На правах рукописи

Плужникова Елена Александровна

# ВЕКТОРНЫЕ НАКРЫВАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЯВНОГО ВИДА

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук





МОСКВА – 2013

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии
института математики, физики и информатики
Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина

Научный руководитель:

Жуковский Евгений Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, директор института математики, физики и информатики Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина

Официальные оппоненты:

Аваков Евгений Рачиевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН

Безяев Владимир Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры дифференциальных уравнений и математической физики Российского университета дружбы народов

Ведущая организация:

Воронежский государственный университет

Защита состоится «19» ноября 2013 года в 16.00 на заседании диссертационного совета Д 212.203.27 при Российском университете дружбы народов по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 495а.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского университета дружбы народов.

Автореферат разослан «25» сентября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Россовский Леонид Ефимович

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Математический аппарат классической теории нелинейных дифференциальных уравнений явного вида, позволяющий исследовать многочисленные нелинейные модели явлений, процессов различной природы, давно создан, широко и эффективно применяется. Гораздо большие сложности представляет ситуация, когда при математическом описании необходимо учитывать зависимость параметров модели от скорости изменения состояния объектов. В этом случае модель представляет собой нелинейные дифференциальные уравнения неявного вида (не разрешенные относительно производной). Примерами таких задач являются неголономные механические системы[1], модели электрического колебательного контура[2].

Основным методом исследования дифференциальных уравнений неявного вида является использование теорем о неявных функциях. Однако, эти теоремы не применимы в случае, если по соответствующему аргументу порождающая дифференциальное уравнение функция не является гладкой, или ее производная вырождена. Разрешая такое уравнение относительно производной, можно свести его к дифференциальному включению, однако получаемое многозначное отображение часто не обладает свойствами, позволяющими применять классические утверждения о дифференциальных включениях. В литературе практически отсутствуют методы исследования ряда важнейших вопросов теории дифференциальных уравнений неявного вида, в том числе рассмотренных в диссертации краевых задач, систем управления. Новые возможности изучения дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, мы связываем с интенсивно развивающейся в последнее время теорией накрывающих отображений.

Утверждения о липшицевых возмущениях накрывающих отображений стали важным инструментом нелинейного анализа[3], позволили получить ряд новых результатов о существовании, продолжаемости решений, корректности дифференциального уравнения, не разрешенного относитель-

---

[1] *Закалюкин И.В.* Особенности уравнений динамики некоторых неголономных систем и неявные дифференциальные уравнения. Автореферат дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01 [Место защиты: Московский авиационный институт (государственный технический университет)]. М., 2010.

[2] *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. С. 145, 148.

[3] *Mordukhovich B.S., Wang B.* Restrictive metric regularity and generalized differential calculus in Banach spaces // Maths. Math. Science. 50. 2004. P. 2650–2683.

*Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. No. 1. P. 105–127.

но производной[4], интегральных уравнений Volterra[5], начать изучение задач управления для таких уравнений[6]. Так как краевые задачи и задачи управления сводятся к системам уравнений и включений (содержащим кроме дифференциальных уравнений еще начальные и краевые условия, ограничения на управления и пр.), то разрабатываемые схемы и методы их исследования потребовали распространения теорем о липшицевых возмущениях на векторные накрывающие отображения. Полученные в диссертации утверждения о возмущениях векторных условно накрывающих отображений позволяют исследовать вопросы разрешимости и корректности краевых задач и задач управления для систем дифференциальных уравнений неявного вида, получить оценки их решений.

**Цель работы.** Основной целью диссертации является исследование задачи Коши, краевых задач и задач управления для систем обыкновенных дифференциальных уравнений неявного вида, получение условий существования, непрерывной зависимости от параметров решений и нахождение их оценок. Ставится задача получить утверждения о липшицевых возмущениях векторных накрывающих отображений метрических пространств и разработать на их основе методы исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений неявного вида.

**Методика исследования.** В диссертации применяются методы функционального анализа, общей топологии, теории многозначных отображений, теории дифференциальных уравнений, теории управления. Предлагается новый подход к исследованию краевых задач и задач управления для дифференциальных уравнений неявного вида, использующий представление дифференциальных уравнений, начальных и краевых условий, ограничений на управление в виде системы операторных уравнений, и основанный на полученных в диссертации результатах о липшицевых возмущениях векторных накрывающих отображений и признаке накрывания оператора Немыцкого.

**Научная новизна.** Все полученные результаты являются новыми. Основными результатами диссертации являются:

---

[4] *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

*Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.

[5] *Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S., Zhukovskii S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 75. 2012. P. 1026–1044.

[6] *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1561–1570.

1) теоремы о липшицевых возмущениях векторного условно накрывающего отображения метрических пространств (представляющие условия разрешимости и корректности системы операторных уравнений, порождаемых векторным отображением, накрывающим по диагональной переменной и липшицевым по остальным переменным);

2) признаки накрывания оператора Немыцкого, действующего в пространствах суммируемых с любой степенью функций;

3) условия существования и непрерывной зависимости от параметров, оценки решений задачи Коши для систем дифференциальных уравнений неявного вида;

4) условия существования и непрерывной зависимости от параметров, оценки решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений неявного вида;

5) условия существования и непрерывной зависимости от параметров, оценки решений управляемых систем со смешанными ограничениями на управление, описываемых дифференциальными уравнениями неявного вида.

**Теоретическая значимость.** Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты востребованы в теории дифференциальных уравнений, могут также использоваться в исследовании разрешимости, корректности математических моделей, нахождении оценок их решений. Разработанные в диссертации методы исследования могут быть применены к краевым задачам и задачам управления для функционально-дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной искомой функции.

