На правах рукописи

Япарова Анна Валентиновна

Исследование инфляционных моделей посредством уравнения Абеля первого рода

01.04.02 — Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Диссертационная работа выполнена на кафедре физики физико-технического института в составе объединенного института физико-математических наук и информационных технологий Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор	**Юров Артем Валерианович** директор института физико-математических наук и информационных технологий ФГАОУ ВО «Балтийский федеральный университет имени И. Канта»
Официальные оппоненты:	
доктор физико-математических наук, профессор	**Одинцов Сергей Дмитриевич** главный научный сотрудник отдела исследований и разработок ФГБОУ ВО «Томский государственный педагогический университет»
доктор физико-математических наук, профессор	**Червон Сергей Викторович** профессор кафедры физики и технических дисциплин факультета физико-математического и технологического образования ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова»

Ведущая организация:
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Защита состоится «11» мая 2017 года в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.203.34 при ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д.3, ауд. №110.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» (РУДН) и на официальном сайте диссертационных советов РУДН по адресу: http://dissovet.rudn.ru

Автореферат разослан «____»_________________2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 212.203.34
кандидат физико-математических наук Попова Вера Анатольевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Первые модели, описывающие экспоненциально быстрое расширение вселенной, заполненной сверхплотной материей, были предложены еще в шестидесятых годах прошлого столетия, однако и сейчас ранняя космологическая инфляция является активно развиваемой идей в современной космологии, поскольку предположение о протекании инфляции в ранней вселенной позволяет разрешить многие затруднения, возникающие в теории горячей вселенной, такие как проблемы сингулярности, плоскостности, горизонта и другие. Изобилие исследований по данной теме привело в конечном итоге к созданию различных инфляционных сценариев [2, 22, 27, 17, 23, 10, 4, 6, 18, 24], в частности, нового инфляционного сценария [20, 28] и сценария хаотической инфляции [21], который на сегодняшний день разработан наиболее глубоко и полно.

Одна из простейших моделей хаотической инфляции — это инфляция во вселенной, заполненной единственным действительным скалярным полем φ, минимально связанным с гравитацией, которое, в принципе, не должно быть однородным на больших масштабах. Достаточно лишь, чтобы оно было практически однородным в некоторой малой области порядка планковской длины $l_\mathrm{P} \sim 10^{-33}$ см. Тогда эту область можно рассматривать как локально однородную и изотропную, с метрикой Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера (ФЛРУ)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right],$$

где t — временная координата, r, θ и φ — пространственные координаты, $a(t)$ — масштабный фактор, $k = 0, +1, -1$ для плоского, замкнутого или открытого пространства соответственно. Тогда выражающее закон сохранения энергии уравнение

$$\dot\rho + 3H(\rho + p) = 0,$$

следующее из уравнений Эйнштейна–Фридмана

$$\begin{aligned} \frac{\dot a^2}{a^2} &= \frac{8\pi}{3\mathrm{M}_\mathrm{P}^2}\,\rho - \frac{k}{a^2}, \\ \frac{\ddot a}{a} &= -\frac{4\pi}{4\mathrm{M}_\mathrm{P}^2}\,(\rho + 3p)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

в этой области может быть записано в виде

$$\ddot\varphi + 3H\dot\varphi + V'(\varphi) = 0, \tag{2}$$

где точка обозначает произзодную d/dt, штрих — производную $d/d\varphi$, $H = \dot{a}/a$ — параметр Хаббла, $\rho = 1/2\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)$ — плотность энергии поля, $p = 1/2\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)$ — давление поля, а $V(\varphi)$ — его потенциал. Здесь и далее везде полагаем $c = \hbar = 1$. Таким образом, первое из уравнений (1) и уравнение (2) составляют систему двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями $a = a(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$.

Сложность решения такой системы, очевидно, зависит от выбора потенциала $V(\varphi)$, который, как правило, берется из какой-либо теории элементарных частиц. Для большей части даже самых простых полиномиальных потенциалов найти аналитические решения невозможно. Помимо этого, часть из потенциалов, для которых аналитические решения существуют, являются нереалистичными. Ситуация усложняется еще и нелинейностью уравнений и наличием в них вторых производных от неизвестных функций. Таким образом, анализ поведения инфляционной вселенной оказывается нетривиальной задачей, вследствие чего становится особенно важным развитие методов анализа и численной оценки ее поведения.

