое число $s = s(\theta) > 0$ (которое стремится к нулю вместе с θ) и такая функция $G(\xi)$ класса C^1, определенная для всех ξ, что $G(\xi) = f(\xi)$ при $\|\xi\| \leqslant s/2$, $G(\xi = 0)$ при $\|\xi\| \geqslant s$ и $\|\partial_\xi G\| \leqslant \theta$ при всех ξ.*

Доказательство. Пусть $s > 0$ настолько мало, что $\|\partial_\xi F(\xi)\| \leqslant \theta/8$, а потому $\|F(\xi)\| \leqslant \theta\|\xi\|/8$ при $\|\xi\| \leqslant s$. Пусть $\phi(t)$ — гладкая вещественная функция переменного t, определенная при $t \geqslant 0$ и такая, что $\phi(t) = 1$ при $t \leqslant (s/2)^2$, $0 < \phi(t) < 1$ при $(s/2)^2 < t < s^2$, $\psi(t) = 0$ при $t > s^2$ и $0 \leqslant -d\phi/dt \leqslant 2/s^2$ для $t \geqslant 0$. Положим $G(\xi) = F(\xi)\phi(\|\xi\|^2)$ при $\|\xi\| \leqslant s$, и $G(\xi) = 0$ при $\|\xi \geqslant s|$. Тогда $\partial_\xi G = 0$ при $\|\xi\| > s$. Если $\|\xi\| \leqslant s$, то $\partial_\xi G = (\partial F^i/\partial\xi^j)\psi + 2(F^i\xi^j)d\phi/dt$ и потому $\|\partial_\xi G\| \leqslant (\theta/8) + 2(\theta\|\xi\|^2/8)(2/s^2) \leqslant \theta$. Лемма доказана. □

Лемма B.2 ([13, гл. IX, §5, лемма 5.1]). *Пусть выполнено предположение B.1.Тогда существует такая e-мерная вектор-функция $z = g(y)$, принадлежащая классу C^1 при малых $\|y\|$, что*

$$g(0) = 0, \qquad \partial_y g(0) = 0, \tag{B.2}$$

а отображения

$$R: \; u = y, \quad v = z - g(y) \quad \text{и} \quad R^{-1}: \; y = u, \quad z = v + g(u) \tag{B.3}$$

приводят T к виду $\hat{T} = RTR^{-1}: \; (u_0, v_0) \to (u_1, v_1)$, где

$$u_1 = Au_0 + U(u_0, v_0), \qquad v_1 = Cv_0 + V(u_0, v_0), \tag{B.4}$$

функции U, V и их матрицы Якоби равны нулю при $(u_0, v_0) = 0$,

$$V(u_0, 0) = 0. \tag{B.5}$$

Доказательство. Доказываемое свойство носит локальный характер. Поэтому ввиду предположения B.1 и леммы B.1 без ограничения общности будем считать, что

$$\|\partial_{y_0} Y\| \leqslant \theta_0, \quad \|\partial_{z_0} Y\| \leqslant \theta_0, \quad \|\partial_{y_0} Z\| \leqslant \theta_0, \quad \|\partial_{z_0} Z\| \leqslant \theta_0 \tag{B.6}$$

при всех y_0 и z_0, где

$$0 < \theta_0 < \min\left(\frac{c-a}{4}, \frac{1-a}{2}\right); \tag{B.7}$$

а также, что

$$Y = 0, \quad Z = 0, \quad \text{если} \quad \|y_0\|^2 + \|z_0\|^2 \geqslant s_0^2. \tag{B.8}$$

Предположим временно, что R (т. е. $g(y)$) нам известно. Тогда из (B.1) и (B.3) следует, что отображение $\hat{T}: \ (u_0, v_0) \to (u_1, v_1)$ имеет вид

$$u_1 = Au_0 + Y(u_0, v_0 + g(u_0)),$$

$$v_1 = Cv_0 + Cg(u_0) + Z(u_0, v_0 + g(u_0)) - g(Au_0 + Y[u_0, v_0 + g(u_0)]).$$

Отсюда, в силу (B.4) имеем

$$V(u, v) = Cg(u) + Z(u, v + g(u)) - g(Au + Y[u, v + g(u)]),$$

и условие (B.5) эквивалентно условию

$$g(u) = C^{-1}\{g(Au + Y[u, g(u)] - Z(u, g(u))\}. \tag{B.9}$$

Мы должны показать, что функциональное уравнение (B.9) имеет решение из класса C^1, удовлетворяющее (B.2) и (B.5).

Уравнение (B.9) может быть решено методом последовательных приближений. Пусть $g_0(u) \equiv 0$, и после того, как найдена функция $g_{n-1}(u)$, положим

$$g_n(u) = C^{-1}\{g_{n-1}(Au + Y[u, g_{n-1}(u)] - Z(u, g_{n-1}(u))\}.$$

Введем для краткости записи следующие обозначения: $g_{n-1} = g_{n-1}(u)$, $g_{n-1}^0 = g_{n-1}(Au + Y^0)$, где $Y^0 = Y(u, g_{n-1}(u))$, $Z^0 = Z(u, g_{n-1}(u))$. Очевидно, что $g_0, g_1, \ldots$ могут быть найдены и принадлежат классу C^1 при всех u. Кроме того, если ∂g_n — матрица Якоби для функции g_n, то

$$\partial g_n = C^{-1}\{\partial g_{n-1}^0[A + \partial_y Y^0 + (\partial_z Y^0)(\partial g_{n-1})] - \\ - [\partial_y Z^0 + (\partial_z Z^0)(\partial g_{n-1})\}, \tag{B.10}$$

где, например, $\partial_y Y^0 = \partial_y Y(y, z)$ в точке $(y, z) = (u, g_{n-1}(u))$.

Определим число σ равенством

$$\sigma = \frac{\theta_0}{c - a - 3\theta_0}, \quad \text{так что} \quad 0 < \sigma < 1,$$

в соответствии с (В.7). Покажем по индукции, что

$$\|\partial g_n(u)\| \leqslant \sigma \quad \text{при всех } u. \tag{B.11}$$

Ясно, что (В.11) выполняется при $n = 0$. Предположим, что (В.11) справедливо, когда n заменено на $n - 1$. Тогда, согласно (В.10) и поскольку $\sigma < 1$, имеем

$$\|\partial g_n\| \leqslant c^{-1}\{\sigma[a + \theta_0 + \theta_0\sigma] + [\theta_0 + \theta_0\sigma]\} \leqslant c^{-1}[\sigma(a + 3\theta_0) + \theta_0].$$

Так как $c^{-1}[\sigma(a+3\theta_0)+\theta_0] = \sigma$, отсюда следует (В.11), что и требовалось доказать.

Проверим теперь, что $\partial g_0, \partial g_1, \ldots$ равностепенно непрерывны. Для всякой функции $f = f(u)$ или $f = f(y, z)$ положим

$$\Delta f = f(u + \Delta u) - f(u) \quad \text{при} \quad \Delta f = f(y + \Delta y, z + \Delta z) - f(y, z).$$

Пусть

$$h_1(\delta) = \sup \|\Delta\partial_{y,z} Y, Z\| \quad \text{при} \quad \|\delta y\|, \|\Delta z\| \leqslant \delta,$$

где $\partial_{y,z} Y, Z$ — любая из четырех матриц Якоби: $\partial_y Y$, $\partial_z Y$, $\partial_y Z$, $\partial_z Z$ для функций $Y(y, z)$, $Z(y, z)$. Покажем по индукции, что

$$\|\Delta\partial g_n\| \leqslant h(\delta) \quad \text{при} \quad \|\Delta u\| \leqslant \delta < 1, \tag{B.12}$$

где

$$h(\delta) = \frac{4h_1(\delta)}{c - a - 4\theta_0}.$$

Ясно, что (В.12) выполняется при $n = 0$. Предположим, что это неравенство доказано для $n - 1$. Заметим, что в силу (В.11)

$$\|\Delta g_{n-1}(u)\| \leqslant \sigma\|\Delta u\| \leqslant \|\Delta u\|,$$

откуда

$$\|\Delta\partial_{y,z}Y^0, Z^0\| \leqslant h_1(\|\Delta u\|),$$
$$\|\Delta[Au + Y(u, g_{n-1}(u))]\| \leqslant (a + 2\theta_0)\|\Delta u\| \leqslant \|\Delta u\|,$$

причем последние два неравенства вытекают из (B.6) и (B.7). Используя тождество $\Delta[f_1(u)f_2(u)] = f_1(u + \Delta u)\Delta f_2 + (\Delta f_1)f_2(u)$ и неравенство $\sigma < 1$, можно вывести из (B.10), что при $\|\Delta u\| \leqslant \delta < 1$ выполняется оценка

$$\|\Delta\partial g_n\| \leqslant c^{-1}\{h(\delta)[a + 2\theta_0] + [h_1(\delta) + h_1(\delta) + \theta_0 h(\delta)] +$$
$$+ [h_1(\delta) + h_1(\delta) + \theta_0 h(\delta)]\} = c^{-1}\{h(\delta)(a + 4\theta_0) + 4h_1(\delta)\}.$$

По построению функции $h(\delta)$ выражение в правой части равно $h(\delta)$.

Далее покажем, что последовательность $g_0, g_1, \ldots$ сходится равномерно на каждом ограниченном u-множестве. Для этого достаточно установить, что существуют такие постоянные M и r, что $0 < r < 1$ и при $n = 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство

$$\|g_n(u) - g_{n-1}(u)\| \leqslant M\|u\|r^n. \tag{B.13}$$

Это неравенство верно при $n = 1$, если M и r таковы, что $Mr = \sigma$. Предположим, что уже доказано неравенство (B.13), в котором n заменено на $n - 1$. По построению функций g_n величина $c\|g_n(u) - g_{n-1}(u)\|$ не превосходит

$$\|g_{n-1}(Au + Y[u, g_{n-1}]) - g_{n-2}(Au + Y[u, g_{n-2}])\| +$$
$$+ \|Z(u, g_{n-1} - Z(u, g_{n-2}))\|.$$

Первое слагаемое оценивается сверху величиной

$$\|g_{n-1}(Au + Y[u, g_{n-1}]) - g_{n-2}(Au + Y[u, g_{n-1}])\| +$$
$$+ \|g_{n-2}(Au + Y[u, g_{n-1}]) - g_{n-2}(Au + Y[u, g_{n-2}])\|.$$

Поэтому $c\|g_n(u) - g_{n-1}(u)\|$ не превосходит величины

$$M\|Au + Y(u, g_{n-1})\|r^{n-1} + \sigma\theta_0 M\|u\|r^{n-1} + \theta_0 M\|u\|r^{n-1},$$

которая, в свою очередь, не больше, чем $Mr^{n-1}\|u\|(a + 4\theta_0)$. Таким образом, если $r = (a + 4\theta_0)/c$ и $M = \sigma/r$, то справедливость неравенства (B.13) доказана, а тот факт, что $r < 1$, вытекает из (B.7).

Итак, последовательность $g_n(u)$ сходится к $g(u)$ равномерно на всяком ограниченном множестве. По построению функций g_n предельная функция $g(u)$ удовлетворяет функциональному уравнению (B.9). Наконец, поскольку последовательность $\partial g_0, \partial g_1, \ldots$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, существует подпоследовательность, сходящаяся равномерно на каждом ограниченном u-множестве. Отсюда следует, что $g(u) \in C^1$. Таким образом, наше утверждение доказано полностью. $\square$

Замечание B.1. Условие (B.5) означает, что множество точек $(u_0, 0)$ локально инвариантно относительно отображения (B.4). Поэтому многообразие $z = g(y)$ локально инвариантно относительно отображения (B.1). $\square$

Вместо принципа сжатых отображений при доказательстве существования инвариантных многообразий можно использовать теорему о неявной функции (как это сделано в [1, п. 6]). В основном тексте эта теорема будет использована для решения других задач. Поэтому приведем ее здесь. Ниже через $U_r(a)$ и $V_r(b)$ обозначаются шаровые окрестности точек a и b в пространствах E и F соответственно.

Теорема B.1 ([1, теорема 4]). *Пусть E, F — банаховы пространства, $a \in E$, $b \in F$, и пусть G — открытая окрестность точки (a, b) в пространстве $E \times F$. Пусть задано гладкое отображение*

$$f:\ G \to F \qquad (x, y) \mapsto f(x, y),$$

причем $f(a,b) = 0$, а оператор $f_y(a,b): \ F \to F$ обратим. Тогда существуют числа $r_1, r_2 > 0$ и гладкая функция $y(\,.\,): \ U_{r_1}(a) \to V_{r_2}(b)$ такие, что $U_{r_1}(a) \times V_{r_2}(b) \subset G$, $f(x, y(x)) = 0$ при всех $x \in U_{r_1}(a)$ и никаких других решений уравнения $f(x,y) = 0$ в $U_{r_1}(a) \times V_{r_2}(b)$ нет, т.е. если $(x,y) \in U_{r_1}(a) \times V_{r_2}(b)$ и $f(x,y) = 0$, то $y = y(x)$.

Сформулируем также теорему о неявной функции в конечномерном случае.

Теорема B.2 ([9, гл. VIII, §5])**.** *Пусть отображение $F: \ \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ определено в окрестности U точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+n}$, F принадлежит классу C^1, $F(x_0, y_0) = 0$ и матрица $\partial_y F(x_0, y_0)$ невырожденная. Тогда существует отображение $f: \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, принадлежащее классу C^1 в некоторой окрестности точки x_0, такое, что в этой окрестности равенства $F(x,y) = 0$ и $y = f(x)$ эквивалентны.*

C. Представление гладких периодических функций

В этом разделе докажем некоторое свойство функций из C_T (см. теорему C.2). Это свойство лежит в основе метода построения рациональной аппроксимации, излагаемого в следующем разделе. Название настоящего раздела мотивируется тем, что частным случаем теоремы C.2 является следующее утверждение.

Теорема C.1. *Любой функции $\hat{y} \in C_T$ ($\hat{y} \neq \mathrm{const}$) можно поставить в соответствие такие числа $n^* \in \mathbb{N}$ и $0 < q_i \in \mathbb{Q}$ $(i = 2, \ldots, n^*)$, что для любой другой функции $\tilde{y} \in C_T$ найдется функция $W \in C^1(\mathbb{R}^{n^*}, \mathbb{R})$, удовлетворяющая равенству*

$$W\left(\hat{y}(t), \hat{y}(t - q_2), \ldots, \hat{y}(t - q_{n^*})\right) = \tilde{y}(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Нам понадобится вспомогательная функция $\hat{g}$, удовлетворяющая следующему условию.

Условие C.1. *Пусть*
1) $\hat{g} \in C_T$ ($\hat{g} \neq \mathrm{const}$);
2) *на множестве* $[t_0, t_0 + T)$ *функция* $\hat{g}$ *достигает своего глобального максимума только в одной точке* $t = t_m$ *(очевидно, наличие этого свойства не зависит от выбора* $t_0 \in \mathbb{R}$*);*
3) *существует такая проколотая окрестность* $\dot{U}(t_m)$ *точки* t_m*, что для любого* $t \in \dot{U}(t_m)$ *выполнено* $\hat{g}'(t) \neq 0$.

Лемма C.1. *Для любой функции* $\hat{g}$*, удовлетворяющей условию* $C.1$*, существуют такие числа* $0 < d_b \in \mathbb{R}$*,* $0 < q \in \mathbb{Q}$*,* $1 < \beta_0 \in \mathbb{R}$ *и* $t_b \in \mathbb{R}$*, при которых для любой функции* $\tilde{x} \in C_T$ *найдется функция* $U : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ *такая, что при* $\beta \in [1, \beta_0]$ *и* $r, p \in \mathbb{R}$ *имеем*

$$U\left(\hat{g}(\beta t - \beta r), \hat{g}(\beta t - \beta r - \beta q), r, p, \beta\right) =$$
$$= \begin{cases} \tilde{x}(\beta t - \beta p), & \beta t \in (t_b + \beta r, t_b + d_b + \beta r), \\ 0, & \beta t \in [t_b + d_b + \beta r, t_b + T + \beta r]. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ – произвольное фиксированное число, $a_m = \max_{t \in \mathbb{R}}\{\hat{g}(t)\}$. Тогда на полуинтервале $[t_0, t_0 + T)$ существует единственное число t_m такое, что $\hat{g}(t_m) = a_m$. Положим $a = \max\{\hat{g}(t) : \ t \in [t_0, t_0 + T), \ t \neq t_m, \ \hat{g}'(t) = 0\}$. Благодаря условию $C.1$ имеем $a < a_m$. Если на полуинтервале $[t_0, t_0 + T)$ функция $\hat{g}$ достигает локального максимума только в одной точке, то число a определим иначе:

$$a = (a_m + \max\{\hat{g}(t) : \ t \in [t_0, t_0 + T), \ t \neq t_m, \ \hat{g}'(t) = 0\})/2.$$

(Это же определение можно использовать и в общем случае, однако оно менее эффективно.) Очевидно, существуют такие числа $t_a \in (t_m - T, t_m)$

и $d_a \in (0, T)$, что $t \in (t_a, t_a+d_a)$ тогда и только тогда, когда $t \in [t_a, t_a+T]$ и $\hat{g}(t) > a$.

Легко видеть, что $t_m \in (t_a, t_a+d_a)$, $\hat{g}'(t) > 0$ при $t \in (t_a, t_m)$ и $\hat{g}'(t) < 0$ при $t \in (t_m, t_a + d_a)$. Поэтому для любого $d_b \in (0, d_a)$ существуют такие числа $b \in (a, a_m)$ и $t_b \in (t_a, t_m)$, что

$$\begin{gathered} t \in (t_b, t_b + d_b) \quad \text{тогда и только тогда,} \\ \text{когда} \quad t \in [t_b, t_b + T] \;\text{ и }\; \hat{g}(t) > b. \end{gathered} \tag{C.1}$$

Пусть числа $t_l, t_r \in \mathbb{R}$ таковы, что $t_l < t_r$ и $\hat{g}'(t) \neq 0$ при $t \in [t_l, t_r]$. Например, можно положить $t_l = t_a$ и $t_r = (t_m + t_a)/2$. Однако эффективнее выбирать эти числа так, чтобы разность $t_r - t_l$ принимала максимальное значение. Без ограничения общности можно считать, что $t_l < t_a$ (при необходимости заменим t_l и t_r на $t_l - iT$ и $t_r - iT$ соответственно, где $i \in \mathbb{N}$). Тогда существует такая функция $T_x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, что при $t \in [t_l, t_r]$ имеет место равенство $T_x\left(\hat{g}(t)\right) = t$.