**Апробация работы.** Результаты диссертации обсуждались на следующих семинарах: городской научный семинар по функционально-дифференциальным уравнениям и включениям под руководством профессора А.И. Булгакова (Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина); научный семинар по нелинейному анализу под руководством профессора В.В. Обуховского (Воронеж, ВГУ); научный семинар кафедры оптимального управления факультета ВМК под руководством профессора Ф.П. Васильева (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова); совместное заседание научного семинара кафедры дифференциальных уравнений и математической физики по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством профессора А.Л. Скубачевского и научного семинара кафедры нелинейного анализа и оптимизации под руководством профессора А.В. Арутюнова (Москва, РУДН). Результаты диссертации были представлены на следующих конференциях: международная научная конференция «Современные физико-математические и информационные методы в естествознании, технике и гуманитарных науках» (Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина, 18–22.10.2010); 42-ая всероссийская молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, Институт математики и механики УрО РАН, 28.01–8.02.2011); международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы» (Москва, совместное заседание Московского математического общества и семинара имени И.Г. Петровского, 30.05–4.06.2011); международная научная конференция «Тихоновские чтения» (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 14.06.2011); the 8th Congress of the ISAAC (Moscow, Peoples' Friendship University of Russia, August 22–27, 2011); международная научная конференция «Колмогоровские чтения - V. Общие проблемы управления и их приложения» (Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина, 10–14.10.2011); всероссийская научная конференция с международным участием «Математическая теория управления и математическое моделирование» (Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова, 15–18.05.2012); XII международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, 5–8.06.2012); V международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (Воронеж, ВГУ, 11–16.09.2012).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 16 печатных работ $\big($[1] – [16]$\big)$, из них 9 — в журналах, входящих в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций $\big($[1] – [9]$\big)$.

**Структура и объем диссертации.** Работа состоит из введения, перечня используемых обозначений, двух глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы, содержащего 45 наименований. Общий объем диссертации — 94 страницы.

## Краткое содержание работы

**Во введении** формулируются цели исследования, дается обзор литературы по исследуемой проблематике, обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, кратко излагаются основные результаты, выносимые на защиту.

**В главе 1** исследованы свойства накрывающих и условно накрывающих отображений метрических пространств, доказаны утверждения о липшицевых возмущениях векторных накрывающих отображений, получены условия накрывания оператора Немыцкого. Эти результаты — основа исследования дифференциальных уравнений неявного вида, предпринятого в главе 2 диссертации.

Основной объект исследования в главе 1 — это система уравнений

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где при всех $i$ отображение $F_i$, действующее из произведения $\prod_{j=1}^n X_j$ метрических пространств $X_j$ в метрическое пространство $Y_i$, является накрывающим по диагональной $i$-й переменной $x_i$ и липшицевым по остальным переменным. Идея исследования наиболее наглядна для системы (1) в простейшем случае, когда $Y_i = X_i$ — линейные полные метрические пространства, отображение $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i - G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где отображение $G_i$ по каждой $j$-й переменной удовлетворяет условию Липшица с константой $\beta_{ij}$, $i, j = \overline{1,n}$. В этом случае система (1) принимает вид

$$x_i = G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + y_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Положим $B = (\beta_{ij})_{n\times n}$ и определим метрическое пространство $X = \prod_{j=1}^n X_j$ с расстоянием между элементами $x = (x_j)_{j=\overline{1,n}}$ и $u = (u_j)_{j=\overline{1,n}}$, равным $\rho_X(x,u) = \left|\left(\rho_{X_1}(x_1,u_1), \rho_{X_2}(x_2,u_2), \ldots, \rho_{X_n}(x_n,u_n)\right)\right|$, где монотонную норму $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^n$ можем выбирать[7] так, чтобы значение $|B|$ было достаточно близким к спектральному радиусу $\varrho(B)$. Таким образом, если $\varrho(B) < 1$, то отображение $G = (G_1, G_2, \ldots, G_n) : X \to X$ будет сжимающим и, следовательно, существует единственное решение системы (2), к которому будут сходиться последовательные приближения (подробнее о распространении принципа Банаха на векторные отображения см. работу А.И. Перова[8]).

Приведем основные определения и результаты § 1.1. Пусть $(X, \rho_X)$, $(Y, \rho_Y)$ — метрические пространства. Обозначим через $B_X(x,r)$ замкнутый шар с центром в точке $x$ радиуса $r > 0$ в пространстве $X$. Пусть заданы число $\alpha > 0$ и отображение $\Psi : X \to Y$.

**Определение 1.**[9] Отображение $\Psi$ называется *$\alpha$-накрывающим* (*накрывающим*), если для любых $r > 0$ и $u \in X$ имеет место включение

$$\Psi(B_X(u,r)) \supseteq B_Y(\Psi(u), \alpha r).$$

[7] *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969. С. 15–16.

[8] *Перов А.И.* Обобщенный принцип сжимающих отображений // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2005. № 1. С. 196–207.

[9] *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

Отображение $\Psi$ является $\alpha$-накрывающим тогда и только тогда, когда для любых $u \in X$ и $y \in Y$ существует $x \in X$, удовлетворяющий уравнению $\Psi(x) = y$ и оценке

$$\rho_X(x, u) \leqslant \alpha^{-1}\rho_Y(y, \Psi(u)). \tag{3}$$

**Определение 2.**[10] Если для любых $r > 0$ и $u \in X$ имеет место включение $\Psi(B_X(u, r)) \supseteq B_Y(\Psi(u), \alpha r) \cap \Psi(X)$, то отображение $\Psi$ называют *условно $\alpha$-накрывающим (условно накрывающим)*.

Отображение $\Psi$ является условно $\alpha$-накрывающим тогда и только тогда, когда для любых $u \in X$ и $y \in \Psi(X)$ существует $x \in X$, удовлетворяющий уравнению $\Psi(x) = y$ и оценке (3).

В пространстве $\mathbb{R}^n$ вещественных $n$-мерных векторов будем считать заданной норму $|\cdot|$, обладающую свойством монотонности. Пусть заданы метрические пространства $(X_j, \rho_{X_j})$, $(Y_j, \rho_{Y_j})$, точки $y_j \in Y_j$, $j = \overline{1, n}$, и определены отображения $\Phi_i : X_i \times \prod_{j=1}^{n} X_j \to Y_i$, $i = \overline{1, n}$. Рассмотрим систему уравнений

$$\Phi_i(x_i, x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

относительно неизвестного $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{j=1}^{n} X_j$.

Определим метрическое пространство $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$ с расстоянием между элементами $x = (x_j)_{j=\overline{1,n}} \in X$ и $u = (u_j)_{j=\overline{1,n}} \in X$, равным

$$\rho_X(x, u) = \Big|\big(\rho_{X_1}(x_1, u_1), \rho_{X_2}(x_2, u_2), \ldots, \rho_{X_n}(x_n, u_n)\big)\Big|. \tag{5}$$

Аналогично определим метрику в $Y = \prod_{j=1}^{n} Y_j$.

