На правах рукописи

УДК 517.547

Брайчев Георгий Генрихович

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РОСТА ВЫПУКЛЫХ И ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Специальность: 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена на кафедре математического анализа Московского педагогического государственного университета (МПГУ).

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Абанин Александр Васильевич, заведующий кафедрой математического анализа механико-математического факультета Южного федерального университета, г. Ростов на Дону;

доктор физико-математических наук, профессор
Малютин Константин Геннадьевич, профессор кафедры математического анализа и прикладной математики Курского государственного университета, г. Курск;

доктор физико-математических наук, профессор
Хабибуллин Булат Нурмиевич, заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии факультета математики и информационных технологий Башкирского государственного университета, г. Уфа.

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Защита состоится «09» октября 2018 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.203.27 при ФГАОУ "Российский университет дружбы народов по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, аудитория 495^a.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо - Маклая, д. 6 и на сайте "Диссертационные советы РУДН" в сети интернет (http://dissovet.rudn.ru).

Автореферат разослан « » июня 2018 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук Савин Антон Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ.

Первая часть диссертации — глава 1 — отведена абелевым и тауберовым теоремам сравнительного роста функций, связанным с правилом Лопиталя, его обращением и дискретными аналогами в форме теоремы Штольца. В отличие от классического подхода задачи рассматриваются в новой, более широкой постановке, включающей нахождение как асимптотических, так и точных равномерных двусторонних оценок сравниваемых величин. Эта часть работы имеет не только самостоятельное значение, но и служит фундаментом для систематического изучения в последующих двух главах глобального роста целой функции в зависимости от поведения ее тейлоровских коэффициентов и нулей.

В главе 2 основное внимание уделено проблеме Адамара, в общих чертах состоящей в следующем. Рост целых функций традиционно описывают путем их сравнения с эталонными функциями. Требуется найти наиболее узкие классы таких эталонных функций сравнения, которые позволяют точно описать асимптотическое поведение любой целой функции по ее тейлоровским коэффициентам. Этому вопросу посвящены работы Ж. Адамара, Э. Линделефа, Ж. Валирона и многих других математиков. Важный вклад в решение проблемы внесли В. А. Осколков, М. Н. Шеремета и их ученики. Полученные в диссертации результаты по проблеме Адамара существенно усиливают известные ранее утверждения в смысле возможности измерения не только „верхнего“, но и „нижнего“ роста целых функций. Кроме того, в терминах введенных автором понятий индексов лакунарности и разреженности, примененных к последовательностям тейлоровских коэффициентов и множествам достижимости характеристик роста, дано описание регулярности поведения максимума модуля целой функции. При отсутствии подобной правильности поведения модуля указаны лучи, на которых функция растет заведомо нерегулярно.

Центральная часть диссертационной работы — глава 3 — также опирается на исследования первой части и посвящена нахождению точных двусторонних оценок логарифма максимума модуля целой функции конечного порядка не по тейлоровским коэффициентам, а по ее нулям с учетом их расположения на плоскости и асимптотического поведения, выраженного как классическими плотностями распределения (обычными и усредненными), так и некоторыми специальными характеристиками. Тематика имеет насыщенную историю, восходящую к трудам А. Данжуа, Ж. Валирона, Р. Редхеффера, Б. Я. Левина, А. А. Гольдберга и многих других, получив в последнее время новый импульс развития благодаря работам Б. Н. Хабибуллина, А. Ю. Попова и их учеников. Мы выделяем и систематически изучаем важные на практике случаи, когда все нули целой функции лежат на одном или нескольких лучах (прямых), в одном или нескольких углах. В качестве непосредственных приложений результатов этой части исследований предложены новые теоремы единственности для целых функций.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ.

Основной целью диссертационного исследования является разработка методов получения равномерных и асимптотических оценок выпуклых функций и их применение в теории роста целых функций. Особое внимание уделяется двум центральным направлениям: описание роста функции по тейлоровским коэффициентам; связь асимптотического поведения целой функции с характером распределения ее нулей на комплексной плоскости.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА.

Основные результаты диссертации являются новыми. На защиту выносятся утверждения, полученные лично автором. Перечислим главные из них.

1. Получены точные двусторонние (равномерные и асимптотические) оценки, связывающие относительный рост двух функций с относительным ростом их производных. Отдельно установлены дискретные аналоги в форме различных вариантов обращения теоремы Штольца.

2. Найдены точные границы относительного поведения функций в зависимости от „массивности“ множеств, на которых соответствующие

характеристики роста достигаются. Даны применения к вопросам регулярности роста целых функций.

3. Введены и изучены новые характеристики роста последовательностей, выявлена связь с классическими внутренними и плотностными характеристиками, востребованными в теории целых и мероморфных функций. В частности, в новых терминах получен критерий измеримости последовательности.

4. Предложено решение обобщенной проблемы Адамара о нахождении наиболее узких классов эталонов для измерения „верхнего“ и „нижнего“ роста целых функций с его точным описанием по тейлоровским коэффициентам.

5. Найдены точные нижние грани типов целых функций с нулями заданных усредненных плотностей, распоженными на одном или нескольких лучах (прямых), в одном или нескольких углах фиксированного раствора, а также на более общих множествах.

6. Найдены неулучшаемые двусторонние оценки для нижних типов целых функций с нулями заданных усредненных плотностей в двух важнейших случаях расположения нулей: на одном луче; произвольно в комплексной плоскости.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ. В диссертации разработаны оригинальные методы получения оценок для выпуклых функций, связанные с абелевыми и тауберовыми теоремами об относительном росте функций и их производных. Для описания роста целых функций в терминах тейлоровских коэффициентов используются специальные приемы из выпуклого анализа с привлечением преобразования Юнга–Фенхеля–Лежандра. Применяются как традиционные, так и оригинальные методы из теории целых функций. В частности, развивается техника исследования особенностей поведения в комплексной плоскости целых функций нерегулярного роста. Предлагаются новые принципы построения экстремальных примеров целых функций с заданными асимптотическими свойствами.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Диссертация носит теоретический характер и способствует развитию теории целых функций и теории аппроксимации в комплексной плоскости. Ее материал представляет интерес для специалистов, работающих в области теории функций, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений и теории вероятностей. Результаты диссертации могут быть востребованы в исследованиях, проводимых в Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН, Институте математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН, Южном математическом институте Владикавказского научного центра РАН, МГУ имени М. В. Ломоносова, Башкирском государственном университете, Южном федеральном университете, Московском педагогическом государственном университете и других отечественных и зарубежных математических центрах.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ.

Сообщения о результатах диссертации были сделаны на научных семинарах

механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

1) по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН Б. С. Кашина, академика РАН С. В. Конягина, профессора Б. И. Голубова, профессора М. И. Дьяченко, 2008, 2010 гг.;

2) по негармоническому анализу и целым функциям под руководством профессора А. М. Седлецкого и профессора В. В. Власова (в последние годы — профессора А. М. Седлецкого и д.ф.-м.н. А. Ю. Попова), неоднократно, 2002–2017 гг.;

3) по теории тригонометрических и ортогональных рядов под руководством профессора М. К. Потапова, профессора М. И. Дьяченко, профессора Т. П. Лукашенко, профессора В. А. Скворцова, 2017 г.;

4) по теории приближений и теории экстремальных задач под руководством профессора В. М. Тихомирова и профессора Г. Г. Магарил-Ильяева, 2010 г.;

факультета физико-математических и естественных наук РУДН

5) кафедры функционального анализа под руководством профессора В. И. Буренкова, 2017 г.;

6) кафедры прикладной математики под руководством профессора А. Л. Скубачевского, 2018 г.;

а также на научных семинарах

7) Института математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН под руководством чл.-корр. РАН В. В. Напалкова, 2016 г.;

8) кафедры высшей математики МИФИ под руководством профессора В. А. Осколкова, 2003 г.;

9) математического факультета МПГУ „Анализ и его приложения" под руководством профессора И. В. Тихонова и д.ф.-м.н. В. Б. Шерстюкова, неоднократно, 2012–2018 гг.

Сообщения о результатах диссертации сделаны на следующих конференциях и симпозиумах:

1) XII–XV, XVII, XIX Саратовские зимние математические школы „Современные проблемы теории функций и их приложения", Саратов, 2004, 2006, 2008, 2010, 2014, 2018 гг.;

2) Воронежские зимние математические школы „Современные методы теории функций и смежные проблемы", Воронеж, 2007, 2009, 2013, 2015 гг.;

3) Международная конференция „Современные проблемы математики, механики, информатики", посвященная 85-летию С. Б. Стечкина и 75-летию ТулГУ, Тула, 2005 г.;

4) Международная конференция „Теория приближений", посвященная 90-летию С. Б. Стечкина, Москва, МИ РАН им. В. А. Стеклова, 2010 г.;

5) Международная научно-образовательная конференция „Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования", Москва, РУДН, 2009 г.;

6) VIII, XII Международные Казанские летние научные школы-конференции „Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", Казань, 2007, 2015 гг.;

7) Международная конференция „Алгебра, анализ, геометрия", посвященная П. А. Широкову и А. П. Широкову, Казань, 2016 г.;

8) Всесоюзный симпозиум по теории приближения функций, Уфа, 1987 г.;

9) Уфимская международная школа-семинар по геометрии и анализу, посвященная памяти А. Ф. Леонтьева, Уфа, 2007 г.;

10) VI Уфимская международная конференция „Комплексный анализ и дифференциальные уравнения", Уфа, 2011 г.;

11) Уфимская математическая конференция с международным участием, Уфа, 2016 г.;

12) Уфимская международная конференция, посвященная 100 - летию А. Ф. Леонтьева, Уфа, 2017 г.;

13) V Международная конференция „Европа и современная Россия. Интегративная функция педагогической науки в едином образовательном пространстве", Прага, 2008 г.;

14) Международная научная конференция „Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство", Цахкадзор, 2014 г., Горис, 2015 г.;

15) Международная конференция „Analysis and Topology", Львов, 2008 г.;

16) Международная конференция „Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – III", Ростов-на-Дону, 2013 г.;

17) VII, X, XIII, XIV, XVI, XX, XXII, XXIV Международные конференции „Математика. Экономика. Образование", Абрау-Дюрсо, 1999, 2002, 2005, 2006, 2008, 2012, 2014, 2016 гг.;

18) Международные школы-семинары по геометрии и анализу, посвященная памяти Н. В. Ефимова, Абрау-Дюрсо, 2002, 2004, 2006 гг.;

19) Международная научная конференция „Теория операторов. Комплексный анализ и математическое моделирование", Волгодонск, 2007 г.;

20) Международная научная конференция „Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования", Владикавказ, 2010 г.;

21) V Международная конференция „Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания",

Обнинск, 2011 г.;

22) Международная научная конференция „Теория приближений функций и родственные задачи анализа“, посвященная памяти доктора физико-математических наук, профессора П. П. Коровкина, Калуга, 2015 г.;

23) Международная конференция „Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования“, Архангельск, 2014 г.;

24) Международная конференция „Математика и информатика“, Москва, МПГУ, 2016 г.

