Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II

(МГУПС (МИИТ))

На правах рукописи

Сафро Михаил Владимирович

Предельное поведение в математических моделях распределенных систем квазивидов и двойного гиперцикла

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена в *Московском гоусударственном университете путей сообщения императора Николая II (МГУПС(МИИТ)).*

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор,
Братусь Александр Сергеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ИФА РАН,
Логофет Дмитрий Олегович

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Российского государственного университета дружбы народов,
Кулябов Дмитрий Сергеевич

Ведущая организация: Московский физико-технический институт (государственный университет)

Защита состоится «02» июня 2017 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета *Д 212.203.28* при *Российском государственном университете дружбы народов*, расположенном по адресу: *г. Москва, улица Орджоникидзе, дом 3.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Российского государственного университета дружбы народов.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2017 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,

к.ф.м.н., доцент *Васильев С.А.*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Одной из важных задач современного естествознания является проблема возникновения сложной неравновесной системы из набора макромолекул.

В 1971 году Манфред Эйген опубликовал работу, в которой впервые предложил математическую модель предбиологической эволюции. Основное положение этой теории заключалось в создании математической модели, позволяющей проследить эволюцию сложной системы, составленной из макромолекул. Некоторые из построенных таким образом систем удовлетворяют трем основным постулатам теории эволюции, сформулированным Ч.Дарвиным: наследственность, изменяемость, естественный отбор.

В работах М.Эйгена и других авторов эта теория получила название "теория квазивидов".

Модель квазивидов представляет собой систему из n различных макромолекул; каждая макромолекула представляется в виде последовательности символов из конечного алфавита:

$$M_i = (s_1^i, ..., s_n^i)$$

Заметим, что в случае молекул РНК s_j^i - это одна из букв (U,C,A,G); в случае двоичных последовательностей s_j^i одна из цифр (0,1); общее количество последовательностей заданной длины l соответственно 4^l для молекул РНК и 2^l для двоичных последовательностей (в реальных системах l имеет порядок 30). Предполагается, что молекула вида i порождает молекулу вида j с некоторой вероятностью q_{ij}; вероятность т.н. безошибочной репликации (при которой молекула вида i порождает молекулу вида i) соответственно равна $q_{ii} = 1 - \sum\limits_{j \neq i} q_{ij}$ Средняя приспособленность системы характеризуется вектором $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$. Воспроизводство молекул, с учетом различной приспособленности и мутаций в этом случае, описывается системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Из анализа математической модели квазивидов следует, что в процессе эволюции побеждает не вид с максимальной приспособленностью, а целый набор видов, которые могут быть представлены в виде собственного вектора $\hat{w}$, отвечающего максимальному собственному значению матрицы Q_α ($Q_\alpha = Q \cdot A$, где $A = diag(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, Q - матрица с элементами q_{ij}).

Другой моделью, предложенной М.Эйгеном, стала модель гиперциклической репликации или гиперцикла. Гиперцикл представляет собой способ объединения элементов (как правило, макромолекул) в самовоспроизводящуюся цепочку из n макромолекул, в которой молекула с номером 1 порождает молекулу с номером 2, молекула с номером 2 порождает молекулу с номером 3 и так далее, в замкнутом цикле (молекула с номером n порождает молекулу с номером 1).

Математически модель гиперцикла представляет систему из n нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследованию этой модели посвящены работы М.Эйгена, П.Шустера, К.Зигмунда, Дж.Хофбауера, Х. Л.Смита, Дж. Малле-Паре, М.Новака, А.С. Братуся, А.С. Новожилова и пр.. Доказано, что гиперцикл обладает свойством перманентности (невырожденности, экологической устойчивости), т.е. решения системы гиперцикла с ненулевыми начальными условиями не обращаются в ноль ни при каком значении времени. Другим замечательным свойством гиперцикла, полученным в работе Дж.Хофбауера, Дж. Малле-Паре и Х.Л.Смита, является возникновение устойчивого предельного цикла в системе размерности $n \geq 5$. В работах К.Зигмунда и Дж. Хофбауера было доказано, что система гиперцикла обладает свойством изменяемости, т.е. в системе гиперцикла возможно появление новых элементов (макромолекул), которые встраиваются в систему.