Пусть заданы числа $\alpha_i > 0$, $\beta_{ij} \geqslant 0$, $i, j = \overline{1, n}$. Определим матрицу

$$C = (\alpha_i^{-1}\beta_{ij})_{n \times n}$$

и обозначим через $\varrho(C)$ ее спектральный радиус.

**Теорема 1.** *Пусть метрические пространства $X_j$, $j = \overline{1, n}$, являются полными и выполнены следующие условия:*

*для всех $x \in X$ отображение $\Phi_i(\cdot, x) : X_i \to Y_i$, $i = \overline{1, n}$, условно $\alpha_i$-накрывающее и имеет место включение $y_i \in \Phi_i(X_i, x)$;*

*при любых $i, j = \overline{1, n}$, $u_i \in X_i$, $x_1 \in X_1$, …, $x_{j-1} \in X_{j-1}$, $x_{j+1} \in X_{j+1}$, …, $x_n \in X_n$ отображение $\Phi_i(u_i, x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n) : X_j \to Y_i$ является $\beta_{ij}$-липшицевым;*

[10] *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

*для любой сходящейся последовательности* $\{u^k\} \subset X$, $u^k \to u$, *такой что* $\Phi_i(u_i^k, u) \to y_i$ $\forall i = \overline{1,n}$, *имеет место равенство* $\Phi_i(u_i, u) = y_i$ $\forall i = \overline{1,n}$.

*Тогда если* $\varrho(C) < 1$, *то система уравнений* (4) *разрешима и, кроме того, для любого* $\varepsilon > 0$ *можно так определить норму* $|\cdot|$ *в пространстве* $\mathbb{R}^n$, *что при задании метрики в* $X$ *равенством* (5) *для произвольного* $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0) \in X$ *существует решение* $x = \xi \in X$ *системы* (4), *удовлетворяющее оценке*

$$\rho_X(\xi, u^0) \leqslant \left(\frac{1}{1-\varrho(C)} + \varepsilon\right) \left| \left( \frac{\rho_{Y_j}\big(y_j, \Phi_j(u_j^0, u^0)\big)}{\alpha_j} \right)_{j=\overline{1,n}} \right|. \tag{6}$$

Далее рассмотрены частные случаи теоремы 1 при $n = 1, 2$ и приведен пример, из которого следует, что в оценке (6) нельзя принять $\varepsilon = 0$.

В § 1.2 исследован вопрос о корректности системы (4) в следующей постановке. Пусть задана последовательность $\{y_m = (y_{im})_{i=\overline{1,n}}\} \subset Y$ и определены отображения $\Phi_{im} : X_i \times X \to Y_i$, $i = \overline{1,n}$, $m = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим при каждом $m = 1, 2, \ldots$ систему операторных уравнений

$$\Phi_{im}(x_i, x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_{im}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

относительно неизвестного $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$. Предположим, что для некоторого элемента $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0) \in X$ при $m \to \infty$ имеет место сходимость

$$\rho_{Y_i}\big(\Phi_{im}(u_i^0, u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0), y_{im}\big) \to 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Нас интересуют условия, обеспечивающие разрешимость при любом $m$ системы (7) и сходимость к $u^0$ последовательности решений.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

**Теорема 2.** *Пусть пространства* $X_j$, $j = \overline{1,n}$, *являются полными, для каждых* $i, j = \overline{1,n}$ *существуют такие числа* $\alpha_i > 0$, $\beta_{ij} \geqslant 0$, *что для спектрального радиуса матрицы* $C = (\alpha_i^{-1}\beta_{ij})_{n\times n}$ *имеет место оценка* $\varrho(C) < 1$ *и выполнены следующие условия:*

*для всех* $x \in X$ *отображение* $\Phi_{im}(\cdot, x) : X_i \to Y_i$, $i = \overline{1,n}$, $m = 1, 2, \ldots$, *условно* $\alpha_i$*-накрывающее и* $y_{im} \in \Phi_{im}(X_i, x)$;

*при любых* $i, j = \overline{1,n}$, $m = 1, 2, \ldots$, *и произвольных* $u_i \in X_i$, $x_1 \in X_1, \ldots, x_{j-1} \in X_{j-1}$, $x_{j+1} \in X_{j+1}, \ldots, x_n \in X_n$ *отображение* $\Phi_{im}(u_i, x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n) : X_j \to Y_i$ $\beta_{ij}$*-липшицево;*

*для любой сходящейся последовательности* $\{u^k\} \subset X$, $u^k \to u$, *такой что при* $k \to \infty$ *имеет место сходимость* $\rho_{Y_i}\big(\Phi_{im}(u_i^k, u), y_{im}\big) \to 0$,

$\forall i = \overline{1,n}$, $m = 1,2,\ldots$, *выполнено равенство* $\Phi_{im}(u_i, u) = y_{im}$, $\forall i = \overline{1,n}$, $m = 1,2,\ldots$.

*Тогда если имеет место соотношение* (8), *то при каждом* $m$ *существует такое решение* $\xi^m \in X$ *системы* (7), *что* $\xi^m \to u^0$.

Далее в § 1.2 рассмотрены частные случаи теоремы 2 — утверждения о корректности скалярного уравнения и системы двух уравнений.

Для применения теорем 1, 2 к исследованию систем обыкновенных дифференциальных уравнений неявного вида требуются условия накрывания оператора Немыцкого в функциональных пространствах. В § 1.3 сформулировано и доказано утверждение о накрывании оператора Немыцкого в пространствах суммируемых с любой степенью функций.

