На правах рукописи

Эрназаров Кубантай Кочкорович

Точные устойчивые решения в многомерной модели Эйнштейна-Гаусса-Бонне с нулевой вариацией эффективной гравитационной постоянной

Специальность 01.04.02 - теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва − 2017

Работа выполнена на кафедре гравитации и космологии в Учебно-научном институте гравитации и космологии Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов».

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук

Иващук Владимир Дмитриевич,
профессор кафедры гравитации и космологии Учебно-научного института гравитации и космологии ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» (РУДН).

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор

Гальцов Дмитрий Владимирович,
профессор кафедры теоретической физики физического факультета, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»,

доктор физико-математических наук

Рубин Сергей Георгиевич,
профессор кафедры № 40, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный педагогический университет».

Защита диссертации состоится «15» февраля 2018 года в 15 час. 30 мин. на заседании совета Д 212.203.34 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Российском университете дружбы народов по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. № 110.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке в ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» (РУДН) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на официальном сайте диссертационных советов РУДН по адресу: http://dissovet.rudn.ru

Автореферат разослан «____» _______ 2017 г.

Ученый секретарь,
кандидат-физико
математических наук Попова В.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

На данный момент основной теорией гравитации является общая теория относительности (ОТО), основоположником которой является А. Эйнштейн. ОТО – метрическая теория и пространство описывается в ней 4-мерным многообразием.

Изучение многомерных моделей обусловлено рядом причин. Основной тенденцией в современной физике является объединение всех известных фундаментальных физических взаимодействий. ОТО решает задачу геометризации взаимодействий, ограничившись гравитационным взаимодействием. Но идея геометризации физики диктует ее распространение и на другие взаимодействия.

В настоящее время в литературе широко исследуется так называемая D-мерная гравитационная модель «Эйнштейна − Гаусса − Бонне» (ЭГБ). Появление скаляра Гаусса-Бонне в многомерной гравитации мотивируется теорией струн. В настоящее время модель ЭГБ и её обобщения широко используются в космологии, в том числе для объяснения ускоренного расширения вселенной в согласии с наблюдательными данными по суперновым (типа Ia). В ряде работ были получены точные космологические решения в модели ЭГБ.

Если многомерные теории объединения верны, то они с неизбежностью приводят к предсказанию вариаций G, в т.ч. не противоречащих наблюдениям. Случай их отсутствия является весьма особым и, как говорят математики, обладает «мерой нуль». Для этого нужна весьма тонкая, специальная настройка – согласование всех констант, для чего необходимо особое объяснение.

В многомерной космологии с анизотропным внутренним пространством определённым на произведении многообразий $M_1 \times \ldots \times M_k$, безразмерный параметр вариации *G* имеет вид

$$\frac{\dot{G}}{GH} = -\frac{(N_1 h_1 + \cdots + N_k h_k)}{H},$$

где H – постоянная Хаббла, N_i – размерность M_i и $h_i = \frac{1}{b_i}\frac{db_i}{dt}$ – «хаббловский параметр» для внутреннего фактор-пространства M_i, $b_i(t)$– масштабный фактор M_i, $i = 1, \ldots, k$.

Что касается экспериментальных данных, то вариации гравитационной постоянной в настоящее время допускаются на уровне 10^{-13} и менее в год. В работе [1] использовалось ограничение на величину безразмерной вариации гравитационной постоянной, которое удовлетворяет наиболее жесткому ограничению на вариацию *G*, полученному по совокупности эфемерид,

$$\frac{\dot{G}}{G} = (0{,}16 \pm 0{,}6) \times 10^{-13}\ \text{год}^{-1} \qquad (1)$$

при современном значении параметра Хаббла $H = H_0$

$$H_0 = 73 \pm 3\ \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпс}} \approx 7{,}4\ \times\ 10^{-11}\ \text{год}^{-1},$$

который характеризует темп расширения наблюдаемой Вселенной. Ограничение (1) имеет, как утверждается, уровень достоверности 95%.

Цель работы.

Получение устойчивых точных решений в многомерной модели гравитации с квадратичным слагаемым Гаусса − Бонне, описывающих ускоренное расширение трёхмерного подпространства и нулевую вариацию эффективной гравитационной постоянной G.

Научная новизна.

Все результаты, представленные в диссертации новые.