ПУБЛИКАЦИИ.
Результаты диссертации опубликованы в одной монографии и двадцати трех работах, десять из которых — в научных изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования WoS, Scopus; три статьи — в научных изданиях, включенных в перечень ведущих рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ; четыре научные работы — в международных научных изданиях. Четыре статьи выполнены в соавторстве, вклад соавторов подробно оговаривается в тексте диссертации.

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ РАБОТЫ.
Диссертация содержит введение, три главы и библиографический список общим объемом 268 страниц. Каждая глава состоит из нескольких параграфов; объемные параграфы разделены на пункты. Использована своя нумерация параграфов в каждой из глав. В списке цитированной литературы в алфавитном порядке идут сначала работы на русском, а затем — на иностранных языках. Библиография содержит 144 наименования.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Во ВВЕДЕНИИ указываются цель и методы исследования, обоснованы актуальность, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы; дано краткое изложение содержания диссертации. Текст диссертационной работы разбит на три главы. Первая глава посвящена теории выпуклых функций и служит отправной точкой для исследований, проведенных в следующих разделах диссертации. Во второй и третьей главах, составляющих основную часть работы, развивается теория целых функций одной переменной.

В автореферате принята сквозная нумерация формул, а нумерация теорем и других утверждений совпадает с их нумерацией в тексте диссертации.

Перейдем к более подробному изложению содержания работы.

В ГЛАВЕ 1 разрабатываются методы получения оценок относительного роста выпуклых функций и их производных, а также некоторых величин, тесно связанных с такими функциями и характеризующих их рост. Предложен общий метод, позволяющий устанавливать двусторонние оценки производных по известным двусторонним оценкам функций. Точнее говоря, в первой главе доказаны теоремы тауберова типа в непрерывном и дискретном случаях. При этом тауберовость понимается в расширенном смысле, когда асимптотическая эквивалентность двух величин заменяется на точные асимптотические двусторонние оценки их отношения.

В § 1.1 излагаются известные факты, а параграф 1.2 посвящен доказательству новых равномерных оценок относительного роста функций и их производных. Здесь же рассмотрен ряд „модельных“ примеров, демонстрирующих точность оценок.

Тауберовы (в широком понимании) теоремы с асимптотическими оценками относительного роста функций и их производных рассмотрены в § 1.3. Монотонный случай исследован в п. 1.3.1. Следующие пункты 1.3.2, 1.3.3 носят технический характер. Здесь при всех $a \geqslant 0$ исследуются функции

$$\varphi_g(a) = \varlimsup_{x\to b-} \frac{g(x') + g'(x')(x - x')}{g(x)}, \quad \underline{\varphi}_g(a) := \varliminf_{x\to b-} \frac{g(t_x) + g'(t_x)(x - t_x)}{g(x)}.$$

Укажем, что для значений $a \in (0, 1)$ функция $\varphi_g(a)$ была ранее введена А. В. Братищевым[1]. Изучены свойства этих функций, даны их явные

[1]Братищев А. В. Обращение правила Лопиталя. Сб. Механика сплошной среды.– Ростов-на-Дону: РГУ, 1985. – С. 28-43.

представления. В предположении

$$\lim_{x\to b-}\frac{g(x)}{x}=+\infty,\qquad b\leqslant+\infty,\tag{0.1}$$

получен такой результат.

Теоремы 1.10 и 1.11. *Пусть $g(x)$ — положительная, выпуклая, дважды дифференцируемая на $[0,+\infty)$ функция, и существует предел*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)g''(x)}{g'^2(x)}\;=\;G,\qquad G\in[0,\,1).$$

Тогда в определении функции $\varphi_g(a)$ также существует предел. При этом справедливы следующие явные формулы.
Если $G=0$, то

$$\varphi_g(a)\;=\;a,\qquad a\in[0,\,1].$$

Если $G\in(0,\,1)$, то

$$\varphi_g(a)\;=\;\frac{a-Ga^{1/G}}{1-G},\qquad a\in(0,\,G^{1-1/G}).$$

Если $G=1$ и $g(x)$ — логарифмически выпуклая функция на $[0,\,b)$, то

$$\varphi_g(a)\;=\;a\ln\frac{e}{a},\qquad a\;>\;0.$$

Далее в разделе 1.3.4 в обозначениях

$$T=\varlimsup_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)},\quad \tau=\varliminf_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)},\quad \Delta=\varlimsup_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)},\quad \delta=\varliminf_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

формулируется окончательный вариант тауберовой теоремы и доказывается ее точность.

Теорема 1.7*. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — выпуклые на $[0,b)$ функции, удовлетворяющие условию (0.1), и $T\in(0,\infty)$. Тогда выполняются неравенства*

$$a_1T\leqslant\delta,\qquad \Delta\leqslant a_2T,$$

где a_1, a_2 являются „корнями“ уравнения $\varphi_g(a)=\tau/T$ и задаются формулами

$$a_1=\varliminf_{x\to b-}\frac{1}{g'(x)}\sup_{t<x}\frac{g(t)-(\tau/T)g(x)}{t-x},\;\; a_2=\varlimsup_{x\to b-}\frac{1}{g'(x)}\inf_{t>x}\frac{g(t)-(\tau/T)g(x)}{t-x}.$$

Следующий § 1.4 посвящен дискретным аналогам теорем абелева и тауберова типов — теореме Штольца[2] и ее обращению. По поводу общей формы теоремы Штольца — с верхними и нижними пределами вместо обычных — см., например, монографию[3].

Приведем формулировку сводного результата.

Теоремы 1.13 и 1.16. *Пусть x_n и y_n — положительные последовательности, причем y_n удовлетворяет условию*

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} \to +\infty, \qquad n \to \infty.$$

Тогда имеет место равенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{y_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}, \tag{0.2}$$

а если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{x_n}{y_n} < +\infty$, то также выполняется равенство

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{y_n} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}. \tag{0.3}$$

Равенства (0.2), (0.3) выполнены одновременно, если x_n, y_n — выпуклые последовательности и y_n удовлетворяет условиям $n = o(y_n)$,

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty.$$

Эталонные последовательности y_n, для которых действует чистое обращение теоремы Штольца, образуют весьма узкий класс. В остальных случаях справедливо утверждение.

Теорема 1.17. *Пусть последовательность x_n положительна и выпукла, а последовательность y_n положительна и строго возрастает. Пусть далее*

$$m = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{y_n}, \qquad M = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{y_n}.$$

Тогда выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \leqslant M\, \tilde{s}_2(\theta).$$

---

[2] Stolz O. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik: nach den Neuen Ansichten. Leipzig: Teubners, 1885. – P. 173-175.

[3] Брайчев Г. Г. Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. — М.: Прометей, 2005. – 233 с.

Если, кроме того, y_n имеет лакуны Адамара, т. е. $\underline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{y_{n+1}}{y_n} > 1$, *то выполняется и неравенство*

$$M\,\tilde{s}_1^+(\theta) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

Здесь $\theta = \dfrac{m}{M}$, *а величины* $\tilde{s}_1(\theta)$, $\tilde{s}_2(\theta)$ *задаются формулами*

$$\tilde{s}_1(\theta) = \underline{\lim}_{l\to\infty} \inf_{n\geqslant l+1} \frac{1}{y_n - y_{n-1}} \sup_{l\leqslant k<n} \frac{y_k - \theta y_n}{k-n},$$

$$\tilde{s}_2(\theta) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{y_{n+1}-y_n} \inf_{k>n} \frac{y_k - \theta y_n}{k-n}.$$

Точность полученных в теореме оценок подтверждает пример эталонной последовательности экспоненциального роста $y_n = e^{an}$, $a > 0$.

Утверждения параграфа 1.4 существенно дополняют и уточняют результаты недавней работы[4].

Предметом исследования в § 1.5 являются бесконечно большие последовательности комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, которые мы располагаем в порядке возрастания модулей:

$$0 < |\lambda_1| = \ldots = |\lambda_{n_1}| < |\lambda_{n_1+1}| = \ldots = |\lambda_{n_2}| < |\lambda_{n_2+1}| = \ldots = |\lambda_{n_3}| < \ldots .$$

Определим индексы лакунарности l_Λ и разреженности p_Λ последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ равенствами

$$l_\Lambda = l = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|} = \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|}, \qquad p_\Lambda = p = \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|}. \tag{0.4}$$

Обозначим через $n_\Lambda(x) = \sum\limits_{|\lambda_n|\leqslant x} 1$ считающую функцию последовательности Λ, а через $N_\Lambda(x) = \int\limits_0^x \dfrac{n_\Lambda(t)}{t}\,dt$ — ее усредненную считающую функцию. Для показателя $\rho > 0$ определим величины

$$\overline{\underline{\Delta}}_\rho(\Lambda) = \overline{\underline{\lim}}_{x\to+\infty} \frac{n_\Lambda(x)}{x^\rho}, \qquad \overline{\underline{\Delta}}^*_\rho(\Lambda) = \overline{\underline{\lim}}_{x\to+\infty} \frac{N_\Lambda(x)}{x^\rho},$$

называемые верхними (соотв. нижними) ρ-плотностями последовательности Λ, обычной и усредненной. (Считаем, что верхнее и нижнее подчеркивания соответствуют друг другу во всех частях равенств. Указание на ρ и Λ будем опускать, когда это не вызывает недоразумений.)

[4]Абанин А. В., Юделевич В. В. Об обращении теоремы Штольца. Известия вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. – 2016. – № 2. – С. 5-9.

Введем еще верхнюю и нижнюю относительные плотности последовательности, полагая по определению

$$\underline{\nu} = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{N(x)}{n(x)}.$$

Важную роль играют также дискретные усредненные верхние и нижние плотности последовательности, задаваемые формулами

$$\widetilde{\underset{\sim}{\Delta}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{N(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho}\,.$$

Последовательность называется измеримой, если $\overline{\Delta}^* = \underline{\Delta}^*$, или, что эквивалентно, $\overline{\Delta} = \underline{\Delta}$; дискретно измеримой, если $\widetilde{\Delta} = \underset{\sim}{\Delta}$; внутренне измеримой, если $\overline{\nu} = \underline{\nu}$; слабо лакунарной, если $l_\Lambda = 1$.

Ни дискретная, ни внутренняя измеримость последовательности сами по себе не влекут ее измеримости. Критерий измеримости дает следующая теорема.

