

На правах рукописи

СУСЛОВ Яков Александрович

САМОСОГЛАСОВАННАЯ ДВУХЗОННАЯ МОДЕЛЬ СВОБОДНОКОНВЕКТИВНОГО  
ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва 2017

Работа выполнена на кафедре теоретической физики и механики факультета физико-математических и естественных наук ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов».

**Научный руководитель:**

Доктор физико-математических наук,  
профессор

Рыбаков Юрий Петрович

Профессор, заведующий кафедрой  
теоретической физики и механики  
ФГАОУ ВО «Российский университет  
дружбы народов»

**Официальные оппоненты:**

Доктор физико-математических наук,  
профессор

Чумаков Юрий Сергеевич

Профессор кафедры гидроаэродинамики,  
горения и теплообмена ФГАОУ ВО  
«Санкт-Петербургский политехнический  
университет им. Петра Великого»

Кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник

Ананьев Анатолий Викторович

Старший научный сотрудник ГНЦ ФГУП  
«Центр Келдыша»

**Ведущая организация:**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт космических исследований» Российской академии наук (ИКИ РАН)

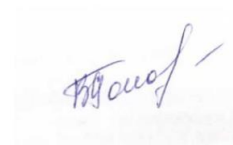
Защита состоится «7» сентября 2017 года в «15» час. «00» мин. на заседании диссертационного совета Д 212.203.34 при Российском университете дружбы народов по адресу 117198 г. Москва, ул. Миклухо-Маклая д.6.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Российского университета дружбы народов по адресу 117198 г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6.

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 года.

Ученый секретарь диссертационного совета

кандидат физико-математических наук



Попова В.А

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы

В конце XX века и в начале XXI века исследователи значительно продвинулись в понимании природы турбулентности и в создании ее моделей. Последние гипотезы и экспериментальные исследования привели к созданию модели турбулентности при преобладании термогравитационных механизмов генерации кинетической энергии турбулентности, которую стало возможным применять для основной части свободноконвективного турбулентного пограничного слоя.

В результате современных экспериментальных исследований структуры свободноконвективного турбулентного пограничного слоя получил подтверждение теоретически предсказанный закон « $-1/3$ » для зависимости поля температуры от расстояния до стенки внутри основной части пограничного слоя. Однако, в отличие от температурного поля, полученный в рамках работы [1] аналогичный закон для вертикальной компоненты скорости оказался несправедливым, что говорит о вероятно более сложной форме зависимости данной величины от расстояния до стенки.

Другой важный результат, вытекающий из современных экспериментальных работ, заключается в построении зависимости от расстояния турбулентных напряжений трения в пристеночной области свободноконвективного турбулентного пограничного слоя. Благодаря повышению точности измерений удалось показать, что соответствующая функциональная зависимость для напряжения трения имеет точку перегиба вблизи границы пристеночной области, а интенсивность пульсаций скоростей и избыточной температуры здесь достигает своего максимума.

Следует заметить, что к настоящему времени в результате исследований характеристик теплообмена свободноконвективных турбулентных пограничных слоев накопилось большое количество эмпирических формул, выражающих связь между числами Нуссельдта и Грасгофа, а также между плотностью теплового потока и температурой на твердой границе с учетом физических свойств жидкости. Значительная часть этих соотношений до сих пор не получила теоретического объяснения.

Один из возможных путей решения накопившихся проблем состоит в построении замкнутой самосогласованной модели свободноконвективного турбулентного слоя с использованием последних достижений в теории турбулентности и привлечением современных экспериментальных данных для проверки полученных результатов. В работах российских ученых С.С. Кутателадзе, А.Г. Кирдяшкина, В.П. Ивакина и др. была предложена модель [2-6], суть которой заключается в двухзонном представлении свободноконвективного турбулентного пограничного слоя. Эти идеи в конце 70-х и начале 80-х годов двадцатого века получили развитие в теоретических работах С. Кэппа и В. Джорджа [1] и [7-8]. Данными авторами, с использованием теории размерности было получено качественное описание основных характеристик течения в пристеночной области (закон стенки), на внешней границе пограничного слоя (закон дефекта скорости) и в динамическом слое выталкивающей силы (закон « $-1/3$ »). Тем не менее для количественного описания свободноконвективного турбулентного пограничного слоя полученные результаты подходили плохо, из-за пренебрежения вкладом турбулентных пульсаций в пристеночной области и использования большого количества упрощающих предположений. Данный подход был обусловлен отсутствием достаточно точных моделей турбулентности, применимых для описания свободной конвекции. В течение последних лет были предложены соответствующие модели турбулентности, обеспечивающие приемлемую точность описания пульсационных процессов, в том числе в динамическом слое выталкивающей силы, где преобладает термогравитационный механизм возникновения турбулентности.

В работе [9] показано, что модель турбулентности для вторых моментов пульсаций скорости и температуры при больших числах Ричардсона в алгебраическом приближении хорошо объясняет экспериментальные данные и применима для описания вклада турбулентных составляющих в свободноконвективных течениях при больших значениях числа Грасгофа. В отличие от традиционных моделей, в данной работе было корректно учтено влияние конвективных сил на генерацию кинетической энергии турбулентности. В рамках данного подхода была объяснена полученная экспериментально степенная зависимость числа Нуссельдта от числа Грасгофа при показателе степени  $1/3$  для представления с использованием избыточной температуры пограничного слоя и  $1/4$  для представления с использованием плотности теплового потока на стенке.

Важнейшей проблемой построения теоретической модели свободноконвективного турбулентного пограничного слоя является корректное описание его свойств в пристеночной области и замыкание уравнений основной части пограничного слоя с уравнениями, действующими в пристеночной области. Суть данной проблемы состоит в том, что в основной части пограничного слоя и в пристеночной области действуют различные механизмы возникновения турбулентности.