Зафиксируем теперь значение $d_b \in (0, d_a)$ так, чтобы $d_b < t_r - t_l$. Определим числа $b \in (a, a_m)$ и $t_b \in (t_a, t_m)$ так, чтобы имела место формула (C.1). Затем выберем положительное число $q \in \mathbb{Q}$ так, чтобы $[t_b - q, t_b + d_b - q] \subset (t_l, t_r)$. Положим $\beta_0 = (t_b - t_l + q)/(2q)$. Легко проверить, что число $t_b - q\beta_0$ является серединой интервала $(t_l, t_b - q)$. Поэтому для любого $\beta \in [1, \beta_0]$ имеем $[t_b - \beta q, t_b + d_b - \beta q] \subset (t_l, t_r)$. Определим функцию $U(\cdot, \cdot, 0, \cdot, \cdot)$ по формуле

$$U(y, z, 0, p, \beta) = \begin{cases} \tilde{x}(T_x(z) + \beta q - \beta p), & y > b, \\ 0, & y \leqslant b. \end{cases}$$

При $\beta t \in [t_b, t_b + T]$ имеем

1) $\hat{g}(\beta t) > b \Leftrightarrow \beta t \in (t_b, t_b + d_b)$;
2) при $\beta t \in [t_b, t_b + d_b]$ имеем $\beta t - \beta q \in (t_l, t_r)$
и, следовательно, $T_x\left(\hat{g}(\beta t - \beta q)\right) = \beta t - \beta q$.

Поэтому при $\beta \in [1, \beta_0]$ функция U обладает следующим свойством:

$$U(\hat{g}(\beta t), \hat{g}(\beta t - \beta q), 0, p, \beta) = \begin{cases} \tilde{x}(\beta t - \beta p), & \beta t \in (t_b, t_b + d_b), \\ 0, & \beta t \in [t_b + d_b, t_b + T]. \end{cases}$$

Совершая в последнем равенстве замену переменной $t = s - r$, легко видеть, что функция $U : \mathbb{R}^5, \mathbb{R}$, заданная по формуле

$$U(y, z, r, p, \beta) = \begin{cases} \tilde{x}\left(T_x(z) + \beta(q - p + r)\right), & y > b, \\ 0, & y \leqslant b, \end{cases}$$

при $\beta \in [1, \beta_0]$ обладает следующим свойством:

$$U\left(\hat{g}(\beta(s - r)), \hat{g}(\beta(s - r - q)), r, p, \beta\right) =$$
$$= \begin{cases} \tilde{x}(\beta(s - p)), & \beta(s - r) \in (t_b, t_b + d_b), \\ 0, & \beta(s - r) \in [t_b + d_b, t_b + T], \end{cases}$$

т. е. удовлетворяет условию леммы. □

Далее построим семейство функций из пространства $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ со свойством, аналогичным свойству функций $U(\cdot, \cdot, r, p, \beta)$. Для этого нам понадобится вспомогательная функция $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, обладающая свойствами

$$h(t) = 1 \text{ при } t > \frac{1}{2}, \quad h(t) = 0 \text{ при } t < -\frac{1}{2}, \quad h(t) \in (0, 1) \text{ при } t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$$

для построения которой известно много способов (такая функция не единственна; нам подойдет любая). При $\varepsilon > 0$ и $a \in \mathbb{R}$ нам будут полезны следующие свойства функции h:

$$\begin{aligned} &h\left(\tfrac{t - a + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right) = 0 \text{ при } t < a - \varepsilon, && h\left(\tfrac{t - a + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right) = 1 \text{ при } t > a, \\ &h\left(\tfrac{t - a - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right) = 0 \text{ при } t < a, && h\left(\tfrac{t - a - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right) = 1 \text{ при } t > a + \varepsilon, \end{aligned} \tag{C.2}$$

которые, очевидно, имеют место. Дополнительно потребуем, чтобы

$$h'(t) \neq 0 \qquad \text{при} \quad t \in (-1/2, 1/2). \tag{C.3}$$

Лемма C.2. *Для любой функции $\hat{g}$, удовлетворяющей условию C.1, существуют числа $q \in \mathbb{Q}$, $\beta_0, d_c, t_c \in \mathbb{R}$ такие, что для любой функции $\tilde{x} \in C_T$ найдется семейство функций $V(\cdot,\cdot,r,p,\beta,\varepsilon,d) \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ такое, что при любых значениях $r, p \in \mathbb{R}$, $\beta \in [1,\beta_0]$, $\varepsilon \in (0, d_c/4)$ и $d \in (2\varepsilon, d_c]$ имеет место равенство*

$$V\left(\hat{g}(\beta t - \beta r), \hat{g}(\beta t - \beta q - \beta r), r, p, \beta, \varepsilon, d\right) =$$
$$= \begin{cases} \tilde{x}(\beta t - \beta p) \cdot h\left(\frac{\beta t - \beta r - t_c - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right), \\ \qquad\qquad\qquad \beta t \in [t_c + \beta r, t_c + \beta r + \varepsilon], \\ \tilde{x}(\beta t - \beta p), \qquad \beta t \in [t_c + \beta r + \varepsilon, t_c + d + \beta r - \varepsilon], \\ \tilde{x}(\beta t - \beta p) \cdot \left(1 - h\left(\frac{\beta t - \beta r - t_c - d + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right), \\ \qquad\qquad\qquad \beta t \in [t_c + d + \beta r - \varepsilon, t_c + d + \beta r], \\ 0, \qquad \beta t \in [t_c + d + \beta r, t_c + T + \beta r], \end{cases} \tag{C.4}$$

и оператор $\overline{V} : \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \times \mathbb{R} \to C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, действующий по формуле $\overline{V}(r,p,\beta,\varepsilon,d)(y,z) = V(y,z,r,p,\beta,\varepsilon,d)$, является непрерывным.

Доказательство. 1. Построим функцию V. Пусть числа a_m, b, q, t_l, t_r, t_b, β_0, d_b – те же, что в доказательстве леммы C.1. Пусть $c \in (b, a_m)$, $\Delta_a = c - b$. Тогда числа t_c и d_c существуют и однозначно определяются из следующего условия:

$$t \in (t_c, t_c + d_c) \subset (t_b, t_b + d_b) \quad \text{тогда и только тогда,}$$
$$\text{когда} \quad t \in [t_b, t_b + T] \ \text{ и } \ \hat{g}(t) > c.$$

Определим функцию $\chi_1 \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ по формуле $\chi_1(y) = h\left(\frac{y - c - \Delta_a/2}{\Delta_a}\right)$. Используя формулу (C.2) и определения чисел t_b, d_b и t_c, d_c, для любого $\beta \in \mathbb{R}$ получаем

$$\chi_1(\hat{g}(\beta t)) = 0 \quad \text{при} \quad \beta t \in [t_b + d_b, t_b + T],$$
$$\chi_1(\hat{g}(\beta t)) = 1 \quad \text{при} \quad \beta t \in (t_c, t_c + d_c).$$

Пусть $0 < \varepsilon < d_c/4$ и $2\varepsilon < d \leqslant d_c$. Определим семейство функций $\chi_2(\cdot, \beta, \varepsilon, d) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ по формуле

$$\chi_2(z, \beta, \varepsilon, d) =$$
$$= h\left(\frac{T_x(z) - t_c + \beta q - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\left(1 - h\left(\frac{T_x(z) - t_c - d + \beta q + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right).$$

Тогда при $\beta \in [1, \beta_0]$ и $\beta t \in [t_b, t_b + d_b]$ имеем $\beta t - \beta q \in [t_l, t_r]$ и, следовательно,

$$\chi_2\left(\hat{g}(\beta t - \beta q), \beta, \varepsilon, d\right) = h\left(\frac{\beta t - t_c - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\left(1 - h\left(\frac{\beta t - t_c - d + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right).$$

Используя формулу (C.2), легко видеть, что

$$\chi_2\left(\hat{g}(\beta(t - q)), \beta, \varepsilon, d\right) = \begin{cases} h\left(\frac{\beta t - t_c - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right), & \beta t \in (t_c, t_c + \varepsilon), \\ 1, & \beta t \in [t_c + \varepsilon, t_c + d - \varepsilon], \\ 1 - h\left(\frac{\beta t - t_c - d + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right), & \beta t \in (t_c + d - \varepsilon, t_c + d), \\ 0, & \beta t \in [t_b, t_b + d_b] \setminus (t_c, t_c + d). \end{cases}$$

Снова используя равенство $T_x\left(\hat{g}(\beta t - \beta q)\right) = \beta t - \beta q$, которое имеет место при $\beta t \in (t_b, t_b + d_b)$, получим, что функция, определенная по формуле $V(y, z, 0, p, \beta, \varepsilon, d) = \chi_1(y)\chi_2(z, \beta, \varepsilon, d)\tilde{x}\left(T_x(z) + \beta q - \beta p\right)$, обладает следующим свойством:

$$V\left(\hat{g}(\beta t), \hat{g}(\beta t - \beta q)), 0, p, \beta, \varepsilon, d\right) =$$
$$= \begin{cases} \tilde{x}(\beta t - \beta p) h\left(\frac{\beta t - t_c - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right), & \beta t \in (t_c, t_c + \varepsilon), \\ \tilde{x}(\beta t - \beta p), & \beta t \in [t_c + \varepsilon, t_c + d - \varepsilon], \\ \tilde{x}(\beta t - \beta p)\left(1 - h\left(\frac{\beta t - t_c - d + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right), & \beta t \in (t_c + d - \varepsilon, t_c + d), \\ 0, & \beta t \in [t_b, t_b + T] \setminus (t_c, t_c + d). \end{cases}$$

Аналогично предыдущему доказательству, используя замену переменной $t = s - r$, легко видеть, что функции $V(\cdot, \cdot, r, p, \beta, \varepsilon, d) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, определенные по формуле

$$V(y, z, r, p, \beta, \varepsilon, d) = \chi_1(y)\chi_2(z, \beta, \varepsilon, d)\tilde{x}\left(T_x(z) + \beta q + \beta r - \beta p\right),$$

обладают свойством

$$
V\left(\hat{g}(\beta t-\beta r),\hat{g}(\beta t-\beta q-\beta r),r,p,\beta,\varepsilon,d\right)=
$$
$$
=\begin{cases}
\tilde{x}(\beta t-\beta p)h\left(\frac{\beta t-\beta r-t_c-\varepsilon/2}{\varepsilon}\right), & \\
\qquad\qquad\qquad \beta t\in(t_c+\beta r,t_c+\beta r+\varepsilon), & \\
\tilde{x}(\beta t-\beta p), \qquad \beta t\in[t_c+\beta r+\varepsilon,t_c+\beta r+d-\varepsilon], & \\
\tilde{x}(\beta(t-p))\left(1-h\left(\frac{\beta t-\beta r-t_c-d+\varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right), & \\
\qquad\qquad\qquad \beta t\in(t_c+\beta r+d-\varepsilon,t_c+\beta r+d), & \\
0, \qquad \beta t\in[t_b+\beta r,t_b+\beta r+T]\setminus(t_c+\beta r,t_c+\beta r+d). &
\end{cases}
$$

То есть удовлетворяют условию леммы.

2. Докажем непрерывность оператора $\overline{V}$. Выпишем функцию V и ее производные:

$$
V(y,z,r,p,\beta,\varepsilon,d)=h\left(\frac{y-c-\Delta_a/2}{\Delta_a}\right)h\left(\frac{T_x(z)-t_c+\beta q-\varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\cdot
$$
$$
\cdot\left(1-\left(\frac{T_x(z)-t_c+\beta q-d+\varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right)\tilde{x}(T_x(z)+\beta q-\beta p+\beta r),
$$

$$
\frac{\partial}{\partial z}V(y,z,r,p,\beta,\varepsilon,d)=
$$
$$
=\frac{(T_x(z))'}{\varepsilon}h\left(\frac{y-c-\Delta_a/2}{\Delta_a}\right)h'\left(\frac{T_x(z)-t_c+\beta q-\varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\cdot
$$
$$
\cdot\left(1-h\left(\frac{T_x(z)-t_c+\beta q-d+\varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right)\tilde{x}(T_x(z)+\beta q-\beta p+\beta r)-
$$
$$
-\frac{(T_x(z))'}{\varepsilon}h\left(\frac{y-c-\Delta_a/2}{\Delta_a}\right)h\left(\frac{T_x(z)-t_c+\beta q-\varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\cdot
$$
$$
\cdot h'\left(\frac{T_x(z)-t_c+\beta q-d+\varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\tilde{x}(T_x(z)+\beta q-\beta p+\beta r)+
$$
$$
+(T_x(z))'h\left(\frac{y-c-\Delta_a/2}{\Delta_a}\right)h'\left(\frac{T_x(z)-t_c+\beta q-\varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\cdot
$$
$$
\cdot\left(1-\left(\frac{T_x(z)-t_c+\beta q-d+\varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right)\tilde{x}'(T_x(z)+\beta q-\beta p+\beta r).
$$

$$\frac{\partial V(y,z,r,p,\beta,\varepsilon,d)}{\partial y} = \frac{1}{\Delta_a} h'\left(\frac{y-c-\Delta_a/2}{\Delta_a}\right) h\left(\frac{T_x(z)-t_c+\beta q-\varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1-h\left(\frac{T_x(z)-t_c+\beta q-d+\varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right)\tilde{x}(T_x(z)+\beta q-\beta p+\beta r).$$

Нам достаточно доказать непрерывность выписанных функций по переменным $(r,p,\beta,\varepsilon,d)\in\mathbb{R}^3\times(0,\infty)\times\mathbb{R}$ равномерную относительно совокупности параметров $(y,z)\in\mathbb{R}^2$. Отметим, что, по определению, функция h непрерывно дифференцируема и ограничена, функция h' непрерывна и имеет компактный носитель (поэтому ограничена), функция $\tilde{x}$ непрерывно дифференцируема и периодическая, функция $T_x\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. В частности, функции h, h', $\tilde{x}$, $\tilde{x}'$ равномерно непрерывны (как функции одного аргумента). Для завершения доказательства достаточно несколько раз воспользоваться равномерной относительно параметров непрерывностью по своим переменным суммы и произведения функций, которые являются равномерно относительно параметров непрерывными по своим переменным и при произвольных фиксированных значениях своих переменных являются ограниченными функциями своих параметров. Кроме того, мы пользуемся равномерной относительно параметров непрерывностью по своим переменным сложной функции, полученной в результате композиции равномерно непрерывной функции одного аргумента и функции, непрерывной по своим переменным равномерно относительно параметров. □

Замечание C.1. Не меняя доказательства леммы $C.1$, можем в случае необходимости получить значение величины d_c (а, следовательно, и d) сколь угодно малым, а значение β_0 – сколь угодно близким к 1. Поэтому без ограничения общности будем считать, что

$$T>7d_c \quad \text{и} \quad \beta_0<1+d_c/(8T)<1+1/16.$$

□

Лемма C.3. *Пусть функция $\hat{g}$ удовлетворяет условию C.1. Тогда существуют такие числа $1 < \beta_0 \in \mathbb{R}$, $n_1 \in \mathbb{N}$ и $0 < q_i \in \mathbb{Q}$ ($i = 2, \dots, 2n_1+2$), при которых для любой функции $\tilde{x} \in C_T$ найдется такое семейство функций $U_0(\cdot, \dots, \cdot, p, \beta) \in C^1(\mathbb{R}^{2n_1+2}, \mathbb{R})$, что при $\beta \in [1, \beta_0]$ и $p \in \mathbb{R}$ для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем*

$$U_0\left(\hat{g}(\beta t), \hat{g}(\beta(t - q_2)), \dots, \hat{g}(\beta(t - q_{2n_1+2})), p, \beta\right) = \tilde{x}(\beta(t - p)), \quad \text{(C.5)}$$

и оператор $\overline{U}_0 : \mathbb{R} \times [1, \beta_0] \to C^1(\mathbb{R}^{2n_1+2}, \mathbb{R})$, действующий по формуле $\overline{U}_0(p, \beta)(y_1, \dots, y_{2n_1+2}) = U_0(y_1, \dots, y_{2n_1+2}, p, \beta)$, непрерывен.

