На правах рукописи

Кулябов Дмитрий Сергеевич

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ОПТИКЕ

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена на кафедре прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов

Научный консультант:	Профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН, доктор физико-математических наук, профессор **Севастьянов Леонид Антонович**
Официальные оппоненты:	Декан математического факультета ТГУ, доктор физико-математических наук, профессор **Цирулёв Александр Николаевич**
	Главный научный сотрудник ВЦ ФИЦ ИУ РАН, доктор физико-математических наук, профессор **Абрамов Сергей Александрович**
	Заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования СГУ, доктор физико-математических наук **Блинков Юрий Анатольевич**
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ)

Защита состоится «13» октября 2017 г. в 15 ч. 30 мин на заседании диссертационного совета Д 212.203.28 при Российском университете дружбы народов по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе д. 3, ауд. 110.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского университета дружбы народов по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.
(Отзывы на автореферат просьба направлять по указанному адресу.)

Автореферат разослан «______» сентября 2017 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
к. ф.-м. н., доцент С. А. Васильев

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Автором проводится построение геометрического описания уравнений Максвелла в терминах расслоенных пространств. Описываются разные варианты тензора проницаемостей и, соответственно, предлагаются варианты геометризации уравнений Максвелла. В частности выделяется вариант геометризации на основе квадратичной метрики, приводящий к уравнениям Янг–Миллсовского типа.

Также предлагается переформулировка задачи построения гамильтонова формализма уравнений Максвелла для случая полей без источников, что позволяет использовать симплектический гамильтонов формализм.

Описанный формализм демонстрируется в применении к задачам трансформационной оптики и расчёта линз. Аналитические расчёты верифицируются с помощью численных методов.

Имея в виду практическую задачу проектирования оптических приборов и устройств субволнового диапазона решается проблема геометризации уравнений оптики разного уровня: геометрической оптики, волновой скалярной оптики, уравнений Максвелла. Максвелловская оптика учитывает векторный характер электромагнитного излучения в оптическом диапазоне.

Для проведения расчётов в области оптики (расчёт линз, трансформационная оптика) и электродинамики в целом перспективным представляется метод геометризации уравнений Максвелла. При этом можно геометризовать как само поле, так и взаимодействие поля с веществом. Основная идея заключается в переводе материальных уравнений Максвелла, а именно диэлектрической и магнитной проницаемости, в эффективную геометрию пространства-времени.

В XIX-ом и XX-ом веках идея геометризации являлась одной из магистральных идей физики. Геометризацией электромагнитного поля занималось большое количество учёных. Работы Вейля, Фока, Калуцы–Клейна находились в русле исследований единой теории поля. Однако электромагнитное поле в данных работах рассматривалось как электромагнитное поле в вакууме, то есть влияние среды не учитывалось. Были разработаны конструкции с одним полевым тензором. Поэтому многие идеи данных исследователей были включены в теорию Янга–Миллса.

Тогда же возникло направление, занимавшееся геометризацией собственно материальных уравнений. Это работы Мандельштама, Тамма, Плебаньского, де Феличе и др. Это направление развивалось без чётко сформулированных идейных и целевых посылок. Оно нашло своё применение в приложении к теории гравитационных линз, а позднее в применении к трансформационной оптике. В обоих приложениях результирующие конструкции были излишне формальными. Например, в публикациях по трансформационной оптике эта реализация является набором рецептов, сделанных под конкретные случаи. Что, естественно, приводит к появлению статей, пытающихся обосновать (или переформулировать) трансформационную оптику.

При описании электромагнитного поля обычно используют два тензора. Для обобщения конструкции Янга–Миллса на полевую теорию с двумя тензорами необходимо геометризовать взаимосвязь между этими тензорами. Если опираться на обычное представление теории Максвелла, когда тензоры F и G имеют варианты как с нижними, так и с верхними индексами, то создаётся впечатление, что на некотором многообразии одновременно заданы два касательных расслоения, связанных некоторым образом между собой, на которых и заданы тензоры F и G.

Можно выделить два аспекта геометризации уравнений оптики. Первый аспект геометризации уравнений оптики заключается в геометризации материальных уравнений Максвелла. Второй аспект геометризации уравнений оптики заключается в последовательном геометрическом подходе к решению уравнений Максвелла, а именно к лагранжеву и гамильтонову подходам.

Однако в открытой печати, к сожалению, не решены систематически проблемы геометризации уравнений оптики (геометрической, волновой, максвелловской). Это делает **актуальным диссертационное исследование**.

Цели диссертационной работы

1. **Получение геометризованных уравнений Максвелла.**
   Одной из целей диссертации является получение геометризованных уравнений Максвелла. Геометризация материальных уравнений Максвелла позволяет изменить взгляд на прямую и обратную задачу оптики. В традиционном подходе нахождение траектории лучей по параметрам среды можно назвать прямой задачей оптики, а нахождение параметров среды по заданным траекториям лучей — обратной. И обратная задача сложнее прямой. В геометризованой оптике эти задачи меняются местами. Прямая задача — нахождение диэлектрической и магнитной проницаемости по заданной эффективной геометрии (по траекториям лучей), обратная — нахождение эффективной геометрии по диэлектрической и магнитной проницаемости. Сложность обеих задач сопоставимая.
2. **Реализация геометрического подхода к решению полевых уравнений Максвелла.**
   Второй целью диссертации является реализация геометрического подхода к решению собственно полевых уравнений Максвелла. При решении полевых задач, в частности задач электродинамики, используются лагранжев и гамильтонов формализмы. Лагранжев и гамильтонов формализмы играют определяющую роль про построении вычислительных схем типа вариационных и симплектических интеграторов. При этом полевой гамильтонов формализм имеет то преимущество перед лагранжевым, что уже содержит калибровочное условие. В то время как в лагражевом формализме калибровочное условие вводится из некоторых внешних соображений. Однако использование гамильтонового формализма в полевых задачах затруднено из-за нерегулярности полевых лагранжианов. Действи-

тельно, можно установить однозначное соответствие между гамильтонианом и лагранжианом в случае гиперрегулярного лагранжиана. Данное условие не выполняется в калибровочно-инвариантных теориях поля. В случае нерегулярного лагранжиана применяется обычно гамильтонов формализм со связями, использование которого связано с определёнными трудностями.