Распределённая модель гиперцикла описывается с помощью системы полулинейных параболических уравнений с частными производными с интегральным инвариантом. В работах А.С. Братуся, А.С.Новожилова и В.П.Повянского было доказано, что предельное поведение распределённой системы существенно зависит от коэффицентов диффузии. В частности, при достаточно малых значениях этих коэффициентов возникают пространственно-неоднородные решения, которые не имеют аналогов в случае обыкновенных (не распределённых) систем.

В работе предложена модификация системы гиперцикла М.Эйгена, в которой элемент с номером i порождают элементы с номерами $i-1$, $i-2$. Далее эту модель гиперцикла будем называть двойным гиперциклом.

При исследовании распределенных систем математической биологии важным является численное моделирование. В работе разработан комплекс программ на языке C++, позволяющий находить численное решение уравнений распределенных математических моделей квазивидов и двойного гиперцикла произвольной размерности.

Модели математической биологии, как правило, имеют большую размерность (например, в случае модели квазивидов 2^l, 4^l, где l имеет порядок 30), поэтому важно иметь качественные критерии, позволяющие исследовать устойчивость систем. До сих пор качественные и приближенные методы исследования предельного поведения распределенных систем математической биологии изучены недостаточно. Важной характеристикой, которая позволяет исследовать устойчивость подобных систем, является асимптотика собственных значений матрицы Якоби. В связи с этим появляется необходимость в разработке новых качественных и приближенных методов анализа репликаторных систем и построении асимптотики собственных значений матрицы Якоби в распределенных моделях математической биологии, в частности, в распределенной математической модели Лотки-Вольтерры. На основании изложенной выше научной проблемы сформулированы следующие цель и задачи диссертационного исследования.

Цель диссертационной работы. Развивтие качественных и приближенных методов исследования математических моделей репликаторных систем, разработка комплекса программ для численного моделирования задач математичсекой биологии.

Задачи диссертационной работы:

1. Исследование предельного поведения новых математических моделей репликаторных систем.

2. Изучение предельного поведения математической модели двойного гиперцикла.

3. Построение асимптотики собственных значений матрицы Якоби в распределённых математических моделях типа Лотки-Вольтерры.

4. Разработка комплекса программ, позволяющих численно решать системы, описывающие распределенные математические модели квазивидов и двойного гиперцикла произвольной размерности.

Научная новизна.

1. Доказана единственность и асимптотическая устойчивость положения равновесия распределённой математической модели квазивидов Эйгена.

2. Доказана невырожденность (перманентность, экологическая устойчивость) математической модели двойного гиперцикла.

3. Получена асимптотика собственных значений матрицы Якоби систем полулинейных параболических уравнений, описывающих математические модели типа Лотки-Вольтерры.

4. Разработан комплекс программ, позволяющий численно решать системы, описывающие распределенные математические модели квазивидов и двойного гиперцикла произвольной размерности.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при построении и анализе новых математических моделей теории эволюции, а также при изучении асимптотики решений полулинейных параболических уравнений.

Методология и методы исследования. В работе использовались методы качественной теории дифференциальных уравнений, динамических систем, уравнений математической физики, функционального анализа.

Объект исследования. Асимптотика и предельное поведение в распределенных математических моделях квазивидов и двойного гиперцикла.

Предмет исследования. Предельное поведение распределенных репликаторных систем.

Положения, выносимые на защиту:

1. Единственность и асимптотическая устойчивость пространственно однородного положения равновесия распределённой математической модели квазивидов Эйгена.

2. Предельное поведение математической модели двойного гиперцикла.

3. Асимптотика собственных значений матрицы Якоби в распределённых математических моделях типа Лотки-Вольтерры.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. Научно-практическая конференция "Наука МИИТа - транспорту"; Москва, МИИТ, 2010

2. Седьмые Курдюмовские чтения: Синергетика в естественных науках, Тверь, 2011

3. Математика. Компьютер. Образование., Дубна, 2012

4. Математика. Компьютер. Образование., Дубна, 2014

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 5 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения, библиографии и двух приложений. Общий объем диссертации 125 страницы, из них 104 страницы основного текста, включая 25 рисунков. Библиография включает 50 наименований на 5 страницах.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе исследовалось асимптотическое поведение распределённой системы квазивидов.