Научная новизна определяется следующими результатами:

- В D-мерной гравитационная модели Эйнштейна − Гаусса − Бонне с космологическим членом Λ найден класс космологических решений с экспоненциальной зависимостью от времени двух масштабных факторов с хаббловскими параметрами $H > 0$ и $h < 0$, отвечающих фактор-пространствам размерности $m > 3$ и $l > 1$, соответственно, с $(m, l) \neq (6, 6), (7, 4), (9, 3)$ и $D = 1 + m + l$. Также найден класс космологических решений с экспоненциальной зависимостью от времени трех масштабных факторов, которые определяются тремя несовпадающими хаббловскими параметрами $H > 0, h_1$ и h_2, соответствующими фактор-пространствам размерностей $m > 2$, $k_1 > 1$ и $k_2 > 1$, соответственно, $k_1 \neq k_2$ и $D = 1 + m + k_1 + k_2$. Каждое решение из этих двух классов описывает экспоненциальное расширение трехмерного подпространства с хаббловским параметром H и нулевой вариацией эффективной гравитационной постоянной G. Доказана устойчивость этих решений в классе космологических решений с диагональными метриками.
- В рассматриваемой D-мерной модели с $\Lambda = 0$ доказана устойчивость экспоненциальных космологических решений с двумя фактор-пространствами размерностей m и l при $D = 22, 28$ и $(m, l) = (15, 6), (11, 16)$, соответственно.

Научная и практическая значимость.

Найденные устойчивые решения в многомерной модели гравитации Эйнштейна − Гаусса − Бонне, описывающие ускоренное расширение 3-мерного подпространства и нулевую вариацию G, могут быть использованы для возможного решения проблемы тёмной энергии совместного с наблюдательными ограничениями на вариацию G.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах УНИГК РУДН и российского гравитационного общества, а также апробировались на российских и международных конференциях и семинарах:

– The 2nd International conference on particle physics and astrophysics (ICPPA-2016), MEPhI, Moscow, 10-14 October, 2016;

– LIII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, РУДН, Россия, Москва, 15-19 мая, 2017;

– 16th Russian Gravitational Conference-International Conference on Gravitation, Cosmology and Astrophysics (RUSGRAV-16), Russia, Kaliningrad, 24-30 June, 2017;

–The 3rd International conference on particle physics and astrophysics (ICPPA-2017), MEPhI, Moscow, 2-5 October, 2017.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах, список которых приведен в конце автореферата, в рецензируемых журналах и тезисов конференций.

Личный вклад автора.

Все основные результаты получены автором. В совместных работах с В.Д. Иващуком последнему принадлежит постановка задачи и обсуждение результатов. В совместной работе с А.А. Кобцевым и В.Д. Иващуком автору принадлежит доказательство устойчивости двух решений (D = 22, 28) при $\Lambda = 0$.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырех глав основного текста, заключений и пяти приложений. Полный объем диссертации - 83 страниц, рисунков - 3. Список литературы включает 115 наименования.

Содержание работы.

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава посвящена гравитационной модели с членом Гаусса – Бонне и космологической постоянной. В этом случае действие выражается в виде

$$S = \int d^D z \sqrt{|g|} \{\alpha_1 (R[g] - 2\Lambda) + \alpha_2 \mathcal{L}_2[g]\}, \qquad (2)$$

где $g = g_{MN} dz^M \otimes dz^N$ - метрика, определенная на многообразии M, $\dim M = D, |g| = |\det(g_{MN})|$, Λ – космологическая постоянная,

$$\mathcal{L}_2 = R_{MNPQ} R^{MNPQ} - 4 R_{MN} R^{MN} + R^2$$

является стандартным термином Гаусса-Бонне. Здесь α_1 и α_2 ненулевые константы.

Здесь рассматривается многообразие

$$\mathrm{M} = \mathbb{R}_* \times \mathrm{M}_1 \times \ldots \times \mathrm{M}_n$$

с метрикой

$$g = -e^{2\gamma(u)} du \otimes du + \sum_{i=1}^{n} e^{2\beta^i(u)} dy^i \otimes dy^i \qquad (3)$$

где $i = 1, \ldots, n$ и $M_1, \ldots, M_n$ - одномерные многообразия (либо R или S^1). Здесь и в дальнейшем $\mathbb{R}_* = (u_-, u_+)$. Функции $\gamma(u)$ и $\beta^i(u)$, $i = 1, \ldots, n$, являются гладкими в открытом интервале $\mathbb{R}_*$.