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы C.3, и пусть числа t_c, d_c, β_0 определены в доказательстве леммы C.2 с учетом замечания C.1. Положим $T_0 \in (T - d_c/2, T - 3d_c/8) \cap \mathbb{Q}$, $n_1 = [T_0/d_c] + 2$ и $r = \frac{T_0}{n_1} = \frac{T_0}{[T_0/d_c]+2}$, где $[\cdot]$ обозначает операцию взятия целой части от числа. Очевидно, $0 < r \in \mathbb{Q}$. Зафиксируем произвольное число $\beta \in [1, \beta_0]$. Тогда благодаря замечанию C.1 имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned}
&d_c - \beta r = d_c - \frac{\beta T_0}{[T_0/d_c] + 2} \leqslant \beta d_c - \frac{\beta T_0}{T_0/d_c + 2} \leqslant \frac{2\beta d_c^2}{T_0 + 2d_c} < \frac{d_c}{4}, \\
&d_c - \beta r \geqslant d_c - \frac{\beta T_0}{T_0/d_c + 1} = d_c \beta \left(\frac{1}{\beta} - \frac{T_0}{T_0 + d_c}\right) > \\
&\qquad > d_c \left(\frac{1}{1 + d_c/(8T_0)} - \frac{T_0}{T_0 + d_c}\right) = \varepsilon_0 > 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, в лемме C.2 можно положить $\varepsilon = d_c - \beta r$. Определим число $d = T - \beta T_0 + \varepsilon$. Тогда благодаря замечанию C.1 имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned}
d &< T - \beta(T - d_c/2) + d_c/4 = T(1 - \beta) + \beta d_c/2 + d_c/4 < \\
&\qquad < (1 + 1/16)d_c/2 + d_c/4 < d_c, \\
d &> T - \beta(T - 3d_c/8) + \varepsilon = T(1 - \beta) + 3\beta d_c/8 + \varepsilon > \\
&\qquad > -d_c/8 + 3d_c/8 + \varepsilon > 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

При таком определении $T = d + \beta n_1 r - \varepsilon$ и $d_c - \varepsilon = \beta r$. Поэтому

$$[t_c, t_c + T] = \left\{ \bigcup_{i=0}^{n_1} \overline{I_i} \right\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{n_1} \overline{J_i} \right\},$$

где $I_{n_1} = (t_c + \beta n_1 r + \varepsilon, t_c + d + \beta n_1 r - \varepsilon)$, $J_i = (t_c + \beta ir, t_c + \beta ir + \varepsilon)$ при $i = 0, \dots, n_1$, $I_i = (t_c + \beta ir + \varepsilon, t_c + d_c + \beta ir - \varepsilon) = (t_c + \beta ir + \varepsilon, t_c + \beta(i+1)r)$ при $i = 0, \dots, n_1 - 1$.

По построению $d > 2\varepsilon$ и $\beta r = d_c - \varepsilon > 3\varepsilon$. Поэтому множества I_i, J_i не вырождаются и попарно не пересекаются.

Пусть функция V определена в лемме C.2. Используя в правой части формулы (C.4) равенство $d_c - \varepsilon/2 = \beta r + \varepsilon/2$ в 3-й строчке и T-периодичность левой части в 4-й строчке, при $i = 0, \dots, n_1 - 1$ по определению получаем:

$$V(\hat{g}(\beta(t - ir)), \hat{g}(\beta(t - q - ir)), ir, p, \beta, \varepsilon, d_c) =$$
$$= \begin{cases} \tilde{x}(\beta(t-p)) h\left(\frac{\beta t - (t_c + \beta ir + \varepsilon/2)}{\varepsilon}\right), & \\ & \beta t \in (t_c + \beta ir, t_c + \beta ir + \varepsilon) = J_i, \\ \tilde{x}(\beta(t-p)), & \beta t \in (t_c + \beta ir + \varepsilon, t_c + d_c + \beta ir - \varepsilon) = I_i, \\ \tilde{x}(\beta(t-p)) \left(1 - h\left(\frac{\beta t - (t_c + \beta(i+1)r + \varepsilon/2)}{\varepsilon}\right)\right), & \\ & \beta t \in (t_c + d_c + \beta ir - \varepsilon, t_c + d_c + \beta ir) = J_{i+1}, \\ 0, & \beta t \in (t_c, t_c + T] \setminus (J_i \cup \overline{I_i} \cup J_{i+1}). \end{cases}$$

Поскольку $d + \beta n_1 r - \varepsilon = T$, имеем

$$t_c + d + \beta n_1 r - \varepsilon, t_c + d + \beta n_1 r) = (t_c + T, t_c + \varepsilon + T).$$

Тогда благодаря T-периодичности функций $\tilde{x}$ и $\hat{g}$, при $\beta t \in (t_c, t_c+\varepsilon)$ имеем $\beta t + T \in (t_c + d + \beta n_1 r - \varepsilon, t_c + d + \beta n_1 r)$ и, следовательно,

$$V(\hat{g}(\beta(t-n_1 r)), \hat{g}(\beta(t-q-n_1 r)), n_1 r, p, \beta, \varepsilon, d) =$$
$$= V(\hat{g}(\beta t + T - \beta n_1 r), \hat{g}(\beta t + T - \beta q - \beta n_1 r)), n_1 r, p, \beta, \varepsilon, d) =$$
$$= \tilde{x}(\beta t + T - \beta p)\left(1 - h\left(\frac{\beta t + T - t_c - d - \beta n_1 r + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right) =$$
$$= \tilde{x}(\beta t - \beta p)\left(1 - h\left(\frac{\beta t - t_c - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right).$$

Таким образом, благодаря T-периодичности функция

$$V(\hat{g}(\beta t - \beta n_1 r), \hat{g}(\beta t - \beta q - \beta n_1 r), n_1 r, p, \beta, \varepsilon, d) =$$
$$= \begin{cases} \tilde{x}(\beta t - \beta p)\left(1 - h\left(\frac{\beta t - (t_c + \varepsilon/2)}{\varepsilon}\right)\right), & \\ & \beta t \in (t_c, t_c+\varepsilon) = J_0, \\ 0, & \beta t \in (t_c, t_c + T] \setminus (J_0 \cup \overline{I_{n_1}} \cup J_{n_1}), \\ \tilde{x}(\beta t - \beta p) h\left(\frac{\beta t - (t_c + \beta n_1 r + \varepsilon/2)}{\varepsilon}\right), & \\ & \beta t \in (t_c + \beta n_1 r, t_c + \beta n_1 r + \varepsilon) = J_{n_1}, \\ \tilde{x}(\beta t - \beta p), & \beta t \in (t_c + \beta n_1 r + \varepsilon, t_c + d + \beta n_1 r - \varepsilon) = I_{n_1}. \end{cases}$$

Определим функции $U_0(\cdot, \ldots, \cdot, p, \beta) \in C^1(\mathbb{R}^{2n_1+2}, \mathbb{R})$ по формуле

$$U_0(y_0, \ldots, y_{n_1}, z_0, \ldots, z_{n_1}, p, \beta) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n_1-1} V(y_i, z_i, ir, p, \beta, \varepsilon, d_c) + V(y_{n_1}, z_{n_1}, n_1 r, p, \beta, \varepsilon, d).$$

Тогда

$$U_0\left(\hat{g}(\beta t), \ldots, \hat{g}(\beta t - \beta n_1 r), \hat{g}(\beta t - \beta q), \ldots, \hat{g}(\beta t - \beta q - \beta n_1 r), p, \beta\right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n_1-1} V\left(\hat{g}(\beta t - \beta i r), \hat{g}(\beta t - \beta q - \beta i r), ir, p, \beta, \varepsilon, d_c\right) +$$
$$+ V(\hat{g}(\beta t - \beta n_1 r), \hat{g}(\beta t - \beta q - \beta n_1 r), n_1 r, p, \beta, \varepsilon, d).$$

При каждом $t \in (t_c/\beta, (t_c+T)/\beta]$, за исключением конечного числа точек, число βt принадлежит одному из множеств I_i или J_i $(i = 0, \ldots, n_1)$.

Если $\beta t \in I_{i_0}$ при $i_0 = 0, \dots, n_1$, то

$$U_0\left(\hat{g}(\beta t), \dots, \hat{g}(\beta t - \beta n_1 r), \hat{g}(\beta t - \beta q), \dots, \hat{g}(\beta t - \beta q - \beta n_1 r), p, \beta\right) = \\ = \sum_{i=0}^{n_1} \tilde{x}(\beta t - \beta p)\delta_{i,i_0} = \tilde{x}(\beta t - \beta p).$$

Если $\beta t \in J_{i_0}$ при $i_0 = 1, \dots, n_1$, то

$$U_0\left(\hat{x}(\beta t), \dots, \hat{x}(\beta t - \beta n_1 r), \hat{x}(\beta t - \beta q), \dots, \hat{x}(\beta t - \beta q - \beta n_1 r), p, \beta\right) = \\ = \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{x}(\beta t - \beta p)\left(\delta_{i,i_0} h\left(\frac{\beta t - (t_c + \beta i r + \varepsilon/2)}{\varepsilon}\right) + \right. \\ \left. + \delta_{i+1,i_0}\left(1 - h\left(\frac{\beta t - (t_c + \beta(i+1)r + \varepsilon/2)}{\varepsilon}\right)\right)\right) = \tilde{x}(\beta t - \beta p).$$

Аналогично получаем, что равенство (C.5) имеет место при $\beta t \in J_0$.

На полуинтервале $(t_c, t_c + T]$ осталось нерассмотренным лишь конечное число точек. Поскольку правая и левая части равенства (C.5) непрерывны, при $\beta t \in (t_c, t_c + T]$ это равенство имеет место всегда. Поскольку функции $\hat{g}$ и $\tilde{x}$ имеют период T, равенство (C.5) имеет место при $t \in \mathbb{R}$. При этом $q_i = (i-1)r$ $(i = 1, \dots, n_1 + 1)$, $q_i = q + (i - n_1)r$ $(i = n_1 + 2, \dots, 2n_1 + 2)$.

Поскольку при $\beta \in [1, \beta_0]$ выполнено неравенство $\varepsilon > \varepsilon_0 > 0$, из леммы C.2 получаем, что оператор $\overline{U}_0$ является конечной суммой непрерывных операторов. Поэтому оператор $\overline{U}_0$ является непрерывным. $\square$

Чтобы избавиться от условия $C.1$, нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма C.4. *Пусть $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ — заданная функция, $y(t) \neq \mathrm{const}$ и $A = \{t \in [a, b] : y'(t) = 0\}$. Тогда множество $y(A)$ нигде не плотно в области значений функции y. В частности, существует такое значение $y_0 \in \mathbb{R}$, что $y(t_0) = y_0$ при некотором $t_0 \in [a, b]$, однако $y(t) \neq y_0$ при всех $t \in A$. При этом значение y_0 на отрезке $[a, b]$ функция y принимает лишь в конечном числе точек.*

Доказательство. Множество A, очевидно, является компактом на отрезке $[a, b]$. Пусть $B_{\delta p}$ – δ-окрестность точки $p \in A$. Поскольку $y'(p) = 0$ и $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|y'(s)| < \varepsilon$ при $s \in B_{\delta p}$ для любого $p \in A$. Рассмотрим покрытие $\{B_{\delta p},\ p \in A\}$ компакта A. Имеем $|y'(s)| < \varepsilon$ для любого $s \in B_\varepsilon = \bigcup_{p \in A} B_{\delta p}$. Поскольку A — компакт, из покрытия $\{B_{\delta p},\ p \in A\}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{B_{\delta p_1}, \ldots, B_{\delta p_m}\}$. Множество $\tilde{B}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^m B_{\delta p_i}$ является объединением конечного числа интервалов I_i $(i = 1, \ldots, i_0)$, суммарная длина которых $d < b - a + 2\delta$. При этом $y'(s) < \varepsilon$ для всех $s \in \tilde{B}_\varepsilon$. Пусть $\mathrm{mes}(I_i) = d_i$. Тогда $\mathrm{mes}(y(I_i)) \leqslant d_i\varepsilon$. Поэтому $\mathrm{mes}(y(A)) < \mathrm{mes}(y(\tilde{B}_\varepsilon)) < d\varepsilon$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что $\mathrm{mes}(y(A)) = 0$. Из компактности A и непрерывности y получаем компактность $y(A)$. Поскольку $y(A)$ компактно и $\mathrm{mes}(y(A)) = 0$, имеет место первое утверждение леммы.

Допустим $y_0 \in \mathbb{R}$ и счетное множество различных чисел $t_i \in y^{-1}(y_0)$ $(i = 1, \ldots, \infty)$ удовлетворяет первому утверждению леммы. Выделим монотонную сходящуюся подпоследовательность $t_{i_k} \to t_0$. Будем считать, что $t_{i_k} < t_{i_{k+1}}$. При этом по непрерывности получаем $y(t_0) = y_0$. Поскольку $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $s_k \in [t_{i_k}, t_{i_{k+1}}]$, что $y'(s_k) = 0$. Очевидно, $s_k \to t_0$. Поскольку $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, $y'(t_0) = 0$. При этом $y(t_0) = y_0$. Из полученного противоречия вытекает последнее утверждение леммы. $\square$

Лемма C.5. *Пусть* $\hat{x} \in C_T$ $(\hat{x} \neq \mathrm{const})$ *и* $T_2 \in (0, T)$. *Тогда существует такое число* $s^* \in \mathbb{R}$, *что* $\hat{x}(s^*) \neq \hat{x}(s^* - T_2)$ *и* $\hat{x}'(s^*) \neq 0$.

Доказательство. Положим $y(t) = \hat{x}(t) - \hat{x}(t - T_2)$. Предположим, что $y(t) = \delta = \mathrm{const}$. Поскольку T_2 не является периодом, имеем $\delta \neq 0$.

Неравенство $\delta \neq 0$ противоречит периодичности (ограниченности) функции $\hat{x}$. Следовательно, $y(t) \neq \mathrm{const}$. Тогда существует такой невырожденный интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$, что $y(s) \neq 0$ и $y'(s) \neq 0$ при $s \in (a, b)$. Если $\hat{x}'(t^*) \neq 0$ для некоторого $t^* \in (a, b)$, то, положив $s^* = t^*$, приходим к утверждению леммы. В противном случае для любого $s \in (a, b)$ имеем $\hat{x}'(s) = 0$ и $\hat{x}'(s - T_2) \neq 0$, т. е. $(a, b) \subset \Pi_1 \setminus \Pi_2$, где

$$\Pi_1 = \{t \in [0, T) : \hat{x}'(t - T_2) \neq 0\} \quad \text{и} \quad \Pi_2 = \{t \in [0, T) : \hat{x}'(t) \neq 0\}.$$

Допустим, что утверждение леммы не выполнено. Тогда

$$\exists T_2 : \ \forall s \in \mathbb{R} \quad \hat{x}'(s) \neq 0 \Rightarrow \hat{x}(s) = \hat{x}(s - T_2). \tag{C.6}$$

Если $p \in \Pi_2$, то благодаря непрерывности функции $\hat{x}$ имеем $\hat{x}'(s) \neq 0$ в некоторой окрестности $U(p)$ точки p. Поэтому из (C.6) следует, что $\hat{x}(s) = \hat{x}(s - T_2)$ для любого $s \in U(p)$. Тогда $\hat{x}'(p - T_2) = \hat{x}'(p) \neq 0$, т. е. $p \in \Pi_1$. Следовательно, $\mathrm{mes}\Pi_1 - \mathrm{mes}\Pi_2 \geqslant b - a$, что противоречит T-периодичности функции $\hat{x}$. $\square$

Теперь сможем снять ограничение, связанное с условием C.1.

Лемма C.6. *Пусть функция $\hat{x} \in C_T$ ($\hat{x}(t) \neq \mathrm{const}$). Тогда существуют числа $n^* \in \mathbb{Z}$ и $0 < \hat{q}_i \in \mathbb{Q}$ ($i = 2, \ldots, n^*$) и функция $g \in C^1(\mathbb{R}^{n^*}, \mathbb{R})$ такие, что функция*

$$\hat{g}(t) = g(\hat{x}(t), \hat{x}(t - q_2), \ldots, \hat{x}(t - q_{n^*})) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

удовлетворяет условию C.1.

Доказательство. Пусть функция $\hat{x} \in C_T$ ($\hat{x}(t) \neq \mathrm{const}$). Из леммы C.4 следует, что существует число $y_0 \in \mathbb{R}$, для которого

$$1)\ \exists t \in (0, T] : \ \hat{x}(t) = y_0; \qquad 2)\ \hat{x}(t) = y_0 \Rightarrow \hat{x}'(t) \neq 0.$$

При этом множество точек $t \in (0,T]$, в которых $\hat{x}(t) = y_0$, конечно, т. е. существуют такие числа $n^* \in \mathbb{Z}$ и $t_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n^*)$, что

$$t \in (0,T],\ \hat{x}(t) = y_0 \Leftrightarrow t \in \{t_1, \ldots, t_{n^*}\}.$$

Далее будем считать, что $t_i > t_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n^* - 1)$. Тогда существует такое число $d_{0x} \in \mathbb{R}$, что

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \hat{x}(t) \in [y_0 - d_{0x}, y_0 + d_{0x}] \Rightarrow \hat{x}'(t) \neq 0.$$

Это свойство сохраняется для любого $d_x \in (0, d_{0x})$. Пусть $[t_{0li}, t_{0ri}]$ — отрезок наибольшей длины, содержащий точку t_i и принадлежащий множеству $\hat{x}^{-1}\left([y_0 - d_{0x}, y_0 + d_{0x}]\right)$. Поскольку $\hat{x} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, эти отрезки попарно не пересекаются даже после сдвига одного из них на период T. Поэтому, действуя от противного, легко доказать, что включение $[t_{0li}, t_{0ri}] \subset (t_{0r1} - T, t_{0r1}]$ выполнено для любого $i \in \{1, \ldots, n^*\}$. Таким образом,

$$t \in (t_{0r1} - T, t_{0r1}],\ \hat{x}(t) \in [y_0 - d_{0x}, y_0 + d_{0x}] \Leftrightarrow t \in \bigcup_{i=1}^{n^*} [t_{0li}, t_{0ri}].$$

При уменьшении значения d_{0x} величины $t_i - t_{0li}$ и $t_{0ri} - t_i$ также уменьшаются. Эта зависимость непрерывна. Следовательно, для любого $d_t \in \mathbb{R}$, $d_t > 0$, существуют числа $d_x \in (0, d_{0x})$, $t_{li} \in \mathbb{R}$ и $t_{ri} > t_{li}$ $(i = 1, \ldots, n^*)$, обладающие следующими свойствами:

$$\begin{gathered} t \in (t_{0r1} - T, t_{0r1}],\ \hat{x}(t) \in [y_0 - d_x, y_0 + d_x] \Leftrightarrow t \in \bigcup_{i=1}^{n^*} [t_{li}, t_{ri}], \\ \text{при этом} \quad 0 < t_i - t_{li} < d_t, \quad 0 < t_{ri} - t_i < d_t, \\ t_i \in [t_{li}, t_{ri}] \subset [t_{0li}, t_{0ri}], \quad \hat{x}'(t) \neq 0 \text{ при } t \in \textstyle\bigcup_{i=1}^{n^*} [t_{li}, t_{ri}]. \end{gathered} \tag{C.7}$$

Пусть $T_2 = t_1 - t_2 < T$. Выберем число $\hat{s}_2 \in (t_1 - T, t_1]$ так, чтобы $\hat{x}(\hat{s}_2) \neq \hat{x}(\hat{s}_2 - T_2)$ и $\hat{x}'(\hat{s}_2) \neq 0$ (см. лемму C.5). Поскольку $\hat{x} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, существует такой отрезок $[s_{l2}, s_{r2}] \ni \hat{s}_2$, что $\hat{x}'(s) \neq 0$ для всех $s \in [s_{l2}, s_{r2}]$ и для множеств

$$J_2 = \{\hat{x}(t), t \in [s_{l2} - T_2, s_{r2} - T_2]\}, \qquad J_{1,2} = \{\hat{x}(t), t \in [s_{l2}, s_{r2}]\}$$

имеем $J_{1,2} \cap J_2 = \varnothing$. Очевидно, существует такое число $0 < \hat{q}_2 \in \mathbb{Q}$, что $s_2 = t_1 - \hat{q}_2 \in (s_{l2}, s_{r2})$. Тогда $\hat{x}'(s_2) \neq 0$ и $t_2 - \hat{q}_2 \in [s_{l2} - T_2, s_{r2} - T_2]$.