Существует несколько распространенных подходов к исследованию системы. Первый их них заключается в поиске решения для поля с заданным потенциалом $V(\varphi)$. Второй — в определении так называемого суперпотенциала как функции поля, зачастую приравниваемого к плотности энергии поля [16, 5, 7, 25]. Еще один подход состоит в том, что скорость изменения поля $\dot{\varphi}$ вводят как заданную функцию самого поля $\dot{\varphi} \equiv U(\varphi)$ («метод $U(\varphi)$») [25, 14, 13]. Каждый подход позволяет отыскать (хотя бы численно) функции зависимости масштабного фактора и скалярного поля от времени.

К счастью, существует весьма удобный инструмент для работы, значительно упрощающий изучение динамики вселенной по сравнению с непосредственным интегрированием исходных уравнений. Это – уравнение Абеля первого рода вида

$$y'(x) = -\frac{1}{2}\left(y(x)^2 - 1\right)\left(\sigma - \frac{V'(x)}{V(x)}\,y(x)\right), \quad \sigma = \pm 1,$$

где независимая безразмерная переменная x прямо пропорциональна скалярному полю. Несмотря на то что изредка оно используется для некоторых частных задач, например, в работах [24, 29], оказывается, что возможности его применения гораздо шире. Хотя оно также нелинейно и имеет аналитические решения для весьма ограниченного числа случаев [12], анализ одного дифференциального уравнения первого порядка выполнить проще, чем анализ системы (1) из двух уравнений. Свести уравнения Эйнштейна–Фридмана к уравнению Абеля можно как с использованием суперпотенциала (см. [29]), так и комбинируя метод суперпотенциала и метод $U(\varphi)$, причем оба метода дают абсолютно идентичные уравнения.

В различных инфляционных моделях одной из главных проблем остается проблема естественного выхода из инфляции без «тонкой настройки» для реалистичных потенциалов. Как показано, в частности, в работе [1], естественное завершение инфляции без «тонкой настройки» возможно, однако не ясно, следуют ли потенциалы, соответствующие этим решениям, из некоторой теории элементарных частиц, например, какой-либо теории поля или теории струн.

Часто предполагается, что инфляция завершается, после того как перестает выполнятся условие медленного скатывания (потенциальный член плотности энергии поля перестает намного превышать кинетический). Однако имеется множество примеров инфляции, протекающей без медленного скатывания [3, 11, 1]. В целом, значение медленного скатывания для инфляции оказывается не совсем прозрачным. В то же время даже численные или приближенные решения соответствующих уравнений Абеля предоставляют ценную информацию о существовании инфляции и ее протекании, а также позволяют выяснить связь между инфляцией и медленным скатыванием и определить, происходит ли выход из инфляции для заданного потенциала. Таким образом, изучение и развитие предлагаемой методики анализа динамики вселенной с помощью уравнения Абеля является весьма актуальным.

Помимо оценки поведения вселенной для уже известных потенциалов скалярных полей также стоит задача конструирования новых потенциалов, которые бы определяли эволюции вселенной в соответствии с данными наблюдений. Одним из мощных инструментов для этих целей оказывается преобразование Дарбу [8, 9].

Некоторые уравнения космологии вполне естественно приводятся к линейному стационарному уравнению Шредингера, например, одно из уравнений Эйнштейна–Фридмана в форме

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^2}\left(\rho + 3p\right)$$

или уравнение, связывающее спектральный индекс спектра возмущений плотности с параметром Хаббла и его производными в приближении медленного скатывания:

$$4\frac{H''}{H} - 8\frac{H'^2}{H^2} = -\frac{8\pi}{\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^2}(1 - n_s). \tag{3}$$

В частности, уравнение (3) заменой $H(\varphi) = 1/\psi(\varphi)$ приводится к виду

$$-\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} - \frac{2\pi}{\mathrm{M}_\mathrm{P}^2} n_s \psi = -\frac{2\pi}{\mathrm{M}_\mathrm{P}^2}\psi,$$

где роль потенциала уравнения Шредингера играет член $-2\pi n_s/\mathrm{M}_\mathrm{P}^2$, а спектральные параметр задан как $-2\pi/\mathrm{M}_\mathrm{P}^2$. Применение преобразования Дарбу к решениям уравнения Шредингера позволяет генерировать новые решения космологических уравнений, и, в случае уравнения (3), получать также инфляционные потенциалы и соответствующие им спектральные индексы. При должном выборе начальных решений в преобразовании Дарбу может оказаться возможным получать вселенные с желаемыми характеристиками.