Задачи диссертационной работы

1. Необходимо последовательно записать разные представления уравнений Максвелла в криволинейных координатах для применения методов дифференциальной геометрии к уравнениям Максвелла.
2. Необходимо установить топологическую природу связи тензоров электромагнитного поля F и G.
3. Необходимо установить топологическую природу материальных уравнений Максвелла, а именно тензора проницаемостей λ, и соответственно тензора диэлектрической проницаемости ε и магнитной проницаемости μ.
4. Необходимо реализовать структуру расслоения без предварительного задания метрической структуры на базе.
5. Необходимо конкретизировать конструкцию расслоенного пространства на случай квадратичной метрики, заданной на базе.
6. Необходимо произвести геометризацию уравнений Максвелла исходя из структуры лагранжиана типа Янга–Миллса.
7. Необходимо проверить состоятельность геометризации на основе лагранжиана Янга–Миллса путём сравнения с геометризацией Плебаньского.
8. Необходимо построить методику решения обратной задачи оптики.
9. Необходимо показать, что конструкция геометризации на основе лагранжиана Янга–Миллса обосновывает методы трансформационной оптики.
10. Необходимо решить проблему вырожденности полевого лагранжиана теории Максвелла при переходе к гамильтонову формализму.

Положения, выносимые на защиту

1. Записаны уравнения Максвелла в различных представлениях в криволинейных координатах с учётом материальных уравнений.
2. Установлено соответствие между тензорами F и G.
3. Построен формализм расслоенных пространств без заранее введённой метрики на базе расслоения.
4. Записаны тензоры диэлектрической проницаемости ε и магнитной проницаемости μ через квадратичную метрику на базе с сигнатурой $(+,-,-,-)$.
5. Проведена геометризация уравнений Максвелла на основе программы Плебаньского.
6. Проведена геометризация уравнений Максвелла на основе лагранжиана типа Янга–Миллса.
7. Проведена верификация результатов геометризации с помощью геометризации Плебаньского.
8. Построена методика решения обратной задачи оптики.
9. Показана обоснованность методики решения обратной задачи оптики путём сравнения с методом трансформационной оптики.
10. Построен симплектический гамильтониан Максвелловской оптики.

Научная новизна

1. В работе систематизирована запись различных представлений уравнений Максвелла в криволинейных координатах общего вида в квадратичной (псевдоримановой) метрике.
2. В работе построен формализм расслоенных пространств без предварительно введения метрики на базе расслоения для уравнений Максвелла и установлено соответствия между тензорами F и G.
3. В работе приведена реализация соответствия между тензорами F и G на основе квадратичной (псевдоримановой) метрики на базе расслоения.
4. В работе реализовано соответствие между тензорами F и G с использованием лагранжиана Янга–Миллса.

5. В работе формализованы задачи проектирования оптических приборов в терминах геометризованных уравнений Максвелла.
6. В работе построены алгоритмы решения задач проектирования оптических приборов с помощью геометризованных уравнений Максвелла.
7. В работе построен симплектический гамильтониан максвелловской оптики.

Практическая значимость

Разработанные методики позволяют формализовать задачи проектирования волновой и максвелловской оптики единообразным способом, что позволяет выделять подзадачи и алгоритмизировать их решение при реализации на компьютере. Разработанные методы позволяют использовать результаты предыдущих исследований при уточнении моделей при ответ на возрастающие требования. Модульность конструкции и иерархия моделей позволяет реализовать процесс проектирования оптических приборов и систем в форме вычислительного эксперимента, включающего этап верификации с экспериментальными измерениями.

Результаты диссертации использованы при создании курса «Разностные методы расчёта оптических наноструктур», обеспечивающего реализацию магистерской программы «Математическое моделирование оптических наноструктур» и предназначенного для студентов направления «Прикладная математика и информатика».

Методы исследования

В работе использовались методы дифференциальной геометрии (риманова геометрия, теория расслоенных пространств, теория когомологий), компьютерные методы (методы компьютерной алгебры и символьных вычислений, численные методы, параллельные и распределённые вычисления).

Обоснованность и достоверность результатов

Обоснованность результатов диссертации следует из строгих математических методов дифференциальной геометрии (риманова геометрия, теория расслоенных пространств, теория когомологий), зарекомендовавших себя пакетов символьных вычислений (Cadabra, Maxima, SymPy), а также математических пакетов численных вычислений (NumPy, Julia).

Достоверность подтверждается совпадением полученных в работе результатов с результатами работ Плебаньского, Пендри, Леонгарда и др.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- The 15th small triangle meeting of Theoretical Physics. Stará Lesná, Slovakia, 2013.
- 54-ая научная конференции МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе». Управление и прикладная математика. Москва, 2011.
- 14-th Workshop on Computer Algebra. Дубна, 2011.
- Девятнадцатая Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование». Дубна, 2012.
- Научная сессия НИЯУ МИФИ-2012. Москва, 2012.
- Научная сессия НИЯУ МИФИ-2014. Москва, 2014.
- Научная сессия НИЯУ МИФИ-2015. Москва, 2015.
- IV международная конференция «Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование». Москва, 2016.
- Mathematical Modeling and Computational Physics (MMCP-2013). Дубна, 2013.

– International Conference on Mathematical Modeling and Computational Physics (MMCP-2015). Stará Lesná, Slovakia, 2015.
– Компьютерная алгебра. Москва, 2016.
– Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016). Москва, 2016.
– Saratov Fall Meeting 2016: Laser Physics and Photonics XVII and Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data. Саратов, 2016.