Для качественного описания пристеночной области в современной теории свободноконвективного турбулентного пограничного слоя используется гипотеза квазиламинарного вязкого подслоя [1-8, 10], в рамках которой отбрасываются пульсационные составляющие и субстанциональные производные в уравнениях движения и переноса энергии. Однако, применение данного подхода приводит к ряду несоответствий с экспериментальными данными [11-15], согласно которым максимум интенсивности турбулентных пульсаций находится вблизи внешней границы пристеночной области, а внутри пристеночной области интенсивность турбулентных пульсаций имеет тот же порядок величины, что и в динамическом слое выталкивающей силы, где пульсационные составляющие считаются основными.

Развитие современной теории свободноконвективного турбулентного слоя требует применения новых методов решения уравнений Навье – Стокса в основной части пограничного слоя вместо использования приближенных уравнений на основе теории размерностей. Одним из таких методов может стать использование теории возмущений вместе с применением модели турбулентности, справедливой при преобладании термогравитационных механизмов генерации кинетической энергии турбулентности. В [7] показано, что поля скорости и температуры зависят от малого параметра, который представляет собой обратное отношение толщин пограничного слоя и его пристеночной области.

В практических задачах наибольшую трудность составляет определение полей скорости и температуры внутри свободноконвективного турбулентного пограничного слоя, а также коэффициента теплообмена между стенкой и жидкостью в условиях развитой турбулентности. Существует несколько подходов к решению данной задачи – прямое численное моделирование уравнений Навье – Стокса, решение осредненных уравнений Навье - Стокса с использованием специальных моделей турбулентности для определения вклада пульсаций в осредненное движение и интегральные методы расчета, основанные на использовании приближенных данных о форме профилей вертикальной скорости и избыточной температуры.

При использовании прямого численного моделирования достигается наибольшая точность расчета [15], однако, чтобы корректно проводить расчеты этим способом, требуется использовать очень маленькие шаги по времени и пространству, что сильно повышает требования к вычислительным мощностям и затрудняет использование прямого численного моделирования в практических задачах.

Для использования осредненных уравнений необходимо иметь аналитические выражения для членов, характеризующих вклад турбулентных пульсаций в средние характеристики течения. Для расчета вклада турбулентных пульсаций используют специальные модели турбулентности, которые позволяют в явном виде задать пульсации и вычислить их вклады в трение и плотность теплового потока. Наибольшую сложность при данном подходе представляет подбор правильной модели турбулентности применительно к свободной конвекции. Данный подход также требователен к вычислительным ресурсам и чувствителен к выбору конечно-разностной аппроксимации, ввиду того, что существует проблема выполнения законов сохранения при подобном способе расчета.

При всей своей простоте, использование интегральных методов сопряжено со значительным снижением точности, по сравнению с прямым численным моделированием или решением осредненных уравнений с использованием моделей турбулентности. Это связано с точностью определения профилирующих функций поля вертикальной скорости и избыточной температуры, а также с использованием моделей турбулентности для определения трения и плотности теплового потока на стенке. С другой стороны, при достаточно точном подборе профилирующих функций, при корректном определении трения и плотности теплового потока на стенке, погрешность интегральных методов сильно снижается, при этом их точность может приближаться к результатам прямого численного моделирования, как например, это происходит при расчете ламинарных пограничных слоев.

Таким образом, для применения интегральных методов становится актуальной задача о нахождении профилей вертикальной скорости и избыточной температуры. Применительно к свободноконвективному турбулентному пограничному слою, решению данной задачи способствует представление вертикальной скорости и избыточной температуры через профилирующие функции, аналогично работе [8]. С учетом зависимости данных функций от малого параметра, становится возможным использовать для нахождения решения аппарат теории возмущений. Другим подходом к отысканию профилирующих функций является изучение асимптотик вертикальной скорости и избыточной температуры в различных областях пограничного слоя.

Так как современная теория свободноконвективного турбулентного пограничного слоя основана на двухзонном представлении, то в настоящей работе данные идеи развиваются с использованием современных достижений в области построения моделей турбулентности, благодаря чему стало возможным корректное описание происходящих процессов при преобладании термогравитационных механизмов генерации кинетической энергии турбулентности. Также в нашей работе использованы методы теории возмущений. В основе лежит самосогласованная двухзонная модель свободноконвективного турбулентного пограничного слоя, описанная в работах [7-8], и подход к моделированию турбулентности при преобладании термогравитационных механизмов генерации кинетической энергии турбулентности, описанный в работе [9].

### **Цель работы**

Целью диссертационной работы является исследование внутренней структуры свободноконвективного турбулентного пограничного слоя около вертикальной нагретой пластины с температурной стратификацией на внешней границе путем получения самосогласованной системы уравнений, описывающей пристеночную область и основную часть пограничного слоя с помощью применения модели турбулентности для вторых моментов пульсаций скорости и температуры при преобладании термогравитационных механизмов генерации кинетической энергии пульсаций.

### **Научная новизна**

Научная новизна результатов работ определяется тем, что в ней:

- Исследована структура течения в пристеночной области с использованием анализа критериев подобия и показано, что в пристеночной области осредненные уравнения эквивалентны уравнениям для случая вынужденного пограничного слоя с использованием модели турбулентности  $k - \omega$ .
- Выведены условия сопряжения на границе основной части пограничного слоя и пристеночной области, а также исследовано влияние температурной стратификации на внешней границе на течение в основной части пограничного слоя.
- Для основной части пограничного слоя, с помощью применения модели турбулентности для вторых моментов пульсаций при больших числах Ричардсона были получены уравнения, описывающие профилирующие функции для вертикальной скорости и температуры.
- С помощью теории возмущений проведено исследование уравнений, описывающих пристеночную область и основную часть пограничного слоя, в результате чего получены асимптотические решения для полей скорости и температуры
- Предложен приближенный метод расчета полей скорости и температуры внутри свободноконвективного турбулентного пограничного слоя с помощью использования асимптотик профилирующих функций вертикальной скорости и температуры, а также условий сопряжения пристеночной области с основной частью пограничного слоя.