Предложение 1.22. *Последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ с верхней плотностью $0 < \overline{\Delta} < \infty$ при показателе $\rho > 0$ измерима тогда и только тогда, когда она дискретно измерима и выполнено хотя бы одно из условий:*

a) последовательность Λ слабо лакунарна,

b) выполняется условие $\underline{\nu} = \underline{\lim}_{x\to+\infty} \dfrac{N(x)}{n(x)} = \dfrac{1}{\rho}$,

c) выполняется условие $\overline{\nu} = \overline{\lim}_{x\to+\infty} \dfrac{N(x)}{n(x)} = \dfrac{1}{\rho}$,

d) последовательность Λ внутренне измерима.

В этом же параграфе устанавливаются взаимосвязи между введенными величинами. Остановимся на важном результате, используемом в главе 3 при решении экстремальных задач теории роста целых функций.

Теорема 1.22. *Пусть Λ — бесконечно большая последовательность комплексных чисел, причем $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \overline{\Delta} \in (0, +\infty)$ для заданного $\rho > 0$. Тогда выполняются неравенства*

$$\rho\, a_1\, \overline{\Delta}^* \leqslant \underline{\Delta} \leqslant \rho\, \widetilde{a}_1\, \overline{\Delta}^*, \qquad \rho\, \widetilde{a}_2\, \overline{\Delta}^* \leqslant \overline{\Delta} \leqslant \rho\, a_2\, \overline{\Delta}^*. \tag{0.5}$$

Здесь a_1, a_2 — корни уравнения $a \ln \dfrac{e}{a} = \underline{\Delta}^* / \overline{\Delta}^*$, а $\widetilde{a}_1$, $\widetilde{a}_2$ — корни подобного же уравнения с „подправленной“ правой частью: $a \ln \dfrac{e}{a} = \widetilde{\Delta} / \overline{\Delta}^*$.

Корни уравнений связаны неравенствами

$$0 \leqslant a_1 \leqslant \widetilde{a}_1 \leqslant 1 \leqslant \widetilde{a}_2 \leqslant a_2 \leqslant e.$$

Если Λ — *дискретно измеримая последовательность, то верны равенства* $\underline{\Delta} = \rho\, a_1 \overline{\Delta}^*$, $\overline{\Delta} = \rho\, a_2 \overline{\Delta}^*$.

В § 1.6 изучается влияние индексов лакунарности и разреженности, введенных равенствами (0.4), на характеристики роста выпуклых функций (пункт 1.6.1) и их применение к вопросам регулярности роста целых функций (пункт 1.6.2). Понятия индексов лакунарности и разреженности (без их точного определения) использовались уже давно для оценок верхних и нижних характеристик роста аналитических функций[5],[6],[7],[8],[9]. Эти понятия играют ключевую роль в установлении соотношений между сильной лакунарной сходимостью и сильной Чезаро-суммируемостью[10],[11].

Введем понятие, тесно связанное с асимптотическими характеристиками роста функций и последовательностей, а также множеств, на которых эти характеристики достигаются.

Пусть $\varphi(x)$ и $H(x)$ — некоторые возрастающие функции, заданные на промежутке $(a,\, b)$, $b \leqslant +\infty$. Будем писать $\varphi(x) \in \{H(x);\, (t, T)\}$, если

$$\varlimsup_{x \to b} \frac{\varphi(x)}{H(x)} = T, \qquad \varliminf_{x \to b} \frac{\varphi(x)}{H(x)} = t.$$

Множество, на котором достигается верхний или нижний предел в задании характеристики роста функции, назовем определяющим множеством для рассматриваемой характеристики (ср.[5]). Например, под опре-

[5]Valiron G. Lecture on the General Theory of Integral Functions.—Privat Toulouse, 1923. – 234 p.

[6]Gray A, Shah S. M. A note on entire functions and conjecture of Erdös. Bull. of the Amer. Math. Soc.– 1963. – V. 69, № 4. – P. 573-577.

[7]Gray A., Shah S. M. Holomorphic functions with gap power series. III. J. Math. Mech. – 1966. – V. 16. –P. 297-310.

[8]Basinger R. C.On the coefficients of entire series with gap. Journal of Math. Analysis and Applications.– 1972. – V. 38, № 3. P. 790-792.

[9]Murai T. The boundary behaviour of Hadamard lacunary series. Nagoya Math. J. – 1983. –V. 89. – P. 65–76.

[10]Freedman A. R., Sumber J. J., Raphael V. Some Cesáro type of Summability Spaces. Proc. London Math. Soc. – 1978. – V. 37. – P. 508-520.

[11]Gökhan A., Grüngör M., Bullut Y. On the strong lacunary convergence and strong Cesáro summability of sequences of real-valued functions. Applied Siences.– 2006. – V. 8, № 1. – P. 70-77.

деляющим множеством для нижнего предела t понимаем всякое множество E, для которого

$$\underline{\lim}_{x\to b}\frac{\varphi(x)}{H(x)}=\lim_{E\ni x\to b}\frac{\varphi(x)}{H(x)}\ =\ t.$$

Введем понятие, позволяющее в случае выпуклых функций точно описывать связь между верхними и нижними характеристиками роста функции и индексом лакунарности определяющих множеств, на которых эти характеристики достигаются.

Пусть $H(x)$ — выпуклая на интервале $(a,\,b)$, $b\leqslant+\infty$, функция, $x_k\nearrow b$ — последовательность точек из $(a,\,b)$. Назовем Н-калибром последовательности x_k относительно $H(x)$ величину (ср.[12])

$$J_H(x_k):=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sup_{\lambda\in[0,1]}\left\{\frac{(1-\lambda)\,H(x_k)+\lambda H(x_{k+1})}{H((1-\lambda)\,x_k+\lambda x_{k+1})}\right\},$$

а Н-калибром множества $E\subset(a,\,b)$, с условием $\sup E=b$ — величину

$$J_H(E)=\inf\{J_H(x_k):\ x_k\in E,\ x_k\nearrow b\}.$$

Отметим, что в данном определении берется верхняя грань отношений ординат хорды, стягивающей точки $(x_k,H(x_k))$ графика функции $H(x)$, к ординатам самой функции в соответствующих точках. Укажем, что похожая характеристика, связанная с разностью ординат хорды и графика функции, рассматривалась при изучении весовых преобразований Фурье–Лапласа в работе[13]. Всегда $J_H(x_k)\geqslant 1$ и $J_H(E)\geqslant 1$. Будем говорить, что неограниченное множество $E\subset\mathbb{R}_+$ слабо лакунарно, если его индекс лакунарности $l(E)=1$.

Справедлив следующий результат, указывающий на влияние калибра определяющего множества для нижней характеристики сравнительного роста выпуклых функций на величину ее верхней характеристики.

Теорема 1.23. *Пусть $\varphi(x)$ и $H(x)$— выпуклые функции на интервале $(a,\,b)$, $b\leqslant+\infty$. Если $\varphi\in\{H(x);(t,T)\}$, и E — определяющее множество для t, то выполняется неравенство*

$$T\leqslant t\,J_H(E).\tag{0.6}$$

[12]Kiselman Ch. O. Order and type as measure of growth for convex or entire functions. Proceedings of London Math. Soc. – 1983. – V. 66, № 3. – P. 152-186.

[13]Напалков В. В., Юлмухаметов Р. С. Весовые преобразования Фурье-Лапласа аналитических функционалов в круге. Матем. сборник. – 1992. – Т. 183, № 11. – С. 139-144.

Для практического применения этого результата в п. 1.6.1 находятся формулы, точно выражающие зависимость H-калибра множества через его индекс лакунарности в случаях, важных в теории целых, мероморфных или субгармонических функций. Приведем характерный результат.

Функцию $H(x)$ отнесем к классу E_ρ, где $\rho \in (0, +\infty)$, если она дифференцируема на некотором луче $(a, +\infty)$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xH'(x)}{H(x)} = \rho.$$

Теорема 1.24. *Пусть* $\varphi(x)$ *— выпуклая функция от* $\ln x$ *,* $H(x) \in E_\rho$ *при* $\rho > 0$*. Пусть далее,* $\varphi \in \{H(x); (t, T)\}$*,* $T \in (0, +\infty)$*, а* E *— определяющее множество для* t *и* $l = l(E) < +\infty$*. Тогда выполняется неравенство*

$$T \leqslant t \,\frac{d}{e \ln d},$$

где

$$d = \begin{cases} c^{\frac{1}{c-1}}, & c = l^\rho, \quad \text{если} \;\; l > 1, \\ e, & \qquad\qquad \text{если} \;\; l = 1. \end{cases}$$

Исследованию влияния индекса лакунарности на регулярность роста целых функций посвящен п. 1.6.2. Следуя Ж. Валирону[5], говорим, что целая функция $f(z)$ имеет совершенно регулярный рост относительно $h(r)$, если $T_f = t_f \in (0, +\infty)$, т. е. если существует конечный, положительный предел $T = \lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\ln \max\limits_{|z|=r} |f(z)|}{h(r)}$. Приведем критерий совершенно регулярного роста целой функции.

Теорема 1.29. *Пусть* $\rho(r)$ *— уточненный порядок,* $\rho(r) \to \rho > 0$ *и* $h(r) = r^{\rho(r)}$*. Функция* $f(z) \in \{h(r); (t, T)\}$ *имеет совершенно регулярный рост относительно* $h(r)$ *тогда и только тогда, когда тип или нижний тип функции достигается на слабо лакунарном множестве.*

Далее рассматривается влияние индексов лакунарности и разреженности на более тонкие, чем максимум модуля, характеристики роста целой функции. Приведем определения.

Индикатор и нижний индикатор (роста) целой функции $f(z)$ на луче $\arg z = \varphi$ относительно функции $V(r) = r^{\rho(r)}$ (относительно уточненного порядка $\rho(r)$) определяются формулами соответственно[14],[15]

$$h_f(\varphi) := \overline{\lim} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{V(r)}, \qquad \underline{h}_f(\varphi) := \sup_E \underline{\lim}_{r \notin E} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{V(r)},$$

где супремум берется по множествам E нулевой относительной меры, т. е. таким, что $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{mes\,\{E\cap[0,\,r]\}}{r} = 0$.

Целая функция $f(z)$ называется функцией вполне регулярного роста на луче $\arg z = \varphi$ относительно $V(r) = r^{\rho(r)}$, если $h_f(\varphi) = \underline{h}_f(\varphi)$. Если это условие выполнено для всех $\varphi \in [0,\,2\pi)$, то говорят, что $f(z)$ имеет вполне регулярный рост (относительно уточненного порядка $\rho(r)$, или функции $V(r) = r^{\rho(r)}$) во всей плоскости.