Также основные результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах:

– Семинар «Компьютерная алгебра» факультета ВМК МГУ и ВЦ РАН.
– Семинар «Математические методы в естественных науках» кафедры математики физического факультета МГУ.
– Семинар «Математическое моделирование» кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН.
– Семинар кафедры Прикладной Математики Национального исследовательского ядерного университета МИФИ.

Публикации

Основные положения диссертации опубликованы в 17 печатных работах в изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России, и в 12 печатных работах в других рецензируемых изданиях.

Личный вклад автора

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованных работах. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причём вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения, библиографии, 3 приложений. Общий объем диссертации 230 страниц, из них 125 — страницы основного текста. Библиография включает 185 наименований на 29 страницах.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе даётся обзор состояния и степень разработанности проблемы. Рассматриваются следующие аспекты проблемы геометризации:

- возможные подходы к геометризации;
- используемые геометрические структуры и подходы;
- геометризация полевых уравнений электромагнитного поля;
- геометризация материальных уравнений Максвелла;
- геометризация в рамках трансформационной оптики.

Описывается, в работах каких авторов исследовались поставленные в диссертации вопросы. Выделяются неизученные аспекты проблемы.

Также в главе вводятся обозначения и соглашения.

Во второй главе рассматриваются разные представления уравнений Максвелла в криволинейных координатах в квадратичной метрике. При решении задач используют следующие формы записи уравнений Максвелла:

- через 3-векторы;
- через 4-векторы;
- комплексное представление;

– импульсное представление;
– спинорное представление;
– представление во внешних формах.

При представлении уравнений Максвелла в формализме внешних форм используется как формализм с предварительно заданной метрикой, так и без предварительно заданной метрики. Рассматривается представление как в виде 4-форм, так и в виде 3-форм.

Кроме того, в статье приводится конкретная реализация тензорных представлений уравнений Максвелла в цилиндрических и сферических координатах.

В третьей главе рассматриваются подходы к геометризации материальных уравнений электромагнитного поля.

Тензоры $F_{\alpha\beta}$ и $G^{\alpha\beta}$ имеют смысл кривизны в кокасательном $(T^{*}X)$ и касательном (TX) расслоениях. Связь между этими величинами задаётся следующим образом:

$$G^{\alpha\beta} = \lambda(F_{\gamma\delta}).$$

Мы рассматриваем случай геометризации для локальных линейных материальных уравнений, то есть $\lambda : \Lambda^2 \to \Lambda_2$ должно быть линейным и локальным. Тогда уравнение связи можно представить в следующем виде:

$$G^{\alpha\beta} = \lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta},$$

здесь $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор приницаемостей, содержащий информацию как об диэлектрической и магнитной проницаемостях, так и об электромагнитной связи.

Заметим, что линейный, нелокальный случай при наличии трансляционной симметрии сводится к линейному локальному случаю с помощью преобразования Фурье.

Вначале рассматривается структура тензора проницаемостей

$\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Он имеет следующую симметрию:

$$\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda^{[\alpha\beta][\gamma\delta]}$$

Для уточнения симметрии, тензор $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^{(1)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} + {}^{(2)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} + {}^{(3)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}, \\
{}^{(1)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^{(1)}\lambda^{([\alpha\beta][\gamma\delta])}, \\
{}^{(2)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^{(2)}\lambda^{[[\alpha\beta][\gamma\delta]]}, \\
{}^{(3)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^{(3)}\lambda^{[\alpha\beta\gamma\delta]}.
\end{gathered}$$

Можно проверить, что $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет 36 независимых компонент, ${}^{(1)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет 20 независимых компонент, ${}^{(2)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет 15 независимых компонент, ${}^{(3)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет 1 независимую компоненту.

Обычно рассматривается только часть ${}^{(1)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Можно записать общий вид материальных уравнений:

$$\begin{gathered}
D^i = \varepsilon^{ij} E_j + {}^{(1)}\gamma^i_j B^j, \\
H_i = \left(\mu^{-1}\right)_{ij} B^j + {}^{(2)}\gamma^j_i E_j,
\end{gathered}$$

где ε^{ij} и μ^{ij} — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей, ${}^{(1)}\gamma^i_j$ и ${}^{(2)}\gamma^i_j$ — перекрёстные члены.

Учитывая структуру тензоров $F_{\alpha\beta}$ и $G^{\alpha\beta}$, запишем

$$\begin{gathered}
F_{\underline{0}\,\underline{i}} = E_{\underline{i}}, \quad G^{\underline{0}\,\underline{i}} = -D^{\underline{i}}, \\
G^{\underline{i}\,\underline{j}} = -\varepsilon^{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k}} H_{\underline{k}}, \quad F_{\underline{i}\,\underline{j}} = -\varepsilon_{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k}} B^{\underline{k}}.
\end{gathered}$$

Тогда выпишем структуру тензора $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$\begin{gathered}
\lambda^{0\underline{i}\,0\underline{j}} = \varepsilon^{\underline{i}\,\underline{j}}/2, \quad \lambda^{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{m}\,\underline{n}} = \varepsilon^{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k}} \varepsilon^{\underline{l}\,\underline{m}\,\underline{n}} (\mu^{-1})_{\underline{l}\,\underline{k}}/2. \\
\lambda^{0\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k}} = \quad \lambda^{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k}\,\underline{l}} = 0.
\end{gathered}$$

Далее рассматривается подход к геометризации Плебаньского. Плебаньским была предложена простейшая геометризация уравнений

Максвелла. Однако в оригинальной статье сразу даны финальные формулы, а принципы и методы их получения остаются непрояснёнными. Авторы постарались явно выписать методику, которую по нашему мнению использовал Плебаньский, а также подробно провести вычисления. Основная идея геометризации по Плебаньскому заключается в следующем:

1. Записать уравнения Максвелла в среде в пространстве Минковского.
2. Записать вакуумные уравнения Максвелла в эффективном римановом пространстве.
3. Приравнять соответствующие члены уравнений.

В результате получается выражение диэлектрической и магнитной проницаемостей через геометрические объекты (квадратичную метрику).