### **Теоретическая и практическая ценность**

**Теоретическая ценность** работы заключается в том, что полученные результаты позволяют уточнить внутреннюю структуру свободноконвективного турбулентного пограничного слоя и получить в явном виде профилирующие функции для вертикальной скорости и температуры во всей толщине пограничного слоя, существование которых было впервые доказано в работах [6-8]. Применение модели турбулентности для вторых моментов пульсаций при больших числах Ричардсона позволило получить аналитические выражения для турбулентных напряжений трения и плотности теплового потока в пристеночной области и на самой стенке, что в свою очередь позволяет решить задачу о корректной постановке граничных условий на стенке при турбулентной свободной конвекции. Найденные условия сопряжения основной части пограничного слоя с пристеночной областью позволяют уточнить механизмы взаимовлияния пристеночной области и динамического слоя выталкивающей силы. Результаты анализа влияния температурной стратификации на внешней границе на течение внутри пограничного слоя могут быть использованы для решения полной задачи турбулентной свободной конвекции в замкнутом объеме, где пограничный слой сопрягается с основной областью, в которой турбулентность менее развита, либо отсутствует за счет существенно меньших местных перепадов (градиентов) температуры, чем в пограничном слое

**Практическая ценность** работы состоит в том, что ее результаты могут быть использованы в высших учебных заведениях и научных центрах, занимающихся научными исследованиями турбулентности при свободной конвекции. В рамках данной работы был реализован приближенный метод расчета полей скорости и температуры, позволяющий свести общую задачу о свободноконвективном турбулентном пограничном слое к задаче об изменении условий сопряжения на границе пристеночной области и основной части пограничного слоя при изменении вертикальной координаты, что в большинстве практических расчетов сводится к нахождению решения системы нелинейных ОДУ второго порядка. Также научно-методические идеи работы могут быть использованы при разработке научно-образовательных курсов, для подготовки кадров высшей квалификации.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Рассмотрены особенности свободноконвективного турбулентного слоя вблизи твердой границы и в основной части. Путем анализа критериев подобия впервые показано, что

вблизи стенки существует область, где преобладают вязкие силы, в то время как в основной части доминируют конвективные силы. На основе анализа критериев подобия получена формула для оценки толщины области, в которой преобладают вязкие силы.

2. Путем применения двух различных моделей турбулентности для пристеночной области и основной части свободноконвективного турбулентного пограничного слоя построена двухзонная самосогласованная модель. Осуществлен вывод уравнений для профилирующих функций вертикальной скорости и избыточной температуры в пристеночной области и основной части пограничного слоя с учетом температурной стратификации на внешней границе. Выведены условия их сопряжения.

3. На основе анализа уравнений для профилирующих функций вертикальной скорости и избыточной температуры получена их асимптотическая структура, как в пристеночной области, так и в основной части пограничного слоя. На основе данных асимптотик предложен приближенный метод расчета полей скорости и температуры, в рамках которого получено аналитическое решение соответствующей системы уравнений для случая однородного теплового потока на твердой границе при больших числах Грасгофа.

4. Путем применения приближенного метода показано, что при больших числах Грасгофа наблюдается эквивалентность задания однородных граничных условий первого и второго рода на твердой границе, а также получена аналитическая формула, связывающая температуру стенки и плотность теплового потока. На основе найденного аналитического решения, предложены формулы, выражающие зависимость вертикальной компоненты скорости и избыточной температуры от поперечной и продольной координат, которые обобщают и уточняют ряд известных результатов.

#### **Достоверность научных результатов**

Достоверность полученных результатов основывается на применении строгих математических методов современной теории турбулентности, статистической физики, гидродинамики, теории дифференциальных уравнений, теории возмущений. Полученные уравнения проверены с помощью предельных переходов и сопоставления с экспериментальными данными. Достоверность результатов подтверждается совпадением с выводами современной теории турбулентности и свободной конвекции о поведении и структуре полей скорости и температуры внутри пограничного слоя.

#### **Личный вклад**

Основные результаты, приведённые в диссертации, получены лично автором и обсуждены с научным руководителем, доктором физико-математических наук, заведующим кафедрой теоретической физики и механики Российского университета дружбы народов, профессором Рыбаковым Ю.П., которому принадлежит постановка задачи исследования.

#### **Апробация работы**

Результаты диссертационной работы были представлены на следующих конференциях:

- Шестая Российская Национальная конференция по тепло-массообмену (РНКТ-6), секция «Свободная конвекция», НИЦ Московский Энергетический Институт, Москва, 2014.
- 50 Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, секция «Теоретическая физика», Российский университет дружбы народов, г. Москва, 2014.
- 51 Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, секция «Теоретическая физика», Российский университет дружбы народов, г. Москва, 2015.

- Результаты работы были отражены в отчётах по проекту РФФИ 13-08-00277 «Теоретическое исследование влияния естественной конвекции на нестационарные температурные поля в замкнутых объемах при комбинированном подводе тепла».

### Публикации

Основные результаты диссертации представлены в 6 работах, 3 из которых опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК РФ.

### Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 63 наименований. Объем диссертации – 81 страница.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается общая характеристика работы, указывается ее цель, обосновывается актуальность решаемых проблем, дается описание современной теории свободноконвективного турбулентного пограничного слоя, а также кратко излагается содержание диссертации.