Уравнения движения для метрики (3) в модели (2) имеют следующий вид [1,2]

$$-\alpha_1\left(G_{ij}\dot{\beta}^i\dot{\beta}^j + 2\Lambda e^{2\gamma}\right) + \alpha_2 e^{-2\gamma} G_{ijkl}\dot{\beta}^i\dot{\beta}^j\dot{\beta}^k\dot{\beta}^l = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{d}{du}\left[2\alpha_1 G_{ij} e^{-\gamma+\gamma_0}\dot{\beta}^j - \frac{4}{3}\alpha_2 e^{-3\gamma+\gamma_0} G_{ijkl}\dot{\beta}^j\dot{\beta}^k\dot{\beta}^l\right] - L = 0 \qquad (5)$$

$i = 1, \ldots, n$; где $\dot{\beta}^i = \frac{d\beta^i}{du}$,

$$L = \frac{2}{3} e^{-\gamma+\gamma_0}\alpha_1\left[G_{ij}\dot{\beta}^i\dot{\beta}^j - 4\Lambda e^{2\gamma}\right],$$

$(G_{ij}) = (\delta_{ij} - 1)$, $(G_{ijkl}) = (G_{ij}\ G_{ik}\ G_{il}\ G_{jk}\ G_{jl}\ G_{kl})$. Положим $\gamma = 0$ и обозначим $u = \tau$, где τ является временной переменной. Обозначим $\dot{A} = dA / d\tau$ и путем введения «хаббловских» параметров $h^i = \dot{\beta}^i$, уравнения (4) и (5) можно переписать следующим образом

$$E = E(h) = -G_{ij}h^i h^j - 2\Lambda + \alpha G_{ijkl} h^i h^j h^k h^l = 0, \qquad (6)$$

$$Y_i = Y_i(h) = \frac{dL_i}{d\tau} + \left(\sum_{i=1}^{n} h^i\right) L_i - \frac{2}{3} G_{ij} h^i h^j + \frac{8}{3}\Lambda = 0, \qquad (7)$$

где $\alpha = {}^{\alpha_2}/_{\alpha_1}$,

$$L_i = L_i(h) = 2G_{ij}h^j - \frac{4}{3}\alpha G_{ijkl} h^j h^k h^l,$$

$i = 1, \ldots, n$, и мы приходим к автономной системе дифференциальных уравнений первого порядка на $h^1(\tau), \ldots, h^n(\tau)$.

В работе рассмотрены следующие решения уравнений (6) и (7):

$$h^i(\tau) = \upsilon^i \ ,$$

с постоянным υ^i, которые соответствуют решениям

$$\beta^i = \upsilon^i \tau + \beta_i^0 \ ,$$

где β_0^i - постоянные, $i = 1, \dots, n.$ В этом случае получим метрику (3) с экспоненциальной зависимостью от времени масштабных факторов

$$g = -d\tau \otimes d\tau + \sum_{i=1}^{n} B_i^2 e^{2\upsilon^i \tau} dy^i \otimes dy^i, \qquad (8)$$

где $B_i > 0$ - произвольные постоянные. Для $\upsilon = (\upsilon)^i$ имеем систему полиномиальных уравнений

$$2\Lambda + G_{ij}\upsilon^i \upsilon^j - \alpha G_{ijkl}\upsilon^i \upsilon^j \upsilon^k \upsilon^l = 0, \qquad (9)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \upsilon^i\right) L_i(\upsilon) - \frac{2}{3} G_{ij}\upsilon^i \upsilon^j + \frac{8}{3}\Lambda = 0, \qquad (10)$$

$i = 1, \dots, n.$

В **Главе 2** исследована устойчивость статических решений $h^i(\tau) = \upsilon^i$ уравнений (6) и (7) в линейном приближении по возмущениям. Положим

$$h^i(\tau) = \upsilon^i + \delta h^i(\tau), \qquad (11)$$

$i = 1, \dots, n.$ Подставляя (11) в уравнения (6) и (7), получаем в линейном приближении следующие соотношения на возмущения δh^i [3]

$$C_i(\upsilon)\delta h^i = 0, \qquad (12)$$

$$L_{ij}(\upsilon)\delta \dot{h}^j = B_{ij}(\upsilon)\delta h^j, \qquad (13)$$

где

$$C_i(\upsilon) = 2G_{ij}\upsilon^j - 4\alpha G_{ijks}\upsilon^j \upsilon^k \upsilon^s \ ,$$

$$L_{ij}(\upsilon) = 2G_{ij} - 4\alpha G_{ijks}\upsilon^k \upsilon^s \ ,$$

$$B_{ij}(v) = -\left(\sum_k v^k\right) L_{ij}(v) - L_i(v) + \frac{4}{3} G_{kj} v^k$$

и $L_i(v) = 2G_{ij}v^j - \frac{4}{3}\alpha G_{ijks}v^j v^k v^s$.