Аналогично доказывается, что при каждом $i \in \{3, \dots, n^*\}$ существуют числа $T_i = t_1 - t_i$ и $\hat{q}_i \in \mathbb{Q}$, отрезок $[s_{li}, s_{ri}]$ и множества

$$J_{1,i} = \{\hat{x}(t), t \in [s_{li}, s_{ri}]\}, \quad J_i = \{\hat{x}(t), t \in [s_{li} - T_i, s_{ri} - T_i]\} \quad \text{такие, что}$$

$$J_{1,i} \cap J_i = \varnothing, \quad s_i = t_1 - \hat{q}_i \in (s_{li}, s_{ri}), \quad t_i - \hat{q}_i \in [s_{li} - T_i, s_{ri} - T_i], \quad \hat{x}'(s_i) \neq 0.$$

Зафиксируем число $d_t \in \mathbb{R}$ так, чтобы

$$0 < d_t < \min\{s_2 - s_{l2},\ s_{r2} - s_2, \dots, s_{n^*} - s_{ln^*},\ s_{rn^*} - s_{n^*}\},$$

и определим числа $d_x \in (0, d_{0x})$, $t_{li} \in \mathbb{R}$ и $t_{ri} > t_{li}$ $(i = 1, \dots, n^*)$ в соответствии с формулой (C.7). Рассмотрим множество

$$J_0 = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n^*} :\ v_1 \in [y_0 - d_x, y_0 + d_x],\ v_2 \in J_{1,2},\ \dots, v_{n^*} \in J_{1,n^*} \right\}.$$

По построению

$$t \in (t_{r1} - T, t_{r1}],\ \hat{x}(t) \in [y_0 - d_x, y_0 + d_x] \Leftrightarrow t \in \bigcup_{i=1}^{n^*} [t_{li}, t_{ri}].$$

Однако при $i \in \{2, \dots, n^*\}$, если $t \in [t_{li}, t_{ri}]$, то $t - \hat{q}_i \in [s_{l_i} - T_i, s_{r_i} - T_i]$ и, следовательно, $\hat{x}(t - \hat{q}_i) \notin J_{1,i}$. Таким образом, при $t \in (t_{r1} - T, t_{r1}]$ имеем

$$(\hat{x}(t), \hat{x}(t - \hat{q}_2), \dots, \hat{x}(t - \hat{q}_{n^*}))^T \in J_0 \Leftrightarrow t \in [t_{l1}, t_{r1}].$$

Зафиксируем вектор $v_0 = (\hat{x}(t_1), \hat{x}(t_1 - \hat{q}_2), \dots, \hat{x}(t_1 - \hat{q}_{n^*}))^T$. Очевидно, $v_0 \in J_0$. Поскольку $t_1 \in [t_{l1}, t_{r1}]$ и $\hat{x}'(t) \neq 0$ при $t \in [t_{l1}, t_{r1}]$, имеем

$$t \in (t_{r1} - T, t_{r1}],\ (\hat{x}(t), \hat{x}(t - \hat{q}_2), \dots, \hat{x}(t - \hat{q}_{n_4}))^T = v_0 \Leftrightarrow t = t_1.$$

Определим функцию $g \in C^1(\mathbb{R}^{n^*}, \mathbb{R})$ по формуле

$$g(v) = h\left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n^*} (v_i - v_{0i})^2\right).$$

Очевидно, эта функция достигает максимума только в точке $v_0 \in \mathbb{R}^{n^*}$.

Определим функцию $\hat{g} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ по формуле

$$\hat{g}(t) = g(\hat{x}(t), \hat{x}(t - \hat{q}_2), \ldots, \hat{x}(t - \hat{q}_{n^*})).$$

Очевидно, на полуинтервале $[t_1, t_1 + T)$ эта функция достигает глобального максимума только в точке t_1.

Положим $\hat{q}_1 = 0$ и выпишем производную

$$\hat{g}'(t) = -2h' \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n^*} (\hat{x}(t - \hat{q}_i) - \hat{x}(t_1 - \hat{q}_i))^2 \right) \cdot \\ \cdot \sum_{i=1}^{n^*} (\hat{x}(t - \hat{q}_i) - \hat{x}(t_1 - \hat{q}_i)) \hat{x}'(t - \hat{q}_i).$$

(Точка обозначает умножение.) Поскольку $\hat{x}'(t_1 - \hat{q}_i) \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n^*)$, найдется проколотая окрестность $\dot{U}(t_1)$ точки t_1, в которой $\hat{x}'(t - \hat{q}_i) \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n^*)$. Таким образом,

$$(\hat{x}(t - \hat{q}_i) - \hat{x}(t_1 - \hat{q}_i)) \hat{x}'(t - \hat{q}_i) > 0 \qquad \text{при} \quad t \in \dot{U}(t_1),$$

и, следовательно, сумма, стоящая в выражении для $\hat{g}'(t)$, больше нуля при $t \in \dot{U}(t_1)$.

Поскольку при $t \in \dot{U}(t_1)$ имеем $\hat{x}'(t) \neq 0$, при $t \in \dot{U}(t_1)$ выполнено $(\hat{x}(t - \hat{q}_1) - \hat{x}(t_1 - \hat{q}_1))^2 > 0$. Учитывая непрерывность функции $\hat{x}$, получаем, что в достаточно малой проколотой окрестности точки t_1

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n^*} (\hat{x}(t - \hat{q}_1) - \hat{x}(t_1 - \hat{q}_1))^2 < \frac{1}{2}.$$

Тогда в этой окрестности благодаря формуле $(C.3)$ множитель перед суммой в выражении для $\hat{g}'(t)$ тоже отличен от нуля. Лемма доказана.

□

Теорема C.2. *Для любой функции $\hat{x} \in C_T$ $(\hat{x} \neq \mathrm{const})$ найдутся такие числа $1 < \beta_0 \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $0 < q_i \in \mathbb{Q}$ $(i = 2, \ldots, n_0)$, при которых для любой функции $\tilde{x} \in C_T$ найдется такое семейство функций*

$W(\cdot,\ldots,\cdot,p,\beta) \in C^1(\mathbb{R}^{n_0},\mathbb{R})$, *что для любой пары* $(\beta,p) \in [1,\beta_0]\times\mathbb{R}$ *имеет место соотношение*

$$W(\hat{x}(\beta t),\hat{x}(\beta t-\beta q_2),\ldots,\hat{x}(\beta t-\beta q_{n_0}),p,\beta) = \tilde{x}(\beta t-\beta p) \qquad (t\in\mathbb{R})$$

и оператор $\overline{W} : \mathbb{R}\times[1,\beta_0] \to C^1(\mathbb{R}^{n_0},\mathbb{R})$, *действующий по формуле* $\overline{W}(p,\beta)(y_1,\ldots,y_{n_0}) = W(y_1,\ldots,y_{n_0},p,\beta)$, *непрерывен.*

Доказательство. Пусть $\tilde{x},\hat{x} \in C_T$ ($\hat{x} \neq \mathrm{const}$). Определим числа $n^* \in \mathbb{N}$ и $0 < \hat{q}_i \in \mathbb{Q}$ $(i = 2,\ldots,n^*)$, $\hat{q}_1 = 0$, и функцию $g \in C^1(\mathbb{R}^{n^*},\mathbb{R})$ в соответствии с леммой C.6. Тогда функция

$$\hat{g}(t) = g(\hat{x}(t-\hat{q}_1),\ldots,\hat{x}(t-\hat{q}_{n^*}))$$

удовлетворяет условию C.1. Теперь определим числа $n_1 \in \mathbb{N}$, $0 < q_i \in \mathbb{Q}$ $(i = 2,\ldots,n_1)$, $q_1 = 0$, и семейство функций $U_0(\cdot,\ldots,\cdot,p,\beta)$ принадлежит пространству $C^1(\mathbb{R}^{2n_1+2},\mathbb{R})$ в соответствии с леммой C.3. Следовательно, имеет место равенство (C.5). Рассмотрим функцию

$$W(y_{1,1},\ldots,y_{2n_1+2,1},y_{1,2},\ldots,y_{2n_1+2,n^*},p,\beta) =$$
$$= U_0(g(y_{1,1},\ldots,y_{1,n^*}),\ldots,g(y_{2n_1+2,1},\ldots,y_{2n_1+2,n^*}),p,\beta).$$

При $n_0 = 2(n_1+1)n^*$ и $q_{i+(k-1)n^*} = q_i+\hat{q}_k$ $(i = 1,\ldots,2n_1+2,\ k = 1,\ldots,n^*)$ (поскольку $\hat{q}_1 = 0$, здесь не происходит переобозначений) функция W является искомой.

Непрерывность оператора $\overline{W}$ следует из непрерывности оператора $\overline{U}_0$ и включения $g \in C^1(\mathbb{R}^{n^*},\mathbb{R})$. □

Отметим, что изложенный выше метод построения функции W в первую очередь доказывает существование такой функции. Вероятнее всего, в каждом конкретном случае можно предложить более простые построения, используя индивидуальные свойства известных функций $\tilde{x}$ и $\hat{x}$.

D. Элементы спектральной теории линейных ограниченных операторов

В этом разделе предполагается, что X — банахово пространство и $A: \ X \to X$ — линейный ограниченный оператор (обозначение $A \in \mathcal{L}(X)$).

Определение D.1 ([19, гл.VII, §3, определение 1]). Резольвентное множество оператора A есть множество чисел λ, для которых оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ существует и является ограниченным оператором, определенным на всем X. Спектром $\sigma(A)$ оператора A называется дополнение к резольвентному множеству. Функция $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$, определенная на резольвентном множестве, называется резольвентой оператора A.

$\square$

Лемма D.1 ([19, гл.VII, §3, лемма 4]). *Замкнутое множество* $\sigma(A)$ *ограничено и не пусто. Кроме того,* $\sup|\sigma(A)| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|A^n|} \leqslant |A|$. *При* $|\lambda| > \sup|\sigma(A)|$ *ряд* $R(\lambda, A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n/\lambda^{n+1}$ *сходится в равномерной операторной топологии.*

Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ — изолированная точка спектра $\sigma(A)$. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ резольвента $R(A, \cdot): \ \lambda \mapsto (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ может быть представлена рядом Лорана:

$$R(A, \lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j (\lambda - \lambda_0)^j \qquad (0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon), \tag{D.1}$$

сходящимся по операторной норме, где коэффициенты $A_j = A_j(A, \lambda_0)$ заданы по формуле

$$A_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^{-j-1} R(A, \lambda) d\lambda \in \mathcal{L}(X), \tag{D.2}$$

оператор $P = P(A, \lambda_0) = -A_{-1}(A, \lambda_0)$ является проектором, т. е.

$$P^2(A, \lambda_0) = P(A, \lambda_0)$$

(см. [23, гл. III, §6.5]).

Известно, что для любых двух различных изолированных точек спектра $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)$ выполнено

$$P(A, \lambda_1)P(A, \lambda_2) = 0.$$

Определение D.2. Изолированная точка спектра $\sigma(A)$ называется полюсом оператора $R(A, \lambda)$, если существует число $r \in \mathbb{N}$, для которого $A_j = 0$ при всех $j < -r$ и $A_{-r} \neq 0$. Число r называется порядком полюса. $\square$

Замечание D.1. Если изолированная точка λ_0 спектра $\sigma(A)$ такова, что $\dim\mathcal{R}(P(A, \lambda_0)) < \infty$, то λ_0 является собственным значением оператора A и полюсом резольвенты $R(A, \cdot)$ (см. [23, гл. III, §6.5]). $\square$

Определение D.3. Число $m(A, \lambda_0) = \dim\mathcal{R}(P(A, \lambda_0))$ называется алгебраической кратностью собственного значения λ_0 оператора A. Собственное значение λ_0 называется простым, если $m(A, \lambda_0) = 1$. $\square$

Замечание D.2. Если из контекста ясно, о каком операторе идет речь, то используется обозначение $m(\lambda_0)$ вместо $m(A, \lambda_0)$. $\square$

Теорема D.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\big(\sigma(A)\big)^m = \sigma(A^m)$. Кроме того, если λ — изолированная точка спектра $\sigma(A)$ и если λ_i — все точки спектра $\sigma(A)$, для которых $\lambda_i^m = \lambda$ ($i = 0, \ldots, l-1$; $l \leqslant m$), то $P(A^m, \lambda) = \sum\limits_{i=0}^{l-1} P(A, \lambda_i)$.*

Теорема D.1 является следствием теорем 11 и 19 из [19, гл. VII, §3].

Теорема D.2. *Пусть λ_0 — полюс резольвенты $R(A, \cdot)$ порядка r. Тогда λ_0 — собственное значение оператора A. Кроме того,*

$$r = \min\{k \in \mathbb{N} : \ \mathcal{N}(A - \lambda_0 I)^k = \mathcal{N}(A - \lambda_0 I)^{k+1}\}.$$

Утверждение теоремы D.2 следует из теоремы 18 [19, гл. VII, §3]. Множество $\mathcal{N}(A-\lambda_0 I)$ называется собственным подпространством оператора A в точке λ_0, а множество $\mathcal{N}(A-\lambda_0 I)^r$ — обобщенным собственным подпространством.

Рассмотрим спектральные свойства операторов $A \in \mathcal{L}(X)$, для которых существует такое число $m \in \mathbb{N}$, что оператор A^m является компактным.

Теорема D.3. *Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$, и пусть для некоторого $m \in \mathbb{N}$ оператор A^m является компактным. Тогда спектр $\sigma(A)$ не более чем счетен и не имеет точек накопления в $\mathbb{C}$,кроме, быть может, $\lambda = 0$. Каждое число $0 \neq \lambda_0 \in \sigma(A)$ является собственным значением оператора A и полюсом резольвенты $R(A,\cdot)$. Для такого числа λ_0 проектор $P = P(A,\lambda_0)$ имеет ненулевую конечномерную область изменения, определяемую формулой*

$$\mathcal{R}\left(P(A,\lambda_0)\right) = \{x \in X : \ (A-\lambda_0 I)^r x = 0\},$$

где r — есть порядок полюса.

Для доказательства смотри теорему 6 из [19, гл VII, §4].

Оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ называется *фредгольмовым*, если его образ $\mathcal{R}(A)$ замкнут в X и $\dim \mathcal{N}(A) < \infty$, $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A) < \infty$.

Теорема D.4. *Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$, и пусть для некоторого $m \in \mathbb{N}$ оператор A^m является компактным. Тогда оператор $A - \lambda I$ является фредгольмовым для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Для доказательства смотри теорему 15.4 из [11].

Полюс λ_0 резольвенты $R(A,\cdot)$ называется нормальной точкой оператор-функции $A-\lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, если $\dim(P(A,\lambda_0)) < \infty$ и оператор $A-\lambda_0 I$ является фредгольмовым.

Пусть Γ — простой замкнутый спрямляемый контур, ограничивающий область G. Оператор $A-\lambda I$ называется *нормальным относительно контура* Γ, если $\Gamma \subset \rho(A)$ и множество $\sigma(A) \cap G$ состоит из конечного числа нормальных точек оператор-функции $A - \lambda I$.

Допустим, оператор $A - \lambda I$ является нормальным относительно контура Γ и $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ — множество всех полюсов резольвенты $R(A, \cdot)$ в области G. Положим

$$m(A, \Gamma) = \sum_{j=1}^{n} m(A, \lambda_j).$$

Следующее утверждение является частным случаем операторного обобщения теоремы Руше, доказательство которого можно найти в [3].

Теорема D.5. *Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — открытая ограниченная область с границей Γ, и пусть Γ — замкнутая спрямляемая жорданова кривая. Пусть оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ — задан. Если оператор-функция $A - \lambda I$ является нормальной относительно границы Γ, и оператор $S \in \mathcal{L}(X)$ таков, что*

$$\|R(A, \lambda)S\| < 1 \qquad (\lambda \in \Gamma),$$

то оператор-функция $A + S - \lambda I$ является нормальной относительно границы Γ, причем

$$m(A, \Gamma) = m(A + S, \Gamma).$$

Ответы и комментарии к заданиям и вопросам для самоконтроля

Раздел 1.1.

1. Указание: используйте теорему Флоке.

2. Нет, не следует.

3. Если мы возьмем другие начальные данные t_1, x_1, лежащие на той же интегральной кривой, то необходимые неравенства на отрезке $[t_0, t_1]$ (если $t_0 < t_1$) гарантируются теоремой о непрерывной зависимости решений от начальных данных.

4. См. [4, гл. IV, §19, пример 1]

5. См. [4, гл. IV, §19, пример 2]

6. Да. Поскольку $\rho(y(t) - \eta(t)) \leqslant \rho(y(t), L_0^+)$ при $t \geqslant t_0$.