Модель квазивидов представляет собой систему из k видов макромолекул, в которой молекула вида i порождает молекулу вида j с вероятностью q_{ij}; существует также вероятность т.н. безошибочной репликации (при которой молекула вида i порождает молекулу вида i) $q_{ii} = 1 - \sum\limits_{j \neq i} q_{ij}$.

Математическая модель квазивидов:

$$\begin{aligned} \dot{w}_i &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j q_{ij} w_j - w_i f^l(t) \\ w_i(0) &= w_i^0 > 0, \quad i = 1, ..., k, \end{aligned} \tag{1}$$

где $w_i(t)$ - концентрация частицы вида i (в момент времени t) в системе; $f^l(t)$

- средняя приспособенность частиц:

$$f^l(t) = (\alpha, w(t)) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i. \tag{2}$$

$\forall j = \overline{1,n} \Rightarrow \alpha_j = const$; $\alpha_j > 0$ -коэффициенты, характеризующие скорость воспроизводства частиц.

Множество решений системы (1) - k-мерный симплекс: $\forall t \geq 0 \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{k} w_j(t) = 1$. Известно, что система (1) содержит единственное положения равновесия.

Распределённая математическая модель квазивидов представляет собой систему из k функционально-дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j q_{ij} u_j(x,t) - u_i(x,t) f^s(t) + (D\Delta u(x,t))_i \\ i = 1, 2, ..., k, \quad x \in \Omega \end{array} \tag{3}$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{array}{l} u_i(x,0) = \phi_i(x) \\ \left(\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial \nu}\right)_{\gamma = \partial\Omega} = 0, \quad i = 1, ..., k. \end{array} \tag{4}$$

В (3) $u_i(x,t)$ - концентрация частицы вида i(в момент времени t в точке пространства x) в системе; $f^s(t)$ - средняя приспособленность системы, определяемая соотношением:

$$f^s(t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int\limits_{\Omega} u_j(x,t) dx, \tag{5}$$

Ω - замкнутая односвязная область в $\Re^k$, D - матрица диффузии размерности $k \times k$ с неотрицательными элементами ($\forall i, j = \overline{1,k} \Rightarrow d_{ij} \geq 0$).

Из (3)-(5) следует, что $\forall t \geq 0$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\Omega} u_j(x,t) dx = 1 \tag{6}$$

В работе введено обозначение

$$\Omega_t = \Omega \times [0, +\infty)$$

Система (4) рассматривалась в пространстве функций $B(\Omega_t)$ с нормой

$$||v||_B = \max_{t\geq 0}\left\{||v||_{W_2^s} + \left|\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|\right|_{W_2^s}\right\}$$

Здесь и далее $S_n(\Omega_t)$ означает множество неотрицательных вектор-функций $u(x,t)$, таких, что для любого $i=\overline{1,k}$ выполнено условие $u_i(x,t)\in B(\Omega_t)$, и удовлеряющих условию (6).

Рассматривалось слабое решение уравнения (3), (4), т.е. решение, которое удовлетворяет следующему интегральному равенству:

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial t}\eta(x,t)dxdt = \int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega (Q_\alpha u(x,t))_i\eta(x,t)dxdt - \int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega (D\nabla u,\nabla\eta)_i dxdt$$

для любых функций $\eta(x,t)$ на компактном подмножестве (по переменной t), которые дифференцируемы по переменной t при $t\in[0,+\infty)$ и принадлежат(по переменной x) пространству Соболева $W_2^s(\Omega)$ для любого фиксированного $t\geq 0,\quad s=1,2$.

Ключевым здесь являлся вопрос о влиянии пространственных членов системы (3) на поведение решений системы. В связи с этим в первой главе доказаны две теоремы, описывающие влияние пространственных членов на асимптотическое поведение решений системы (3):

Теорема 1. *Если все собственные значения матрицы диффузии D положительны, то стационарное решение распределённой системы квазивидов (3) в пространстве Соболева W_2^s, $s=1,2$, совпадает с положением равновесия w^* обыкновенной системы квазивидов (1).*