Доказано следующее свойство, которое можно принять за определение полной регулярности роста функции на луче.

Теорема 1.32. *Целая функция $f(z)$ из $\{V(r);(t,T)\}$ имеет вполне регулярный рост на луче $\arg z = \varphi$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ множества*

$$E(\varepsilon) = \{\, r \in \mathbb{R}_+ : \ \ln|f(re^{i\varphi})| > (H(\varphi) - \varepsilon)h(r) \,\}$$

являются слабо лакунарными.

Условие совершенно регулярного роста функции необходимо для полной регулярности ее роста во всей плоскости. Если это условие нарушается, то не трудно указать лучи, вдоль которых функция заведомо не имеет вполне регулярного роста.

Теорема 1.30. *Пусть целая функция $f(z) \in \{V(r);(t,T)\}$, и пусть $t < T$. Тогда $f(z)$ не имеет вполне регулярного роста ни на одном луче $\arg z = \varphi \in [0, 2\pi)$ таком, что $h_f(\varphi) > t$.*

В частности, целая функция с лакунарным по Адамару рядом Тейлора не имеет вполне регулярного роста ни на одном луче комплексной плоскости (Теорема 1.31).

[14]Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

[15]Phragmen E. et Lindelöf E. Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogénes dans le voisinage d'un point singulier // Acta Mathematica. – 1908. – V. 31. – P. 381–406.

ГЛАВА 2 состоит из двух параграфов. Параграф 2.1 посвящен решению обобщенной проблемы Адамара, а § 2.2 — изучению особенностей роста целых функций нулевого порядка.

В мемуаре[16] А. Пуанкаре выделил две проблемы наибольшей важности, указав, с одной стороны, на связь между ростом целой функции и ее жанром, и, с другой стороны, – между ростом целой функции и ее коэффициентами Тейлора. Начало разработке методов исследования поставленных проблем положили труды Э. Бореля и Ж. Адамара. В дальнейшем их идеи получили развитие в работах П. Бутру, А. Вимана, Д. Пойа, Ж. Валирона, Э. Линделефа, А. Принсгейма, А. Данжуа, Э. Майе, Дж. Литтлвуда и других математиков.Упомянем, что работа Адамара[17] была удостоена премии Парижской академии наук.

Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ — целая функция, $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ — максимум ее модуля. Начиная с Ж. Адамара[17] и Э. Бореля[18], математиков интересовал вопрос о нахождении возможно более узких классов функций H, в которых для любой целой функции $f(z)$ нашлась бы $h(r)$ с условием

$$\sigma_f := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)} \in (0, +\infty) \tag{0.7}$$

и с возможностью вычислить эту величину (называемую типом $f(z)$ относительно $h(r)$) по тейлоровским коэффициентам f_n функции $f(z)$. Для подкласса целых функций конечного порядка эту задачу решил Ж. Валирон[19, 5], введя понятие уточненного порядка. Он показал, что каждая целая функция конечного порядка имеет свой уточненный порядок, относительно которого ее тип нормален, т. е. выполняется (0.7). При этом величина типа при уточненном порядке $\rho(r)$ определяется тейлоровскими коэффициентами по формуле

$$(\sigma_f e\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \varlimsup_{n\to\infty} k(n)|f_n|^{\frac{1}{n}}. \tag{0.8}$$

[16]Poincaré H. Sur les fonctions intieres //Bulletin de la S.M.F.– 1883. – V. 11. – P. 136-144.

[17]Hadamard J. Essai d'étude des fonctions données par leur dévéloppement de Taylor // J. Math. Pure et Appl. – 1892. – V. 8, Ser. 4. – P. 154–186.

[18]Borel E. Lessons sur les fonctions entières. II ed.— Paris: Gauthier-Vilars. – 1921. – 162 p.

[19]Valiron G. Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière. Annales de la faculte des sciences de Toulouse Ser. 3. – 1913. – T. 5. – P. 117-257.

В этой формуле $k(n)$ — обратная функция к $t = r^{\rho(r)}$, а валироновский уточненный порядок $\rho(r)$, $r > 0$, обладает по определению свойствами:
1) $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho > 0$;[20]
2) в каждой точке $r > 0$ существуют односторонние производные, удовлетворяющие условию $\lim\limits_{r\to+\infty} r \ln r \rho'(r) = 0$.

Накладывая дополнительные требования (такие, как монотонность, дифференцируемость достаточное число раз или бесконечная дифференцируемость, аналитичность в некотором угле и др.), классы уточненных порядков, применяемых для изучения роста целых функций, постоянно сужали (см., например,[14,21,22,23]). Многие авторы решали задачу коэффициентного описания роста целых функций, определяя логарифмические, экспоненциальные, (p, q)-порядки и типы и некоторые другие характеристики (см., например, работу М. Н. Шереметы[24]).

Еще один способ характеризации роста целой функции — сравнение его с ростом эталонных целых функций, которые называются функциями сравнения (см.[25]). Эти функции имеют положительные, логарифмически выпуклые тейлоровские коэффициенты, и связь с коэффициентами сравниваемых функций весьма просто описывается.

Коэффициентная характеризация роста аналитических функций важна во многих вопросах анализа. Например, она с успехом применялась в работах Ю. Ф. Коробейника (см., например,[26,27]) и его учеников к исследованию разрешимости дифференциальных уравнений бесконечного порядка.

---

[20] первоначально требовалось, чтобы $0 < \lambda = \varliminf\limits_{r\to+\infty} \rho(r) \leqslant \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho < \infty$.

[21] Шеремета М. Н. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Известия вузов. Математика. – 1967. – № 2. – С. 100-108.

[22] Таров В. А. Гладко меняющиеся функции и совершенные уточненные порядки // Матем. заметки. – 2004.– Т. 76, вып. 2. – С. 258-264.

[23] Маергойз Л. С. Индикаторная диаграмма целой функции уточненного порядка и ее обобщенные преобразования Бореля–Лапласа// Алгебра и анализ.—2000.—Т. 12, выпуск 2.— С. 1—63.

[24] Шеремета М. Н. О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений // Известия вузов. Математика. – 1968. – № 6. – С. 115-121.

[25] Казьмин Ю. А. Сравнения функции // Математическая энциклопедия. Т. 5. – М.: Советская энциклопедия, 1985. – 160 с.

[26] Коробейник Ю. Ф. Аналитические решения операторных уравнений бесконечного порядка. – Дисс. . . . д.ф.-м.н. – Ростов-на-Дону: Ростовский гос. ун-т, 1965.

[27] Коробейник Ю. Ф. Нормально-разрешимые операторы и дифференциальные уравнения бесконечного порядка // Литовский матем. сб. – 1971. – Т. XI, № 3. – С. 569-596.

Универсальной шкалы роста целых функций, конечно, не существует, но возможность использовать достаточно узкий класс эталонных функций, с которыми можно сравнивать в том или ином смысле рост произвольной целой функции, имеет большое значение. Такие классы называются плотными классами функций сравнения роста во множестве всех целых функций. Аналогично определяются и плотные классы функций сравнения роста для заданных подмножеств целых функций.

В статье[28] Дж. П. Эрл и В. К. Хейман доказали, что во множестве целых функций бесконечного порядка плотным классом функций сравнения роста является класс функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)h^{''}(x)}{[h'(x)]^2} = 1.$$

В работах[29, 30] В. А. Осколков установил такой результат. Классы H_γ, состоящие из возрастающих на $\mathbb{R}_+$, дважды непрерывно дифференцируемых функций $h(x)$ с $h^{''}(x) > 0$, удовлетворяющих условию

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{h(x)h^{''}(x)}{[h'(x)]^2} \leqslant \gamma$$

с константой $\gamma \geqslant 1$, являются плотными классами функций сравнения роста во множестве всех целых функций, а классы H_γ с константой $\gamma < 1$ таковыми не являются.

Узкие плотные классы функций сравнения роста, состоящие из целых функций сравнения, коэффициенты которых обладают тем свойством, что их обратные величины являются моментами положительной меры, аналитической на $(0, +\infty)$, нашел А. Ю. Попов[31].

Проблему Адамара (или, возможно точнее, Бореля–Адамара) на современном математическом языке можно сформулировать как проблему нахождения таких узких плотных классов функций, с помощью которых можно описывать как рост всех целых функций (или специальных

[28] Earl J. P., Hayman W. K. Smooth majorants for functions of arbitrarily rapid growth // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1991. – V. 109, № 3. – P. 565-569.

[29] Осколков В. А. О некоторых вопросах теории целых функций // Матем. сборник. – 1993. – Т. 184, № 1. –С. 129-148.

[30] Осколков В. А. Свойства функций, заданных значениями их линейных функционалов. – Дисс. . . . д.ф.-м.н. – М.: МГУ, 1994.

[31] Попов А. Ю. Об обращении обобщенного преобразования Бореля //Фундаментальная и прикладная математика. – 1999. – Т. 5, № 3. – С. 817-841.

подмножеств целых функций), так и скорость стремления к нулю их тейлоровских коэффициентов. Из вышесказанного видно, что решение задач, связанных с проблемой Адамара, возникшей более ста лет назад, остается актуальным и в настоящее время. Условие (0.7) дает точную асимптотическую оценку логарифма максимума модуля целой функции сверху, но во многих вопросах современного анализа важное значение приобрели и нижние оценки целых функций. Поэтому мы расширяем задачу Адамара, понимая под ее решением нахождение возможно более узких классов функций H таких, что для любой целой функции $f(z)$ дополнительно к (0.7) найдется $h_1(x) \in H$ с условием

$$\underline{\sigma}_f := \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h_1(r)} \in (0,\, \infty) \tag{0.9}$$

и с возможностью вычисления и этой величины по коэффициентам ряда Тейлора функции $f(z)$. Такие классы функций мы называем плотными классами двустороннего сравнения роста (верхнего и нижнего) во множестве всех целых функций. Более того, оценки относительного роста максимума модуля целой функции, определяемые формулами (0.7) и (0.9), можно уточнять и находить такие классы эталонных функций, в которых для любой целой функции $f(z)$ нашлись бы функции $\bar{h}(x)$ и $\bar{h}_1(x)$ со следующими условиями:

$$\varlimsup_{r\to+\infty} (\ln M_f(r) - \bar{h}(r)) = 0, \tag{0.10}$$

$$\varliminf_{r\to+\infty} (\ln M_f(r) - \bar{h}_1(r)) = 0. \tag{0.11}$$

Таким образом, под обобщенной проблемой Адамара мы понимаем отыскание возможно более узких классов функций, в которых для любой целой функции $f(z)$ нашлись бы функции, дающие точные двусторонние асимптотические оценки $\ln M_f(r)$ и тейлоровских коэффициентов $f(z)$, удовлетворяющих таким оценкам.