7. См. [4, гл. IV, §20].

8. Совокупность всех траекторий определяется уравнением $x^2 + y^2 = C$, где C — произвольная постоянная. Поэтому исследуемое решение является орбитально устойчивым. Линейная скорость движения точки по траектории $x^2+y^2 = C$ $(C > 0)$ равна C^3, а длина траектории равна $2\pi C$. Поэтому исследуемое решение не обладает свойством асимптотической фазы и не является устойчивым по Ляпунову.

9. Указание: каждому решению $y = y(t)$ автономного уравнения соответствуют решения $y = y(t + s)$, где s — произвольная постоянная; траектории этих решений совпадают. Смотри также предыдущий вопрос.

Раздел 1.2.

1. Ввиду теоремы $A.1$ имеем $f(\xi_0) \neq 0$. В уравнении (1.1.3) произведем замену переменной по формуле $\rho = D(\xi - \xi_0)$, где D — невырожденная матрица, для которой $Df(\xi_0) = (0, \ldots, 0, 1)^T$.

2. Если решение начинается в точке ξ_0 близкой к 0, то в момент времени $\tau(\xi_0)$, близкий к p, решение пересекает гиперплоскость π. Это утверждение позволяет определить отображение T.

3. Отображение T определяется как сужение отображения $\eta(\tau(\xi_0), \xi_0)$ на гиперплоскость π. Следовательно, производная $\partial T(0)$ получается из производной $H(t, 0)$ сужением на подпространство векторов, ортогональных гиперплоскости π. Упомянутое в основном тексте вычеркивание последних строк и столбцов соответствует этому сужению.

4. Существование других периодических орбит в сколь угодно малой окрестности исследуемой периодической орбиты приводит к появлению других мультипликаторов (кроме $\lambda = 1$) на единичной окружности. Обратное неверно, поскольку из существования неподвижной точки для линейной части отображения Пуанкаре не следует существование неподвижной точки для самого отображения Пуанкаре.

5. Оба элемента этой разности не покидают заданную окрестность орбиты $\mathcal{C}(\gamma)$ благодаря оценке разности $\|\eta(t+\tau^n, \xi^0) - \gamma(t)\|$ и малости разности $\tau^n - np - t_0$. Остается использовать оценку для разности $|\tau^n - np - t_0|$ и формулу Лагранжа.

6. Да (см. п. 4).

7. Да (см. п. 4).

8. Да. Из существования периодического решения уравнения в вариациях не следует существование периодического решения исходного уравнения.

9. Повторяет доказательство теоремы 1.2.1.

10. Следует из ответа на предыдущий вопрос (п. 9).

11. Исп. теорему 1.2.3.

12. Нет, не может. Если $\varepsilon > 0$ достаточно малое, чтобы воспользоваться представлением (B.4) (для неустойчивого многообразия), то решение с начальными данными из неустойчивого многообразия (сколь угодно близкими к орбите $\mathcal{C}(\gamma)$) покидает ε окрестность орбиты $\mathcal{C}(\gamma)$.

13. Траектории в окрестности орбиты исследуемого решения остаются бесконечно долго, но не стремятся к этой орбите. Следовательно, все мультипликаторы лежат на единичной окружности (см. теорему 1.2.3). Можно рассуждать иначе. Отображение T в данном случае является единичным оператором. Следовательно, его Якобиан — тоже единичный оператор. Поэтому второй мультипликатор (первый — $\lambda = 1$ всегда известен) также равен единице (см. теорему 1.2.2).

14. Нет. Пусть $\tilde{x}$ — периодическое решение автономного обыкновенного дифференциального уравнения. Тогда $\tilde{x} = \text{const}$.

15. Не трудно выписать уравнение в вариациях вдоль решения $y(t)$. Мы получим систему, состоящую из двух линейных однородных уравнений. В момент времени $t = 2\pi$ определитель Вронского этой системы с начальным условием $W(0) = 1$ является определителем матрицы монодромии и равен произведению мультипликаторов исследуемого решения. Один из мультипликаторов равен 1. Поэтому второй равен $W(2\pi)$. Последнее значение легко вычислить по формуле Лиувилля [4, гл. 3, §17, п. Ж]. Таким образом, второй мультипликатор равен $e^{-4\mu\pi}$. Поэтому исследуемое решение при $\mu > 0$ является орбитально устойчивым предельным циклом, а при при $\mu < 0$ является неустойчивым предельным циклом. При $\mu = 0$ рассматриваемая нелинейная система вырождается в линейную. Траекториями этой системы являются концентрические окружности. В этом случае исследуемое решение является орбитально устойчивым, но не является предельным циклом.

Раздел 2.1.

1. В общем случае существует только правосторонняя производная. Для дифференцируемости решения начальной задачи в точке $t = 0$ необходимо и достаточно выполнения следующих условий: 1) начальная функция ϕ имеет левостороннюю производную $\phi'(0-0)$ в точке $t = 0$; 2) имеет место равенство $\phi'(0-0) = f(0, \phi(0), \phi(-r_1), \ldots, \phi(-r_k))$.

2. Решение можно найти методом шагов. На первом шаге решается начальная задача

$$\dot{x}(t) = x(t) - (e^{t-2})^2, \quad t \in (1, 2); \qquad x(1) = 1.$$

Обратите внимание, что условие $x_\sigma = \phi$ принимает вид $x(t+1) = e^t$, $t \in [-1, 0]$.

3. Нет. Ввиду теоремы 2.1.3 это противоречит некомпактности единичного шара в бесконечномерном пространстве.

4. Указание: докажите, что $x(t)$ и $y(t)$ суть многочлены не выше второй и первой степени соответственно. Пример взят из [20, свойство 3.5.2].

5. Ограниченность на произвольном отрезке $[a, c] \subset [\sigma - r, b)$ следует из непрерывности. Для любого $t \in [b - r, b)$ возьмем $t_k \in [t, b)$. Тогда $x(t) \leqslant \sup_{s \in [t_k - r, t_k]} |x(s)| = \|x_{t_k}\|$.

6. Действуя от противного, из компактности U получаем сходящуюся последовательность $(t_k, x_{t_k}) \to (b, \psi) \in U$, где $t_k \to b - 0$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, r)$

$$\lim_{k \to \infty} \max_{\theta \in [-r, -\varepsilon]} |x_{t_k}(\theta) - \psi(\theta)| = 0.$$

Поэтому $x(b + \theta) = \psi(\theta)$ при $\theta \in [-r, 0)$. Следовательно, $\lim_{t \to b-0} x(t) = \phi(0)$. Завершается доказательство так же, как в теореме 2.1.2.

7. В утверждении теоремы для каждого $\phi \in C$ предполагается существование и единственность решения $x(\sigma, \phi)$, определенного на полуинтервале $[\sigma - r, \infty)$. Это сделано для упрощения формулировок.

8. Для получения равностепенной ограниченности было использовано равенство $\dot{x}(\sigma,\phi)(s) = f(s, T(s,\sigma)\phi)$, где $s \in [t-r, t]$. Данное равенство имеет место только при $s \geqslant \sigma$.

Раздел 2.2.

1. Функция e^{-t^2}, очевидно, является решением уравнения

$$\dot{x}(t) = -2te^{(1-2t)}x(t-1).$$

Пример взят из [20, свойство 3.3.1].

2. Здесь удается использовать полученное характеристическое уравнение (смотри также [20, свойство 3.3.2] и [20, §8.1]).

3. Достаточно применить результат предыдущего задания (п. 2) и следствие 2.2.3.

4. Нет, смотри предыдущий пример.

5. Продолжим функцию $p(t)$ на $(-\infty,\infty)$ периодическим образом. Пусть $x(t) = p(t)e^t$ при $t \in (-\infty,\infty)$. Заменяя переменную t в уравнении (2.2.1) по формуле $t = s - j\omega$, получим ту же систему. Функция $x(s) = Ap(s)e^s$, где A — произвольная постоянная, является ее решением при $s \geqslant 0$. Положим $A = -j\omega$ и совершим обратную замену переменной по формуле $s = t + j\omega$. Получим, что функция $x(t)$ является решением уравнения (2.2.1) при $s \geqslant -j\omega$, где $j \in \mathbb{N}$ — произвольно.

6. Пусть $\tilde{x}(\sigma,\phi)(t)$ — решение уравнения (2.2.1). Заменим переменную t по формуле $t = s + \omega$. Тогда полученное уравнение имеет решение $\hat{x}(\sigma-\omega,\phi)(s) = \tilde{x}(\sigma,\phi)(s+\omega)$. Ввиду ω-периодичности правой части уравнения (2.2.1) полученное уравнение совпадает с исходным. Поэтому

$$T(s,\sigma-\omega)\phi = \hat{x}(\sigma-\omega,\phi)(s) = \tilde{x}(\sigma,\phi)(s+\omega) = T(s+\sigma,\sigma)\phi.$$

Таким образом, $T(t+\omega,s) = T(t+\omega,s+\omega)T(s+\omega,s) = T(t,s)T(s+\omega,s)$. Отсюда следует, например, равенство $T(s+2\omega,s) = T(s+\omega,s)T(s+\omega,s)$;

а также равенства

$$T(t+\omega,0)\phi = T(t,0)T(\omega,0)\phi = T(t,0)\mu\phi = \mu T(t,0)\phi,$$

используемые в лемме 2.2.1.

7. Нет. Решение, начинающееся в точке ϕ, не может быть продолжено влево. Это противоречит лемме 2.2.2.

8. Оператор монодромии бесконечномерный, а его спектр содержит точку $\lambda = 0$.

9. Важно, что матрица M не имеет нулевых собственных значений (для ответа на оба вопроса см. теорему [19, гл. VII, §1, теорема 5]).

10. Матрица e^{Bt} является фундаментальной матрицей решений системы линейных обыкновенных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Элементы этой матрицы суть полиномы от времени, умноженные на $e^{\lambda t}$. Элементы матрицы $\tilde{P}(t)$ периодичны по времени.

11. Да. Это конечномерный линейный оператор с тривиальным ядром (см. доказательство леммы 2.2.3).

12. Только характеристические мультипликаторы. Оператор монодромии определен с точностью до выбора начального момента времени. Характеристические показатели определены с точностью до слагаемого $k\frac{2\pi i}{\omega}$, где $k \in \mathbb{N}$.

13. Указание: так как $Q(s)$ — нильпотентна и

$$[\mu I - U(\tau)]^k T(\tau,s)\Phi^{(s)} = T(\tau,s)\Phi^{(s)}Q^k(s),$$

то $\{T(\tau,s)\Phi^{(s)}b : \ b \in \mathbb{R}^{d_\mu}\} \in E_\mu(\tau)$.

Раздел 2.3.

1. Пусть $p(t)$ периодическое решение с наименьшим периодом ω. Орбита этого решения — это семейство функций $p_\alpha \in C$ при $\alpha \in [0,\omega)$, которые являются точками пространства C.

2. Орбита периодического решения изоморфно отображается на единичную окружность в $\mathbb{R}^2$, которая является компактным множеством.
3. Функция $\dot{\tilde{x}}$ является решением уравнения в вариациях. Если $\dot{\tilde{x}}_t = 0$, то по теореме существования и единственности решения начальных задач для таких уравнений имеем $\dot{\tilde{x}} \equiv 0$. Последнее противоречит существованию минимального периода $\omega > 0$.
4. Из компактности некоторой степени оператора монодромии для каждого $\mu \in \sigma(\mathcal{M}(\alpha)) \setminus \{0\}$ следует (см. раздел 2.2) существование разложения $C = E_\mu(\alpha) \oplus K_\mu(\alpha)$. При этом множество $\{\mu \in \sigma(\mathcal{M}(\alpha)) : \ |\mu| \geqslant 1\}$ конечно.
5. Существуют разложение $L = L_1 \oplus L_2$, где $L = \Sigma_\alpha - \tilde{x}_\alpha$, и линейные операторы $A : \ L_1 \to L_1$ и $C : \ L_2 \to L_2$, такие что $\pi_\alpha(\tilde{x}_\alpha + z) = \tilde{x}_\alpha + (Ax, Cy) + H(z)$, где $z = (x, y) \in L$, $x \in L_1$, $y \in L_2$. При этом оператор $H : \ L \to L$ является непрерывно дифференцируемым в окрестности нуля и имеет нулевую производную в нуле, спектр оператора A лежит внутри единичной окружности и отделен от нее, спектр оператора C конечен и лежит вне единичной окружности, пространство L_2 конечномерное.
6. Если все мультипликаторы Флоке лежат внутри единичной окружности, то соответствующее периодическое решение является асимптотически орбитально устойчивым с асимптотической фазой. Если существует мультипликатор Флоке, больший по модулю, чем 1, то соответствующее периодическое решение является неустойчивым. Подробнее смотри [16, гл. XIV, теорема 3.3].

Раздел 3.1.

1. При $T > 1$ имеем $N > M$. Тогда в формуле (3.1.3) функции $u_{1-M}, \ldots, u_0$ выражены через функции $u_1, \ldots, u_N$, и получаем краевую задачу для системы дифференциальных уравнений.

2. В формуле (3.1.2) значение аргумента функции v не превосходит T.

3. Раскрывая определение оператора монодромии, мы увидели, что под уравнением (3.1.1) (относительно функции ϕ) понимается система уравнений (3.2), (3.3), (3.1.2) (относительно пары функций ϕ и v).

4. Пусть v — удовлетворяет системе уравнений (3.2), (3.1.2). Допустим, $\phi = Pv = 0$. Тогда v — решение начальной задачи (3.2), (3.3) с нулевыми начальными данными. Следовательно, $v = 0$ в силу единственности решения этой начальной задачи и однородности уравнения (3.2).

5. Если функция $v: \ [-1, T] \to \mathbb{C}$ связана с функцией $U: \ [0, \tau] \to \mathbb{C}^{N+M}$ по формуле (3.2.6), то область значений функции v совпадает с объединением областей значений компонент вектор-функции U (в частности, эти множества могут быть равны $\{0\}$ только одновременно).

6. Суть метода в сведении уравнения (3.1.1) к краевой задаче (3.1.7), (3.1.9). В основе метода лежит переход от функции v к функциям u_i: функция v сужается на малый интервал, левый конец которого сдвигается в начало координат. Эти малые интервалы должны иметь одинаковую длину (τ), чтобы объединить функции u_i в вектор-функцию U. Концы смежных интервалов должны совпадать, чтобы условие непрерывности функции v приводило к краевым условиям. Сдвиг на T должен переводить один такой интервал в другой (ср. (3.1.2) и (3.1.3)), т. е.T кратно τ. Аналогично получаем, что 1 кратно τ (ср. (3.2) и (3.1.4)).

7. Это линейные однородные уравнения.

8. Пусть функция v удовлетворяет уравнению (3.2) на интервалах $(i\tau - \tau, i\tau)$ и $(i\tau, i\tau + \tau)$ и непрерывна в точке $i\tau$. Тогда предел справа и предел слева от функций v' в точке $i\tau$ совпадают и равны правой части уравнения (3.2) в точке $i\tau$. Следовательно, то же значение имеют правая и левая производные функции $v(t)$ в точке $i\tau$. Таким образом, функция v удовлетворяет уравнению (3.2) в точке $i\tau$. Обратное очевидно. Мы

получили, что функция v удовлетворяет уравнению (3.2) на интервалах $(i\tau-\tau, i\tau)$ и $(i\tau, i\tau+\tau)$ и непрерывна в точке $i\tau$ тогда и только тогда, когда функция v удовлетворяет уравнению (3.2) на интервале $(i\tau-\tau, i\tau+\tau)$.
9. Во вторую группу уравнений входят функции u_i только при $i > 0$. В первой группе уравнений добиваемся этого с помощью преобразований.
10. Соответствующее отображение легко выписывается. Его матрица состоит из двух блоков, один из которых — единичная матрица. Этот очевидный факт подразумевается при использовании замечания 3.1.2.
11. Являясь невырожденной, фундаментальная матрица S_λ осуществляет изоморфизм пространства решений краевой задачи (3.1.7), (3.1.9) на пространство решений системы линейных алгебраических уравнений (3.1.11).
12. Потому, что $\lambda \in \sigma(\mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)$ не пусто; $N - \mathrm{rank} Q(\lambda) > 0$ тогда и только тогда, когда $\det Q(\lambda) = 0$.
13. Задача отыскания собственной функции ϕ оператора $\mathcal{M}$ и ее решение:

$$\begin{cases} v(t+3/2) = \lambda\phi(t), \quad t \in [-1, 0], \\ v'(t) = \alpha_0(t)v(t) + \alpha_1(t)v(t-1), \quad t \in (0, 3/2), \\ v(t) = \phi(t), \quad t \in [-1, 0], \end{cases}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} u_2(t+1), \quad t \in [-1, -1/2], \\ u_3(t+1/2), \quad t \in [-1/2, 0]. \end{cases}$$

Здесь $U = (u_1, u_2, u_3)^T$ — решение следующей краевой задачи

$$U'(t) = A(t)U(t) \qquad \begin{cases} \lambda u_1(0) = u_3(1/2), \\ u_2(0) = u_1(1/2), \\ u_3(0) = u_2(1/2), \end{cases}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} \alpha_0(t) & \alpha_1(t)/\lambda & 0 \\ 0 & \alpha_0(t+1/2) & \alpha_1(t+1/2)/\lambda \\ \alpha_1(t+1) & 0 & \alpha_0(t+1) \end{pmatrix}.$$

Раздел 3.2.

1. Решениями уравнения (3.2.1) являются собственные функции оператора $\mathcal{M} - \lambda I$ и присоединенные к ним (и только они). Если решение единственно (с точностью до постоянного множителя), то оно является собственной функцией, не имеющей присоединенных. В таком случае параметр λ является собственным значением оператора $\mathcal{M}$ и его алгебраическая кратность равна единице (другими словами об этом говорится в доказательстве леммы 3.2.4).