Здесь мы ограничимся экспоненциальными решениями (3) с непостоянным объемным фактором, который пропорционален $\exp\left(\sum_{i=1}^{n} v^i \tau\right)$, т. е. положим

$$K = K(v) = \sum_{i=1}^{n} v^i \neq 0. \qquad (14)$$

Также считаем, что

$$\det(L_{ij}(v)) \neq 0. \qquad (15)$$

В работе [3] показано, что система линейных уравнений на возмущения (12), (13) при наложенных ограничениях (14), (15) имеет следующее решения

$$\delta h^i = A^i exp(-K(v)\tau),$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(v) A^i = 0\ ,$$

$i = 1, \ldots, n$.

В этой главе доказана устойчивость двух решений в модели с нулевой космологической постоянной - экспоненциальных космологических решений с двумя фактор-пространствами размерностей m и l при $(m, l) =$ $(15, 6), (11, 16)$, и D = 22, 28, соответственно ($\Lambda = 0$).

В третьей главе исследован класс решений системы уравнений (9), (10) следующего вида:

$$v = (\underbrace{H, H, H}_{\text{“our” space}}, \underbrace{\overbrace{H, \ldots, H}^{m-3}, \overbrace{h, \ldots, h}^{l}}_{\text{internal space}}). \qquad (16)$$

Здесь $H > 0$ - хаббловский параметр, соответствующий m-мерному факторному пространству с $m > 3$, h - хаббловский параметр, соответствующий l-мерному фактор-пространству с $l > 1$.

Для описания нулевой вариации эффективной гравитационной постоянной G наложим условие

$$(m-3)H + lh = 0 \qquad (17)$$

Согласно (16) m-мерное фактор-пространство расширяется с параметром Хаббла $H > 0$, а l-мерное фактор-пространство сжимается с хаббловским параметром $h < 0$. Внутреннее пространство анизотропно.

Рассмотрим анзатц (16) с двумя хаббловскими параметрами H и h , и наложенными двумя ограничениями,

$$mH + lh \neq 0, \quad H \neq h. \qquad (18)$$

Уравнения (9) и (10) сводятся к следующей системе уравнений [3,5]:

$$\begin{aligned} E = {} & mH^2 + lh^2 - (mH + lh)^2 + 2\Lambda \\ & - \alpha[m(m-1)(m-2)(m-3)H^4 + 4m(m-1)(m-2)lH^3h \\ & + 6m(m-1)l(l-1)H^2h^2 + 4ml(l-1)(l-2)Hh^3 \\ & + l(l-1)(l-2)(l-3)h^4] = 0, \end{aligned} \qquad (19)$$

$$\begin{aligned} Q = {} & (m-1)(m-2)H^2 + 2(m-1)(l-1)Hh + (l-1)(l-2)h^2 \\ & = -\frac{1}{2\alpha}\,. \end{aligned} \qquad (20)$$

Используя уравнения (17) и (20), получим при $m > 3$ и $l > 1$

$$H = l(-2\alpha P)^{-\frac{1}{2}}, \qquad h = -(m-3)\,{}^{H}\!/_{l} < 0, \quad (21)$$

где

$$P = P(m,l) = (m + l - 3)\big((5-m)l + 2m - 6\big) \neq 0\,,$$

а также

$$\alpha P < 0.$$

Подстановка соотношений (21) в (19) дает нам

$$\Lambda = \Lambda(m,l) = l(-4\alpha P)^{-1}\left(M - \left(\frac{1}{2}\right)P^{-1}R\right),$$

где

$$M = M(m,l) = (9-m)l - (m-3)^2,$$

$R = R(m,l) = -3m(m-1)(m-2)(m-3)l^3 + 6m(m-1)(m-3)^2l^2(l-1) - 4m(m-3)^3l(l-1)(l-2) + (m-3)^4(l-1)(l-2)(l-3).$

Равенство $P(m,l) = 0$ имеет место при $(m,l) = (9,3),(7,4),(6,6).$

Неравенство $P(m,l) > 0$ или $\alpha < 0$ выполняется в следующих случаях:

$$(m \geq 3; l = 2), \qquad (m = 3,4,5, \ \ l \geq 3),$$

$$(m = 6,7,8, \ \ l = 3), \qquad (m = 6; \ l = 4,5).$$

Неравенство $P(m,l) < 0$ или $\alpha > 0$ справедливо при

$$(m \geq 10, l \geq 3), \qquad (m = 8,9; l \geq 4),$$

$$(m = 7; l \geq 5), \qquad (m = 6; l \geq 7).$$

При фиксированном $l > 2$ получим асимптотическое соотношение

$$\Lambda(m,l) \sim \frac{l}{8\alpha(l-2)}$$

при $m \to +\infty$.