Обозначим через $\mathrm{cl}(\mathbb{R}^l)$ совокупность всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^l$. Пусть задано $p \in [1,\infty]$ и определено измеримое многозначное отображение $\Omega : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^l)$, для которого функция $t \in [a,b] \mapsto \rho_{\mathbb{R}^l}(0,\Omega(t)) \in \mathbb{R}$ суммируема в $p$-й степени при $p < \infty$ и существенно ограничена при $p = \infty$. Определим следующие полные метрические пространства: $L_p([a,b],\Omega)$ — пространство функций $t \in [a,b] \mapsto y(t) \in \Omega(t)$, суммируемых в $p$-й степени, если $1 \leqslant p < \infty$, с метрикой $\rho_{L_p}(y_1,y_2) = \left(\int\limits_a^b |y_1(s) - y_2(s)|^p ds\right)^{1/p}$, и, в случае $p = \infty$, пространство существенно ограниченных функций, $\rho_{L_\infty}(y_1,y_2) = \operatorname{vrai\,sup}_{s\in[a,b]} |y_1(s) - y_2(s)|$, $AC_p([a,b],\Omega)$ — пространство таких абсолютно непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^l$, что $\dot{x} \in L_p([a,b],\Omega)$, с метрикой $\rho_{AC_p}(x_1,x_2) = \left|\left(\rho_{L_p}(\dot{x}_1,\dot{x}_2),\, x_1(a) - x_2(a)\right)\right|$.

Пусть заданы числа $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$ и определены измеримые многозначные отображения $\Omega : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^{l_1})$, $\Theta : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^{l_2})$ такие, что $\rho_{\mathbb{R}^{l_1}}(0,\Omega(\cdot)) \in L_{p_1}([a,b],\mathbb{R})$, $\rho_{\mathbb{R}^{l_2}}(0,\Theta(\cdot)) \in L_{p_2}([a,b],\mathbb{R})$. Пусть, далее, задана функция $(t \in [a,b],\, x \in \Omega(t)) \mapsto g(t,x) \in \Theta(t)$, удовлетворяющая условиям Каратеодори. В случае $p_1 \neq \infty$ относительно функции $g$ будем предполагать, что существуют $\eta \in L_{p_2}([a,b],\mathbb{R})$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $y \in \Omega(t)$ выполнено неравенство $|g(t,y)| \leqslant \lambda |y|^{p_1/p_2} + \eta(t)$. Если $p_1 = \infty$, то при любом $r > 0$ пусть существует такая функция $\eta_r \in L_{p_2}([a,b],\mathbb{R})$, что $|g(t,y)| \leqslant \eta_r(t)$ при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $y \in \Omega(t)$ таких, что $|y| \leqslant r$. При выполнении этих условий оператор Немыцкого $N_g : L_{p_1}([a,b],\Omega) \to L_{p_2}([a,b],\Theta)$, $(N_g y)(t) = g(t,y(t))$, в случае $p_1 \neq \infty$ является непрерывным и ограниченным, а при $p_1 = \infty$ — замкнутым и ограниченным.

**Теорема 3.** *Пусть существует такое* $\alpha_g > 0$, *что при почти всех* $t \in [a,b]$ *отображение* $g(t,\cdot) : \Omega(t) \to \Theta(t)$ *условно* $\alpha_g$*-накрывающее. Тогда оператор Немыцкого* $N_g : L_{p_1} \to L_{p_2}$ *будет условно* $\alpha_N$*-накры-*

*вающим, где* $\alpha_N = (b-a)^{-(p_2-p_1)/(p_1p_2)}\alpha_g$, *в частности, при* $p_1 = p_2$ *константы накрывания равны:* $\alpha_N = \alpha_g$, *в случае* $p_1 < p_2 = \infty$ *выполнено равенство* $\alpha_N = (b-a)^{-1/p_1}\alpha_g$. *Аналогично, если при почти всех* $t \in [a,b]$ *отображение* $g(t,\cdot) : \Omega(t) \to \Theta(t)$ $\alpha_g$*-накрывающее, то оператор Немыцкого* $N_g : L_{p_1} \to L_{p_2}$ *будет* $\alpha_N$*-накрывающим.*

**Глава 2** посвящена изучению задачи Коши, краевой задачи и задачи управления для дифференциальных уравнений неявного вида. Метод исследования основан на представлении дифференциальных уравнений, начальных и краевых условий, ограничений на управление и динамическую переменную в виде системы операторных уравнений относительно пары векторов $(\dot{x}, x(a))$ или, в случае задач управления, тройки векторов $(\dot{x}, x(a), u)$, где $\dot{x}$ — вектор, компоненты которого — производные искомых функций, $x(a)$ — вектор начальных значений, $u$ — вектор-функция управления. При этом результаты § 1.3 позволяют найти условия накрывания отображений по соответствующим переменным, а утверждения из § 1.1, § 1.2 — исследовать полученные системы операторных уравнений.

В § 2.1 рассмотрена задача Коши.

Пусть для всех $i = \overline{1,n}$ заданы измеримые многозначные отображения $\Omega_i, \Theta_i : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R})$, определены удовлетворяющие условиям Каратеодори функции $f_i : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие что $f_i(t, x, \Omega_i(t)) \subset \Theta_i(t)$ при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x \in \mathbb{R}^n$, а также функции $t \in [a,b] \mapsto y_i(t) \in \Theta_i(t)$ и числа $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$f_i(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_i(t)) = y_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{9}$$

с начальными условиями

$$x_i(a) = \gamma_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Пусть заданы числа $1 \leqslant p_{1i} \leqslant p_{2i} \leqslant \infty$, $i = \overline{1,n}$. Будем предполагать при всех $i = \overline{1,n}$, что $\rho_{\mathbb{R}}(0, \Omega_i(\cdot)) \in L_{p_{1i}}([a,b], \mathbb{R})$, $\rho_{\mathbb{R}}(0, \Theta_i(\cdot)) \in L_{p_{2i}}([a,b], \mathbb{R})$, $y_i \in L_{p_{2i}}([a,b], \Theta_i)$.

Пусть, далее, для всех тех $i = \overline{1,n}$, при которых $p_{1i} \neq \infty$, функция $f_i$ удовлетворяет условию

$\mathcal{F}_p)$ при любом $r > 0$ существуют такие $\eta_i \in L_{p_{2i}}([a,b], \Theta_i)$ и $\lambda_i \in \mathbb{R}$, что при почти всех $t \in [a,b]$, любых $x \in \mathbb{R}^n$, таких, что $|x| \leqslant r$, и всех $w_i \in \Omega_i(t)$ справедливо неравенство $|f_i(t, x, w_i)| \leqslant \lambda_i |w_i|^{p_{1i}/p_{2i}} + \eta_i(t)$.