Теорема 2. *Если все собственные значения матрицы диффузии D положительны, то для любых начальных данных $\phi_i(x)\in S_n(\Omega)$ решение распределённой системы квазивидов (3) сходится при $t\to\infty$ в $S_n(\Omega_t)$ к решению обыкновенной системы квазивидов (1) с начальными данными*

$$\xi_i = \int\limits_\Omega \phi_i(x)dx,\quad i=\overline{1,n}$$

Разработан комплекс программ на языке C++, позволяющих численно решать систему (3)-(4) произвольной размерности. Решение основано на разложении неизвестной функции $u_i(x,t)$ в тригонометрический ряд по $\cos(k\pi x)$:

$$u_i(x,t) = \sum_{k=0}^{M} c_i^k(t)\cos(k\pi x)$$

Во второй главе исследовалась асимтотика и предельное поведение решений в математической модели двойного гиперцикла. Двойной гиперцикл представляет собой систему из n макромолекул, в которой элемент с номером i порождает элементы с номерами $i+1$, $i+2$ в замкнутом цикле (элемент с номером $n-1$ порождает элементы с номерами n, 1; элемент с номером n порождает элементы с номерами 1, 2).

В двойном гиперцикле скорость воспроизводства частиц удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} &\dot{y}_i = k_i k_{i-1} y_i y_{i-1} y_{i-2} \\ &y_i(0) = y_i^0 > 0, \quad i = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $y_i(t)$ - количество частиц вида i в момент времени t. Поскольку в теории квазивидов важным являтся вопрос о качественном поведении системы, то выполним замену

$$x_i = \frac{y_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j} \quad i = \overline{1,n}, \tag{8}$$

и, тем самым, перейдём к относительным концентрациям частиц.
Уравнения, которым удовлетворяют x_i имеют вид:

$$\dot{x}_i = x_i(k_i k_{i-1} x_{i-1} x_{i-2} - \overline{f}), \quad i = \overline{1,n}, \tag{9}$$

где $\overline{f}$ средняя приспособленность системы:

$$\overline{f} = \sum_{j=1}^{n} k_j k_{j-1} x_j x_{j-1} x_{j-2}$$

Из (7), (8) следует, что множество решений системы (9) - симплекс:

$$x \in S_n; S_n = \{x | j = \overline{1,n} \Rightarrow x_j \geq 0; \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1\}$$

В работе использовалось следующее определение:

Определение 1. *Динамическая система*

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in S_n$$

невырождена (перманентна, экологически устойчива), если при любых начальных условиях $x_0 \in S_n \bigcap IntR^n_+$ *существует такое* $\delta > 0$, *что* $\lim\limits_{t\to\infty} \inf\limits_i y_i(t) > \delta$, $i = \overline{1,n}$.

Как и в большинстве математических моделей репликаторных систем, важным здесь является асимптотика и предельное поведение динамической системы двойного гиперцикла (9). Значительным при этом является вопрос о существовании всех элементов системы для любого фиксированного момента времени. В связи с этим в работе доказано следующее утверждение:

Теорема 3. *Система* (9) *экологически устойчива.*

Система (9) содержит n параметров k_i, где $i = \overline{1,n}$, что значительно затрудняет нахождение положения равновесия и исследование зависимости поведения системы от параметров. В связи с этим в работе доказано следующее утверждение:

Теорема 4. *Динамическая система двойного гиперцикла* (9) *орбитально - топологически эквивалентна системе*

$$\dot{x}_i = x_i \left(x_{i-1}x_{i-2} - \sum_{j=1}^{n} x_j x_{j-1} x_{j-2} \right), \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad i = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Для изучения асимптотического поведения системы (10) в работе найдено ее множество неподвижных точек и исследована их устойчивость.

Теорема 5. *Пусть*

$$\varepsilon \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right),$$

тогда для системы (10) *размерности* $n = 4$ *множество неподвижных точек*

$$x_1 = \frac{1}{4} + \varepsilon; \quad x_2 = \frac{1}{4} - \varepsilon; \quad x_3 = \frac{1}{4} + \varepsilon; \quad x_4 = \frac{1}{4} - \varepsilon.$$

вляется асимптотически устойчивым.

Теорема 6. *При нечетном $n \geq 5$ система (10) имеет единственное положение равновесия: $p_i = \frac{1}{n}$, $\quad i = \overline{1, n}$, устойчивое при $n = 5$ и неустойчивое при $n > 5$.*

При исследовании математических моделей квазивидов важным является изменяемость системы (что отвечает одному из постулатов теории эволюции), поэтому существенным является вопрос о поведении системы двойного гиперцикла при появлении нового элемента.