При фиксированном $m \geq 3$, m ≠ 5 и m ≠ 9, получим также

$$\Lambda(m,l) \sim \frac{(m-9)(m+1)}{8\alpha(m-5)^2}$$

при $l \to +\infty$ и

$$\Lambda(5,l) \sim -\frac{3l^2}{16\alpha} \to +\infty ,$$

$$\Lambda(9,l) \sim -\frac{9}{4\alpha l} \to 0 ,$$

при $l \to +\infty$.

Доказано, что для вектора υ из (16), удовлетворяющего неравенствам (18), матрица (L_{ij}) имеет блочно-диагональную форму:

$$(L_{ij}) = \mathrm{diag}(L_{\mu\nu}, L_{\alpha\beta}) , \qquad (22)$$

При этом матрица (22) обратима при $m > 1$ и $l > 1$. В силу этого и неравенства $K(\upsilon) = 3H > 0$ каждое из рассматриваемых решений устойчиво в силу критерия, доказанного в [3] .

Четвертая глава.

В этой главе рассмотрен класс решений системы уравнений (9), (10) следующего вида

$$\upsilon = (\underbrace{H, H, H}_{\text{“our” space}}, \underbrace{\overbrace{H, \ldots, H}^{m-3}, \overbrace{h_1, \ldots, h_1}^{k_1}, \overbrace{h_2, \ldots, h_2}^{k_2}}_{\text{internal space}}). \qquad (23)$$

где H - хаббловский параметр, соответствующий m-мерному фактор-пространству с $m > 2$, h_1 - хаббловский параметр, соответствующий k_1-мерному фактор-пространству с $k_1 > 1$, h_2 – хаббловский параметр, соответствующий $k_2 -$ мерному фактор-пространству с $k_2 > 1$. Разделим m-мерное фактор-пространство на произведение двух подпространств размерностей 3 и m-3 соответственно. Первое отождествляется с «нашим» трехмерным пространством, а второе рассматривается как подпространство $(m - 3 + k_1 + k_2) -$ мерного внутреннего пространства.

Положим

$$H > 0 \qquad (24)$$

для описания ускоренного расширения трехмерного подпространства (которое может описывать нашу Вселенную), а также

$$(m-3)H + k_1 h_1 + k_2 h_2 = 0 \qquad (25)$$

для описания нулевой вариации эффективной гравитационной постоянной G.

Рассмотрим анзатц (23) с тремя хаббловскими параметрами H, h_1 и h_2, которые подчиняются следующим ограничениям

$$S_1 = mH + k_1 h_1 + k_2 h_2 \neq 0, \quad H \neq h_1, \quad H \neq h_2, \quad h_1 \neq h_2. \quad (26)$$

Первое неравенство в (26) выполняется, так как $S_1 = 3H > 0$ в силу (24) и (25).

В этом случае система уравнений (9), (10) эквивалентна системе из трех уравнений

$$E = 0, \; Y_H = 0, \quad Y_{h_1} = 0, \quad Y_{h_2} = 0, \qquad (27)$$

где

$$Y_H = Y_\mu, \quad Y_{h_1} = Y_\alpha, \quad Y_{h_2} = Y_a,$$

для всех $\mu = 1, \dots, m;$ $\alpha = m+1, \dots, m+k_1$ и $a = m + k_1 + 1, \dots, n.$

Система уравнений (27) эквивалентна системе уравнений

$$E = 0, \; Q = -\frac{1}{2\alpha}, \quad H + h_1 + h_2 - S_1 = 0. \quad (28)$$

где

$$Q = Q_{h_i h_j} = S_1^2 - S_2 - 2S_1\left(h_i - h_j\right) + 2\left(h_i^2 + h_i h_j + h_j^2\right),$$

$i \neq j; i, j = 0, 1, 2$ и $h_0 = H$. Здесь обозначено

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} \left(v^i\right)^k.$$

Положим здесь $Q = Q_{h_1 h_2}$ другие варианты: $Q = Q_{Hh_1}$ или $Q = Q_{Hh_2}$ дают эквивалентные системы уравнений. Таким образом, система из n + 1 полиномиального уравнения (9), (10) при (23) и наложенных ограничениях (26) сводится к (28) - трем полиномиальным уравнениям (четвертой, второй и первой степени). Это частный случай известной редукции Чиркова − Павлюченко − Топоренского [5].