Для всех $i$, при которых $p_{1i} = \infty$, предполагаем, что выполнено

$\mathcal{F}_\infty)$ при любом $r > 0$ существует такая функция $\eta_i \in L_{p_{2i}}([a,b], \Theta_i)$, что при почти всех $t \in [a,b]$, любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $w_i \in \Omega_i(t)$, таких, что $|w_i| + |x| \leqslant r$, имеем $|f_i(t,x,w_i)| \leqslant \eta_i(t)$.

Решение задачи Коши (9), (10) будем искать в классе абсолютно непрерывных функций $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : [a, a+\tau] \to \mathbb{R}^n$, компоненты которых $x_i \in AC_{p_{1i}}([a,a+\tau], \Omega_i)$, $i = \overline{1,n}$, $\tau \in (0, b-a]$.

Пусть заданы непрерывная функция $x^0 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ и $\sigma > 0$. Положим $D(t) = B_{\mathbb{R}^n}\bigl(x^0(t), \sigma\bigr)$.

**Теорема 4.** *Предположим, что если $p_{1i_0} = 1$ при некотором $i_0$, то $p_{1i} \neq \infty$ при всех остальных номерах $i$. Пусть справедливо неравенство $|x^0(a) - \gamma| < \sigma$. Пусть при каждом $i = \overline{1,n}$ для почти всех $t \in [a,b]$ и любых $w_i \in \Omega_i(t)$, $x \in D(t)$ отображение $f_i(t,x,\cdot) : \Omega_i(t) \to \Theta_i(t)$ условно накрывающее; отображение $f_i(t,\cdot,w_i) : D(t) \to \Theta_i(t)$ липшицево; имеет место включение $y_i(t) \in f_i\bigl(t,x,\Omega_i(t)\bigr)$. Тогда существует $\tau \in (0, b-a]$ и существует определенное на $[a,a+\tau]$ решение $x \in \prod_{j=1}^n AC_{p_{1j}}([a,a+\tau],\Omega_j)$ задачи* (9), (10).

Также в § 2.1 исследована проблема непрерывной зависимости от параметров решений задачи Коши (9), (10).

Пусть заданы последовательность удовлетворяющих условиям Каратеодори функций $f_{im} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, таких что $f_{im}\bigl(t,x,\Omega_i(t)\bigr) \subset \Theta_i(t)$ при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x \in \mathbb{R}^n$, функции $t \in [a,b] \mapsto y_{im}(t) \in \Theta_i(t)$ и числа $\gamma_{im} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, $m = 1,2,\ldots$ . Рассмотрим последовательность задач Коши

$$f_{im}\bigl(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_i(t)\bigr) = y_{im}(t), \quad x_i(a) = \gamma_{im}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{11}$$

По-прежнему, считаем заданными числа $1 \leqslant p_{1i} \leqslant p_{2i} \leqslant \infty$, $i = \overline{1,n}$. Предполагаем, что $y_{im} \in L_{p_{2i}}([a,b],\Theta_i)$ при любом натуральном $m$; далее, что при значениях $p_{1i} \neq \infty$, функция $f_{im}$ удовлетворяет условию $\mathcal{F}_p$), а в случае $p_{1i} = \infty$ — условию $\mathcal{F}_\infty$).

Пусть для некоторой функции $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, компоненты которой $x_i^0 \in AC_{p_{1i}}([a,b],\Omega_i)$, для всех $i = \overline{1,n}$ при $m \to \infty$ имеют место соотношения

$$\rho_{L_{p_{2i}}}\Bigl(f_{im}\bigl(\cdot, x^0(\cdot), \dot{x}_i^0(\cdot)\bigr),\ y_{im}(\cdot)\Bigr) \to 0, \quad \gamma_{im} \to x_i^0(a). \tag{12}$$

Пусть задано число $\sigma > 0$. Положим $D(t) = B_{\mathbb{R}^n}\bigl(x^0(t), \sigma\bigr)$.

**Теорема 5.** *Предположим, что если $p_{1i_0} = 1$ при некотором $i_0$, то $p_{1i} \neq \infty$ при всех остальных номерах $i$. Пусть существуют такие $\alpha_i > 0$, $\beta_{ij} \geqslant 0$, $i,j = \overline{1,n}$, что при каждых $i = \overline{1,n}$, $m = 1,2,\ldots$ отображение $\bigl(t \in [a,b], x \in D(t), w_i \in \Omega_i(t)\bigr) \mapsto f_{im}(t,x,w_i) \in \Theta_i(t)$ удовлетворяет следующим условиям: при почти всех $t$ и любых $x$*

*отображение $f_{im}(t,x,\cdot)$ условно $\alpha_i$-накрывающее и выполнено включение $y_{im}(t) \in f_{im}(t,x,\Omega_i(t))$; при почти всех $t$, любых $w_i$, произвольного номера $j = \overline{1,n}$ и всех $(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$ отображение $f_{im}(t,x_1,\dots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\dots,x_n,w_i)$ $\beta_{ij}$-липшицево. Тогда если имеет место соотношение (12), то, начиная с некоторого номера, при каждом натуральном $m$ существует определенное на всем $[a,b]$ решение $\xi^m \in \prod_{j=1}^n AC_{p_{1j}}([a,b],\Omega_j)$ задачи (11) такое, что $\xi^m \to x^0$.*

В § 2.2 исследована краевая задача.

Пусть для всех $i = \overline{1,n}$ заданы числа $P_i$, $Q_i$ и $\Delta_i$. Рассмотрим при $t \in [a,b]$ систему дифференциальных уравнений (9) с краевыми условиями

$$P_i x_i(a) + Q_i x_i(b) = \Delta_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{13}$$

По-прежнему, считаем, что заданы числа $1 \leqslant p_{1i} \leqslant p_{2i} \leqslant \infty$ и выполнены включения $y_i \in L_{p_{2i}}([a,b],\Theta_i)$, $i = \overline{1,n}$. Пусть, далее, для тех $i$, при которых $p_{1i} \neq \infty$, функция $f_i$ удовлетворяет условию $\mathcal{F}_p$). Для значений $i$, при которых $p_{1i} = \infty$, будем предполагать выполненным условие $\mathcal{F}_\infty$).