2. Если уравнение (3.2.1) не имеет решений (т. е. нет даже собственных значений, соответствующих параметру λ), то параметр λ не является собственным значением (т. е. его алгебраическая кратность равна нулю). Если уравнение (3.2.1) имеет k линейно независимых решений при $k > 1$, то алгебраическая кратность $m(\lambda) \geqslant k$. Делать более точных выводов нельзя, так как могут быть присоединенные функции более высокого порядка (для определения алгебраической кратности можно использовать другой подход см. §4.2).

3. По определению оператора $\mathcal{M}$ имеем $(\mathcal{M} - \lambda I)\phi = v(t+T) - \lambda v(t)$. Действуя на правую и левую части этого равенства оператором $\mathcal{M} - \lambda I$, получаем $(\mathcal{M}-\lambda I)^2\phi = \mathcal{M}v(t+T) - \lambda v(t+T) - \lambda(v(t+T) - \lambda v(t))$. Остается показать, что $\mathcal{M}v(t+T) = v(t+2T)$. По определению функции v имеем

$$v'(t+T) = \alpha_0(t+T)v(t+T) + \alpha_1(t+T)v(t+T-1) \qquad (t > 0).$$

Благодаря T-периодичности коэффициентов α_0 и α_1 имеем

$$v'(t+T) = \alpha_0(t)v(t+T) + \alpha_1(t)v(t+T-1) \qquad (t > 0).$$

Поэтому функция $v(t+T)$, где $t \in [-1, T]$, является решением начальной задачи (3.2) (3.3). По определению оператора монодромии получаем $\mathcal{M}v(t+T) = v(t+2T)$.

4. Пусть существует $x \in \mathcal{N}(A^{k+2}) \setminus \mathcal{N}(A^{k+1})$, т. е. $A^{k+2}x = 0$ и $A^{k+1}x \neq 0$. Тогда для $y = Ax$ имеем $A^{k+1}y = 0$ и $A^k y \neq 0$. Следовательно, имеем $\mathcal{N}(A^k) \neq \mathcal{N}(A^{k+1})$. Доказательство завершается методом математической индукции.

5. Можно. Тогда в доказательстве надо использовать лемму 3.2.3 вместо теоремы 3.1.2. Получаемое утверждение удобнее тем, что используется только одна вспомогательная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако это более сложная система, содержащая спектральный параметр. В исходной формулировке подобную систему предлагается решать только при одном фиксированном значении параметра: $\lambda = 1$; а в качестве системы с параметром выступает более простая система уравнений.

6. См. соответствующие ответы к вопросам из раздела 3.1.

7. Пространство $\mathcal{N}((\mathcal{M}-\lambda I)^2)$ состоит из решений ϕ следующей системы уравнений

$$\begin{cases} v(t+3) - 2\lambda v(t+3/2) + \lambda^2\phi(t) = 0, \quad t \in [-1, 0], \\ v'(t) = \alpha_0(t)v(t) + \alpha_1(t)v(t-1), \quad t \in (0, 3), \\ v(t) = \phi(t), \quad t \in [-1, 0], \end{cases}$$

Решения этой системы имеют вид

$$\phi(t) = \begin{cases} \dfrac{2u_2(t+1)}{\lambda} - \dfrac{u_5(t+1)}{\lambda^2}, \quad t \in [-1, -1/2], \\ \dfrac{2u_3(t+1/2)}{\lambda} - \dfrac{u_6(t+1/2)}{\lambda^2}, \quad t \in [-1/2, 0]. \end{cases}$$

Здесь $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)^T$ — решение краевой задачи

$$U'(t) = A(t)U(t), \qquad U(0) = FU(\tau),$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} \alpha_0(t) & \dfrac{2\alpha_1(t)}{\lambda} & 0 & 0 & \dfrac{\alpha_1(t)}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & \alpha_0(t) & \dfrac{2\alpha_1(t+\frac{1}{2})}{\lambda} & 0 & 0 & \dfrac{\alpha_1(t+\frac{1}{2})}{\lambda^2} \\ \alpha_1(t+1) & 0 & \alpha_0(t+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1(t+\frac{3}{2}) & 0 & \alpha_0(t+\frac{3}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1(t+2) & 0 & \alpha_0(t+2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1(t+\frac{5}{2}) & 0 & \alpha_0(t+\frac{5}{2}) \end{pmatrix}.$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/\lambda & 0 & 0 & -1/\lambda^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Раздел 3.3.

1. Уравнение (3.1) не может иметь решение с минимальным периодом $T \in \mathbb{N}$, поскольку такая функция являлась бы решением автономного обыкновенного дифференциального уравнения и, следовательно, равнялась бы константе.

2. Действия: 1) составить краевую задачу (3.3.2), (3.3.4); 2) вычислить фундаментальную матрицу $S_\lambda(\tau)$ (возможно, с использованием численных методов); 3) составить матрицу $Q(\lambda)$; 4) вычислить корни уравнения $\det Q(\lambda) = 0$, лежащие на единичной окружности; 5) если среди найденных корней присутствует $\lambda \neq 1$, то исследование завершено (исследуемое решение не является гиперболическим); 6) вычислить ранг матрицы $Q(1)$; 7) если ранг больше единицы, то исследование завершено

(исследуемое решение не является гиперболическим); 8) составить краевую задачу (3.3.8), (3.3.10); 9) вычислить фундаментальную матрицу $\hat{S}_\lambda(\tau)$ (возможно, с использованием численных методов); 10) составить матрицу $\hat{Q}(1)$; 11) вычислить ранг матрицы $\hat{Q}(1)$; 12) исследуемое решение является гиперболическим тогда и только тогда, когда ранг равен $2N-1$. Предложенный порядок действий удобен, если решение системы (3.3.2), состоящей из N уравнений, но содержащей параметр, проще, чем решение системы (3.3.8), состоящей из $2N$ уравнений (решать эту систему предлагается только при $\lambda = 1$). В противном случае группы действий 1-7 и 8-12 можно поменять местами (с очевидными изменениями в выводах), при этом необходимость действий 6 и 7 пропадает.

3. Поскольку $\tilde{x}(t) = \sin(3\pi t)$, имеем $T = 2/3$. Следовательно, $N = 2$, $M = 3$, $\tau = 1/3$. Краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} u_1' = u_1 \sin(6\pi t) + u_2 \cos(6\pi t)/\lambda^2, \\ u_2' = u_1 \cos(6\pi t)/\lambda + u_2 \sin(6\pi t), \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1(0) = u_2(1/3)/\lambda, \\ u_2(0) = u_1(1/3). \end{cases}$$

Предполагаемому периодическому решению $\tilde{x}$ не могут соответствовать коэффициенты α_0 и α_1, поскольку вектор-функция

$$(u_1(t), u_2(t)) = (\tilde{x}'(t), \tilde{x}(t - 1/3))$$

должна являться решением приведенной краевой задачи.

4. Во вторую группу уравнений входят функции u_i только при $i > 0$. В первой группе уравнений добиваемся этого с помощью преобразований.

5. Перечисленные утверждения определяют последовательность изоморфизмов, композиция которых является искомой. Суть доказательства в том, что формула (3.3.5) определяет отображение, соответствующее упомянутой композиции изоморфизмов.

6. Используя равенства $k_{i+N} = k_i - 1$ и $k_{i+2N} = k_i - 2$, подставим равенства (3.3.6) в (3.2.3):

$$u_i = \frac{2}{\lambda}\left[\frac{(k_{i+N}+1)u_{i+N+k_{i+N}N}}{\lambda^{k_{i+N}}} - \frac{k_{i+N}u_{i+N+(k_{i+N}+1)N}}{\lambda^{k_{i+N}+1}}\right] -$$
$$- \frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{(k_{i+2N}+1)u_{i+2N+k_{i+2N}N}}{\lambda^{k_{i+2N}}} - \frac{k_{i+2N}u_{i+2N+(k_{i+2N}+1)N}}{\lambda^{k_{i+2N}+1}}\right] =$$
$$= \frac{2(k_i-1+1)u_{i+N+(k_i-1)N}}{\lambda\lambda^{k_i-1}} - \frac{2(k_i-1)u_{i+N+(k_i-1+1)N}}{\lambda\lambda^{k_i-1+1}} -$$
$$- \frac{(k_i-2+1)u_{i+2N+(k_i-2)N}}{\lambda^2\lambda^{k_i-2}} - \frac{(k_i-2)u_{i+2N+(k_i-2+1)N}}{\lambda^2\lambda^{k_i-2+1}} =$$
$$= \frac{(2k_i-k_i+1)u_{i+k_iN}}{\lambda^{k_i}} - \frac{(2k_i-2-k_i+2)u_{i+(k_i+1)N}}{\lambda^{k_i+1}}$$

Доказательство, приведенное в основном тексте, позволяет избежать громоздких выражений и, по сути, указывает на вывод формулы (3.3.6) (вместо проверки готового результата, неизвестно откуда взятого).

7. В данном случае система (3.3.8) является системой с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение относительно собственных значений матрицы этой системы является кубическим, и один из его корней ($\lambda = 1$) заранее известен. Отметим, что полученные методы позволяют исследовать нелинейные уравнения. В этом случае необходимо проделать те же построения, что и в данном задании. Вероятно, однако, придется находить матрицу $S_\lambda(\tau)$, применяя численные методы.

8. На предыдущем этапе построения критерия гиперболичности мы избавились от запаздываний в соответствуеющей спектральной задаче.разделе 4 Утверждение леммы 3.3.4 позволяет исключить из системы, полученной на предыдущем этапе, лишние переменные $u_{1-M}, \dots, u_0$. В результате получаем краевую задачу, некоторое свойство которой эквивалентно гипрболичности исследуемого решения.

9. Ответ аналогичен ответу на четвертый вопрос.

10. Ответ аналогичен ответу на пятый вопрос к разделу 3.2.

Раздел 4.1.

1. $M = 6$, $N = 10$, $\tau = 1/6$.

2. $v = \frac{6\pi}{5} \cos \frac{6\pi t}{5}$; $u_1 = \frac{6\pi}{5} \cos \frac{6\pi t}{5}$, $u_2 = \frac{6\pi}{5} \cos \left(\frac{6\pi t}{5} + \frac{\pi}{5} \right), \ldots,$
$u_{10} = \frac{6\pi}{5} \cos \left(\frac{6\pi t}{5} + \frac{9\pi}{5} \right).$

3. $d_{1,5} = 2$. Прочие параметры имеют значения: $M = 12$, $N = 4$, $M_1 = 9$, $M_2 = 48$.

4. В предложенном случае характеристическое уравнение ($\det Q(\lambda) = 0$) имеет вид $\lambda^2[\lambda^2 + \lambda^2(\lambda + 1) - \lambda(2 + \lambda)] = 0$. Его корнями являются $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Ненулевыми мультипликаторами являются $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = -2$. Других мультипликаторов нет. Геометрическая кратность мультипликатора $\lambda = 1$ равна единице. Однако соответствующее решение может не являться гиперболическим, если кратность (алгебраическая) мультипликатора $\lambda = 1$ больше единицы.

5. Решение, о котором идет речь, получается при подстановке функции $v^\phi = \tilde{x}'$ в формулу (4.1.12).

6. В данном разделе мы описываем действие резольвенты оператора монодромии, а в предыдущей главе решали задачу на собственные значения оператора монодромии.

7. Резольвента R ставит в соответствие правой части уравнения (4.1.1) решение этой системы. Ввиду леммы 4.1.1 для отыскания значения $\phi = R\psi$ достаточно решить вспомогательную краевую задачу для системы обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений.

Раздел 4.2.

1. Вычислим значения остальных параметров: $N = 3$, $\tau = 1/2$, $M_1 = 2$, $M_2 = 4$, $\alpha_{kj}(1/2) = \sin(4kj\pi/3)$ Поскольку, например, $\alpha_{1,1}(1/2) = 1/2$,

при $\nu = 1$ положим $k_\nu = 1$ и $j_\nu = 1$. Тогда

$$B_{1,1} = 0; \qquad B_{1,2} = \alpha_{1,2}(1/2)\delta_{2,(2+2-1-1)} + \alpha_{2,2}\delta_{4,(2+2-1-1)};$$
$$B_{1,3} = \alpha_{1,3}(1/2)\delta_{2,(2+3-1-1)} + \alpha_{2,3}\delta_{4,(2+3-1-1)}.$$

Таким образом, $B_1 = (0, 1/2, 0)^T$.

2. В главе 3 исследовали размерность нуль-пространства $\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^2$, а в данном разделе описали действие резольвенты.

3. В главе 3 получили критерий гиперболичности, а в данном разделе полученные необходимые условия отличаются от достаточных. Однако метод, изложенный в данном разделе, использует только одну, более простую, вспомогательную систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Если на единичной окружности есть корни уравнения $\det Q(\lambda) = 0$, кроме $\lambda = 1$, то исследуемое решение не является гиперболическим. Если упомянутых корней нет и $j(\lambda)(N - \mathrm{rank} Q(1)) = 1$, то исследуемое решение является гиперболическим.

5. Нет. Зависимость $Q(\lambda)$ сложнее, чем $Q - \lambda I$.

6. По построению $\tilde{Q}^\eta(\lambda)$ состоит из элементов матрицы, присоединенной к Q. Если $\tilde{Q}^\eta(\lambda) \neq 0$ (а это следует из неравенства (4.2.3)), то $\mathrm{rank} Q \geqslant N - 1$. С другой стороны, $\mathrm{rank} Q < N$, поскольку $\det Q(\lambda) = 0$ (это равенство следует из принадлежности $\lambda \in \sigma(\mathcal{M}) \setminus \{0\}$ и теоремы 4.1.1).

7. По лемме 4.1.1 имеем равенство $\dim \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I) = N - \mathrm{rank} Q(\lambda)$. Если $x \in \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^k \setminus \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^{k-1}$, то $(\mathcal{M} - \lambda I)^{k-1} x \neq 0$ и $(\mathcal{M} - \lambda I)^k x = 0$. Таким образом, $y = (\mathcal{M} - \lambda I)^{k-1} x \in \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)$.

8. Да. Из этого неравенства следует, что геометрическая кратность $\dim \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)$ собственного значения λ равна единице. Последнее не является обязательным свойством мультипликаторов Флоке.

9. Кратность полюса λ оператора $(\mathcal{M}-\lambda I)^{-1}$ равна κ (см. теорему D.2). Кратность полюса λ оператора $q^{-1}(\lambda)H(\lambda)$ не превосходит $j(\lambda)$, поскольку ограниченный оператор $H(\lambda)$ не увеличивает кратность полюса (может только уменьшить, если его ядро нетривиально).

Раздел 4.3.

1. Нет. Допустим, существует $x \in \mathcal{N}(\mathcal{M}-\lambda I)^{k+2} \setminus \mathcal{N}(\mathcal{M}-\lambda I)^{k+1}$, т. е. $(\mathcal{M}-\lambda I)^{k+2}x = 0$ и $(\mathcal{M}-\lambda I)^{k+1}x \neq 0$. Тогда $y = (\mathcal{M}-\lambda I)x \neq 0$ и $y \in \mathcal{N}(\mathcal{M}-\lambda I)^{k+1} \setminus \mathcal{N}(\mathcal{M}-\lambda I)^{k}$.

2. Сначала следует составить систему 4.3.8 и найти матрицу $\hat{S}_\lambda(\tau)$ при $\lambda = 1$ (решать систему без параметра проще). Если $\mathrm{rank}\hat{Q}(1) < 2N-1$, то исследуемое решение не является гиперболическим. В противном случае продолжаем исследование. Составляем систему 4.1.14 и находим матрицу $S_\lambda(\tau)$. Составляем уравнение $\det Q(\lambda) = 0$ и ищем его решения на единичной окружности (например в виде $\lambda = e^{i\gamma}$). Достаточно найти одно такое решение $\lambda \neq 0$ или доказать, что такое решение единственно. Существование решения $\lambda = 1$ можно использовать в качестве проверки точности вычислений. Смотри также ответ к заданию 2 из раздела 3.3.

3. Доказательство можно разбить на 4 этапа. 1) После описания действия оператора $\mathcal{M}$ уравнение (4.3.1) преобразуется в систему уравнений (4.3.1), (2.3.2), (2.3.3). 2) Эта система после замены переменных по формуле (4.3.2) преобразуется в систему (4.3.4), (4.3.5), (4.3.6). 3) Из уравнений формулы (4.3.4) мы выражаем часть переменных и исключаем их из всех прочих уравнений системы, полученной на 2-ом этапе. При этом оказывается, что некоторые равенства системы (4.3.6) повторяются. В результате указанных преобразований получаем краевую задачу (4.3.8), (4.3.9), (4.3.10). 4) На последнем этапе явно описывается преобразование, переводящее решения уравнения (4.3.1) в решения полученной краевой задачи, и обратное к нему преобразование. Легко увидеть, что

каждое из упомянутых преобразований осуществляется линейным ограниченным оператором.

4. Для любой непрерывной функции $\phi \in C_{\mathbb{C}}$ существует единственное решение v^{ϕ} начальной задачи (2.3.2), (2.3.3) (см. лемму 2.1.2). Оператор $P: C_{\mathbb{C}} \to C([0, \tau], \mathbb{C}^{2N})$ действует по формуле $(P\phi)_i(t) = v^{\phi}(t + (i-1)\tau)$, $t \in [0, \tau]$.

5. Указание: обратите внимание на коментарии к заданиям 2 и 7 из раздела 3.3.

Раздел 4.4.

1. Это увеличивает свободу при построении уравнений, определяющих рациональную аппроксимацию.

2. Они действуют в разных пространствах.

3. В основе доказательства лежит тот факт, что решение начальной задачи (2.3.2), (4.4.3) определяется значениями начальной функции на отрезке $[-r_n, 0] \subset [-r, 0]$.