Таким образом геометризованные уравнения связи в декартовых координатах имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
D^i = \varepsilon^{ij} E_j + \varepsilon^{ijk} w_j H_k, \\
B^i = \mu^{ij} H_j - \varepsilon^{ijk} w_j E_k, \\
\varepsilon^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij}, \quad \mu^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij}, \quad w_i = \frac{g_{i0}}{g_{00}}.
\end{gathered}
$$

В результате реализации данной программы геометризованные материальные уравнения в криволинейных координатах с метрическим тензором $\eta_{\alpha\beta}$ имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
D^i = \varepsilon^{ij} E_j + \varepsilon^{ijk} w_j H_k, \\
B^i = \mu^{ij} H_j - \varepsilon^{ijk} w_j E_k, \\
\varepsilon^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\eta}} \frac{1}{g_{00}} g^{ij}, \qquad \mu^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\eta}} \frac{1}{g_{00}} g^{ij}, \qquad w_i = \frac{g_{i0}}{g_{00}}.
\end{gathered}
$$

При этом метод геометризации Плебаньского выглядит более как математический трюк, нежели как обоснованные выкладки.

Далее проведём геометризацию, базируясь на лагранжиане Янга–

Миллса. Мы условно назвали эту геометризацию геометризацией Тамма.

Введём эффективную метрику на базе расслоения $g_{\alpha\beta}$. Запишем лагранжиан электромагнитного поля в виде лагранжиана Янга–Миллса:

$$L = -\frac{1}{16\pi c} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \sqrt{-g} - \frac{1}{c^2} A_\alpha j^\alpha \sqrt{-g}.$$

Построим тензор $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ следующим образом:

$$\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = 2\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} = \sqrt{-g}\big(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}\big) + \sqrt{-g}\big(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}\big).$$

Тогда уравнение связи примет следующий вид:

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\big(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}\big) F_{\gamma\delta}.$$

Запишем уравнение связи через 3-векторы:

$$\begin{aligned} D^{\underline{i}} &= -\sqrt{-g}\big(g^{00} g^{\underline{i}\,\underline{j}} - g^{0\underline{i}} g^{0\underline{j}}\big) E_{\underline{j}} + \sqrt{-g}\varepsilon_{\underline{k}\,\underline{l}\,\underline{j}} g^{0\underline{k}} g^{\underline{i}\,\underline{l}} B^{\underline{j}}, \\ H_{\underline{i}} &= \sqrt{-g}\varepsilon_{\underline{m}\,\underline{n}\,\underline{i}} \varepsilon_{\underline{k}\,\underline{l}\,\underline{j}} g^{\underline{n}\,\underline{k}} g^{\underline{m}\,\underline{l}} B^{\underline{j}} + \sqrt{-g}\varepsilon^{\underline{k}\,\underline{l}\,\underline{j}} g_{0\underline{k}} g_{\underline{i}\,\underline{l}} E_{\underline{j}}, \end{aligned}$$

Теперь можно формально выписать выражение для диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon^{\underline{i}\,\underline{j}} = -\sqrt{-g}\big(g^{00} g^{\underline{i}\,\underline{j}} - g^{0\underline{i}} g^{0\underline{j}}\big).$$

и выражение для магнитной проницаемости:

$$(\mu^{-1})_{\underline{i}\,\underline{j}} = \sqrt{-g}\varepsilon_{\underline{m}\,\underline{n}\,\underline{i}} \varepsilon_{\underline{k}\,\underline{l}\,\underline{j}} g^{\underline{n}\,\underline{k}} g^{\underline{m}\,\underline{l}}.$$

Таким образом геометризованные уравнения связи координатах имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
D^i = \varepsilon^{ij} E_j + {}^{(1)}\gamma^i_j B^j, \\
H_i = (\mu^{-1})_{ij} B^j + {}^{(2)}\gamma^j_i E_j, \\
\varepsilon^{\underline{i}\,\underline{j}} = -\sqrt{-g}\big(g^{00} g^{\underline{i}\,\underline{j}} - g^{0\underline{i}} g^{0\underline{j}}\big), \\
(\mu^{-1})_{\underline{i}\,\underline{j}} = \sqrt{-g}\varepsilon_{\underline{m}\,\underline{n}\,\underline{i}}\varepsilon_{\underline{k}\,\underline{l}\,\underline{j}} g^{\underline{n}\,\underline{k}} g^{\underline{m}\,\underline{l}}, \\
{}^{(1)}\gamma^i_j = {}^{(2)}\gamma^i_j = \sqrt{-g}\varepsilon_{\underline{k}\,\underline{l}\,\underline{j}} g^{0\underline{k}} g^{\underline{i}\,\underline{l}}.
\end{gathered}
$$

Теорема 1. *В геометризации Тамма выполняется равенство*

$$
\varepsilon^{\underline{i}\,\underline{j}} = \mu^{\underline{i}\,\underline{j}}.
$$

при условии $g^{0\underline{i}} = 0$.

В четвёртой главе рассматривается гамильтонов формализм для электромагнитного поля.

Можно выделить несколько вариантов гамильтонова формализма.

– Симплектический гамильтонов формализм.
– Формализм Дирака–Бергмана для систем со связями.
– Гамильтонов формализм Гамильтона–де Дондера.
– Многоимпульсный гамильтонов формализм.

В главе рассмотрен симплектический гамильтонов формализм в силу его простоты.

Гамильтониан электромагнитного поля строится через лагранжиан с помощью преобразований Лежандра:

$$
\mathscr{H} := p_\alpha \dot{A}^\alpha - \mathscr{L},
$$

где p_α — плотность импульса, $\mathscr{L}$ — лагранжиан.