Предположим, что в систему (9) добавляется новый $(n+1)$-й элемент, взаимодействующий с n-м и $(n-1)$-м элементами:

$$\dot{x}_i = x_i \left(k_i k_{i-1} x_{i-1} x_{i-2} - \overline{f}\right), \quad i = \overline{1, n+1}, \tag{11}$$

где

$$\overline{f} = \sum_{i=1}^{n} k_i k_{i-1} x_i x_{i-1} x_{i-2} + k_{n+1} k_n x_{n+1} x_n x_{n-1}, \quad \sum_{j=1}^{n+1} x_j = 1.$$

Предполагается, что $k_i > 0$, $\quad i = \overline{1, n+1}$; $\quad x_0 = x_n$, $\quad x_{-1} = x_{n-1}$, $\quad k_0 = k_n$.

Определение 2. *Система (11) называется расширенной системой двойного гиперцикла.*

Относительно асимптотического поведения системы (11) справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Если $k_{n+1} \geq k_1$, то расширенная система двойного гиперцикла (11) перманентна; причем, если $k_{n+1} > k_1$, то система (11) содержит устойчивое положение равновесия; если $k_{n+1} = k_1$, то справедливо соотношение*

$$x_{n+1} = x_1 \frac{x_{n+1}(0)}{x_1(0)}.$$

Если же $k_{n+1} < k_1$, то справедливо следующее равенство:

$$\lim_{t \to \infty} x_{n+1} = 0$$

Во второй главе также рассмотрена распределённая математическая модель двойного гиперцикла:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i \left(k_i k_{i-1} u_{i-1} u_{i-2} - \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_0^1 k_j k_{j-1} u_j u_{j-1} u_{j-2} dx \right) + d_i \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial x^2} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_0^1 u_j(x,t) dx = 1; \quad \frac{\partial u_i(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_i(1,t)}{\partial x} = 0; \quad u_i(x,0) = \phi(x); \quad \phi(x) \geq 0, \end{cases} \tag{12}$$

где $u_i(x,t)$ - концентрация частиц вида i (в момент времени t в точке с пространственной координатой x).

Исследована асимптотика системы (12) размерности $n = 5$:

Теорема 8. *Пусть*

$P = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)\,; \quad p_i > 0 (i = \overline{1,5})$ *– положение равновесия системы* (9).
$d_i = \rho \cdot k_i k_{i-1} p_i p_{i-1} p_{i-2}; \quad \rho = const; \quad \rho > 0.$

Тогда для системы (12) *размерности* $n = 5$ *положение равновесия* P *является асимптотически устойчивым, если*

$$\rho > \frac{2}{\lambda_1}, \tag{13}$$

где λ_1 *- первое ненулевое собственное значение задачи*

$$\begin{cases} \Delta\psi_s(x) + \lambda\psi_s(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial\psi_s(x)}{\partial\nu}|_{x\in\Gamma} = 0, \quad s = 1, 2, ... \\ \int\limits_\Omega \psi_i(x)\psi_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad \int\limits_\Omega 1 \cdot \psi_i(x) dx = 0, \quad \psi_s(x) \in W_2^2(\Omega) \end{cases} \tag{14}$$

Если же

$$\rho < \frac{2}{\lambda_1},$$

то положение равновесия P *теряет свою устойчивость.*

Разработан комплекс программ на языке C++, позволяющий численно решать систему (12) произвольной размерности. Решение основано на разложении неизвестной функции $u_i(x,t)$ в тригонометрический ряд по $\cos(k\pi x)$:

$$u_i(x,t) = \sum_{k=0}^{M} c_i^k(t) \cos(k\pi x)$$

В третьей главе исследуется асимптотика собственных значений матрицы Якоби распределенных систем типа Лотки-Вольтерры. В общем виде такие системы выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D\Delta u, \tag{15}$$

где $u = (u_1(x,t), ..., u_n(x,t))$ - вектор-функция n-переменных. Здесь $t \geq 0$, $x = (x_1, , ...x_n)$; $x \in \Omega$, Ω - замкнутая односвязная область в n-мерном пространстве; $f(u) = (f_1(u), f_2(u), ..., f_n(u))$ - гладкая дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция; D - матрица с неотрицательными элементами $d_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, ..., n$; Δ - n-мерный оператор Лапласа $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, ..., \Delta u_n)$.