**Первая глава** диссертации носит в основном обзорный характер и состоит из пяти параграфов. В первом параграфе рассматривается асимптотическая теория свободноконвективного турбулентного пограничного слоя С.С. Кутателадзе и ее развитие. Затем рассматривается теория свободноконвективного турбулентного пограничного слоя С. Джорджа и В. Кэппа. В рамках данной теории сформулировано понятие профилирующих функций, зависящих от малого параметра  $\eta/\delta$ , и показано, что с их помощью вертикальную составляющую скорости и избыточную температуру пограничного можно представить в следующем виде:

$$w = w_s(z) f_w \left( \frac{x}{\delta}, \frac{\eta}{\delta}, Pr \right) \quad (1)$$

$$\Delta T = T_s(z) f_T \left( \frac{x}{\delta}, \frac{\eta}{\delta}, Pr \right) \quad (2)$$

Здесь  $f_w$  и  $f_T$  являются профилирующими функциями, а величина  $\frac{\eta}{\delta}$  является малым параметром. Также в рамках данной теории получена важная оценка характерной скорости в пристеночной области:

$$w_{s1} = \left( \frac{g\beta q_w v^2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3)$$

В третьем параграфе был дан обзор интегрального подхода к исследованию свободноконвективного турбулентного пограничного слоя и были детально рассмотрены его достоинства и недостатки. В четвертом параграфе проводится анализ современных экспериментальных данных. В пятом параграфе приводится краткий обзор современных результатов прямого численного моделирования.

**Вторая глава** состоит из четырех параграфов и посвящена двухзонной самосогласованной модели свободноконвективного турбулентного пограничного слоя. В рассматриваемой модели пограничный слой представляется в виде пристеночной области и основной части, между которыми существует взаимовлияние. Пристеночная область характеризуется тем, что в ней преобладают вязкие силы над конвективными и инициируется генерация кинетической энергии турбулентности преимущественно за счет сдвига средней скорости. Основная часть пограничного слоя характеризуется преобладанием



конвективных сил над вязкими и тем, что основной вклад в генерацию кинетической энергии турбулентности осуществляется за счет работы силы плавучести.

Для получения уравнений, описывающих поля скорости и температуры в пристеночной области, могут быть использованы различные подходы. Одним из таких подходов является применение модели турбулентности  $k - \omega$  для нахождения турбулентных напряжений трения и турбулентного теплового потока. Данная модель была создана для описания пристеночных турбулентных течений и хорошо показала себя применительно к турбулентным струям, которые согласно [2] во многом аналогичны свободноконвективным турбулентным пограничным слоям. В результате применения данной модели в пристеночной области получилась замкнутая система уравнений для кинетической энергии турбулентности, частоты пульсаций и поля скоростей. При этом толщина пристеночной области определяется как расстояние от стенки, на котором вклад термогравитационных сил в генерацию кинетической энергии турбулентности становится равным вкладу сдвиговых напряжений.

$$\eta = \sqrt[4]{\frac{\lambda v^2}{g \beta q_w}} \quad (4)$$

При выводе уравнений, описывающих поля скорости и температуры в основной части пограничного слоя, применялась модель турбулентности для вторых моментов пульсаций, справедливая при преобладании термогравитационных механизмов генерации кинетической энергии пульсаций, благодаря чему было корректно учтено влияние силы плавучести на формирование турбулентного напряжения трения и турбулентного теплового потока. Также было проанализировано влияние процессов, протекающих в пристеночной области, на структуру данных уравнений, благодаря чему удалось установить механизмы взаимовлияния пристеночной области и основной части пограничного слоя.

В первом параграфе второй главы выводятся уравнения для полей скорости и плотности теплового потока в пристеночной области с учетом ее особенностей в представлении профилирующих функций. Данные уравнения имеют следующий вид:

$$u \frac{\partial f_0}{\partial x} + f_0^2 \frac{dW}{dz} + W f_0 \frac{\partial f_0}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \mu + \rho \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial x} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + W \frac{\partial f_0}{\partial z} + f_0 \frac{dW}{dz} = 0 \quad (6)$$

$$q(x, z) = q_w \quad (7)$$

Здесь  $f_0 = f_0 \left( \frac{x}{\eta}, Pr \right)$  - профилирующая функция вертикальной компоненты скорости, определяемая выражением  $w = W f_0 \left( \frac{x}{\eta}, Pr \right)$ . Данные уравнения замыкаются путем применения модели турбулентности  $k - \omega$ , в рамках которой турбулентные напряжения трения выражаются через кинетическую энергию турбулентности  $k$  и характерную частоту пульсаций  $\omega$ :

$$\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial x} - \rho \overline{u'w'} = \left( \mu + \rho \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8)$$

Для величин  $k$  и  $\omega$  используются стандартные, в рамках выбранной модели, уравнения с членом смешения Ментера [16], который снижает зависимость модели от точности задания граничных условий. Уравнения, описывающие пристеночную область были также записаны в представлении профилирующих функций.

Во втором параграфе второй главы выводятся условия сопряжения пристеночной области и основной части пограничного слоя, проводится исследование их взаимовлияния и

исследуется влияние температурной стратификации на внешней границе пограничного слоя на поля скорости и температуры в основной части. Были введены профилирующие функции  $f_1$  и  $h_1$ , которые связаны с вертикальной компонентой скорости и избыточной температурой пограничного слоя формулами:

$$w = W f_1 \left( \frac{x}{\delta}, \frac{\eta}{\delta}, Pr \right) \quad (9)$$

$$\Delta T = T_1 h_1 \left( \frac{x}{\delta}, \frac{\eta}{\delta}, Pr \right) \quad (10)$$

Здесь  $W$  и  $T_1$  - значения вертикальной компоненты скорости и избыточной температуры на границе с пристеночной областью. Для профилирующих функций были получены граничные условия на внешней границе пограничного слоя и на границе с пристеночной областью. Для величин  $W$  и  $T_1$  были получены следующие уравнения:

$$\frac{d}{dz} \left( W^2 \int_{\eta}^{\delta} f_1^2 dx \right) - W^2 \frac{dW}{dz} = g\beta T_1 \int_{\eta}^{\delta} h_1 dx + \frac{1}{\rho} \left( \mu W \frac{\partial f_1}{\partial x} - \rho \overline{u'w'} \right) \Big|_{\eta}^{\delta} \quad (11)$$

$$\frac{d}{dz} \left( WT_1 \int_{\eta}^{\delta} f_1 h_1 dx \right) - WT_1 \frac{dT_1}{dz} = \frac{1}{\rho c_p} \left( \lambda T_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} - \rho c_p \overline{u'\Delta T'} \right) \Big|_{\eta}^{\delta} - \frac{dT_{\infty}}{dz} W \int_{\eta}^{\delta} f_1 dx \quad (12)$$