Требуется выразить обобщённый импульс p_α через скорости $\dot{A}^\alpha$, чтобы выписать гамильтонову плотность и соответствующие ей уравнения Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{A}^{\alpha} = \dfrac{\delta \mathscr{H}}{\delta p_{\alpha}}, \\ \dot{p}_{\alpha} = -\dfrac{\delta \mathscr{H}}{\delta A^{\alpha}}. \end{cases}$$

При этом требуется, чтобы детерминант матрицы Гессе (гессиан) был отличен от нуля:

$$\det\{H\}(\mathscr{L}) \neq 0,$$

где элементы матрицы Гессе:

$$\{H(\mathscr{L})\}_{\underline{\alpha\beta}} = \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{A}^{\underline{\alpha}} \, \partial \dot{A}^{\underline{\beta}}}.$$

Но $F_{00} = 0$ и $\{H(\mathscr{L})\}_{00} = \dfrac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial (\dot{A}^0)^2} = 0$. Следовательно, $\det\{\mathbf{H}\}(\mathscr{L}) = 0$. То есть лагранжиан нерегулярный, и построение симплектического гамильтонового формализма в данном случае невозможно.

В случае отсутствия источников ($j^{\alpha} = 0$) можно построить симплектический гамильтонов формализм, произведя необходимую замену переменных. Рассмотрен метод удвоения переменных. Данный метод применим в случае, когда система содержит лишь обобщённые переменные, а обобщённые импульсы отсутствуют.

Рассмотрим систему s уравнений.

$$\dot{q}^{\underline{n}} = f^{\underline{n}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t), \quad \underline{n} = \overline{0, s}.$$

Зададим пространство $\mathbb{R}^{2s}$ со следующими координатами:

$$\xi^{\underline{n}} := q^{\underline{n}}, \quad \xi^{\underline{n}+\underline{s}} := p_{\underline{n}}, \quad \xi^a \in \mathbb{R}^{2s}; \quad \underline{n} = \overline{0, s}, \quad \underline{a} = \overline{0, 2s}.$$

Гамильтониан определим следующим образом:

$$\mathscr{H}(q^n, p_n, x^i, t) = p_{\underline{n}} f^{\underline{n}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t).$$

Тогда первая группа уравнений Гамильтона будет совпадать с исходной системой, а вторая группа будет иметь следующий вид:

$$\dot{p}_{\underline{n}} = -\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta q^{\underline{n}}} = -p_{\underline{m}} \frac{\delta f^{\underline{m}}}{\delta q^{\underline{n}}}.$$

Для соответствия метода, переведём систему уравнений Максвелла в следующую редуцированную систему:

$$\begin{cases} \partial_t B_i = -c e_{ijk} \nabla^j E^k, \\ \partial_t D^i = c e^{ijk} \nabla_j H_k. \end{cases}$$

В качестве реализации зададим следующие материальные уравнения:

$$D^i = \varepsilon^{ij}(x^k) E_j, \quad H_i = (\mu^{-1})_{ij}(x^k) B^j.$$

Запишем редуцированные уравнения Максвелла следующим образом:

$$\begin{cases} \partial_t E^i = c(\varepsilon^{-1})^i_l \dfrac{1}{\sqrt{^3 g}} \varepsilon^{ljk} H_{k,j}, \\ \partial_t H^i = -c(\mu^{-1})^i_l \dfrac{1}{\sqrt{^3 g}} \varepsilon^{ljk} E_{k,j}. \end{cases}$$

Выберем обобщённые координаты в виде:

$$q^n = \left(E^1, E^2, E^3, H^1, H^2, H^3\right)^T, \quad \underline{n} = \overline{1,6}.$$

Тогда система уравнений приобретает вид:

$$\begin{cases} \dot{q}^{\underline{i}} = f^{\underline{i}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t) = c(\varepsilon^{-1})^{\underline{i}}_{\underline{l}} \dfrac{1}{\sqrt{^3 g}} \varepsilon^{\underline{ljk}} q_{\underline{k+3}, \underline{j}}, \\ \dot{q}^{\underline{i+3}} = f^{\underline{i+3}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t) = -c(\mu^{-1})^{\underline{i}}_{\underline{l}} \dfrac{1}{\sqrt{^3 g}} \varepsilon^{\underline{ljk}} q_{\underline{k}, \underline{j}}. \end{cases}$$

На основе этой системы запишем гамильтониан:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}(q^n, p_n, x^i, t) &= p_{\underline{n}} f^{\underline{n}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t) = \\ &= p_{\underline{i}} c(\varepsilon^{-1})^{\underline{i}}_{\underline{l}} \frac{1}{\sqrt{^3 g}} \varepsilon^{\underline{ljk}} q_{\underline{k+3}, \underline{j}} - p_{\underline{i+3}} c(\mu^{-1})^{\underline{i}}_{\underline{l}} \frac{1}{\sqrt{^3 g}} \varepsilon^{\underline{ljk}} q_{\underline{k}, \underline{j}}. \end{aligned}$$

Соответствующая система уравнений Гамильтона будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{q}^n = \dfrac{\delta \mathscr{H}}{\delta p_n} = f^n, \\ \dot{p}_n = -\dfrac{\delta \mathscr{H}}{\delta q^n} = -p_m \dfrac{\delta f^m}{\delta q^n} = \\ \quad = -p_m \dfrac{\partial f^m}{\partial q_n} + p_m \partial_i \dfrac{\partial f^m}{\partial q^n_{,i}} = p_m \partial_i \dfrac{\partial f^m}{\partial q^n_{,i}}. \end{cases}$$

В пятой главе рассматривается применение геометризации уравнений Максвелла для расчёта оптических приборов. Результаты расчётов сравниваются с расчётами по методу трансформационной оптики.

Индуцированная метрика должна быть связанна с метрикой лабораторного пространства. При этом в прямой задаче геометризованной оптики задаётся траектория в лабораторной системе координат, далее по этим траекториям задаются геодезические в индуцированной (электромагнитной) системе координат. По уравнениям геодезических строится метрика в индуцированной системе координат. Далее возможны два пути.