Используя условие (25) нулевой вариации G и линейное уравнение в (28) получим при $k_1 \neq k_2$:

$$h_1 = \frac{m + 2k_2 - 3}{k_2 - k_1} H, \quad h_2 = \frac{m + 2k_1 - 3}{k_1 - k_2} H. \qquad (29)$$

Для $k_1 = k_2$ получим $H = 0$, что не подходит для нашего рассмотрения.

Подстановка (29) в уравнение $Q = Q_{h_1 h_2} = -\frac{1}{2\alpha}$ дает следующее соотношение

$$\frac{P}{(k_2 - k_1)^2} H^2 = -\frac{1}{2\alpha}$$

для $k_1 \neq k_2$, где

$$P = P(m, k_1, k_2) \\ = -(m + k_1 + k_2 - 3)(m(k_1 + k_2 - 2) + k_1(2k_2 - 5) \\ + k_2(2k_1 - 5) + 6) \neq 0,$$

что влечет

$$H = |k_1 - k_2|(-2\alpha P)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \alpha P < 0. \qquad (30)$$

Нетрудно проверить, что

$$P = P(m, k_1, k_2) < 0 \qquad (31)$$

для всех $m > 2, k_1 > 1, k_2 > 1, k_1 \neq k_2$ и, следовательно, наши решения имеют место при $\alpha > 0$.

Используя соотношения (30) , получим

$$\Lambda = \Lambda(m, k_1, k_2)$$
$$= \frac{1}{8\alpha P^2}(m + k_1 + k_2 - 3)\Big[(k_1 + k_2)(k_1 + k_2 - 2)m^3$$
$$+ \Big(k_1^3 + k_2^3 + 11(k_1^2 k_2 + k_1 k_2^2) - 19(k_1^2 + k_2^2) - 22k_1 k_2$$
$$+ 18(k_1 + k_2))m^2$$
$$- \Big(8\big((k_1^3 + k_2^3) - 63(k_1 + k_2)^2 - 8k_1^2(k_1 - 11)k_2$$
$$- 8k_2^2(k_2 - 11)k_1\big) - 32k_1^2 k_2^2 + 54(k_1 + k_2)\Big)m$$
$$- (9(k_1^3 + k_2^3) + 45(k_1^2 + k_2^2) - 54(k_1 + k_2) + 8(k_1^2 + k_2^2)k_1 k_2$$
$$- 16(k_1 + k_2 - 10)k_1^2 k_2^2 - 9(21k_1 + 21k_2 - 26)k_1 k_2)\Big)\Big] \quad (32)$$

где $P = P(m, k_1, k_2)$ определено в (31).

Функция $\Lambda(m, k_1, k_2)$ в (32) симметрична

$$\Lambda(m, k_1, k_2) = \Lambda(m, k_2, k_1) \quad (33)$$

Для $k_2 = 0$ получим функцию $\Lambda(m, k_1, 0) = \Lambda(m,\ k_1)$, рассмотренную в предыдущей главе. Для $k_1(k) = n_1 k + q_1$ и $k_2(k) = n_2 k + q_2$, где $k, n_1 > 0, q_1, n_2 > 0, q_2 -$ целые числа, получим

$$\Lambda\big(m, k_1(k), k_2(k)\big) \to \frac{1}{8\alpha} \quad (34)$$

при $k \to +\infty$ для любого фиксированного $m \geq 3$. Предел (34) положителен и не зависит от m. При фиксированных целых числах $m > 2$ и $k_2 \geq 1$ приходим к следующему пределу

$$\Lambda(m, k_1, k_2) \to \frac{1}{8\alpha(m + 4k_2 - 5)^2}[m^2 - 8(1 - k_2)m - 9 - 8k_2 + 16k_2^2]$$
$$= \Lambda(m, \infty, k_2) > 0,$$

при $k_1 \to +\infty$ и к аналогичным соотношениям (в силу (33)) при фиксированных $m > 2, k_1 \geq 1$ и $k_2 \to +\infty$. Для этих значений m, k_1 получаем: $\Lambda(m, k_1, \infty) > 0$.

Чтобы доказать устойчивость решений, необходимо доказать соотношение (15). Доказано, что для вектора υ из (23), удовлетворяющего соотношениям (26), матрица L имеет блочно-диагональный вид

$$\left(L_{ij}\right) = \mathrm{diag}\left(L_{\mu\nu}, L_{\alpha\beta}, L_{ab}\right), \qquad (35)$$

где здесь и в дальнейшем: $\mu, \nu = 1, \dots, m$; $\alpha, \beta = m+1, \dots, m+k_1$ и $a, b = m + k_1 + 1, \dots, n.$ Также доказано, что матрица (35) обратима. В силу этого и неравенства $K(\upsilon) = 3H > 0$ каждое из рассматриваемых решений является устойчивым.