Показано, что температурная стратификация на внешней границе пограничного слоя оказывает существенное влияние на структуру и свойства течения в пограничном слое посредством члена  $\frac{dT_{\infty}}{dz} W \int_{\eta}^{\delta} f_1 dx$  в уравнении энергии на границе пристеночной области и основной части пограничного слоя и посредством члена  $W f_1 \frac{dT_{\infty}}{dz}$  в уравнении, описывающем структуру профилирующей функции  $h_1$  температуры внутри основной части пограничного слоя. Таким образом, можно сделать вывод, что стратификация на внешней границе пограничного слоя влияет не только на свойства теплообмена, но и меняет форму профилирующих функций.

В третьем параграфе второй главы были представлены уравнения Навье – Стокса в приближении Буссинеска для пограничного слоя в следующем виде:

$$u \frac{\partial f_1}{\partial x} + W f_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + f_1^2 \frac{dW}{dz} = \frac{1}{W} \left( g\beta T_1 h_1 - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'w'}) \right) + \nu \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \quad (13)$$

$$u T_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + W f_1 \left( \frac{dT_{\infty}}{dz} + T_1 \frac{\partial h_1}{\partial z} + h_1 \frac{dT_1}{dz} \right) = \frac{\lambda}{\rho c_p} T_1 \frac{d^2 h_1}{dx^2} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'\Delta T'}) \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + W \frac{\partial f_1}{\partial z} + f_1 \frac{dW}{dz} = 0 \quad (15)$$

Особенность данного представления состоит в том, что профилирующие функции  $f_1$  и  $h_1$  зависят от малого параметра  $\frac{\eta}{\delta} \ll 1$ , что позволяет использовать аппарат теории возмущений при отыскании приближенного решения данной системы. Также, согласно оценкам [1],  $W$  имеет порядок  $\nu A(Pr) \left( \frac{g\beta q_w}{\lambda \nu^2} \right)^{\frac{1}{4}} \sim \frac{\nu}{L} \tilde{A}(Pr) \sqrt[4]{Gr^*}$ , что в ряде случаев позволяет дополнительно упрощать данные уравнения.

С помощью применения модели турбулентности для вторых моментов пульсаций, при преобладании термогравитационных механизмов возникновения турбулентности над сдвиговыми, были получены уравнения, замыкающие систему (13) - (15). Путем применения теории возмущений проводится анализ уравнений и асимптотик профилирующих функций для вертикальной скорости и поля температуры.

В четвёртом параграфе второй главы приводится анализ полученных во второй главе результатов и их сопоставление с экспериментальными данными.

**Третья глава** состоит из четырех параграфов и посвящена реализации приближенного метода расчета полей скорости и температуры в свободноконвективном турбулентном пограничном слое в рамках двухзонной самосогласованной модели.

В первом параграфе третьей главы обосновывается выбор приближенных профилирующих функций для вертикальной скорости и избыточной температуры внутри пограничного слоя с помощью результатов исследования асимптотик данных функций и их уравнений, полученных во второй главе. Профилирующие функции представляются в виде:

$$f_0 = \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\frac{1}{7}}, f_1 = \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\frac{1}{7}} \left(\frac{1-x/\delta}{1-\eta/\delta}\right)^4 \quad (16)$$

$$h_1 = \frac{\left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} \left(y(x) + \frac{\eta}{\delta}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad (17)$$

Здесь  $y(x) = \frac{x/\delta - \eta/\delta}{1 - \eta/\delta}$ . При этом зависимость от числа Прандтля ( $Pr = \frac{\nu}{a}$ ) включается в  $W$  и  $T_1$ .

Во втором параграфе третьей главы описывается структура приближения в основной части пограничного слоя и в пристеночной области. На основе уравнений, полученных во втором параграфе второй главы, для вычисления  $W$  и  $T_1$  выводится следующая система уравнений:

$$\frac{d}{dz} \left( WT_1 \int_{\eta}^{\delta} f_1 h_1 dx \right) - WT_1 \frac{d\eta}{dz} = \frac{1}{\rho c_p} q_w - \frac{7\eta}{8} T_1 \frac{dW}{dz} - \frac{dT_{\infty}}{dz} W \int_{\eta}^{\delta} f_1 dx \quad (18)$$

$$\frac{d}{dz} \left( W^2 \int_{\eta}^{\delta} f_1^2 dx \right) - W^2 \frac{d\eta}{dz} = g\beta T_1 \int_{\eta}^{\delta} h_1 dx - 0.00228 W^2 \left(\frac{\nu}{W\eta}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{51}{36} \eta W \frac{dW}{dz} \quad (19)$$

$$3\eta \left(1 - \frac{\eta}{\delta}\right) \left( \left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} \right) q_w = \lambda T_1 \left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (20)$$

Четвертым уравнением в системе служит формула (4). В рамках данной системы делается дополнительное предположение, о том, что местное число Грасгофа стремится к бесконечности ( $\frac{g\beta q_w \delta^4}{\lambda \nu^2} \rightarrow \infty$ ), что значительно упрощает исходные уравнения и сводит систему к ОДУ вместо интегро – дифференциальных уравнений.

В третьем параграфе третьей главы описаны применения приближенного метода расчета полей скорости и температуры для свободноконвективного турбулентного пограничного слоя с большим числом Грасгофа и однородным тепловым потоком на стенке. Показано, что при стремлении числа Грасгофа к бесконечности, случай с однородным тепловым потоком на стенке эквивалентен случаю с однородной температурой стенки.