– Вычисления проводятся в электромагнитной системе координат. При этом уравнения Максвелла рассматриваются как уравнения в криволинейных системах координат и в вакууме. После решения переводятся в лабораторную систему координат.
– Метрика в электромагнитной системе координат преобразовывается в тензор проницаемостей в лабораторной системе координат. После этого вычисления проводятся в лабораторной системе координат для уравнений Максвелла в среде.

Также демонстрируется применение геометрической оптики для расчёта линз. В качестве примеров используются линзы Люнеберга и Максвелла.

В шестой главе рассматривается математический аппарат, применяемый в диссертационной работе и вспомогательные математические выкладки.

Исторически сложилось так, что трёхмерные уравнения Максвелла записывают в неголономном формализме. В этом случае запись уравнений в криволинейной системе координат несколько громоздка. При использовании тензорного формализма обычно предпочитают использовать голономный базис.

Однако в векторном анализе распространено использование неголономного базиса. Дело в том, что неголономный базис может предоставлять некоторые удобства. В данном случае это:

- сохранение величин при преобразовании координат (т. е. расстояния переходят в расстояние, углы в углы и т. д.);
- неразличимость контравариантных и ковариантных векторов, что позволяет использовать только один тип индекса.

Квадрат интервала в голономном базисе имеет вид:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\underline{i}\,\underline{j}}\, \mathrm{d}x^{\underline{i}}\, \mathrm{d}x^{\underline{j}}, \quad \underline{i}, \underline{j} = \overline{1, n},$$

где $g_{\underline{i}\,\underline{j}}$ — метрический тензор.

Аналогично квадрат интервала в неголономном базисе принимает следующий вид:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\underline{i}'\underline{j}'}\, \mathrm{d}s^{\underline{i}'}\, \mathrm{d}s^{\underline{j}'}, \quad \underline{i}', \underline{j}' = \overline{1, n}.$$

Выразим вектор f^i через его компоненты $f^{\underline{i}}$ в голономном $\delta^i_{\underline{i}}$ и неголономном $\delta^i_{\underline{i}'}$ базисах соответственно:

$$f^{\underline{i}'} = f^{\underline{i}} h^{\underline{i}'}_{\underline{i}}, \quad \underline{i}, \underline{i}' = \overline{1, n}.$$

Аналогично для ковекторов имеем:

$$f_{\underline{i}'} = f_{\underline{i}} \frac{1}{h^{\underline{i}'}_{\underline{i}}}, \quad \underline{i}, \underline{i}' = \overline{1, n}.$$

Для записи операций на расслоенных пространствах используется формализм внешних форм. Обычно используется исчисление Ходжа.

Однако оно обычно требует предварительного задания метрики. В нашем формализме требуется построение формализма без предварительного задания метрики.

Дифференциальная структура на алгебре дифференциальных k-форм задаётся комплексом де Рама. Комплекс де Рама можно записать как цепной комплекс:

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}_1} \dots \xrightarrow{\mathrm{d}_{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{\mathrm{d}_n} 0.$$

Пусть на ориентируемом многообразии M задан элемент объёма $\mathscr{V} \in \Omega^n$. С помощью оператора двойственности Пуанкаре $\sharp$ можно задать изоморфизм между пространствами Ω_k и Ω^{n-k}:

$$\sharp : \Omega_k \to \Omega^{n-k}.$$

Используя оператор $\sharp$, можно определить оператор дивергенции δ, сопряжённый оператору d:

$$\delta = \sharp^{-1}\mathrm{d}\sharp, \qquad \delta : \Omega_k \to \Omega_{k-1}.$$

На римановом многообразии с метрикой $g_{\mu\nu}$ можно задать изоморфизм $\imath_g$:

$$\imath_g : TM \to T^*M.$$

Через оператор двойственности Пуанкаре можно определить линейный оператор дуальности Ходжа:

$$* = \sharp(\imath_g \wedge \dots \wedge \imath_g)^{-1},$$
$$* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M).$$

На основе оператора дуальности Ходжа можно определить кодифференциал:

$$\delta = (-1)^k *^{-1} \mathrm{d} * = (-1)^{k(n-k)+1} \operatorname{sign}(g) * \mathrm{d} *,$$
$$\delta : \Omega^k \to \Omega^{k-1}.$$

В случае согласованной с метрикой связности кодифференциал δ можно выразить через оператор ковариантной производной ∇:

$$(\delta A)^{\mathscr{A}} = (\nabla A)^{\mathscr{A}} = \nabla_\mu A^{\mathscr{A}\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\Big(\sqrt{|g|}A^{\mathscr{A}\mu}\Big).$$

Для записи формализма для 3-форм и 3-векторов нужно записать комплекс де Рама для многообразия $\mathbb{R}^3$:

$$0 \to \Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{grad}} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{rot}} \Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{div}} \Omega^3(\mathbb{R}^3) \to 0.$$

Таким образом, получаем следующие преобразования:

– градиент (grad) переводит функции (0-формы) в векторные поля (1-формы);
– ротор (rot) переводит векторные поля (1-формы) в (аксиальные) векторные поля (2-формы);
– дивергенция (div) переводит векторные поля (2-формы) в функции (3-формы).

Также доказана справедливость утверждений.

Утверждение 6.1. Уравнение

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = F_{[\alpha\beta;\gamma]} = 0.$$

можно записать в виде:

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = F_{[\alpha\beta,\gamma]} = 0.$$

Утверждение 6.2. Для метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ справедливы следующие соотношения:

$$g_{\underline{i}\,\underline{k}} \left(g^{\underline{k}\,\underline{j}} - \frac{1}{g^{00}} g^{\underline{k}\,0} g^{0\underline{j}} \right) = \delta^{\underline{j}}_{\underline{i}}.$$

$$\left(g_{\underline{i}\,\underline{k}} - \frac{1}{g_{00}} g_{0\underline{i}}\, g_{0\underline{k}} \right) g^{\underline{k}\,\underline{j}} = \delta^{\underline{j}}_{\underline{i}}.$$

В заключении приводятся результаты, полученные в диссертации.