В силу известной теоремы Адамара для трансцендентной целой функции $f(z)$ функция $\varphi(x) = \ln M_f(e^x)$ является выпуклой и удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty. \tag{0.12}$$

Проблема Адамара оказалась связанной с регуляризацией и двусторонней аппроксимацией выпуклых функций и последовательностей, и для ее решения использовались результаты работ автора[32, 33, 34].

Обозначим через $\ln_k = \ln(\ln_{k-1})$ k-тую итерацию логарифма, а через $H_\gamma^{(k)}$ — класс положительных, возрастающих, бесконечно дифференцируемых строго выпуклых на $\mathbb{R}_+$ функций, удовлетворяющих условию

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\left(\ln_k\Phi(x)\ldots\left(\ln\Phi(x)\left(\frac{\Phi(x)\Phi''(x)}{[\Phi'(x)]^2}-1\right)-1\right)\ldots-1\right)\leqslant\gamma.$$

В пункте 2.1.1 параграфа 2.1 изучены основные свойства функций из классов $H_\gamma^{(k)}$. Результаты этого пункта применяются в п. 2.1.2 для установления формул, связывающих поведение максимума модуля целой функции с ростом максимального члена ее ряда Тейлора. В следующих разделах 2.1.3, 2.1.4 выводятся формулы для вычисления верхних и нижних характеристик роста целых функций в терминах функций сравнения и тейлоровских коэффициентов. Введем необходимые обозначения и сформулируем один из результатов.

Пусть $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n\, z^n$ — целая функция. Регуляризация Ньютона–Адамара коэффициентов f_n (обозначим ее F_n) строится следующим образом. Пусть $y=G(x)$, $x\geqslant 0$, — уравнение границы выпуклой оболочки точек $(n, -\ln|f_n|)$. Тогда $F_n = e^{-G(n)}$, $n\geqslant 0$. Для всех целых $n\geqslant 0$ выполняется неравенство $f_n\leqslant F_n$ со знаком равенства для бесконечного множества индексов. Обозначим через $H_0(x)=x-\frac{H(x)}{H'(x)}$ функцию, ассоциированная по Ньютону с $H(x)$.

Теорема 2.5 *Пусть функция $h(e^x) = H(x)\in H_1^{(k)}$ для некоторого $k\in\ \mathbb{N}$, $\beta(t)$ — обратная функция к $H'(x)$, $H_0(x)$ — функция, ассоциированная по Ньютону с $H(x)$, а $\omega(t)$ — функция, обратная к*

[32]Брайчев Г. Г. О сглаживании выпуклых функций. Обобщенная проблема Адамара // Актуальные проблемы математики, информатики, физики и математического образования. Юбилейный сборник к 70-летию кафедры математического анализа МПГУ. –М.: МПГУ, 2004. –С. 147-156.

[33]Брайчев Г. Г. О сглаживании выпуклых функций // Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2004. – Вып. 6. – С. 38-47.

[34]Брайчев Г. Г. Об одной проблеме Адамара и сглаживании выпуклых функций // Владикавказский математический журнал. – 2005. – Т. 7, № 3. – С. 11-25.

$\exp\{H_0(\beta(x))\}$. *Тогда справедливы формулы*

$$\sigma_f = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\omega\left(|f_n|^{-1/n}\right)} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\omega\left(F_n^{-1/n}\right)},$$

$$\underline{\sigma}_f = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{\omega\left(F_n^{-1/n}\right)}.$$

Различные формы решения проблемы Адамара содержатся в п. 2.1.5. Приведем, например, такой результат.

Теорема 2.9 *Пусть* $m \in \mathbb{N}$. *Для любой целой трансцендентной функции* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ *существуют функции* $\Psi_i(x) \in H_1^{(m)}$, $i = 1, 2$, *такие, что выполняются равенства*

$$\varlimsup_{x\to+\infty} (\ln M_f(e^x) - \Psi_2(x)) = 0\,, \qquad \varliminf_{x\to+\infty} (\ln M_f(e^x) - \Psi_1(x)) = 0\,,$$

а для коэффициентов f_n *верны соотношения*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|f_n| + \tilde{\Psi}_2(n)}{n} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln F_n + \tilde{\Psi}_2(n)}{n} = 0, \quad \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln F_n + \tilde{\Psi}_1(n)}{n} \geqslant 0.$$

Здесь $\tilde{\Psi}_i(y) = \sup\limits_{x\geqslant 0}\{yx - \Psi_i(x)\}$ *— сопряженная по Юнгу с* $\Psi_i(y)$ *функция,* $i = 1, 2$.

Заключительный параграф главы 2 посвящен исследованию зависимости роста целой функции нулевого порядка от роста ее нулей.

Пусть $f(z)$ — целая функция нулевого порядка и $f(0) = 1$. Считаем, что последовательность ее нулей $\Lambda_f = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ выписана с учетом кратностей и расположена в порядке возрастания модулей. Пусть далее $n_f(r) = \max\{n : |\lambda_n| \leqslant r\}$ и $N_f(r) = \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt$ — считающая и усредненная считающая функции этой последовательности соответственно. Построим новую целую функцию по правилу

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n}.$$

Согласно известной формуле Валирона логарифм максимального члена $\mu_F(r)$ этой функции совпадает с усредненной считающей функцией нулей $f(z)$, т. е.

$$\ln \mu_F(r) = \ln \frac{r^n}{|\lambda_0||\lambda_1|\cdots|\lambda_n|} = \int\limits_0^r \frac{n_F(t)}{t}\,dt = \int\limits_0^r \frac{n_f(t)}{t}\,dt = N_f(r).$$

Благодаря коэффициентному описанию роста целых функций, данному в предыдущем параграфе, установлена серия результатов для различных классов целых функций нулевого порядка. Напомним определения. Пусть $\rho(r)$ — уточненный по Валирону порядок, $\rho(r) \to \rho \geqslant 0$ при $r \to +\infty$. Пишем $h(r) \in L_\rho$, если функция $h(r) = r^{\rho(r)}$ возрастает и подчинена требованию

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{rh'(r)}{h(r)} = \rho.$$

Тип и нижний тип целой функции $f(z)$ при уточненном порядке $\rho(r)$ определяются равенствами (см. (0.7), (0.9))

$$T = T_h(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)}, \quad t = t_h(f) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)},$$

а верхняя и нижняя плотности и усредненные плотности последовательностей нулей Λ_f относительно функции $h(r)$ — соответственно равенствами

$$\overline{\Delta}_h(\Lambda_f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_f(r)}{rh'(r)}, \qquad \underline{\Delta}_h(\Lambda_f) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{n_f(r)}{rh'(r)},$$

$$\overline{\Delta}_h^*(\Lambda_f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_f(r)}{h(r)}, \qquad \underline{\Delta}_h^*(\Lambda_f) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_f(r)}{h(r)}.$$

Отправной точкой исследований служит следующая теорема.

Теорема 2.11. *Пусть $f(z)$ — целая функция нулевого рода, а функция $h(x) \in L_0$. Если верхняя плотность последовательности нулей Λ_f конечна, т. е. $\overline{\Delta}_h(\Lambda_f) < +\infty$ или, что то же самое, $\overline{\Delta}_h^*(\Lambda_f) < +\infty$, то справедливы равенства*

$$T_h(f) = \overline{\Delta}_h^*(\Lambda_f), \qquad t_h(f) = \underline{\Delta}_h^*(\Lambda_f). \tag{0.13}$$

Укажем, что эта теорема исправляет неточность в теореме 3 статьи[35].

[35] Осколков В. А. О некоторых вопросах теории целых функций // Матем. сборник. – 1993. – Т. 184, № 1. – С. 129-148.

Непосредственными следствиями теоремы 2.1.1 являются следующие два результата. Предполагается, что функция $h(r)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{r\,\ln r\,h'(r)}{h(r)}=\rho,\qquad \rho\geqslant 1. \tag{0.14}$$

Теорема 2.12. *Пусть функция $h(r)$ удовлетворяет условию (0.14) с константой $\rho=1$ и $\dfrac{h(r)}{r}$ строго возрастает. Пусть далее $f(z)$ — целая функция нулевого рода с нулями $\Lambda_f=\{\lambda_n\}$ и $\overline{\Delta}_h(\Lambda_f)<+\infty$. Тогда справедливы равенства*

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln M_f(r)}{h(r)}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln|\lambda_n|}{h(|\lambda_n|)},\qquad \varliminf_{r\to+\infty}\frac{\ln M_f(r)}{h(r)}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{n\ln|\lambda_n|}{h(|\lambda_n|)}.$$

В частности, при $h(r)=\ln r\ln^{\alpha}(\ln r)$, где $\alpha>0$, имеем

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln M_f(r)}{\ln r\ln^{\alpha}(\ln r)}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{\alpha}(\ln|\lambda_n|)},$$

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\ln M_f(r)}{\ln r\ln^{\alpha}(\ln r)}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{\alpha}(\ln|\lambda_n|)}.$$

Следующие два условия эквивалентны

$$\ln M_f(r)\sim T\ln r\ln^{\alpha}(\ln r),\ \ r\to+\infty,\quad \text{и}\quad \ln(\ln|\lambda_n|)\sim\left(\frac{n}{T}\right)^{1/\alpha},\ \ n\to\infty.$$

Теорема 2.16. *Пусть функция $h(x)$ удовлетворяет условию (0.14) с константой $\rho>1$ и $k(\zeta)$ — обратная функция к $\dfrac{h(e^x)}{x}$. Пусть, далее, целая функция $f(z)$ такова, что $\overline{\Delta}_h(\Lambda_f)<+\infty$, и $T_h(f)=T$, $t_h(f)=t$. Тогда имеют место соотношения*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{nk(n)}{\ln|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n|}=\frac{\rho}{\rho-1}\,(T\rho)^{\frac{1}{\rho-1}},\ \varliminf_{n\to\infty}\frac{nk(n)}{\ln|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n|}=\frac{\rho}{\rho-1}\,(t\rho)^{\frac{1}{\rho-1}},$$

$$(T\rho)^{\frac{1}{\rho-1}}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{k(n)}{\ln|\lambda_n|}\leqslant(a_2T\rho)^{\frac{1}{\rho-1}},\ (a_1T\rho)^{\frac{1}{\rho-1}}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{k(n)}{\ln|\lambda_n|}\leqslant(t\rho)^{\frac{1}{\rho-1}},$$

где a_1, a_2 ($a_1\leqslant 1\leqslant a_2$) являются корнями уравнения

$$\rho a+(1-\rho)a^{\rho/(\rho-1)}=\frac{t}{T}.$$

В частности, условия $\ln M_f(r)\sim Th(r)$ и $\ln|\lambda_n|\sim(T\rho)^{\frac{1}{1-\rho}}k(n)$ эквивалентны.