Полученное решение приближенной системы ОДУ для  $W$  и  $T_1$  имеет вид:

$$W = 1.45 Pr^{\frac{11}{6}} \left( \frac{g\beta q_w \delta}{\rho c_p} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (21)$$

$$T_1 = 3 Pr^{\frac{1}{2}} \left( \frac{q_w}{\rho c_p} \right)^{\frac{3}{4}} (g\beta a)^{-\frac{1}{4}} \quad (22)$$

Данные формулы, вместе с (16) и (17), обобщают результаты, полученные в статьях [1-8] о структуре профилирующих функций и оценках изменения характеристик пограничного слоя при варьировании вертикальной координаты.

Формулы (16) и (21) показывают, что зависимость вертикальной скорости от поперечной координаты  $x$ , несмотря на размерность  $1/3$ , имеет существенно более сложный характер, за счет присутствия  $\delta$  в выражении для  $W$ . Данное утверждение эквивалентно следующему выражению:

$$w \sim \sqrt[21]{(\delta^4 x^3)} \quad (23)$$

Если учесть, что в рамках рассматриваемого приближения  $\delta \sim z$ , то формулу (23) можно также представить в следующем виде:

$$w \sim \sqrt[21]{(z^4 x^3)} \quad (24)$$

Подобный характер зависимости от координат нельзя было получить методами теории размерностей, использовавшимися в модели, описанной в [1] и [7-8], так как несмотря на то, что правая часть (23) имеет размерность  $[m^{\frac{1}{3}}]$ , под корнем стоят разные характерные масштабы длины.

Формулы (17) и (22) показывают, что характер зависимости избыточной температуры пограничного слоя от координаты  $x$  аналогичен результатам, полученным в рамках модели, описанной в [1] и [7-8]:

$$\Delta T \sim 1/\sqrt[3]{x} \quad (25)$$

Данные результаты объясняют наблюдаемый в экспериментах факт, что зависимость избыточной температуры пограничного слоя от координаты  $x$ , полученная в [1], подтверждается в достаточно широкой области, в то время как аналогичная зависимость вертикальной скорости наблюдается лишь на участке толщиной менее 2 мм.

В четвертом параграфе третьей главы проведено сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными. Путем численного расчета системы уравнений (4) и (18-20) показана высокая точность данной системы, применительно к описанию свободноконвективного турбулентного пограничного слоя. В качестве иллюстраций данного результата можно следующие ниже графики:

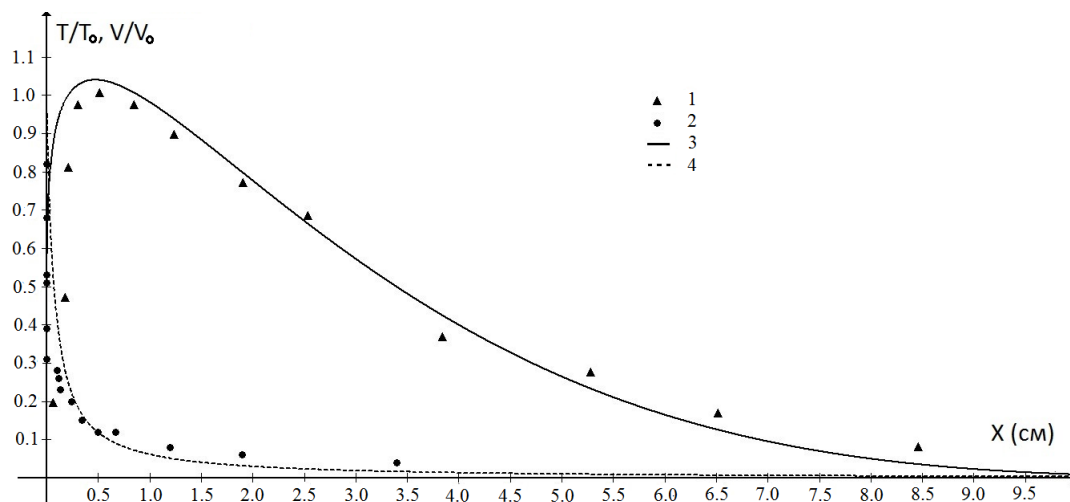


Рис. 1

Профиль скорости и избыточной температуры в пограничном слое для условий опыта V5 [17]. На данном рисунке: 1 – экспериментальные значения скорости, 2 – экспериментальные значения температуры, 3 – расчетные значения скорости и 4 – расчетные значения температуры.

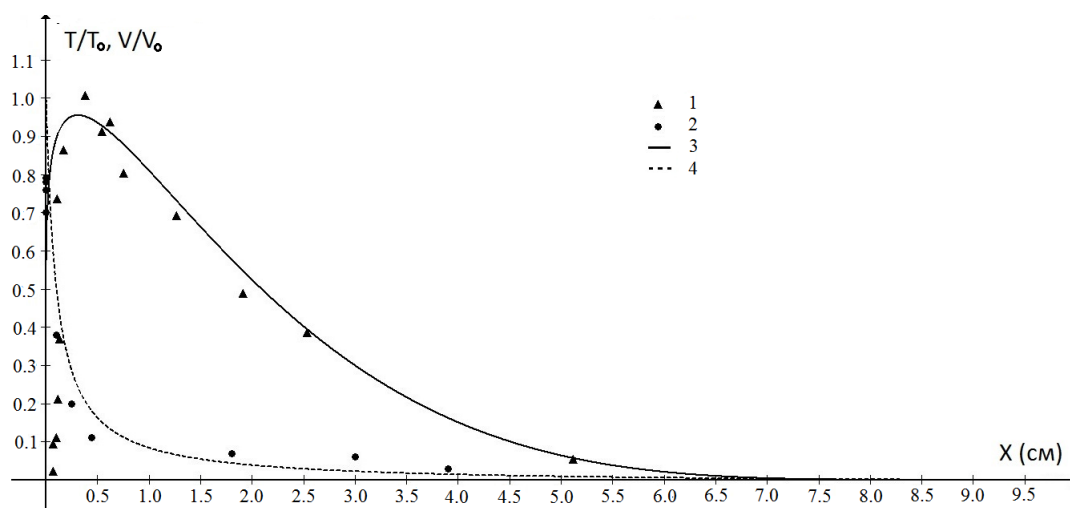


Рис. 2

Профиль скорости и избыточной температуры в пограничном слое для условий опыта V9 [17]. На данном рисунке: 1 – экспериментальные значения скорости, 2 – экспериментальные значения температуры, 3 – расчетные значения скорости и 4 – расчётные значения температуры.