1. Записаны уравнения Максвелла в различных представлениях в криволинейных координатах с учётом материальных уравнений.
2. Установлено соответствие между тензорами F и G.
3. Построен формализм расслоенных пространств без заранее введённой метрики на базе расслоения.
4. Записаны тензоры диэлектрической проницаемости ε и магнитной проницаемости μ через квадратичную метрику на базе с сигнатурой $(+,-,-,-)$.
5. Проведена геометризация уравнений Максвелла на основе программы Плебаньского.
6. Проведена геометризация уравнений Максвелла на основе лагранжиана типа Янга–Миллса.
7. Результаты геометризации верифицированы с помощью геометризации Плебаньского.
8. Построена методика решения обратной задачи оптики.
9. Показана обоснованность методики при сравнении с методом трансформационной оптики.
10. Построен симплектический гамильтониан Максвелловской оптики.

В приложении A рассматриваются разные подходы к обозначению тензорных операций и обосновывается использование формализма абстрактных индексов.

В приложении B обосновывается применение системы СГС.

В приложении C описывается инструментарий компьютерного моделирования.

Описываются подходы к вычислительным методам на основе интеграторов, строящихся на основе лагранжева и гамильтонова формализмов. Отличительной чертой этих подходов является сохранение инвариантов (нётеровских, симплектических и т.д.) при дискретизации непрерывной задачи. В качестве примера применения интеграторов рассматривается метод конечных разностей в пространственно-временной области (Finite-Difference Time-Domain, FDTD). Метод реализован в рамках пакета openEMS.

Описан программный пакет численного решения уравнения эйконала методом характеристик. Приводится алгоритм расчёта на основе метода метод быстрого подметания/уборки (Fast Sweeping Method, FSM).

Также описывается применение методов и систем компьютерной алгебры для манипуляции тензорными объектами и геометризации уравнений Максвелла. Проводится сравнительный анализ систем тензорной компьютерной алгебры. Приводятся листинги конкретный символьных манипуляций при геометризации уравнений Максвелла.

Список работ, в которых опубликованы основные положения диссертации

В изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России

1. *Kulyabov D. S.*, *Ul'yanova A. G.* Application of Two-Spinor Calculus in Quantum Mechanical and Field Calculations // Physics of Particles and Nuclei Letters. — 2009. — Vol. 6, no. 7. — P. 546–549. — DOI: `10.1134/S1547477109070115`. — arXiv: `1312.6655`.

2. *Sevastianov L. A.*, *Kulyabov D. S.*, *Kokotchikova M. G.* An Application of Computer Algebra System Cadabra to Scientific Problems of Physics // Physics of Particles and Nuclei Letters. — 2009. — Vol. 6, no. 7. — P. 530–534. — DOI: 10.1134/S1547477109070073.

3. *Кулябов Д. С.*, *Немчанинова Н. А.* Уравнения Максвелла в криволинейных координатах // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2011. — № 2. — С. 172—179.

4. *Kulyabov D. S.*, *Korolkova A. V.*, *Korolkov V. I.* Maxwell's Equations in Arbitrary Coordinate System // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2012. — No. 1. — P. 96–106. — arXiv: 1211.6590.

5. *Korol'kova A. V.*, *Kulyabov D. S.*, *Sevast'yanov L. A.* Tensor Computations in Computer Algebra Systems // Programming and Computer Software. — 2013. — Vol. 39, no. 3. — P. 135–142. — ISSN 0361-7688. — DOI: 10.1134/S0361768813030031. — arXiv: 1402.6635.

6. *Кулябов Д. С.*, *Королькова А. В.* Уравнения Максвелла в произвольной системе координат // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. — 2013. — Нояб. — 1 (28). — С. 29—44. — arXiv: 1211.6590.

7. *Кулябов Д. С.*, *Королькова А. В.*, *Севастьянов Л. А.* Простейшая геометризация уравнений Максвелла // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — М., 2014. — № 2. — С. 115—125. — arXiv: 1402.5527.

8. *Кулябов Д. С.*, *Королькова А. В.*, *Севастьянов Л. А.* Проблема построения гамильтониана полевых уравнений Максвелла // Вестник НИЯУ МИФИ. — 2015. — Т. 4, № 3. — С. 201—205. — ISSN 2304-487X. — DOI: 10.1134/S2304487X15030086. — arXiv: 1508.03811.

9. *Kulyabov D. S.* Spinor-Like Hamiltonian for Maxwellian Optics // EPJ Web of Conferences / ed. by G. Adam, J. Buša, M. Hnatič. — 2016. — Vol. 108. — 02034p1–6. — ISSN 2100-014X. — DOI: `10.1051/epjconf/201610802034`.

10. *Kulyabov D. S.* Using two Types of Computer Algebra Systems to Solve Maxwell Optics Problems // Programming and Computer Software. — 2016. — Vol. 42, no. 2. — P. 77–83. — ISSN 0361-7688. — DOI: `10.1134/S0361768816020043`. — arXiv: `1605.00832`.

11. *Кулябов Д. С.* Геометрический подход к лагранжеву и гамильтонову формализмам электродинамики // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — М., 2016. — № 4. — С. 77—83.

12. *Шарапова А. А.*, *Кулябов Д. С.* Моделирование распространения электромагнитных волн методом конечных разностей с помощью openEMS // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2016. — № 1. — С. 32—40. — ISSN 2312-9735.

13. A Geometric Approach to the Lagrangian and Hamiltonian Formalism of Electrodynamics / D. S. Kulyabov, A. V. Korolkova, L. A. Sevastianov, E. G. Eferina, T. R. Velieva // Proceedings of SPIE. Saratov Fall Meeting 2016: Laser Physics and Photonics XVII and Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data III. Vol. 10337 / ed. by V. L. Derbov, D. E. Postnov. — SPIE, 2017. — P. 103370M1–6. — DOI: `10.1117/12.2267944`.