Заданы начальные условия:

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \Omega \tag{16}$$

На границе $\partial\Omega$ области Ω выполняется однородное условие Неймана:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0 \tag{17}$$

Задача (15) - (17) изучается в полном метрическом пространстве вектор-функций

$$U = \left\{u_1(x,t), ..., u_n(x,t) : u_i(x,t) \in H^1(\Omega), i = 1, ..., n, x \in \Omega\right\},$$

где $H^1(\Omega)$ - пространство функций Соболева с нормой

$$||u||_{H^1} = \left(\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

Для того, чтобы оценить влияние диффузионных слагаемых на асимптотическое поведение системы, рассмотрим динамическую систему в $\Re^n$:

$$\frac{du}{dt} = f(u) \tag{19}$$

Пусть $u^0 = (u_1^0, ..., u_n^0)$ - стационарная точка системы (19), т.е. $f(u^0) = 0$. Неподвижная точка u^0 системы (19) является также пространственно-однородным решением системы (15), поскольку выполняется равенство

$$f(u^0) + D\Delta u^0 = 0.$$

Система (15) будет устойчива в окрестности неподвижной точки u^0, если все собственные значения краевой задачи

$$Au + D\Delta u = \lambda u, \quad x \in \Omega, \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0 \tag{21}$$

отрицательны. В (20) A - матрица Якоби системы (15) в точке u^0.

Предположим, что матрица D может быть приведена к диагональной форме с помощью невырожденного преобразования T, то есть $\Lambda = T^{-1}DT$, где Λ - диагональная матрица, элементы которой - собственные числа матрицы D. Положим в равенствах (20), (21)

$$u(x) = Tv(x), \quad v(x) = (v_1(x), ..., v_n(x)),$$

тогда имеем

$$Bv + \Lambda\Delta v = \lambda v, \tag{22}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0 \tag{23}$$

где $B = T^{-1}AT$, $x \in \Omega$.

Рассмотрим решение краевой задачи на собственные значения для функции $Z(x), \quad x \in \Omega,$

$$\Delta Z = -\mu Z, \quad x \in \Omega, \quad \mu > 0, \quad \left.\frac{\partial Z}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{24}$$

Известно, что эта задача имеет счетное множество решений - собственных значений

$$0 = \mu_0 < \mu_1 \le \mu_2 \le ... \le \mu_k \le ...,$$

$$\mu_k \to +\infty, \quad k \to +\infty,$$

и соответствующее множество собственных функций $\{Z_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

Доказаны три теоремы, соответствующие разным характерам собственных значений матрицы диффузии D

Теорема 9. *Пусть матрица диффузии D в (15) имеет простые и различные собственные значения и b_{ij} - элементы матрицы B. Тогда собственные значения задачи (20), (21) могут быть представлены в виде асимптотического разложения*

$$\begin{aligned}
&\lambda_k^i = -d_i\mu_k + b_{ii} - \mu_k^{-1}\sum_{j\neq i}\tfrac{b_{ij}b_{ji}}{d_i-d_j} + o(\mu_k^{-2}),\\
&i = 1, ..., n; \quad k = 1, 2, ...,\\
&\mu_k \to +\infty, \quad k \to +\infty.
\end{aligned} \tag{25}$$

Теорема 10. *Пусть матрица диффузии D в (15) имеет собственное значение d_1 кратности s. Тогда отвечающие этому собственному значению s собственных значений задачи (20)-(21) представляются в виде асимптотического разложения:*

$$\lambda_k^p = -d_1\mu_k + \left(\eta_1^1\right)_p - \mu_k^{-1}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=s+1}^{n}\frac{\left(\sum\limits_{r=1}^{s} k_r^p b_{ri}\overline{k}_j^p b_{ji}\right)}{(d_1-d_i)\sum\limits_{r=1}^{s}|k_r^p|^2} + o(\mu_k^{-2}) \tag{26}$$

Здесь $\left(\eta_1^1\right)_p$ - p-е собственное значение следующей задачи:

$$\begin{gathered}
(-\Lambda + d_1)\, y^{1,1} + \sum_{j=1}^{s} k_j B\omega^j = \eta_1^1\sum_{j=1}^{s} k_j\omega^j + \eta_1^1 y^{1,1},\\
s\,(-\Lambda + d_1)\, y^{1,2} + By^{1,1} = \eta_2^1\sum_{j=1}^{s} k_j\omega^j + \eta_1^1 y^{1,1};
\end{gathered}$$

k_j^p - координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\left(n_1^1\right)_p$, $p = 1, ..., s$; $v(x) = yZ(x)$. Остальные собственные значения выражаются формулой (25) при $s = 1, ..., n$, где $d_j = d_1$ для $j = 2, ..., s$.