В заключении сформулированы основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказана устойчивость космологических решений с двумя фактор-пространствами размерностей m и l в D-мерной гравитационной модели со слагаемым Гаусса − Бонне при $(m, l) = (15, 6), (11, 16)$ и $D = 1 + m + l$ = 22, 28, соответственно ($\Lambda = 0$). Эти два решения с экспоненциальной зависимостью от времени двух масштабных факторов, полученные ранее в работе В.Д. Иващука и А.А. Кобцева, описывают экспоненциальное расширение трехмерного подпространства с нулевой вариацией эффективной гравитационной постоянной G.
2. В D-мерной гравитационной модели Эйнштейна − Гаусса − Бонне с космологическим членом Λ найден класс космологических решений с экспоненциальной зависимостью от времени двух масштабных факторов с хаббловскими параметрами $H > 0$ и $h < 0$, отвечающих фактор-пространствам размерности $m > 3$ и $l > 1$, соответственно, с $(m, l) \neq$

$(6,6), (7,4), (9,3)$ и $D = 1 + m + l$. Каждое из этих решений описывает экспоненциальное расширение трехмерного подпространства с хаббловским параметром H и нулевой вариацией эффективной гравитационной постоянной G. Имеет место тонкая подстройка космологической постоянной: $\Lambda = \Lambda(m,l)$. Доказана устойчивость этих решений в классе космологических решений с диагональными метриками.

3. В D-мерной гравитационной модели Эйнштейна − Гаусса − Бонне с космологическим членом Λ найден класс космологических решений с экспоненциальной зависимостью от времени трех масштабных факторов, которые определяются тремя несовпадающими хаббловскими параметрами $H > 0, h_1$ и h_2, соответствующими фактор-пространствам размерностей $m > 2$, $k_1 > 1$ и $k_2 > 1$, соответственно, $k_1 \neq k_2$ и $D = 1 + m + k_1 + k_2$. При этом имеет место тонкая подстройка космологической постоянной: $\Lambda = \Lambda(m, k_1, k_2)$. Любое из этих решений описывает экспоненциальное расширение трехмерного подпространства с хаббловским параметром H и нулевой вариацией эффективной гравитационной постоянной G. Доказана устойчивость данных решений в классе космологических решений с диагональными метриками.

Основные публикации по теме диссертации

Основные результаты диссертации отражены в 9 работах, в рецензируемых журналах из списка ВАК и тезисах конференций:

в журналах из списка ВАК РФ:

1. K.K. Ernazarov, V.D. Ivashchuk, A.A. Kobtsev. On exponential solutions in the Einstein − Gauss − Bonnet cosmology, stability and variation of G. [Text] // Gravitation and Cosmology, (2016) 22(3), 245–250;

2. K.K. Ernazarov, V.D. Ivashchuk. Stable exponential cosmological solutions with zero variation of *G* in the Einstein – Gauss – Bonnet model with a Λ– term [Text] //The European Physics Journal C, (2017) 77: 89 (6 pages);
3. K. K. Ernazarov, V.D. Ivashchuk. Stable exponential cosmological solutions with zero variation of *G* and three different Hubble-like parameters in the Einstein – Gauss – Bonnet model with a Λ–term [Text] // The European Physics Journal C , (2017) 77: 402 (7 pages);
4. V.D. Ivashchuk, K.K. Ernazarov. On stable exponential cosmological solutions with non-static volume factor in the Einstein − Gauss − Bonnet model [Text] // Journal of Physics: Conference Series, (2017) v. 798, 012089 (5 pages) ;

в тезисах конференций:

5. V.D. Ivashchuk, K.K Ernazarov. On stable exponential cosmological solutions with non-static volume factor in the Einstein − Gauss − Bonnet model // The 2nd International Conference on Particle Physics and Astrophysics (ICPPA-2016), the National Research Nuclear University “MEPhI”, 10-14 October, 2016, –Moscow;
6. K.K. Ernazarov, V.D. Ivashchuk. On stable exponential cosmological solutions with zero variation of G in the Einstein − Gauss − Bonnet model with a cosmological Λ-term // LIII All-Russia conference on problems in Dynamics, Particle Physics, Plasma Physics and Optoelectronics, RUDN University, Russia, Moscow, 15-19 May, 2017;
7. K.K. Ernazarov, V.D. Ivashchuk. On stable exponential cosmological solutions with zero variation of G in the Einstein − Gauss − Bonnet model with a cosmological Λ-term // 16th Russian Gravitational Conference − International Conference on Gravitation, Cosmology and Astrophysics (RUSGRAV-16), Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia, Kaliningrad, 24-30 June, 2017;
8. K. K. Ernazarov, V. D. Ivashchuk. Stable exponential cosmological solutions with zero variation of *G* in the Einstein − Gauss − Bonnet model

with a Λ-term and three different Hubble-like parameters // 16th Russian Gravitational Conference – International Conference on Gravitation, Cosmology and Astrophysics (RUSGRAV-16), Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia, Kaliningrad, 24-30 June, 2017;