Решение краевой задачи (9), (13) будем искать в классе абсолютно непрерывных функций $x = (x_1,x_2,\dots,x_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, компоненты $x_i$ которых принадлежат пространству $AC_{p_{1i}}([a,b],\Omega_i)$.

**Теорема 6.** *Пусть при каждом $i = \overline{1,n}$ выполнены следующие условия: $P_i + Q_i \neq 0$; существует такое $\alpha_i > 0$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $f_i(t,x,\cdot) : \Omega_i(t) \to \Theta_i(t)$ условно $\alpha_i$-накрывающее и имеет место включение $y_i(t) \in f_i(t,x,\Omega_i(t))$; для каждого $j = \overline{1,n}$ существует $\beta_{ij} \geqslant 0$, для которого при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $w_i \in \Omega_i(t)$, $(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ отображение $f_i(t,x_1,\dots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\dots,x_n,w_i) : \mathbb{R} \to \Theta_i(t)$ $\beta_{ij}$-липшицево. Тогда если $2n \times 2n$-матрица $C = (C_{ij})_{i,j=1,2}$, где*

$$C_{11} = \left(\frac{(b-a)^{(p_{1i}p_{1j}-p_{1i}+p_{1j})/(p_{1i}p_{1j})}\beta_{ij}}{((p_{1j}p_{2i}-p_{2i}+p_{1j})/p_{1j})^{1/p_{2i}}\alpha_i}\right)_{n\times n}, \quad C_{12} = \left(\frac{(b-a)^{1/p_{2i}}\beta_{ij}}{\alpha_i}\right)_{n\times n},$$
$$C_{21} = \operatorname{diag}\left\{\frac{(b-a)^{(p_{1i}-1)/p_{1i}}|Q_i|}{|P_i+Q_i|}\right\}_{n\times n}, \qquad C_{22} = (0)_{n\times n}, \tag{14}$$

*имеет спектральный радиус $\varrho(C) < 1$, то существует решение $x \in \prod_{i=1}^n AC_{p_{1i}}([a,b],\Omega_i)$ краевой задачи (9), (13) и, кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ можно так определить норму $|\cdot|$ в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, что при задании метрики в $X \doteq \prod_{i=1}^n AC_{p_{1i}}([a,b],\Omega_i)$ равенством*

$$\rho_X(u,x) = \left|\left(\rho_{L_{p_{11}}}(\dot{x}_1,\dot{u}_1),\dots,\rho_{L_{p_{1n}}}(\dot{x}_n,\dot{u}_n),|x_1(a)-u_1(a)|,\dots,|x_n(a)-u_n(a)|\right)\right|$$

*для произвольного* $x^0 \in X$ *существует решение* $x = \xi \in X$ *краевой задачи* (9), (13), *удовлетворяющее оценке*

$$\rho_X(\xi, u^0) \leqslant \left(\frac{1}{1-\varrho(C)} + \varepsilon\right) \left|\left( \frac{\rho_{L_{p_{21}}}(y_1, y_1^0)(b-a)^{(p_{21}-p_{11})/(p_{11}p_{21})}}{\alpha_1}, \dots \right.\right.$$
$$\left.\left. \dots, \frac{\rho_{L_{p_{2n}}}(y_n, y_n^0)(b-a)^{(p_{2n}-p_{1n})/(p_{1n}p_{2n})}}{\alpha_n}, \frac{|\Delta_1 - \Delta_1^0|}{|P_1+Q_1|}, \dots, \frac{|\Delta_n - \Delta_n^0|}{|P_n+Q_n|} \right)\right|,$$

*где* $y_i^0(t) = f_i\big(t, x^0(t), \dot{x}_i^0(t)\big)$, $\Delta_i^0 = P_i x_i^0(a) + Q_i x_i^0(b)$, $i = \overline{1,n}$.

Далее исследован вопрос непрерывной зависимости от параметров решений краевых задач.

Пусть при каждом $m = 1, 2, \dots$ заданы удовлетворяющие условиям Каратеодори функции $f_{im} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие что $f_{im}\big(t, x, \Omega_i(t)\big) \subset \Theta_i(t)$ при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1,n}$. Пусть, далее, заданы функции $t \in [a,b] \mapsto y_i(t) \in \Theta_i(t)$ и числа $P_{im}$, $Q_{im}$, $\Delta_i$, $i = \overline{1,n}$, $m = 1, 2, \dots$. Рассмотрим при $t \in [a,b]$ последовательность краевых задач

$$f_{im}\big(t, x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_i(t)\big) = y_i(t), \quad P_{im} x_i(a) + Q_{im} x_i(b) = \Delta_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Пусть заданы числа $1 \leqslant p_{1i} \leqslant p_{2i} \leqslant \infty$, $i = \overline{1,n}$, и $y_i \in L_{p_{2i}}([a,b], \Theta_i)$. Далее предполагается, что если $p_{1i} \neq \infty$, то функция $f_{im}$ удовлетворяет условию $\mathcal{F}_p$), а в случае $p_{1i} = \infty$ — условию $\mathcal{F}_\infty$).

Пусть для некоторой функции $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с компонентами $x_i^0 \in AC_{p_{1i}}([a,b], \Omega_i)$ для всех $i = \overline{1,n}$ при $m \to \infty$ имеют место соотношения

$$\rho_{L_{p_{2i}}}\Big(f_{im}\big(\cdot, x^0(\cdot), \dot{x}_i^0(\cdot)\big),\ y_i(\cdot)\Big) \to 0, \quad P_{im} x_i^0(a) + Q_{im} x_i^0(b) \to \Delta_i. \tag{16}$$

**Теорема 7.** *Пусть при каждом* $i = \overline{1,n}$ *выполнены следующие условия: существуют такие числа* $P_i$, $Q_i$, *что*

$$|P_{im} + Q_{im}| \geqslant |P_i + Q_i| > 0, \quad \frac{|Q_{im}|}{|P_{im} + Q_{im}|} \leqslant \frac{|Q_i|}{|P_i + Q_i|}, \quad m = 1, 2, \dots;$$