ГЛАВА 3 посвящена исследованию зависимости роста целой функции от распределения ее нулей на комплексной плоскости. Достаточно полно эта зависимость была изучена уже к середине прошлого века в случае „регулярно“ растущих функций с „правильно“ распределенными нулями (см. монографию Б. Я. Левина[14] и статьи А. Пфлюгера[36], а также работы А. А. Кондратюка[37], Н. В. Говорова[38], А. Ф. Гришина[39], К. Г. Малютина[40] и других математиков). Необходимо, однако, отметить, что ряд естественных задач, возникающих в теории аппроксимации, аналитического продолжения, теории операторов и других вопросах, содержательны в случае отсутствия „асимптотически правильного“ поведения появляющихся в ходе исследования целых функций. Решение именно таких задач сопряжено с экстремальными проблемами в различных классах целых функций, определяемых ограничениями как на рост, так и на расположение нулей.

Экстремальным задачам для характеристик роста целых функций (индикаторов и типов при обычном и уточненном порядках) посвящена обширная литература (см., к примеру, работы А. А. Гольдберга [41,42], А. А. Кондратюка [43,44,45]). Несколько специальных экстремальных задач было решено во второй половине прошлого века Б. Я. Левиным[14],

[36] Pfluger A. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen. // Comm. Math. Helv. – 1938. – V. 11. – P. 180-213; 1939. – V. 12. – P. 25-69.

[37] Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. Львов: Изд-во при Львовском ун-те, 1988. – 196 с.

[38] Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом М.: Наука, 1986. – 240 с.

[39] Гришин А. Ф. О множествах регулярного роста целых функций // Теория функций, функц. анализ и их прилож. Изд-во Харьковского ун-та. – 1983. – Вып. 40. – С. 36-47; 1984. – Вып. 41. – С. 39-55; 1984. – Вып. 42. – С. 37-43.

[40] Малютин К. Г. О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. I // Изв. РАН. Сер. матем. – 1995. – Т. 59, № 4. – С. 125-154; 1995. – Т. 59, № 5. – С. 103-126.

[41] Гольдберг А. А. Экстремальный индикатор для целой функции с положительными нулями // Сибирский матем.журнал. – 1962. – Т. 3, № 2. – С. 170-177.

[42] Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории целых функций. III, IV // Матем. сборник. – 1964. – Т. 65(107), № 3. – С. 414-453; 1965. – Т. 66(108), № 3. – С. 411-457.

[43] Кондратюк А. А. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями // Лит. матем. сб. – 1967. – Т. 7, № 1. – С. 79-117.

[44] Кондратюк А. А. Целые функции с положительными нулями, имеющими конечную максимальную плотность // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Республ. науч. сборник. Харьков. Изд-во Харьковского ун-та.) – 1968. – Вып. 7. – С. 37-52.

[45] Кондратюк А. А. Об экстремальном индикаторе целых функций с положительными нулями // Сибирский матем. журнал. – 1970. – Т. 11, № 5. – С. 1084-1092.

Н. В. Говоровым[46], М. И. Андрашко[47], Б. Н. Хабибуллиным[48], А. Ю. Поповым[49]. Интерес к этой тематике не утихает и в последнее десятилетие (см. [50,51,52] и недавнюю докторскую диссертацию В. Б. Шерстюкова[53]).

Работы последних двух авторов в цитируемом списке непосредственно примыкают к теме диссертационного исследования. Остановимся на этом подробнее.

Каждую целую функцию порядка $\rho \in (0,\,1)$ с нулями $\Lambda = \{\lambda_n\}$ согласно хорошо известной теореме Адамара можно представить в виде канонического произведения

$$L_\Lambda(z) = cz^m \prod_{|\lambda_n|>0} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

В статье[52] А. Ю. Поповым была поставлена и решена задача о нахождении для положительных последовательностей $\Lambda = \{\lambda_n\}$ и фиксированного числа $\beta > 0$ экстремальной величины

$$s(\beta;\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(L_\Lambda) :\ \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\}.$$

(Мы придерживаемся принятых ранее обозначений

$\sigma_\rho(L_\Lambda) := \varlimsup\limits_{r\to+\infty} r^{-\rho} \ln \max\limits_{|z|=r} |L_\Lambda(z)|, \qquad \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \varlimsup\limits_{t\to+\infty} t^{-\rho} n_\Lambda(t)).$

Приведем основной результат этой работы.

Теорема (А. Ю. Попов). *При любых $\rho \in (0,\,1)$ и $\beta > 0$ справедливо равенство*

$$s(\beta;\rho) = \beta\, C(\rho), \qquad C(\rho) = \max_{a>0}\ a^{-\rho} \ln(1+a). \tag{0.15}$$

[46]Говоров Н. В. Екстремальний індикатор цілої функції з додатними нулями заданої верхньої та нижньої густини // Доповіді АН УРСР. – 1966. – № 2. – С. 148-150.

[47]Андрашко М. І. Екстремальний індикатор цілої функції порядку меньше одиниці з додатними нулями // Доповіді АН УРСР. – 1960. – № 7. – С. 869-872.

[48]Хабибуллин Б. Н. О типе целых и мероморфных функций // Матем. сборник. – 1992. – Т. 183, № 11. – С. 35-44.

[49]Попов А. Ю. О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. – 1999. – № 5. – С. 48-52.

[50]Eremenko A., Yuditskii P. An extremal problem for a class of entire functions of exponential type // arXiv:0807.2054V1 [math. CV] 13 Jul 2008.

[51]Хабибуллин Б. Н. Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции // Матем. сборник. – 2009. – Т. 200, № 2. – С. 129-158.

[52]Попов А. Ю. Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. – 2005. – № 1. – С. 31–36.

[53]Шерстюков В. Б. Асимптотические свойства целых функций, корни которых лежат в некотором угле. — Дисс. … д.ф.-м.н. — М.: МГУ. – 2017.

Нижняя грань $s(\beta;\rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности положительных чисел.

Позднее в работе[53] было получено решение следующей более общей экстремальной задачи, также поставленной А. Ю. Поповым. Для заданных чисел $\rho \in (0,\,1)$ и $\alpha\,,\beta,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta < +\infty$, требуется найти величину

$$s(\alpha\,,\beta\,;\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(L_\Lambda) :\ \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda) \geqslant \alpha,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\}.$$

Теорема (В. Б. Шерстюков). *Для произвольного $\rho \in (0,\,1)$ и любых чисел $\alpha \geqslant 0$ и $\beta > 0$ $(\alpha \leqslant \beta)$ справедливо равенство*

$$s(\alpha\,,\beta\,;\rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau.$$

Нижняя грань $s(\alpha\,,\beta\,;\rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности $\Lambda_0 \subset \mathbb{R}_+$, у которой $\underline{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda_0) = \alpha$ и $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_0) = \beta$.

Результаты § 3.1 являются развитием исследований[52, 53], предоставляя точные оценки для ρ-типа целой функции порядка $\rho \in (0,\,1)$ через усредненные (или дискретно усредненные) ρ-плотности последовательности нулей $\Lambda = \{\lambda_n\}$, определяемые равенствами

$$\overline{\underline{\Delta}}^{\,*} = \overline{\underline{\Delta}}^{\,*}_{\rho}(\Lambda) = \overline{\underline{\lim}}_{r\to\infty} r^{-\rho} N_\Lambda(r), \quad \widetilde{\underset{\sim}{\Delta}} = \overline{\underline{\lim}}_{n\to\infty} \frac{N(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho}.$$

Условие $\overline{\Delta}^{\,*} = \underline{\Delta}^*$ $(=:\ \Delta^*)$ характеризует измеримые последовательности, а равенство $\underset{\sim}{\Delta} = \widetilde{\Delta}$ — дискретно измеримые (при показателе ρ).

Известно, что целые функции порядка $\rho \in (0,\,1)$ с измеримой последовательностью нулей имеют наибольший тип среди всех целых функций с фиксированной верхней ρ-плотностью положительных нулей, равный

$$\sigma = \frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho} = \frac{\pi\rho\Delta^*}{\sin\pi\rho}.$$

Возникают естественные вопросы: насколько может уменьшиться величина типа целой функции с положительными нулями, если последовательность ее нулей неизмерима? Что если такая последовательность дискретно измерима?

Ответы на поставленные вопросы содержатся в решении следующих экстремальных задач.

При фиксированных $\rho \in (0,\,1)$, $\beta^* > 0$ и $\alpha^* \in [0,\,\beta^*]$ найти величины

$$s^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) := \inf \left\{ \sigma_\rho(L_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\, \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha^*,\, \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^* \right\},$$

$$\widetilde{s}(\alpha^*, \beta^*; \rho) := \inf \left\{ \sigma_\rho(L_\Lambda) :\ \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \widetilde{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha^*,\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^* \right\}.$$

Как показано в пп. 3.1.1–3.1.3, эти две величины совпадают (теоремы 3.1, 3.3, см. также[54]).

Теорема 3.1, 3.3. *При заданных $\rho \in (0,\,1)$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0,\,\beta^*]$ справедливы равенства*

$$s^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) = \widetilde{s}(\alpha^*, \beta^*; \rho) = \rho \left(\frac{\pi\alpha^*}{\sin \pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{a a_1^{1/\rho}}^{a a_2^{1/\rho}} \frac{\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1}\, d\tau \right),$$

где $a_1 = a_1(\alpha^*, \beta^*)$ и $a_2 = a_2(\alpha^*, \beta^*)$ — корни уравнения

$$a \ln \frac{e}{a} = \alpha^* / \beta^*, \qquad a_1 \leqslant 1 \leqslant a_2. \tag{0.16}$$

Нижняя грань $\widetilde{s}(\alpha^*, \beta^*; \rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности положительных чисел Λ_0 с характеристиками

$$\widetilde{\Delta}_\rho(\Lambda_0) = \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_0) = \alpha^* \quad \text{и} \quad \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_0) = \beta^*.$$

Для $\alpha^* = 0$ отсюда вытекает такое следствие.

Теорема 3.4. *При фиксированных $\rho \in (0,\,1)$ и $\beta^* > 0$ справедлива точная, достижимая оценка*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant C(\rho)\rho e \beta^*,$$

где величина $C(\rho)$ определена в (0.15).

Нахождение наименьшего возможного ρ-типа целых функций с неизмеримыми нулями, лежащими на одном луче, имеет принципиальное значение не только для внутреннего развития теории целых функций,

[54] Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. О росте целых функций с дискретно измеримыми нулями // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91, № 5. – С. 674-690.

но и представляет интерес в проблеме нахождения радиуса полноты систем экспонент[55,49,56,51].