4. Оператор сужения P отображает каждое собственное подпространство оператора $\mathcal{M}_G - \lambda I$ в соответствующее собственное подпространство оператора $\mathcal{M} - \lambda I$. Остается построить обратный к нему оператор, определенный на всем собственном подпространстве оператора $\mathcal{M} - \lambda I$. Элементы этих собственных подпространств определяются по формуле $\phi = v_0^{\phi}$, где v^{ϕ} является решением уравнения вида $v^{\phi}(t) = v^{\phi}(t+T) - \psi(t)$. Суть построения оператора, обратного к P, заключается в продолжении функции ϕ влево с сохранением последнего равенства. Метод построения такого продолжения очевиден, поскольку в равенстве $v^{\phi}(t) = v^{\phi}(t+T) - \psi(t)$ значения $v^{\phi}(t)$ определяются через значения $v^{\phi}(s)$ при $s > t$.

5. Предложенным способом получаем последовательность уравнений. Несоответствие определению 4.4.2 заключается в зависимости запаздываний

от номера уравнения. Решается эта проблема благодаря теореме С.2: вводим в правую часть исходного уравнения дополнительные аргументы вида $x(t-q_i)$ и выражаем через них следующие выражения $\tilde{x}(\beta t - r_i) - \tilde{x}(\beta t - \beta r_i)$ (важно, что $0 < q_i \in \mathbb{Q}$ и q_i не зависят от β).

Раздел 4.5.

1. Нет. При доказательстве подобного утверждения в выражении

$$\sup_{\phi \in C([-r,0],\mathbb{C}):\ \|\phi\|=1} \|\mathcal{V}_k\phi - \mathcal{V}\phi\|_{C([-r,0],\mathbb{C})}$$

некоторое сужение функции $\mathcal{V}_k\phi$ является произвольной непрерывной функцией, а соответствующее сужение функции$\mathcal{V}\phi$ получается сдвигом предыдущего сужения. Таким образом, анализируемое выражение равно ∞. Смотри также ответ на вопрос 3.

2. Достаточно проанализировать сказанное в основном тексте.

3. Оценки на функции $v(s)$ и $v_k(s)$ в правой части неравенства 4.5.11 выводились при $s > 0$.

Раздел 4.6.

1. Допустим, имеется последовательность уравнений и их решений, образующая рациональную аппроксимацию. Каждому решению соответствует оператор монодромии. Спектр этого оператора допускает исследование посредством решения вспомогательной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (благодаря рациональности периода решения). Совокупность этих операторов аппроксимирует оператор, соответствующий исходному исследуемому решению (с иррациональным периодом). Их спектры связаны благодаря операторному обобщению теоремы Руше. Это позволяет сформулировать критерий гиперболичности в терминах вспомогательных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Да.

3. $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{V}}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\lambda_k \to \lambda$ такая, что λ_k является собственным значением оператора $\mathcal{V}_{j_k}$, соответствующей рациональной аппроксимации; причем $j_k \neq j_i$ при $k \neq i$.
4. По теореме D.3 спектр $\sigma(A)$ не имеет точек накопления в $\mathbb{C}$ кроме, быть может, $\lambda = 0$.
5. Да. Смотри пример в [6, §5].
6. Благодаря компактности оператора $\mathcal{V}$ для каждого $\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{V}) \setminus \{0\}$ существует окрестность, в которой нет других собственных значений оператора $\mathcal{V}$. По теореме D.5 суммарная кратность собственных значений оператора $\mathcal{V}_k$, близкого к $\mathcal{V}$, лежащих в этой окрестности, совпадает с кратностью собственного значения λ_0. Трудность заключается в том, что само значение λ_0, соответствующая окрестность и степень требуемой близости оператора $\mathcal{V}_k$ к оператору $\mathcal{V}$ нам заранее не известны. Поэтому приходится использовать сходящиеся последовательности собственных значений, как это сделано в определении множеств Λ_q и $\Lambda_{\mathcal{V}}$. Решить эту проблему было бы очень полезно для конструктивности изложенных выше результатов.
7. Смотри теорему 5 из §5, гл. IV: «Элементы теории функций и функционального анализа» – *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.*, М.: Наука, 1968.
8. Мы построили такую окрестность точки $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{V}) \cup \{0\}$, которая принадлежит резольвентному множеству всех операторов $\mathcal{V}_k$ при достаточно больших k. Это противоречит предположению, что в сколь угодно малой окрестности точки λ_0 при достаточно больших значениях k все операторы $\mathcal{V}_k$ имеют собственные значения.
9. Проверка условия 4.6.3 не представляется возможной.

Предметный указатель

Литература

[1] *Аносов Д. В.* Дополнительные главы по анализу: конспект лекций // Научно-образовательный центр при МИАН http://www.mi.ras.ru/noc/05_06/dopcalc.pdf

[2] *Вальтер Х.-О.*, *Скубачевский А. Л.* О мультипликаторах Флоке для медленно осциллирующих периодических решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений //Труды московского математического общества. – 2003. – Т.64. – С. 3-53.

[3] *Гохберг И. Ц.*, *Сигал Е. И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше// Мат. сборник. – 1971. – Т. 84. – № 4. – С. 607-629.

[4] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Изд–во Московского университета, 1998.

[5] *Долгий Ю. Ф.*, *Нидченко С. Н.* Устойчивость антисимметрических периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием // Известия УрГУ. – 2005. – № 38. – С. 50-68.

[6] *Журавлев Н. Б.*, *Скубачевский А. Л.* О гиперболичности периодических решений функционально-дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями// Труды Матем. ин–та. им. В. А. Стеклова. – 2007. – Т. 256. – С. 148-171.

[7] *Журавлев Н. Б.* Критерий гиперболичности периодических решений функционально-дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями// Современная математика. Фундаментальные направления. – 2007. – Т. 21. – С. 37-61.

[8] *Журавлев Н. Б.* Критерий гиперболичности периодических решений функционально-дифференциальных уравнений с рациональным периодом// Функц. анализ и его приложения. – 2007. – Т. 41. – Вып.1. – С. 90-92.

[9] *Зорич В. А.* Математический анализ. Часть I. – М.: МЦНМО. 2001.

[10] *Колмановский В. Б.*, *Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука. 1981.

[11] *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.

[12] *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Регулярная и хаотическая динамика. 2001.

[13] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир. 1970.

[14] *Brunovsky P.*, *Erdélyi A.*, *Walther H.-O.* On Model of a Currency Exchange Rate – Local Stability and Periodic Solutions// J. Dynam. Differential Equations. – 2004. – V. 16. – № 2. – P. 393-432.

[15] *Chow S. N.*, *Walther H.-O.* Characteristic multipliers and stability of symmetric periodic solutions of $\dot{x}(t) = g(x(t-1)))$// Transactions of the A.M.S. – 1988. – V. 307. – P. 127-142.

[16] *Diekmann O.*, *van Gils S.*, *Verduyn Lunel S. M.*, *Walther H.-O.* Delay Equations: Functional-, Complex- , and Nonlinear Analysis. – New York: Springer. 1995.

[17] *Dormayer P.*, *Ivanov A. F.*, *Lani-Wayda B.* Floquet multipliers of symmetric rapidly oscillating solutions of differential delay equations// Tohoku Math. J. – 2002. – V. 54. – P. 419-441.

[18] *Dormayer P.*, *Lani-Wayda B.* Floquet multipliers and secondary bifurcations in functional differential equations: Numerical and

analytical results// Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. – 1995. – V. 46. – № 6. – P. 823-858.

[19] *Dunford N.*, *Schwartz J. T.* Linear Operators. Part I: General Theory. – New York: Interscience Publishers. 1958.

[20] *Hale J. K.* Theory of functional differential equations. New York: Springer. 1977.

[21] *Hale J. K.*, *Verduyn Lunel S. M.* Introduction to Functional Differential Equations. – New York: Springer. 1993.

[22] *Herz A. V. M.* Global analysis of recurrent neural networks // *Domany E.*, *van Hemmen J. L.*, *Schulten K.* (eds.). Models of Neural Networks. V. 3. New York: Springer-Verlag. 1994.

[23] *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators. – New York: Springer. 1966.

[24] *Krisztin T.*, *Walther H.-O.* Unique periodic orbits for delayed positive feedback and the global attractor// J. Dynamics and Differential Equations. – 2001. – V. 13. – P. 1-57.

[25] *Mallet-Paret J.*, *Sell G.* Systems of differential delay equations: Floquet multipliers and discrete Lyapunov functions// J. Differential Equations. – 125 (1996), 385-440.

[26] *Nussbaum R. D.* The range of periods of $x'(t) = -\alpha f(x(t-1))$// J. Mathematical Analysis and Applications. – 1977. – V. 58. – P. 280-292.

[27] *Ou Ch.*, *Wu J.* Periodic Solutions of Delay Differential Equations wich a Smal Parameter: Existence, Stability and Asymptotic Expansion// J. Dynam. Differential Equations. – 2004. – V. 16. – № 3. – P. 605-628.

[28] *Skubachevskii A. L.*, *Walther H.-O.* On the Floquet multipliers of periodic solutions to nonlinear functional differential equations// J. Dynam. Differential Equations. – 2006. – V. 18. – № 2. – P. 257-355.

[29] *Verduyn Lunel S. M., Krauskopf B.* The Mathematics of Delay Equations with an Application to the Lang-Kobayashi Equations// Fundamental Issues of Nonlinear Laser Dynamics, AIP Conference Proceedings 548, American Institute of Phisics Publishing/ Krauskopf B. and Lenstra D. (eds.). – New York: Melville. 2000. – P. 66-86.

[30] *Walther H.-O.* Bifurcation from periodic solutions in functional differential equations// Mathematische Zeitschrift. – 1983. – V. 182. – P. 269-289.

[31] *Walther H.-O.* Hyperbolic periodic solutions, heteroclinic connections and transversal homoclinic points in autonomous differential delay equations// Memoirs of the A.M.S. – 1989. – V. 79. – № 402.

[32] *Walther H.-O.* Contracting return maps for monotone delayed feedback// Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2001. – V. 7. – № 2. – P. 259-274.

[33] *Xie X.* Uniqueness and stability of slowly oscillating periodic solutions of delay equations with bounded nonlinearity// J. Dynamics Differential Equations. – 3 (1991), 515-540.

[34] *Zhuravlev N. B.* On the Hyperbolicity of Rapidly Oscillating Solutions of Functional Differential Equations with several delays// Abstracts of The Fourth International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, the Steklov Math. Inst. – 2005. – P. 87-88.

[35] *Zhuravlev N. B.* On the spectrum of the monodromy operator for slowly oscillating periodic solutions of functional differential equations with several delays// J. "Functional Differential Equations". – Israel, 2006. – V. 13. – No 2, – P. 323-344.

ОПИСАНИЕ КУРСА И ПРОГРАММА

Название курса

Гиперболические периодические решения нелинейных дифференциально-разностных уравнений.

Цели и задачи курса

- материал курса относится к области функционального анализа, дифференциальных уравнений и функционально-дифференциальных уравнений (математика)
- целью курса является знакомство с понятием гиперболичности периодических решений, играющем важную роль при описании динамики, порождаемой нелинейными дифференциальными и функционально-дифференциальными уравнениями
- курс предназначен для магистерской программы обучения
- рекомендуется в качестве спецкурса по выбору для студентов физико-математических факультетов вузов и университетов, обучающихся по направлению *«Математика»*
- курс носит теоретический характер
- курс рассчитан на 144 часа учебной нагрузки (один семестр, 4 кредита), из которых 42 часа отводится на лекции, 30 часов – на практические занятия, 72 часа – на самостоятельную работу студента.

Инновационность курса

- представленный в курсе материал опирается на современные методы теории функционально-дифференциальных уравнений, в том числе на результаты, которые до настоящего момента не были отражены в учебно-методической литературе

- курс готовится с учётом реализации в рамках кредитно-модульной системы.

<u>Структура курса</u>

Раздел 1. Гиперболические периодические решения систем нелинейных дифференциальных уравнений (лекции – 8 часов, практические занятия – 8 часов, самостоятельная работа – 16 часов, трудоемкость – 1 кредит).

Автономная система дифференциальных уравнений. Фазовое пространство. Свойства решений начальной задачи. Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая и орбитальная устойчивость. Уравнение в вариациях. Оператор монодромии. Характеристические числа Ляпунова. Гиперболические периодические решения. Функция Ляпунова. Теорема Андронова-Витта.

Раздел 2. Гиперболические периодические решения нелинейных дифференциально-разностных уравнений (лекции – 14 часов, практические занятия – 6 часов, самостоятельная работа – 20 часов, трудоемкость – 1 кредит).

Дифференциально-разностные уравнения и их классификация. Постановка начальной задачи. Метод шагов. Фазовое пространство. Свойства решений начальной задачи. Представление гладких периодических функций. Представление оператора рядом Лорана в окрестности изолированной точки спектра. Спектр компактного оператора. Теорема о спектре функции от оператора. Нормальность оператора относительно контура. Операторное обобщение теоремы Руше. Линеаризация дифференциально-разностного уравнения. Оператор монодромии для дифференциально-разностного уравнения. Функционал Ляпунова для автономного дифференциально-разностного уравнения. Аналог теоремы Андронова-Витта для дифференциально-разностных уравнений.

Раздел 3. Условия гиперболичности периодических решений дифференциально-разностных уравнений с одним запаздыванием (лекции – 8 часов, практические занятия – 10 часов, самостоятельная работа – 18 часов, трудоемкость – 1 кредит).

Задача на собственные значения оператора монодромии для дифференциально-разностного уравнения. Построение вспомогательной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Изоморфизм собственного подпространства оператора монодромии пространству решений вспомогательной краевой задачи. Корневое подпространство оператора монодромии. Критерий простоты собственных значений оператора монодромии. Критерий гиперболичности периодических решений с рациональным периодом в случае уравнений с одним запаздыванием.

Раздел 4. Условия гиперболичности периодических решений дифференциально-разностных уравнений с несколькими запаздываниями (лекции – 14 часов, практические занятия – 4 часа, самостоятельная работа – 20 часов, трудоемкость – 1 кредит).

Описание действия резольвенты оператора монодромии с помощью решения вспомогательной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Характеристическая функция. Исследование алгебраической кратности собственных значений оператора монодромии. Критерий гиперболичности периодических решений с рациональным периодом. Сохранение спектральных свойств оператора монодромии при введении формальных запаздываний. Рациональная аппроксимация. Свойства рациональной аппроксимации. Построение рациональной аппроксимации. Анализ спектральных свойств предельного оператора через спектральные свойства операторов, образующих сходящуюются последовательность. Критерий гиперболичности в случае иррационального периода.

<u>Система контроля знаний</u>

включает

- расчетную работу
- написание реферата по выбранной теме
- итоговый контроль в форме зачета

1. Расчетная работа выдается студентам в качестве задания для выполнения в течение семестра. Варианты расчетных работ распределяются среди студентов на первой неделе, начало ее фактического выполнения связано с изучением соответствующей темы на занятиях. Целью расчетной работы является самостоятельное применение изученных методов исследования спектра оператора монодромии и поведения траекторий в окрестности периодической орбиты. Расчетная работа выполняется на компьютере в любом знакомом студентам математическом пакете типа Mathcad, Maple, Matlab и др. или в любой системе программирования. Представление результатов расчетных работ происходит не позднее, чем за неделю до итогового контроля. Оценивается правильность решения задачи, качество численного решения, способность теоретически обосновать полученные результаты и самостоятельность выполнения задания. Ниже приводится типовой вариант расчетной работы.

Пример задания для расчётной работы

1. Для заданной системы нелинейных автономных дифференциальных уравнений и ее периодического решения
   - построить оператор монодромии;
   - найти его собственные значения (λ) и собственные векторы (Y_{0i});
   - построить графики функций $\Delta_i(t)=|X'(t)-Y_i(t)|$, где Y_i – решения линеаризованной системы уравнений с начальным условием $Y_i(0)=Y_{0i}$, X(t) – исследуемое периодическое решение;
   - прокомментировать полученный результат, сделав вывод о поведении других решений.

$$\begin{cases} x' = x^2 + y - z, \\ y' = -x, \\ z' = 2xy, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = \sin t, \\ y(t) = \cos t, \\ z(t) = \sin^2 t. \end{cases}$$

2. Построить нелинейное функционально-дифференциальное уравнение с двумя рациональными запаздываниями, решением которого являлась бы заданная функция x(t). Определить соответствующий оператор монодромии. Свести задачу на собственные значения оператора монодромии к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Определить кратность собственного значения λ=1. Найти все собственные значения оператора монодромии, лежащие на единичной окружности. Построить графики функций $\Delta_i(t)=|x(t)-y_i(t)|$, где y_i – решение исследуемого нелинейного уравнения с начальным условием $y_i(t)=x(t)+1/i$, $t \in [-r, 0]$ рассмотреть i=1,100,10000. Прокомментировать поведение функций Δ_i.

$$x(t) = \ln(2 + \sin(\pi t))$$

2. Написание реферата является самостоятельной неаудиторной формой работы студента в семестре. Распределение тем рефератов происходит в течение первой недели, а представление рефератов – не позднее, чем за неделю до проведения итогового контроля. Целью написания реферата является более глубокое освоение студентом изучаемого предмета, включая связи с другими областями, а также выработка навыков самостоятельной работы с современной математической литературой. При оценке реферата учитываются стиль и последовательность изложения, соответствие написанного заданной теме, умение выделить главные моменты.

При подготовке реферата недопустимо включать в свою работу выдержки из работ других авторов без указания на это, пересказывать чужую работу близко к тексту без отсылки к ней, использовать чужие идеи без указания первоисточников (это касается и источников, найденных в Интернете). Все случаи плагиата должны быть исключены. В конце работы даётся исчерпывающий список всех использованных источников.

Темы рефератов

1. Роль гиперболических решений в описании динамики, порождаемой нелинейными уравнениями. Структурная устойчивость.
2. Представление гладких периодических функций.
3. Условия существования периодических решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.
4. Бифуркация из ветви периодического решения функционально-дифференциального уравнения.
5. Роль гиперболических решений при описании действия лазерных устройств с обратной связью.
6. Гиперболичность периодических решений дифференциально-разностных уравнений с малым параметром. Метод Вальтера.