*найдется такое* $\alpha_i > 0$, *что для каждого* $m = 1, 2, \dots$ *при почти всех* $t \in [a,b]$ *и любых* $x \in \mathbb{R}^n$ *отображение* $f_{im}(t, x, \cdot) : \Omega_i(t) \to \Theta_i(t)$ *условно* $\alpha_i$*-накрывающее и имеет место включение* $y_i(t) \in f_{im}\big(t, x, \Omega_i(t)\big)$; *для каждого* $j = \overline{1,n}$ *существует такое* $\beta_{ij} \geqslant 0$, *что при всех* $m = 1, 2, \dots$, *почти всех* $t \in [a,b]$ *и любых* $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $w_i \in \Omega_i(t)$ *отображение*

$$f_{im}(t, x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_n, w_i) : \mathbb{R} \to \Theta_i(t)$$

*$\beta_{ij}$-липшицево; для спектрального радиуса матрицы* (14) *выполнено неравенство $\varrho(C) < 1$. Тогда если имеют место соотношения* (16), *то при каждом $m = 1, 2, \ldots$ существует такое решение $x = \xi^m \in \prod_{i=1}^{n} AC_{p_{1i}}$ задачи* (15), *что $\xi^m \to x^0$.*

В § 2.3 исследованы управляемые дифференциальные системы со смешанными ограничениями на управление и дополнительными ограничениями на производную решения.

Пусть заданы $\gamma \in \mathbb{R}^n$, измеримые многозначные отображения $\Omega : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$, $U : [a,b] \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$, $V : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^{l_2})$ такие, что функции $t \in [a,b] \mapsto \rho_{\mathbb{R}^n}(0, \Omega(t))$, $\rho_{\mathbb{R}^k}(0, U(t))$, $\rho_{\mathbb{R}^{l_2}}(0, V(t)) \in \mathbb{R}$ существенно ограничены. Пусть определены удовлетворяющие условиям Каратеодори функции $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{l_1}$, $g : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{l_2}$, относительно которых, кроме того, предполагаем, что для любого $r > 0$ существует такое $R > 0$, что при почти всех $t \in [a,b]$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \Omega(t)$, $u \in U(t)$, удовлетворяющих условию $|x|+|z|+|u| \leqslant r$, имеют место неравенства $|f(t,x,z,u)| \leqslant R$, $|g(t,x,u)| \leqslant R$.

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{gathered} f\big(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)\big) = 0, \quad x(a) = \gamma, \\ u(t) \in U(t), \quad g\big(t, x(t), u(t)\big) \in V(t), \\ \dot{x}(t) \in \Omega(t), \quad t \in [a,b]. \end{gathered} \tag{17}$$

Управление $u(\cdot)$ будем предполагать существенно ограниченным, а $x(\cdot)$ будем искать в классе абсолютно непрерывных функций, имеющих существенно ограниченную производную. Соответственно, *локальным решением* управляемой системы называем пару $(x, u) \in AC_\infty([a, a+\tau], \Omega) \times L_\infty([a, a+\tau], U)$, удовлетворяющую уравнениям и включениям (17) при почти всех $t \in [a, a+\tau]$, $\tau \in (0, b-a]$. Управляемую систему называют *локально разрешимой*, если она имеет локальное решение.

Пусть заданы непрерывная функция $x^0 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ и $\sigma > 0$. Положим $D(t) = B_{\mathbb{R}^n}\big(x^0(t), \sigma\big)$.

**Теорема 8.** *Пусть справедливо неравенство $|\gamma - x^0(a)| < \sigma$ и при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x \in D(t)$, $z \in \Omega(t)$, $u \in U(t)$ выполнены следующие условия: отображения $f(t,x,\cdot,u) : \Omega(t) \to \mathbb{R}^{l_1}$, $g(t,x,\cdot) : U(t) \to \mathbb{R}^{l_2}$ условно накрывающие; отображения $f(t,\cdot,z,u) : D(t) \to \mathbb{R}^{l_1}$, $f(t,x,z,\cdot) : U(t) \to \mathbb{R}^{l_1}$, $g(t,\cdot,u) : D(t) \to \mathbb{R}^{l_2}$ липшицевы; имеет место включение $0 \in f\big(t,x,\Omega(t),u\big)$. Тогда если при почти всех $t \in [a,b]$ множество $\Big(\bigcap_{x \in D(t)} g\big(t,x,U(t)\big)\Big) \bigcap V(t)$ не пусто, то управляемая система* (17) *локально разрешима.*

В диссертации также получена оценка решения управляемой системы

(17), следующая из неравенства (6). Эта оценка применяется для исследования корректности управляемой дифференциальной системы (17).

Пусть заданы числа $\gamma_m \in \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, \ldots$, измеримые многозначные отображения $\Omega : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$, $U : [a,b] \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$, $V_m : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^{l_2})$ такие, что $t \in [a,b] \mapsto \rho_{\mathbb{R}^n}(0, \Omega(t))$, $\rho_{\mathbb{R}^k}(0, U(t))$, $\rho_{\mathbb{R}^{l_2}}(0, V_m(t)) \in \mathbb{R}$ — существенно ограниченные функции при $m = 1, 2, \ldots$. Пусть, далее, при любом $m = 1, 2, \ldots$ определены удовлетворяющие условиям Каратеодори функции $f_m : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{l_1}$, $g_m : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{l_2}$, относительно которых, кроме того, предполагаем, что для любого $r > 0$ существует такое $R_m > 0$, что при почти всех $t \in [a,b]$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \Omega(t)$, $u \in U(t)$, удовлетворяющих условию $|x| + |z| + |u| \leqslant r$, имеют место неравенства $|f_m(t,x,z,u)| \leqslant R_m$, $|g_m(t,x,u)| \leqslant R_m$.