Здесь  $T$  – избыточная температура в пограничном слое,  $T_0$  – избыточная температура стенки согласно экспериментальным данным,  $V$  – вертикальная составляющая скорости в пограничном слое и  $V_0$  – максимальное значение вертикальной составляющей скорости в пограничном слое согласно экспериментальным данным.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

Результаты проведенных исследований можно сформулировать в виде следующих положений, **выносимых на защиту**:

1. Рассмотрены особенности свободноконвективного турбулентного слоя вблизи твердой границы и в основной части. Путем анализа критериев подобия впервые показано, что вблизи стенки существует область, где преобладают вязкие силы, в то время как в основной части доминируют конвективные силы. На основе анализа критериев подобия получена формула для оценки толщины области, в которой преобладают вязкие силы.
2. Путем применения двух различных моделей турбулентности для пристеночной области и основной части свободноконвективного турбулентного пограничного слоя построена двухзонная самосогласованная модель. Осуществлен вывод уравнений для профилирующих функций вертикальной скорости и избыточной температуры в пристеночной области и основной части пограничного слоя с учетом температурной стратификации на внешней границе. Выведены условия их сопряжения.
3. На основе анализа уравнений для профилирующих функций вертикальной скорости и избыточной температуры получена их асимптотическая структура, как в пристеночной области, так и в основной части пограничного слоя. На основе данных асимптотик предложен приближенный метод расчета полей скорости и температуры, в рамках которого получено аналитическое решение соответствующей системы уравнений для случая однородного теплового потока на твердой границе при больших числах Грасгофа.
4. Путем применения приближенного метода показано, что при больших числах Грасгофа наблюдается эквивалентность задания однородных граничных условий первого и второго рода на твердой границе, а также получена аналитическая формула, связывающая

температуру стенки и плотность теплового потока. На основе найденного аналитического решения, предложены формулы, выражающие зависимость вертикальной компоненты скорости и избыточной температуры от поперечной и продольной координат, которые обобщают и уточняют ряд известных результатов.

### Цитированная литература

1. George, W. K. A theory for natural convection turbulent boundary layers next to heated vertical surfaces / William K. George, Steven P. Capp. // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1979. Vol. 22. P. 813-826.
2. Кутателадзе, С. С. Основы теории теплообмена / С. С. Кутателадзе – изд. 5е, перераб. и доп. М.: Атомиздат, 1979, - 416 с.
3. Кутателадзе С.С. Экспериментальное исследование структуры пристенной турбулентности и вязкого подслоя / С.С Кутателадзе, Е.М Хабахпашева, В.В. Орлов, Б.П. Перепелица, Е.С Михайлова // В кн. "Турбулентные сдвиговые течения", т.1, М., Машиностроение, 1982.
4. Кирдяшкин А.Г. Структура тепловых гравитационных течений вблизи поверхности теплообмена / А. Г. Кирдяшкин // Дисс. . докт. техн. Наук.- Новосибирск: 1975. - 297с.
5. Кутателадзе С.С. Тепловая гравитационная конвекция в вертикальном слое при турбулентном режиме течения / Кутателадзе С.С., Ивакин В.П., Кирдяшкин А.Г., Кекалов А.Н. // *Тепломассообмен-V: материалы V Всесоюз. конф. по тепломассообмену (Минск, 1976)*. - Минск, 1976. - Т.1: Конвективный тепломассообмен. Ч.2. - С.197-206.
6. Кутателадзе С.С. Турбулентная естественная конвекция в вертикальном слое / С. С. Кутателадзе, В. П. Ивакин, А. Г. Кирдяшкин, А. Н. Кекалов // *ТВТ*, 15:3 (1977), С. 545–553
7. George, W. K. Natural convection turbulent boundary layers next to heated vertical surfaces / W. K. George, Jr. and S. P. Capp // *ASME Paper No. 77-WA/HT-32* (1977).
8. W. K. George, Jr., Outline of a unified similarity theory for turbulent convection next to vertical surface *Proceedings of the 6th International Heat Transfer Conference Toronto*, pp. 1-6 (1978).
9. Зайчик Л.И. Турбулентная свободная конвекция при больших числах Рэлея / Л.И. Зайчик, В.М. Алипченков // *ТВТ*, 38:3 (2000), 445–451
10. Гебхарт Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен / Б. Гебхарт, Й. Джалурия, Р. Махаджан, Б. Саммакия // М.: Мир. 1991. 678 с.
11. Чумаков Ю.С. Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика (к 70-летию кафедры «Гидродинамика») / Ю. С. Чумаков // *Научно-технические ведомости №2*, 2004 С.1-27.
12. Doan K.S. Structure d'un ecoulement de convection naturelle-transition et turbulence etablie / K.S. Doan, J. Coutanceau // *Acta Astronautica*, 1981, V.8, p.123-160.
13. Hishida M. Turbulent boundary layer of natural convection along a vertical flat plate / M. Hishida, Y. Nagano, T. Tsuji, I. Kaneko // *Trans. JSME, Ser.B*, 1981, V.47, № 419
14. Чумаков Ю.С. Структура температурного поля в свободно-конвективном пограничном слое около вертикальной изотермической поверхности / О. А. Кузьмицкий, Ю. С. Чумаков // *ТВТ*, 28:6 (1990), С. 1142–1148
15. Смирнов Е.М. Прямое численное моделирование турбулентной свободной конвекции, развивающейся во времени у нагретой вертикальной стенки. / А.Г. Абрамов, В.Д. Горячев, Е.М Смирнов // *Международная научная конференция "Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2011): труды международной научной конференции (Москва, 28 марта - 1 апреля 2011 г.)"*, ISBN 978-5-696-04090-5, Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011, с. 374-380
16. Menter F.R. Zonal two Equation  $k-\omega$  Turbulence Models for Aerodynamic Flows. / F.R. Menter // *AIAA 93-2906*. 1993.