14. Geometrization of Maxwell's Equations in the Construction of Optical Devices / D. S. Kulyabov, A. V. Korolkova, L. A. Sevastianov, M. N. Gevorkyan, A. V. Demidova // Proceedings of SPIE. Saratov Fall Meeting 2016: Laser Physics and Photonics XVII and Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data III. Vol. 10337 / ed. by V. L. Derbov, D. E. Postnov. — SPIE, 2017. — 103370K1–7. — DOI: `10.1117/12.2267959`.

15. *Kulyabov D. S.*, *Korolkova A. V.*, *Sevastianov L. A.* Spinor Representation of Maxwell's Equations // Journal of Physics: Conference Series. — Moscow, 2017. — Jan. — Vol. 788. — 012025p1–5. — ISSN 1742-6588. — DOI: 10.1088/1742-6596/788/1/012025.

16. Maxwell's Equations Instantaneous Hamiltonian / D. S. Kulyabov, A. V. Korolkova, L. A. Sevastianov, E. G. Eferina, T. R. Velieva, I. S. Zaryadov // Proceedings of SPIE. Saratov Fall Meeting 2016: Laser Physics and Photonics XVII and Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data III. Vol. 10337 / ed. by V. L. Derbov, D. E. Postnov. — SPIE, 2017. — P. 103370L1–9. — DOI: 10.1117/12.2267938.

17. *Кулябов Д. С.* Использование геометризации уравнений Максвелла при расчёте оптических приборов // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — М., 2017. — Т. 25, № 1. — С. 81—90. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-81-90.

Другие публикации

18. *Королькова А. В.*, *Кулябов Д. С.* Уравнения Максвелла в криволинейных координатах в голономном базисе // Труды 54-й научной конференции МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе». Управление и прикладная математика. Т. 1. — М.–Долгопрудный–Жуковский: МФТИ : МФТИ, 2011. — С. 109—110.

19. *Королькова А. В.*, *Кулябов Д. С.*, *Немчанинова Н. А.* Применение тензорного формализма для волноводов // 14-th Workshop on Computer Algebra June 2-3, 2011, Dubna. — Дубна, 2011.

20. *Королькова А. В.*, *Кулябов Д. С.* Ковариантная запись уравнений Максвелла в криволинейных координатах // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2012. Аннотации докладов. В 3 томах. Т. 3. — М. : МИФИ, 2012. — С. 142.

21. *Кулябов Д. С.*, *Королькова А. В.* Задача построения гамильтониана электромагнитного поля // Девятнадцатая Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование», Международная школа-конференция «Биофизика сложных систем. Анализ и моделирование». — г. Дубна, 2012. — С. 189.

22. *Kulyabov D. S.* Geometrization of Electromagnetic Waves // Mathematical Modeling and Computational Physics. — Dubna : JINR, 2013. — P. 120. — ISBN 978-5-9530-0362-9.

23. *Kulyabov D. S.*, *Korolkova A. V.*, *Sevastianov L. A.* A Naive Geometrization of Maxwell's Equations // The 15th small triangle meeting of Theoretical Physics. — Stará Lesná, 2013. — P. 104–111.

24. *Кулябов Д. С.*, *Королькова А. В.*, *Севастьянов Л. А.* Расчёт оптических систем и геометризация уравнений Максвелла // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2014. Аннотации докладов. В 3 томах. — М. : НИЯУ МИФИ, 2014. — С. 235. — ISBN 978-5-7262-1907-3.

25. *Kulyabov D. S.* Spinor-Like Hamiltonian for Maxwellian Optics // International Conference on Mathematical Modeling and Computational Physics. — Stará Lesná, 2015. — P. 67.

26. *Кулябов Д. С.*, *Королькова А. В.*, *Севастьянов Л. А.* Проблема построения гамильтониана на полевых уравнениях Максвелла // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2015. Аннотации докладов. В 3 томах. Т. 2. — М. : НИЯУ МИФИ, 2015. — С. 253. — ISBN 978-5-7262-2051-2.

27. *Кулябов Д. С.*, *Королькова А. В.*, *Севастьянов Л. А.* Диракоподобный гамильтониан уравнений Максвелла // Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование. — 2016. — С. 143—145. — ISBN 978-5-7262-2245-5.

28. *Кулябов Д. С.*, *Королькова А. В.*, *Севастьянов Л. А.* Свойства тензорных систем компьютерной алгебры // Компьютерная алгебра. — Moscow, 2016. — С. 19—21. — ISBN 9785919930617.

29. Спинорное представление уравнений Максвелла / Е. Г. Еферина, О. В. Кузнецова, А. В. Королькова, Д. С. Кулябов, Л. А. Севастьянов // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016). Т. 3. — М. : РУДН, 11.2016. — С. 129—136.

Кулябов Дмитрий Сергеевич

Компьютерная реализация геометрических методов в максвелловской оптике

В диссертации проводится построение геометрического описания уравнений Максвелла в терминах расслоенных пространств. Проводится описание разных вариантов тензора проницаемостей и, соответственно, предлагаются варианты геометризации уравнений Максвелла. В частности выделяется вариант геометризации на основе квадратичной метрики, приводящий к уравнениям Янг-Миллсовского типа. Также строится симплектический гамильтониан для уравнений Максвелла без источника. Описанный формализм демонстрируется в применении к задачам трансформационной оптики и расчёта линз. Аналитические расчёты верифицируются с помощью численных методов.

Kulyabov Dmitry Sergeevich

Computer realization of geometric methods in Maxwellian optics

In the thesis we construct geometrical description of Maxwell's equations in terms of the fiber bundles. Different variants of the permeability tensor are described and, accordingly, various variants of the geometrization of the Maxwell equations are proposed. In particular, we propose a variant of geometrization based on a quadratic metric. It leads to equations of the Yang–Mills type. We also construct a symplectic Hamiltonian for the Maxwell equations without a source. The described formalism is demonstrated in application to problems of transformational optics and lens calculations. Analytical calculations are verified using numerical methods.

Подписано в печать 29.06.2017. Формат 60×84/16.
Тираж 150 экз. Усл. печ. л. 2. Заказ № 1131.

Типография Издательства РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3