7. Роль гиперболических решений в теории искусственных нейронных сетей.
8. Исследование устойчивости негиперболических периодических решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений.
9. Исследование гиперболичности медленно-осциллирующих периодических решений дифференциально-разностных уравнений.
10. Метод сравнения решений функционально-дифференциальных уравнений на плоскости.
11. Типичность свойства гиперболичности периодических решений для дифференциальных уравнений с запаздыванием.

3. В конце обучения проводится итоговый контроль в форме зачета, на который выносятся вопросы по всему материалу курса. Задание к итоговому контролю состоит из двух теоретических вопросов и одной задачи. Один из вопросов относится к разделам 1-2, а другой вопрос — к разделам 3-4. Задача может быть по любой теме, разобранной на практических занятиях в течение семестра. Перечень вопросов и типы задач сообщаются студентам за неделю до итогового контроля. Итоговый контроль проводится в аудитории, в письменной форме. Студентам дается два академических часа на выполнение задания. В ходе итогового контроля оценивается способность свободно ориентироваться в пройденном материале и наличие практических навыков по его применению. Ниже приведены возможные варианты заданий к итоговому контролю.

Вариант 1

1. Оператор монодромии в случае функционально-дифференциального уравнения. Определение. Свойства.

2. Критерий простоты собственных значений оператора монодромии. (Рассмотреть случай периодического решения нелинейного дифференциально-разностного уравнения с одним запаздыванием при малом периоде решения)

3. Выписать характеристическую функцию для собственных значений оператора монодромии, ассоциированного с периодическим решением $\widetilde{x} = \widetilde{x}(t)$ уравнения $x'(t) = x(t) + f(x(t-1))$. Про функции $\widetilde{x}$ и f известно, что они непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям: $f(s) = 1$ при $s \in [-1, 0]$, $\widetilde{x}(t) \in [-1, 0]$ при $t \in [-2/3, -1/3]$. Период функции $\widetilde{x}$ равен 2/3.

Вариант 2

1. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений (по Ляпунову, асимптотическая и орбитальная).

2. Сходимость последовательности операторов монодромии, отвечающих рациональной аппроксимации.

3. Для дифференциально-разностного уравнения $x'(t) = x(t) + x^2(t-1)$ выбрать непрерывно-дифференцируемую начальную функцию $\varphi(t)$ при $t \in [-1, 0]$ так, чтобы производная от решения соответствующей начальной задачи имела точку разрыва. Сколько таких точек может быть на отрезке $[-1, 10]$?

Вариант 3

1. Теорема Андронова-Витта для системы нелинейных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Изменение оператора монодромии при появлении в правой части соответствующего дифференциально-разностного уравнения формальных запаздываний.

3. Может ли дифференциально-разностное уравнение $x'(t) = x(t) + f(x(t-1))$ иметь решение $\tilde{x}$ с минимальным периодом $T = 1/3$?

Вариант 4

1. Поведение решений дифференциально-разностного уравнения в окрестности периодической орбиты.

2. Описание действия резольвенты оператора монодромии, ассоциированного с периодическим решением дифференциально-разностного уравнения, с помощью решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

3.Для периодического решения $\tilde{x}(t) = \exp(\sin(\pi t))$ уравнения $x'(t) = -\pi x(t) \cdot \ln(x(t-1/2))$ составить вспомогательную краевую задачу и, предполагая ее решение известным, выписать соответствующую собственную функцию оператора монодромии.

Для оценки работы студента применяется балльная система. Наилучшему результату соответствуют 100 баллов, которые распределяются по видам контроля следующим образом:

- расчетная работа – от 0 до 30 баллов;
- реферат – от 0 до 30 баллов;
- итоговый контроль – от 0 до 40 баллов.

Соответствие суммарного количества набранных баллов итоговой оценке (по пятибалльной шкале и европейскому стандарту) показано в таблицах.

Баллы	0-50	51-68	69-85	86-100
Оценка	неуд.	удовл.	Хорошо	отлично

Баллы	0-30	31-50	51-62	63-73	74-83	84-92	93-100
Оценка	F	FX	E	D	C	B	A

Методика выставления и шкала итоговых оценок отвечают принятым в РУДН для теоретических дисциплин.

Программа курса

Аннотированное содержание курса

Раздел 1.

Трудоёмкость: 1 кредит, 32 часа, из них

- лекции – 8 часов,

- практические занятия – 8 часов,

- самостоятельная работа – 16 часов.

В первом разделе понятие гиперболичности периодических решений разбирается на примере хорошо знакомых студентам уравнений, а именно систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Гиперболичность периодических решений гарантирует структурную устойчивость и позволяет описывать динамику, порождаемую нелинейными уравнениями, путем исследования линейных уравнений. Гиперболичность определяется в терминах собственных значений оператора монодромии, который осуществляет сдвиг на период вдоль решений линеаризованного уравнения (уравнение в вариациях). Изученный материал используется также на практических занятиях в разделах 3 и 4 при исследовании более общих уравнений.

В теме **1.1.** (*Автономные системы дифференциальных уравнений и общие свойства их решений.*) вводятся основные понятия: автономная система дифференциальных уравнений, решение, фазовое пространство, устойчивость. Напоминаются теоремы из общего курса дифференциальных уравнений: существование и единственность решения начальной задачи, непрерывная зависимость от начальных данных, дифференцируемость решения по начальным данным. Приводятся свойства фундаментальной матрицы системы линейных дифференциальных уравнений (в том числе формула Коши и формула Остроградского-Лиувилля). На практических занятиях повторяются методы решения систем дифференциальных уравнений (нелинейных и линейных с переменными коэффициентами). Разбирается отличие асимптотической устойчивости от орбитальной. На фазовой плоскости решаются задачи на определение устойчивости периодических решений автономных систем.

В теме **1.2** (*Оператор монодромии для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Гиперболические решения.*) рассматривается уравнение в вариациях и свойства систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (в частности, доказывается существование эквивалентных систем с постоянными коэффициентами). Определяется оператор монодромии и свойство гиперболичности периодического решения. На практических занятиях строятся линеаризованные системы, составляется оператор монодромии, определяются характеристические числа Ляпунова, проверяются условия гиперболичности, иллюстрируется понятие функции последования.

В теме **1.3** (*Поведение решений системы дифференциальных уравнений в окрестности периодической орбиты*) изучается метод исследования устойчивости с помощью функции Ляпунова. Доказывается теорема Андронова-Витта и ее обобщение, для гиперболических решений. На практических занятиях решаются задачи с использованием функции Ляпунова. На примере периодических решений, рассмотренных ранее иллюстрируется поведение траекторий линеаризованной системы в окрестности соответствующей периодической орбиты. На основании наличия свойства гиперболичности анализируется динамика, порождаемая системами нелинейных уравнений.

Раздел 2.

Трудоёмкость: 1 кредит, 40 часов, из них

- лекции – 14 часов,

- практические занятия – 6 часов,

- самостоятельная работа – 20 часов.

Второй раздел знакомит слушателей с дифференциально-разностными уравнениями (с новыми свойствами и новыми трудностями исследования). Излагается общая теория гиперболических решений. Отмечается то, что оператор монодромии бесконечномерный и его действие описывается с помощью решения дифференциально-разностного уравнения. Это существенно усложняет исследование его спектра. Последнему вопросу посвящено много работ и интерес к нему возрастает. Решению этой задачи посвящены разделы 3 и 4.

В теме **2.1** (*Дифференциально-разностные уравнения. Основные определения и свойства решений.*) дается определение дифференциально-разностного уравнения. Приводится классификация таких уравнений. Обсуждается постановка начальной задачи и бесконечномерность фазового пространства. Рассматривается метод шагов и эффект возрастания гладкости решений дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа. Приводятся теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных и дифференцируемости по начальным данным. Вводится понятие устойчивости решений для таких уравнений. На практических занятиях приводятся примеры дифференциально-разностных уравнений различных типов. Решается начальная задача методом шагов. Иллюстрируется эффект возрастания гладкости. Обсуждается устойчивость решений.

В теме **2.2** (*Представление гладких периодических функций*) приводится конструктивное доказательство того, что для любой непрерывно дифференцируемой периодической функции существует конечное число ее сдвигов, через которые функционально выражается любая другая периодическая функция с тем же периодом (Это утверждение играет ключевую роль в теме 4.4). На практическом занятии строятся примеры периодических решений нелинейных автономных дифференциально-разностных (в том числе с использованием материала лекций). На анализе построенных примеров основываются последующие практические занятия.

В теме **2.3** (*Элементы спектральной теории линейных ограниченных операторов*) приводятся спектральные свойства бесконечномерных операторов. Часть из этих свойств необходимы для определения понятия гиперболичности периодического решения, другие используются в темах 4.2 и 4.5. Дается определение спектра бесконечномерного оператора, определение изолированной точки спектра и ее алгебраической кратности. Приводятся теоремы о представлении оператора рядом Лорана, свойствах коэффициентов этого ряда, о спектре функции от оператора, о спектре компактного оператора и оператора, некоторая степень которого является компактным оператором. Определяется понятие нормальности оператора относительно контура. Приводится теорема об операторном обобщении теоремы Руше.

В теме **2.4** (*Оператор монодромии для дифференциально-разностного уравнения. Гиперболические решения.*) рассматривается линеаризация дифференциально-разностного уравнения в окрестности его периодического решения. Дается определение оператора монодромии и приводятся его основные свойства. Дается определение гиперболичности периодического решения. На практическом занятии составляются и исследуются линеаризованные уравнения. Делаются выводы о решениях исходного нелинейного уравнения.

В теме **2.5** (*Поведение решений дифференциально-разностного уравнения в окрестности периодической орбиты*) строится разложение фазового пространства с помощью собственных подпространств оператора монодромии. Строится функционал Ляпунова для автономного дифференциально-разностного уравнения. Доказывается аналог теоремы Андронова-Витта для таких уравнений.

Раздел 3.

Трудоёмкость: 1 кредит, 36 часов, из них

- лекции – 8 часов,

- практические занятия – 10 часов,

- самостоятельная работа – 18 часов.

Этот раздел посвящен изучению современных методов исследования собственных значений оператора монодромии в случае дифференциально-разностных уравнений с одним запаздыванием. При этом сначала предполагается, что период меньше запаздывания. Это делает все построения более прозрачными. Практические занятия посвящены использованию этих методов для конкретных примеров.

В теме **3.1** (*Метод исследования собственного подпространства оператора монодромии.*) задача отыскания собственных функций оператора моноромии сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это позволяет находить собственные значения бесконечномерного оператора монодромии с помощью решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В теме **3.2** (*Метод исследования алгебраической кратности собственных значений оператора монодромии*) строится другая вспомогательная краевая задача для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, позволяющая исследовать корневое подпространство оператора монодромии и делать выводы об алгебраической кратности собственных значений. Доказывается критерий гиперболичности.

В теме **3.3** (*Особенности построения вспомогательных краевых задач в случае большого периода исследуемых решений.*) снимается требование малости периода по сравнению с запаздыванием. Это приводит к усложнению проведенных выкладок и их результатов.

Раздел 4.

Трудоёмкость: 1 кредит, 36 часов, из них

- лекции – 12 часов,

- практические занятия – 6 часов,

- самостоятельная работа – 18 часов.

Целью этого раздела является обобщение методов, изложенных в разделе 3, на случай, когда период решения не соизмерим с запаздыванием. Трудность заключается в том, что требование соизмеримости является необходимым для перехода к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, который лежит в основе этих методов. Оказывается, что для указанного обобщения необходимо рассмотреть более общее уравнение, чем в разделе 3, а именно, уравнение с несколькими запаздываниями. Сразу строить соответствующие методы для таких уравнений в рамках учебного курса невозможно ввиду сложности обозначений. В этом разделе стоит выделить два подраздела: «Периодические решения с рациональным периодом» (обобщаются результаты раздела 3) и «Периодические решения с иррациональным периодом» (разрабатывается новый метод на основе предыдущего). На практических занятиях элементы изученных методов анализируются более подробно и иллюстрируются на конкретных примерах. Практические навыки применения изученных методов в полном объеме студенты вырабатывают в ходе выполнения расчетной работы.

Периодические решения с рациональным периодом.

В теме **4.1** (*Резольвента оператора монодромии*) действие резольвенты оператора монодромии описывается с помощью решения краевой задачи для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Строится характеристическая функция.

В теме **4.2** (*Характеристическая функция*) при дополнительных ограничениях доказывается совпадение кратности корней характеристической функции с алгебраической кратностью соответствующих собственных значений оператора монодромии.

В теме **4.3** (*Критерий простоты собственных значений оператора монодромии*) обобщается не требующий дополнительных ограничений критерий простоты собственных значений оператора монодромии, полученный в разделе 3 для уравнений с одним запаздыванием.

Периодические решения с иррациональным периодом.

В теме **4.4** (*Рациональная аппроксимация. Определение и построение.*) вводится понятие рациональной аппроксимации, доказывается сохранение спектральных свойств оператора монодромии при введении в правую часть урванения дополнительных формальных запаздываний. На основе результатов, полученных в теме 2.2, приводится алгоритм построения рациональной аппроксимации.

В теме **4.5** (*Свойства рациональной аппроксимации*) доказывается, что последовательность операторов монодромии, соответствующая рациональной аппроксимации, сходится к оператору монодромии исходной задачи. На практическом занятии сравниваются операторы монодромии полученные до и после введения формальных запаздываний.

В теме **4.6** (*Критерий гиперболичности*) доказывается связь спектра оператора монодромии исходной задачи со спектрами определенных выше операторов (каждый из этих спектров описывается в терминах решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений). Доказывается критерий гиперболичности.

<u>Список литературы</u>

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: «Наука», 1974 (раздел 1).
2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: «Наука», 1979 (раздел 1).
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: «Мир», 1984 (раздел 2).
4. *Diekmann O., van Gils S., Verduyn Lunel S. M., and Walther H.-O.* Delay Equations:Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis. Springer, New York, 1995. (раздел 2).
5. *Hale J. K., and Verduyn Lunel S. M.* Introduction to Functional Differential Equations. Springer. New York. 1993. (раздел 2).
6. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. М., Изд-во Ин. Лит., 1963 (раздел 2).
7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972 (раздел 2).
8. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: «Наука», 1971 (раздел 2)
9. *Гохберг И. Ц., Сигал Е. И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше. // Мат. Сборник. 1971, т. 84, № 4, с. 607-629 (раздел 2).
10. *Вальтер Х.-О., Скубачевский А. Л.* О мультипликаторах Флоке для медленно осциллирующих периодических решений нелинейных

функционально-дифференциальных уравнений. // Труды Московского Математического Общества. 2003, т. 64, с. 3-53 (раздел 3).

11. *Skubachevskii A. L., Walther H.-O.* On the Floquet multipliers of periodic solutions to nonlinear functional differential equations // J. Dynam. Differential Equations. 2006. V. 18. № 2. P. 257-355. (разделы 3,4)

12. *Журавлев Н. Б., Скубачевский А. Л.* О гиперболичности периодических решений функционально-дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями // Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова. 2007. Т. 256. С. 148-171.

13. *Журавлев Н. Б.* Критерий гиперболичности периодических решений функционально-дифференциальных уравнений с рациональным периодом // Функц. анализ и его приложения. 2007. Т. 41. вып.1, Стр. 90-92. (раздел 4).

14. *Журавлев Н. Б.* Критерий гиперболичности периодических решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями. // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007, т. 21, с. 37-61 (раздел 4).

15. *Журавлев Н. Б.* Гиперболичность периодических решений некоторого класса нелинейных функционально-дифференциальных уравнений. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Москва, Российский университет дружбы народов, 2007 (темы 3, 4).

Учебный тематический план курса

№	Названия тем	Всего часов	в том числе		
			лекции	практ. занятия	самост. работа
1.	**Гиперболические периодические решения систем нелинейных дифференциальных уравнений**	**32**	**8**	**8**	**16**
1.1	Автономные системы дифференциальных уравнений и общие свойства их решений	10	2	3	5
1.2	Оператор монодромии для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Гиперболические решения.	10	2	3	5
1.3	Поведение решений системы дифференциальных уравнений в окрестности периодической орбиты	12	4	2	6
2.	**Гиперболические периодические решения нелинейных дифференциально-разностных уравнений**	**40**	**14**	**6**	**20**
2.1	Дифференциально-разностные уравнения. Основные определения и свойства решений.	8	2	2	4
2.2	Представление гладких периодических функций	12	4	2	6

№	Названия тем	Всего часов	в том числе		
			лекции	практ. занятия	самост. работа
2.3	Элементы спектральной теории линейных ограниченных операторов	4	2		2
2.4	Оператор монодромии для дифференциально-разностного уравнения. Гиперболические решения.	8	2	2	4
2.5	Поведение решений дифференциально-разностного уравнения в окрестности периодической орбиты	8	4		4
3	**Условия гиперболичности периодических решений дифференциально-разностных уравнений с одним запаздыванием**	**36**	**8**	**10**	**18**
3.1	Метод исследования собственного подпространства оператора монодромии.	8	2	2	4
3.2	Метод исследования алгебраической кратности собственных значений оператора монодромии	12	2	4	6

№	Названия тем	Всего часов	в том числе		
			лекции	практ. занятия	самост. работа
3.3	Особенности построения вспомогательных краевых задач в случае большого периода исследуемых решений.	16	4	4	8
4.	**Условия гиперболичности периодических решений дифференциально-разностных уравнений с несколькими запаздыванием**	**36**	**12**	**6**	**18**
4.1	Резольвента оператора монодромии	8	2	2	4
4.2	Характеристическая функция	4	2		2
4.3	Критерий простоты собственных значений оператора монодромии	8	2	2	4
4.4	Рациональная аппроксимация. Определение и построение.	6	2	1	3
4.5	Свойства рациональной аппроксимации	6	2	1	3
4.6	Критерий гиперболичности	4	2	0	2
	Итог	**144**	**42**	**30**	**72**