Рассмотрим последовательность управляемых систем

$$\begin{gathered} f_m\big(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)\big) = 0, \quad x(a) = \gamma_m, \\ u(t) \in U(t), \quad g_m\big(t, x(t), u(t)\big) \in V_m(t), \quad m = 1, 2, \ldots, \\ \dot{x}(t) \in \Omega(t), \quad t \in [a,b]. \end{gathered} \tag{18}$$

Пусть для некоторой пары $(x^0, u^0) \in AC_\infty([a,b], \Omega) \times L_\infty([a,b], U)$ имеют место соотношения

$$\begin{gathered} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [a,b]} \big| f_m\big(t, x^0(t), \dot{x}^0(t), u^0(t)\big) \big| \to 0, \quad \gamma_m \to x^0(a), \\ H_m(t) = \Big( \bigcap_{x \in D(t)} g_m\big(t, x, U(t)\big) \Big) \bigcap V_m(t) \neq \varnothing, \\ \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [a,b]} \varrho_{\mathbb{R}^{l_2}} \Big( g_m\big(t, x^0(t), u^0(t)\big),\ H_m(t) \Big) \to 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Сформулируем условия, обеспечивающие существование при любом натуральном $m$ такого решения $(x_m, u_m) \in AC_\infty([a,b], \Omega) \times L_\infty([a,b], U)$ управляемой системы (18), что последовательность $(x_m, u_m)$ сходится к $(x^0, u^0)$ в пространстве $AC_\infty([a,b], \Omega) \times L_\infty([a,b], U)$.

**Теорема 9.** *Пусть существуют такие положительные числа $\alpha_1$, $\alpha_2$ и неотрицательные числа $\beta_{11}$, $\beta_{12}$, $\beta_{21}$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x \in D(t)$, $u \in U(t)$, $z \in \Omega(t)$, $m = 1, 2, \ldots$ выполнены условия: отображения $f_m(t, x, \cdot, u) : \Omega(t) \to \mathbb{R}^{l_1}$, $g_m(t, x, \cdot) : U(t) \to \mathbb{R}^{l_2}$ являются условно накрывающими с константами $\alpha_1$, $\alpha_2$, соответственно; отображения $f_m(t, \cdot, z, u) : D(t) \to \mathbb{R}^{l_1}$, $f_m(t, x, z, \cdot) : U(t) \to \mathbb{R}^{l_1}$, $g_m(t, \cdot, u) : D(t) \to \mathbb{R}^{l_2}$ являются, соответственно, $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}$-липшицевыми; имеет место включение $0 \in f_m(t,\, x,\, \Omega(t),\, u)$. Тогда если справедливы соотношения (19), то для всех достаточно больших значений $m$ управляемая система (18) разрешима на всем $[a,b]$, и существует такое ее решение $(x_m, u_m) \in AC_\infty([a,b], \Omega) \times L_\infty([a,b], U)$, что* *в пространстве* $AC_\infty([a,b],\Omega)\times L_\infty([a,b],U)$ *имеет место сходимость* $(x_m,u_m)\to(x^0,u^0)$.

## Публикации автора по теме диссертации

[1] *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об одном методе исследования разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1673–1674.

[2] *Плужникова Е.А.* О накрывании оператора Немыцкого в пространстве суммируемых функций // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1686–1687.

[3] *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Теорема о накрывании оператора в произведении метрических пространств // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 1. С. 70–72.

[4] *Жуковский Е.С., Осинин В.Ф., Плужникова Е.А.* О корректности функционально- дифференциального уравнения нейтрального типа // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1078–1081.

[5] *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в проблеме корректности краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1082–1085.

[6] *Плужникова Е.А.* О локальной разрешимости задачи Коши функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. Вып. 1. С. 59–62.

[7] *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. Москва, 2013. Т. 49. № 4. С. 439–455.

[8] *Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об исследовании систем функциональных уравнений методами теории накрывающих отображений // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 1. С. 38–42.

[9] *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* К вопросу о разрешимости управляемых дифференциальных систем // Вестник Тамбовского уни-

верситета. Сер. Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 1. С. 49–54.

[10] *Плужникова Е.А.* О непрерывной зависимости от параметров решений операторных уравнений в метрических пространствах // Тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики». Екатеринбург, 2011. С. 96–98.

[11] *Плужникова Е.А.* Один метод исследования краевых задач для не разрешенных относительно производной дифференциальных уравнений // Тезисы докладов Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной 110-й годовщине И.Г. Петровского. Москва, 2011. С. 305–306.

[12] *Плужникова Е.А.* Один метод исследования разрешимости задач управления для дифференциальных уравнений // Тезисы докладов научной конференции «Тихоновские чтения», посвященной памяти академика А.Н. Тихонова. Москва, 2011. С. 65–66.

[13] *Zhukovskiy E., Pluzhnikova E.* On solvability of systems of equations in metric spaces // The 8th Congress of the ISAAC. Peoples' Friendship University of Russia. Moscow, 2011. P. 389.

[14] *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* О периодической краевой задаче для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2012. Вып. 1 (39). С. 52–53.

[15] *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* О применении накрывающих отображений при исследовании управляемых систем // Тезисы докладов XII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференции Пятницкого). Москва, 2012. С. 128–129.

[16] *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об управляемости краевых задач для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной // Материалы V Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования». Воронеж, 2012. С 124–126.

Плужникова Е.А.

# ВЕКТОРНЫЕ НАКРЫВАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЯВНОГО ВИДА

Аннотация

Исследуются системы обыкновенных дифференциальных уравнений неявного вида. Получены условия разрешимости и корректности задачи Коши, краевых задач, систем управления со смешанными ограничениями на управление и дополнительными ограничениями на фазовую траекторию. Метод исследования основан на теории накрывающих отображений метрических пространств. В частности, используются полученные в диссертации утверждения о существовании и непрерывной зависимости от параметров решений систем операторных уравнений с векторными накрывающими отображениями и условия накрывания оператора Немыцкого в пространствах суммируемых функций.

Pluzhnikova E.A.

# VECTOR COVERING MAPPINGS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR IMPLICIT DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract

Systems of implicit ordinary differential equations are investigated. Conditions of solvability and well-posedness of the Cauchy problem, boundary value problems, control systems with mixed restrictions on control and additional restrictions on a phase trajectory are derived. The investigation method is based on the theory of covering mappings of metric spaces. In particular, there are used the statements obtained in the dissertation, i.e., the results on the existence and continuous dependence on parameters of solutions for the systems of operator equations with vector covering mappings and conditions for the Nemytskii operator to be a covering one in the spaces of integrable functions.

Подписано в печать 24.09.2013 г. Формат 60×84/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,25. Тираж 100 экз. Заказ 1289.

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41