9. V.D. Ivashchuk, K.K. Ernazarov. Stable exponential cosmological solutions with zero variation of G in the Einstein – Gauss – Bonnet model with a Λ-term // The 3rd International Conference on Particle Physics and Astrophysics (ICPPA-2017), the National Research Nuclear University “MEPhI”, Moscow, Russia, 2-5 October, 2017.

Список цитированной литературы

1. V.D. Ivashchuk and A.A. Kobtsev, On exponential cosmological type solutions in the model with Gauss – Bonnet term and variation of gravitational constant // Eur. Phys. J. C 75: 177 (12 pages) (2015).

2. V.D. Ivashchuk, On cosmological-type solutions in multidimensional model with Gauss – Bonnet term // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics 7, No. 5, 797-819 (2010); arXiv: 0910.3426.

3. V.D. Ivashchuk, On stability of exponential cosmological solutions with non-static volume factor in the Einstein – Gauss – Bonnet model // Eur. Phys. J. C 76, 431 (2016); arXiv:1607.01244v2.

4. D. Chirkov, S.A. Pavluchenko, A. Toporensky, Non-constant volume exponential solutions in higher-dimensional Lovelock // Gen. Relativ. Gravit. 47: 137 (33 pages) (2015); arXiv: 1501.04360.

Аннотация.

Эрназаров Кубантай Кочкорович

Точные устойчивые решения в многомерной модели Эйнштейна-Гаусса-Бонне с нулевой вариацией эффективной гравитационной постоянной

В D-мерной гравитационной модели Эйнштейна-Гаусса-Бонне с космологическим членом Λ найден класс космологических решений с экспоненциальной зависимостью от времени двух масштабных факторов с хаббловскими параметрами $H > 0$ и $h < 0$, отвечающих фактор-пространствам размерности $m > 3$ и $l > 1$, соответственно, с $(m, l) \neq (6, 6), (7, 4), (9, 3)$ и $D = 1 + m + l$. Также найден класс космологических решений с экспоненциальной зависимостью от времени трех масштабных факторов, которые определяются тремя несовпадающими хаббловскими параметрами $H > 0, h_1$ и h_2, соответствующими фактор-пространствам размерностей $m > 2$, $k_1 > 1$ и $k_2 > 1$, соответственно, $k_1 \neq k_2$ и $D = 1 + m + k_1 + k_2$. Каждое решение из этих двух классов описывает экспоненциальное расширение трехмерного подпространства с хаббловским параметром H и нулевой вариацией эффективной гравитационной постоянной G. Доказана устойчивость этих решений в классе космологических решений с диагональными метриками, в т. ч. при $\Lambda = 0$, $D = 22, 28$ и $(m, l) = (15, 6), (11, 16)$, соответственно.

Abstract.

Ernazarov Kubantai Kochkorovich

Exact stable solutions in the multidimensional Einstein-Gauss-Bonnet model with zero variation of the effective gravitational constant

In D-dimensional Einstein-Gauss-Bonnet gravitational model with the cosmological term Λ, a class of cosmological solutions is found with an exponential time dependence of two scale factors with Hubble parameters $H > 0$ and $h < 0$ corresponding to factor spaces of dimension $m > 3$ and $l > 1$, respectively, with $(m, l) \neq (6, 6), (7, 4), (9, 3)$ and $D = 1 + m + l$. A class of cosmological solutions with an exponential time dependence of three scale factors is also obtained, which are determined by three non-coinciding Hubble parameters $H > 0, h_1$ и h_2, corresponding to factor spaces of dimensions $m > 2$, $k_1 > 1$ and $k_2 > 1$, respectively, $k_1 \neq k_2$ and $D = 1 + m + k_1 + k_2$. Each solution of these two classes describes an exponential expansion of a three-dimensional subspace with the Hubble parameter H and zero variation of the effective gravitational constant G. The stability of these solutions in the class of cosmological solutions with diagonal metrics is proved; e.g. for $\Lambda = 0$, $D = 22, 28$ and $(m, l) = (15, 6), (11, 16)$, respectively.