В каждой из приведенных экстремальных задач ответ дается с помощью неэлементарных функций. В пп. 3.1.6, 3.1.7 устанавливаются некоторые свойства величины наименьшего возможного ρ-типа целой функции с положительными нулями. Именно, в обозначениях $k^* := \dfrac{\alpha^*}{\beta^*}$ и

$$C^*(k^*,\rho) := \frac{\pi\rho\, k^*}{\sin\pi\rho} + \rho \max_{b>0} \int\limits_{ba_1^{1/\rho}}^{ba_2^{1/\rho}} \frac{b^{-\rho} - k^*\tau^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau$$

устанавливается возрастание и выпуклость по параметру k^* величины $C^*(k^*,\rho)$. Приводятся ее точные равномерные двусторонние оценки, выводятся и анализируются асимптотические формулы при $\rho \to 0$.

Следующим естественным шагом является изучение роста целых функций с нулями, расположенными не на одном, а на нескольких лучах или в угле. На базе основного результата § 3.1, в §§ 3.2, 3.3.4 найдено наименьшее возможное значение типа при порядке $\rho \in (0,m)$ целых функций с нулями заданных верхней и нижней плотностей или усредненных плотностей, расположенными на m лучах, делящих плоскость на равные углы. В § 3.3 определяется наименьшее значение типа целых функций с нулями, имеющими заданные верхнюю и нижнюю усредненные плотности. При этом предполагается, что нули лежат либо в некотором угле, либо между двумя прямыми, либо на нескольких правильно расположенных лучах, а также на некоторых более широких множествах (см.[57]). Совсем недавно А. Ю. Попов[58] определил наименьший возможный тип при порядке $\rho \in (0,\,1)$ целых функций с нулями заданной верхней плотности, расположенными в некотором угле, а В. Б. Шерстю-

[55] Malliavin P., Rubel L. A. On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France. – 1961. – V. 89. – P. 175-206.

[56] Хабибуллин Б. Н. Полнота систем экспонент и множества единственности. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2006. – 172+XVI с.

[57] Брайчев Г. Г. Наименьший тип целой функции с корнями заданных усредненных плотностей, расположенными на лучах или в угле // Матем. сборник. – 2016. – Т. 207, № 2. – С. 45–80.

[58] Попов А. Ю. Развитие теоремы Валирона-Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ-плотностью корней // Труды крымской осенней матем. школы-симпозиума, СМФН. – 2013. – Т. 49. – С. 132–164.

ков[59] решил такую же задачу с дополнительным условием на нижнюю плотность нулей.

В пп. 3.3.1, 3.3.2 исследуется случай, когда нули целой функции обладают заданными усредненными ρ-плотностями и распределены в угле

$$\Gamma_\theta := \{z \in \mathbb{C} : \, |\arg z| \leqslant \theta\} \,,$$

а в п. 3.3.3 рассмотрено более общее распределение нулей на комплексной плоскости. Чтобы сформулировать результаты во всей общности дадим необходимые определения (см. замечание 3.2 диссертации).

Пусть $\theta \in [0, \pi/2)$. Будем говорить, что последовательность Λ принадлежит классу $\tilde{\Gamma}_\theta$ и писать $\Lambda \in \tilde{\Gamma}_\theta$, если при любом $\theta' > \theta$ часть последовательности Λ, не лежащая в угле $\Gamma_{\theta'}$, имеет нулевую ρ-плотность, или, что эквивалентно, нулевую усредненную ρ-плотность.

Будем писать $\Lambda \in \tilde{\Gamma}_{\pi/2}$, если часть последовательности Λ, не лежащая в угле $\Gamma_{\pi/2}$, имеет нулевую (усредненную) ρ-плотность.

Пусть $k^* \in [0, 1]$ и a_1, a_2 ($a_1 \leqslant 1 \leqslant a_2$) — корни уравнения $a \ln \dfrac{e}{a} = k^*$. Обозначим

$$C^*_\theta(k^*, \rho) := \frac{\pi k^*}{\sin \pi\rho} \cos \rho\theta \; + \; \max_{a>0} \int\limits_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(a^{-\rho} - k^* t^{-\rho})(t + \cos\theta)}{t^2 + 2t\cos\theta + 1} \, dt. \qquad (0.17)$$

Главным результатом пп. 3.3.1 — 3.3.3 является следующая теорема.

Теорема 3.14. *Пусть $\theta \in [0, \pi/2]$. Тип каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями $\Lambda_f \in \tilde{\Gamma}_\theta$, имеющими верхнюю и нижнюю усредненные ρ-плотности $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) \geqslant \alpha^*$, удовлетворяет точной оценке*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \rho\, \beta^*\, C^*_\theta(k^*, \rho), \qquad k^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*}, \qquad (0.18)$$

где величина $C^*_\theta(k^*, \rho)$ определена в (0.17).

Равенство достигается на некоторой целой функции с нулями $\tilde{\Lambda}$, лежащими на лучах $\gamma_{\pm\theta} := \{z \in \mathbb{C} : \, \arg z = \pm\theta\}$ и имеющими усредненные ρ-плотности $\underline{\Delta}^*_\rho(\tilde{\Lambda}) = \alpha^*$, $\overline{\Delta}^*_\rho(\tilde{\Lambda}) = \beta^*$.

[59] Шерстюков В. Б. Минимальное значение типа целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$, все нули которой лежат в угле и имеют заданные плотности // Уфимск. матем. журн. – 2016. – Т. 8, № 1. – С. 113–126.

Полагая в этой теореме $\alpha^* = 0$, получаем следующий результат.

Теорема 3.11. *Тип каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями $\Lambda_f \in \tilde{\Gamma}_\theta$, $2\theta \in [0,\pi]$, и имеющими верхнюю усредненную ρ-плотность β^*, удовлетворяет оценке*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\beta^* e\rho}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a\cos\theta + 1)}{a^\rho}. \tag{0.19}$$

Существует целая функция, нули которой образуют последовательность $\Lambda_0 \subset \gamma_\theta \cup \gamma_{-\theta}$ с верхней усредненной ρ-плотностью $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_0) = \beta^*$, реализующая равенство в этой оценке.

Отметим, что при $\theta = 0$ из теоремы 3.14 следует обобщение результата, доказанного в п. 3.1.1 для целых функций с положительными нулями, значительно расширяя множество комплексной плоскости, где могут располагаться все их нули. Например, при сохранении прочих условий теоремы, оценка для ρ-типа остается точной и для целых функций с нулями, лежащими в полуполосе $\{z = x + iy : x \geqslant 0, |y| \leqslant b\}$ при любом $b > 0$, или даже находящимися во множестве $\left\{z = x + iy : x \geqslant |y|^\delta\right\}$, $\delta > 1$.

В следующем параграфе подробно рассмотрены наиболее интересные для приложений случаи расположения нулей целых функций на одной прямой; между двумя параллельными или пересекающимися прямыми. Показано также, что разработанные методы позволяют давать точные оценки снизу не только для типа $\sigma_\rho(f)$, являющегося глобальной характеристикой роста целой функции, но и для ее индикатрисы

$$h_\rho(f,\varphi) := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\left|f(re^{i\varphi})\right|}{r^\rho}, \qquad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

описывающей рост по направлениям. Здесь можно выделить следующий результат.

Теорема 3.19. *Пусть $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0,\beta^*]$, и $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \in (0,1)$ с отрицательными нулями Λ_f усредненных ρ-плотностей $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) \geqslant \alpha^*$. Тогда для каждого значения $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ справедлива точная оценка*

$$h_\rho(f,\theta) \geqslant \rho\,\beta^*\,C_\theta^*(k^*,\rho), \qquad k^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*}, \tag{0.20}$$

где величина $C^*_\theta(k^*,\rho)$ *определена в* (0.17).

Существует целая функция с отрицательными нулями Λ_0 *усредненных* ρ*-плотностей* $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_0)=\beta^*$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_0)=\alpha^*$, *индикатор которой при всех* $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *доставляет равенство в* (0.20).

Завершается параграф описанием свойств экстремальной величины $C^*_\theta(k^*,\rho)$ из (0.17) и ее двусторонними оценками.

Следующий параграф посвящен экстремальным задачам для нижнего ρ-типа целой функции, определяемого равенством

$$\underline{\sigma}_\rho(f)=\varliminf_{r\to+\infty} r^{-\rho}\ln\max_{|z|=r}|f(z)|\,.$$

В. С. Азарин в работе [60] (см. также обзор [61]) показал, что целая функция с измеримой последовательностью нулей может не иметь совершенно регулярного роста модуля, т. е. величины ее ρ-типа и нижнего ρ-типа могут не совпадать. Для полноценного описания поведения даже таких функций $f(z)$ с известной плотностью нулей требуется знать точный диапазон изменения не только ρ-типа $\sigma_\rho(f)$, но и нижнего ρ-типа $\underline{\sigma}_\rho(f)$. Исследованию экстремальных задач, включающих нижний индикатор и нижний тип целых функций при заданном диапазоне изменения плотностных характеристик нулей, посвящены работы А. А. Гольдберга[42], А. А. Кондратюка[45], В. С. Азарина[62]. Однако, самым естественным задачам, связанным с нижним типом при фиксированных значениях плотностей, уделялось гораздо меньше внимания. Проведенные исследования показали, что экстремальные значения для нижнего типа обладают рядом неожиданных свойств, совершенно отличных от свойств экстремальных значений для верхнего типа.

Параграф 3.5 посвящен нахождению точных двусторонних оценок нижнего ρ-типа целой функции с положительными или произвольно расположенными на плоскости нулями заданных усредненных

[60] Азарин В. С. О регулярности роста функционалов на целых функциях // Теория функций, функциональный анализ и их прил. – Харьков, 1972. – Вып. 16. – С. 109-137.

[61] Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В. Целые и мероморфные функции // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 85. (Комплексный анализ. Одна переменная–1.) – М.: ВИНИТИ, 1991. – С. 5-186.

[62] Азарин В. С. Об экстремальных задачах на целых функциях // Теория функций, функциональный анализ и их прил. – Харьков, 1973. – Вып. 18. – С. 18-50.

ρ-плотностей (см.[63]).

В п. 3.5.1 доказано, что наименьшие возможные значения нижнего ρ-типа как в случае произвольного расположения нулей на плоскости, так и в случае расположения нулей на одном луче, не зависят от верхней усредненной ρ-плотности. Этот вывод следует из теорем 3.26, 3.27.