Теорема 11. *Пусть у канонической формы матрицы D имеется простой жорданов блок*

$$J_2 = \begin{pmatrix} d_1 & 1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$$

Если $b_{21} \neq 0$, то асимптотики соответствующих собственных значений задач (20), (21) *имеют вид*

$$\begin{aligned} \lambda_k^1 &= -d_1\mu_k + \sqrt{\mu_k}\sqrt{-b_{21}} + \tfrac{b_{11}+b_{22}}{2} + \tfrac{(b_{11}-b_{22})^2+4b_{12}b_{21}}{8\sqrt{\mu_k}\sqrt{-b_{21}}} + o(\sqrt{\mu_k}) \\ \lambda_k^2 &= -d_1\mu_k - \sqrt{\mu_k}\sqrt{-b_{21}} + \tfrac{b_{11}+b_{22}}{2} + \tfrac{(b_{11}-b_{22})^2+4b_{12}b_{21}}{8\sqrt{\mu_k}\sqrt{-b_{21}}} + o(\sqrt{\mu_k}) \end{aligned} \tag{27}$$

Заключение. В работе исследована распределённая модель квазивидов Эйгена. Показано, что система содержит единственное пространственно-однородное положение равновесия, совпадающее с неподвижной точкой обыкновенной системы квазивидов. Доказано, что в случае, когда матрица диффузии содержит только положительные собственные значения, положение равновесия является асимптотически устойчивым.

Построена и исследована математическая модель двойного гиперцикла. Доказано, что система обладает рядом важных свойств, основным из которых является свойство перманентности (невырожденности, экологической устойчивости), означающее, что для ненулевых начальных данных решения системы не обращаются в ноль. Показано, что для системы двойного гиперцикла размерности 4 имеется множество асимптотически устойчивых неподвижных точек; для системы нечетной размерности больше 4 имеется единственная неподвижная точка, являющаяся устойчивой при размерности системы, равной 5, и неустойчивой при размерности системы больше 5. Построена распределённая математическая модель двойного гиперцикла. Показано, что в случае системы размерности 5 при малых значениях коэффициентов диффузии пространственно-однородные положения равновесия теряют свою устойчивость.

Разработан комплекс программ, позволяющий решать распределенные математические модели квазивидов и двойного гиперцикла произвольной размерности.

Построена асимптотика собственных значений матрицы Якоби для распределенных систем типа Лотки-Вольтерры для различных случаев, когда матрица Якоби имеет как простые, так и кратные собственные значения.

Список публикаций

Журналы, входяшие в перечень ВАК

1. А. С. Братусь, М. В. Сафро, “Асимптотика собственных значений матрицы Якоби систем полулинейных параболических уравнений”, Матем. заметки, 89:2 (2011), 204–213

2. М.В. Сафро “Асимптотика и предельное поведение динамической системы двойного гиперцикла”, Нелинейный мир, №3 (2013), 172-179

3. Alexander S. Bratus, Chin-Kun Hu, Mikhail V. Safro, Artem S. Novozhilov, ”On Diffusive Stability of Eigen’s Quasispecies Model”, Journal of Dynamical and Control Systems, January 2016, Volume 22, Issue 1, pp 1-14

Другие издания

4. М.В. Сафро, Численное решение математической модели двойного гиперцикла, Вестник МИИТа, 2010 вып. 23, 39-41

5. М.В.Сафро, Математическая модель двойного гиперцикла. Седьмые Курдюмовские чтения. Синергетика в естественных науках: материалы международной междисциплинарной конференции с элементами научной школы для молодёжи - Тверь, 2011, 87-88.

Сафро Михаил Владимирович

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Предельное поведение в математических моделях распределенных систем квазивидов и двойного гиперцикла