17. Влит Ж. К. Экспериментальное исследование турбулентных пограничных слоев в условиях естественной конвекции / Ж. К. Влит, К. К. Лайю // Теплопередача. 1969. Серия С. Часть 91. Ноябрь, №4 С. 73-95.

**Основные результаты опубликованы в следующих работах:**

**Статьи в ведущих рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК**

1. Суслов Я.А. Двухпараметрический интегральный метод расчета турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя / С.Г. Черкасов, Я.А. Суслов //Тепловые процессы в технике. 2014. Т.6, № 8. С. 338-342 (авторский вклад 15%)
2. Суслов Я.А. Интегральная модель свободноконвективного турбулентного пограничного слоя с большими поперечными числами Грасгофа и однородно распределенным удельным тепловым потоком / Ю.П. Рыбаков, С.Г. Черкасов, Я.А. Суслов // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика», Вып..2, 2016. (авторский вклад 70%)
3. Суслов Я.А. Анализ течения в пристеночной области свободноконвективного турбулентного пограничного слоя / Ю.П. Рыбаков, С.Г. Черкасов, Я.А. Суслов // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика», Вып. .2, 2016. (авторский вклад 70%)

**Тезисы докладов на конференциях**

4. Суслов Я.А. Полуэмпирический интегральный метод расчета свободноконвективного турбулентного пограничного слоя / С.Г. Черкасов, Я.А. Суслов // Шестая Российская Национальная Конференция по тепломассообмену, «Труды РНКТ 6» (авторский вклад 15%)
5. Суслов Я.А. Полуэмпирический интегральный метод расчета свободноконвективного турбулентного пограничного слоя / С.Г. Черкасов, Я.А. Суслов // I Всероссийская конференция по проблемам динамики, физике частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, секция «Теоретическая физика». Российский университет дружбы народов, г. Москва, 2014 (авторский вклад 15%)
6. Суслов Я.А. Интегральная модель свободноконвективного турбулентного пограничного слоя / С.Г. Черкасов, Я.А. Суслов // LI Всероссийская конференция по проблемам динамики, физике частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, секция «Теоретическая физика». Российский университет дружбы народов, г. Москва, 2014 (авторский вклад 70%)

**Статьи в сборниках статей и трудах конференций**

7. Суслов Я.А. Полуэмпирический интегральный метод расчета свободноконвективного турбулентного пограничного слоя. / С.Г. Черкасов, Я.А. Суслов // Шестая Российская Национальная Конференция по тепломассообмену, тезисы докладов. 2014. Т. 1, Секция 2. С. 242 (авторский вклад 15%)

## **«Самосогласованная двухзонная модель свободноконвективного турбулентного пограничного слоя»**

Получена и исследована система уравнений в представлении профилирующих функций для пристеночной области пограничного слоя, замыкающаяся путем применения модели турбулентности  $k - \omega$  с членом смешения Ментера. Получена и исследована, путем применения теории возмущений, система уравнений в представлении профилирующих функций для основной части пограничного слоя, замыкающаяся путем применения статистической модели турбулентности для вторых моментов пульсаций при преобладании конвективных сил над вязкими. Получены интегро-дифференциальные уравнения, связывающие систему, описывающую пристеночную область, с системой, описывающей основную часть пограничного слоя. Исследовано влияние температурной стратификации на внешней границе на структуру пограничного слоя.

На основе исследования асимптотических свойств профилирующих функций вертикальной скорости и избыточной температуры был реализован приближенный метод расчета полей скорости и избыточной температуры внутри пограничного слоя. В рамках реализации приближенного метода расчета получено решение для больших чисел Грасгофа при однородном тепловом потоке на твердой границе. Показано, что данное решение является обобщением моделей Кэппа – Джорджа и Кутателадзе, а также позволяет объединить эти модели. Показано, что данное решение позволяет объяснить расхождение формулы, описывающей вертикальную компоненту скорости в основной части пограничного слоя, с экспериментальными данными.

Suslov Yakov A.

### **«Self-consistent two-zone model of a free-convective turbulent boundary layer»**

We derived and analyzed the system of equations in the representation of profile functions for near-wall region of the boundary layer, the turbulence model  $k - \omega$  with a member of the Menter blending being applied. We obtained and investigated via perturbation theory the system of equations in the representation of profile functions for the main part of the boundary layer, which was closed by application of statistical turbulence models for second moments of the pulsation with the predominance of convective forces over the viscous ones. The obtained integro-differential equations connect the system describing the near-wall region with that describing the main part of the boundary layer. We analyzed the influence of temperature stratification at the external border on the structure of the boundary layer.

Due to investigation of asymptotic properties of the main functions of the vertical velocity and excess temperature we implemented approximate method of calculating the velocity fields and excessive temperatures inside the boundary layer. We found the solution within the framework of the approximate method of calculating temperature and velocity fields for large Grashof numbers and uniform heat flux on solid border. This solution gives a generalization of the models Kapp - George and Kutateladze and permit to combine them. Analyzing the solution in question, we show that it explains the discrepancy between the formulas describing the vertical component of velocity in the main part of the boundary layer and the experimental data.