Теорема 3.26. *Пусть $\rho \in (0,1)$. Для любых фиксированных чисел $\alpha^* \geqslant 0$ и $\beta^* \geqslant \alpha^*$ справедливы равенства*

$$\inf\left\{\underline{\sigma}_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^*\right\} =$$

$$= \inf\left\{\underline{\sigma}_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^*,\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \leqslant \beta^*\right\} = \alpha^*.$$

При любом значении $\beta^* \geqslant \alpha^*$ существует последовательность $\widetilde{\Lambda} \subset \mathbb{C}$ с усредненными ρ-плотностями $\underline{\Delta}^*_\rho(\widetilde{\Lambda}) = \alpha^*$ и $\overline{\Delta}^*_\rho(\widetilde{\Lambda}) = \beta^*$, на которой нижние грани достигаются.

Теорема 3.27. *Пусть $\rho \in (0,1)$. Для любых фиксированных чисел $\alpha^* \geqslant 0$ и $\beta^* \geqslant \alpha^*$ справедливы равенства*

$$\inf\left\{\underline{\sigma}_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^*\right\} =$$

$$\inf\left\{\underline{\sigma}_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^*,\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \leqslant \beta^*\right\} = \frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\,\alpha^*.$$

При любом значении $\beta^* \geqslant \alpha^*$ существует возрастающая последовательность $\widetilde{\Lambda} \subset \mathbb{R}_+$ с усредненными ρ-плотностями $\underline{\Delta}^*_\rho(\widetilde{\Lambda}) = \alpha^*$ и $\overline{\Delta}^*_\rho(\widetilde{\Lambda}) = \beta^*$, на которой нижние грани достигаются.

В п. 3.5.2 установлено, что наибольший возможный нижний ρ-тип целой функции не зависит от расположения нулей на плоскости, но зависит от обеих усредненных ρ-плотностей. Точнее, верна теорема.

Теорема 3.28. *Для любого $\rho \in (0,1)$ и любых фиксированных чисел $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0,\beta^*]$ справедливы равенства*

$$\sup\left\{\underline{\sigma}_\rho(f):\Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^*,\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \leqslant \beta^*\right\} =$$

$$= \sup\left\{\underline{\sigma}_\rho(f):\Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^*,\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \leqslant \beta^*\right\} =: \underline{S}^*(\alpha^*,\beta^*;\rho),$$

[63]Брайчев Г.Г. Точные границы величины нижнего типа целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями заданных усредненных плотностей // Уфимский математический журнал. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 34-60.

$$\underline{S}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) = \rho\,\beta^* \left(\frac{\pi}{\sin \pi\rho} - \sup_{b>0}\, \rho \int\limits_{b a_2^{-\frac{1}{\rho}}}^{b a_1^{-\frac{1}{\rho}}} \tau^{-\rho-1} \ln \frac{\tau+1}{b+1}\, d\tau \right),$$

где b_1, b_2 *— корни уравнения* $b \ln \dfrac{e}{b} = \alpha^* / \beta^*$ $(0 \leqslant b_1 \leqslant 1 \leqslant b_2 \leqslant e)$. *Верхние грани достигаются на некоторой возрастающей последовательности* $\widetilde{\Lambda}$, *у которой* $\underline{\Delta}^*_\rho(\widetilde{\Lambda}) = \alpha^*$ и $\overline{\Delta}^*_\rho(\widetilde{\Lambda}) = \beta^*$.

В последнем пункте 3.5.3 анализируется экстремальная величина $\underline{S}^*(\alpha^*,\, \beta^*;\, \rho)$ из теоремы 3.28. В частности, получены ее двусторонние оценки и установлено, что $\sup\limits_{\beta^* \geqslant \alpha^*} \underline{S}^*(\alpha^*,\, \beta^*;\, \rho) = +\infty$. Это доказывает невозможность получения оценки сверху нижнего ρ-типа целой функции только через нижнюю усредненную ρ-плотность ее корней.

В заключительном параграфе 3.6 приводятся непосредственные приложения полученных результатов к теоремам единственности. Приведем результат с нижними характеристиками роста целых функций. Для положительных чисел ρ, σ через через $\underline{E}_{[\rho,\sigma)}$ обозначим класс целых функций $f(z)$, имеющих нижний ρ-тип $\underline{\sigma}_\rho(f) < \sigma$.

Теорема 3.31. *Пусть* $\sigma > 0$, $\rho \in (0,\, 1)$. *Если целая функция* $f(z)$ *с положительными корнями принадлежит* $\underline{E}_{[\rho,\sigma)}$ *и обращается в нуль (с учетом кратности) на последовательности* Λ, *имеющей усредненную нижнюю* ρ*-плотность*

$$\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \geqslant \frac{\sigma\, \sin \pi\rho}{\pi\rho}, \tag{0.21}$$

то $f \equiv 0$ *на* $\mathbb{C}$. *Утверждение перестает быть верным, если правую часть в* (0.21) *заменить на любую меньшую величину.*

В заключение выражаю искреннюю благодарность А. Ю. Попову и А. М. Седлецкому, чье влияние на исследования автора невозможно переоценить. Автор также благодарен А. В. Абанину, И. В. Тихонову, В. Б. Шерстюкову за плодотворные обсуждения полученных результатов. Диссертация не приняла бы свой окончательный вид без помощи при ее оформлении В. Б. Шерстюкова, ему — особая признательность и благодарность.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Брайчев, Г. Г. Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. – М. : Прометей, 2005. – 233 с.

2. Брайчев, Г. Г. Точные оценки типа целой функции порядка меньше единицы с нулями на луче заданных усредненных плотностей // Доклады Академии наук. – 2012. – Т. 445. – № 6. – С. 615–617.

3. Брайчев, Г. Г., Шерстюков, В. Б. О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0,\,1)$ с положительными нулями // Известия РАН. Серия. Математическая. – 2011. – Т. 75. – № 1. – С. 3–28.

4. Брайчев, Г. Г. Наименьший тип целой функции с корнями заданных усредненных плотностей, расположенными на лучах или в угле // Математический сборник. – 2016. – Т. 207. – № 2. – С. 45–80.

5. Брайчев, Г. Г. Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0,\,1)$ с положительными корнями заданных усредненных плотностей // Математический сборник. – 2012. – Т. 203. – № 7. – С. 31–56.

6. Брайчев, Г. Г. Точные оценки типов целых функций с нулями на лучах // Математические заметки. – 2015. – Т. 97. – № 4. – С. 503–515.

7. Брайчев, Г. Г., Шерстюков, В. Б. О росте целых функций с дискретно измеримыми нулями // Математические заметки. – 2012. – Т. 91. – № 5. – С. 674–690.

8. Брайчев, Г. Г., Шерстюкова, О. В. Наибольший возможный нижний тип целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями фиксированных ρ-плотностей // Математические заметки. – 2011. – Т. 90. – № 2. – С. 199–215.

9. Брайчев, Г. Г. Индекс лакунарности // Математические заметки. – 1993. – Т. 53. – № 6. – С. 3–10.

10. Брайчев, Г. Г. Двусторонние оценки относительного роста функций и их производных // Уфимский математический журнал. – 2017. – Т. 9. – № 3. – С. 18–26.

11. Брайчев, Г. Г. Точные границы величины нижнего типа целой функции порядка $\rho \in (0,\ 1)$ с нулями заданных усредненных плотностей // Уфимский математический журнал. – 2015. – Т. 7. – № 4. – С. 34–60.

12. Брайчев, Г. Г. Точные соотношения между некоторыми характеристиками роста последовательностей // Уфимский математический журнал. – 2013. – Т. 5. – № 4. – С. 17–30.

13. Брайчев Г. Г. Точные оценки типов целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ нулями на луче // Уфимский математический журнал. – 2012. – Т. 4. – № 1. – С. 29–37.

14. Брайчев, Г. Г. Об одной проблеме Адамара и сглаживании выпуклых функций // Владикавказский математический журнал. – 2005. – Т. 7. – № 3. – С. 11–25.

15. Брайчев, Г. Г., Шерстюкова, О. В. Об одной экстремальной задаче для нижнего типа целой функции порядка $\rho \in (0,\ 1)$ // Математический форум. Т. 3. Исследования по математическому анализу. – Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО-А, 2009. – С. 48–54.

16. Брайчев, Г. Г. Об асимптотическом поведении выпуклых функций и их производных // Исследования по современному анализу и математическому моделированию. – Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО-А, 2008. – С. 21–29.

17. Брайчев, Г. Г. Вычисление индикатора целой функции дробного порядка по ее коэффициентам Тейлора // Украинский математический журнал. – 1993. – Т. 45. – № 6. – С. 854–858.

18. Брайчев, Г. Г. О методах оценок выпуклых функций // Математичні студіі. Праці Львівского математичного товариства. – 2009. – Т. 31. – № 1. – С. 29–36.

19. Брайчев, Г. Г. О некоторых особенностях роста максимального члена, центрального индекса и коэффициентов Тейлора целой функции // Известия вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. – 1982. – № 3. – С. 29–32.

20. Брайчев, Г. Г. Об индексе лакунарности множества, определяющего рост целой функции конечного порядка // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2002. – № 3. – С. 122–123.

21. Брайчев, Г. Г. О некоторых характеристиках аналитических функций логарифмического роста // Теория операторов и субгармонические функции. – Киев: Наукова думка, 1991. – С. 12–24.

22. Брайчев, Г. Г. О сглаживании выпуклых функций // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Выпуск 6: Периодический межвузовский сборник научно-методических работ. – Киров : Изд-во ВятГУ, 2004. – С. 38–47.

23. Braichev, G. G., Sherstyukov, V. B. On an Extremal Problem Related to the Completeness of a System of Exponentials in the Disk // Asian-European Journal of Mathematics. – 2008. – V. 1. – № 1. – P. 15–26.

24. Braichev, G. G. On comparative increase of relations of convex functions and their derivatives // National Academy of Sciences of Azerbaijan. Proceedings of institute of mathematics and mechanics. – Bacu, 2002. – V. XVII (XXV). – P. 38–50.

Экстремальные задачи в теории относительного роста выпуклых и целых функций

Брайчев Г. Г.

В диссертации предложены новые подходы к получению точных двусторонних равномерных и асимптотических оценок относительного роста выпуклых функций и последовательностей. На этой основе решен ряд трудных экстремальных задач о наименьшем значении типов и нижних типов целых функций конечного порядка, нули которых имеют заданные верхнюю и нижнюю усредненные плотности и распределены в одном или нескольких углах, а также на более общих областях комплексной плоскости.

Extremal problems in the theory of relative growth of convex and entire functions

Braychev G. G.

In the thesis new approaches to obtaining exact two-sided uniform and asymptotic estimates of the relative growth of convex functions and sequences are proposed. On this basis, a number of difficult extremal problems on the smallest value of types and lower types of entire functions of finite order whose zeros have given upper and lower averaged densities and are distributed in one or several angles, and also on more general areas of the complex plane are solved.