Итак, как развитие методик анализа уже имеющихся решений космологических уравнений, так и поиска новых решений является достаточно серьезной и важной задачей.

Основные задачи. Диссертационная работа направлена на развитие метода изучения динамики вселенной, заполненной скалярным полем, с помощью сведения системы уравнения движения поля и уравнений Эйнштейна–Фридмана к уравнению Аблея первого рода. Помимо этого предлагается и используется новый способ построения инфляционных потенциалов с помощью преобразования Дарбу. Основные задачи состоят в следующем:

- изучение инфляционной динамики пространственно-плоской вселенной, заполненной единственным действительным скалярным полем с потенциалами вида $m^2\varphi^2/2$, $\lambda\varphi^4/4$ и $m^2\varphi^2/2 + \lambda\varphi^4/4$ посредством сведения уравнений Эйнштейна–Фридмана к уравнению Абеля первого рода, а именно, определение начальных условий, необходимых для реализации режима медленного скатывания, оценка значения условия медленного скатывания для протекания инфляции, определение условий, при которых происходит естественный выход из инфляции и переход к фазе осцилляций поля;

- применение аналитических решений уравнения Абеля для анализа динамики вселенной, заполненной скалярным полем с экспоненциальным потенциалом; проверка полученных решений на устойчивость скалярных возмущений метрики и поля в окрестности точек, в которых расходится производная давления поля по его плотности энергии;

- исследование соответствия между уравнением, связывающем спектральный индекс спектра возмущений плотности энергии и параметр Хаббла в приближении медленного скатывания, с уравнение Кортевега–де Фриза, раскрытого в [19], и развитие этого соответствия на всю иерархию уравнений Кортевега–де Фриза;

– построение новых инфляционных потенциалов и соответствующих им спектральных индексов путем сведения уравнения для спектрального индекса к линейному стационарному уравнению Шредингера.

Основные результаты и положения, выносимые на защиту, состоят в следующем:

– в случае рассмотренных полиномиальных потенциалов установлено, что условие медленного скатывания неизменно возникает в ходе динамики вселенной, если в ней протекает так называемая «сильная» инфляция, и большая часть числа е-расширений и времени инфляции приходится на период действия режима медленного скатывания, однако ускоренное расширение начинается до входа в указанный режим, и заканчивается после выхода из него;

– аналитически показано, что естественный выход из инфляции обязателен для полиномиальных потенциалов, и что за ним следует режим осцилляций поля;

– с помощью уравнения Абеля получены аналитические общие решения уравнений Эйнштейна–Фридманад для вселенной, заполненной скалярным полем как с положительным, так и отрицательным экспоненциальным потенциалом; доказана устойчивость скалярных возмущений метрики и поля для полученных решений в окрестности точек, в которых расходится производная давления поля по его плотности энергии;

– изучено соответствие между уравнением Кортевега–де Фриза и уравнением, связывающем спектральный индекс спектра возмущений плотности энергии скалярного поля в приближении медленного скатывания; соответствие расширено на всю иерархию уравнений Кортевега–де Фриза;

– представлен метод сведения уравнения для спектрального индекса в приближении медленного скатывания к линейному стационарному уравнению Шредингера; посредством преобразования Дарбу построены новые потенциалы скалярного поля и соответствующие им спектральные индексы, а также выражения для масштабного фактора и скалярного поля, в том числе, обеспечивающие естественный выход из инфляции.

Научная новизна. Впервые выполнен подробный анализ эволюции вселенной, заполненной скалярным полем с полиномиальным потенциалом, при помощи уравнения Абеля первого рода. Выявлена тонкая структура инфляции, а именно, инфляция начинается до того как вселенная входит в режим медленного скатывания, и заканчивается уже после выхода из него. Доказано, что условие медленного скатывания реализуется в ходе динамики поля естественным образом, если начальное отношение потенциального члена плотности энергии поля к кинетическому не слишком мало. Установлено, что большая часть е-расширений и времени инфляции приходится на фазу медленного скатывания. Аналитически показан переход от режима инфляции к режиму осцилляции поля. Впервые общее решение уравнений Эйнштейна–Фридмана в плоской вселенной, заполненной единственным действительным скалярным полем с положительным и отрицательным экспоненциальными потенциалами, найдено с помощью уравнения Абеля. Выявлены точки, в которых расходится отношение давления к плотности (w-*сингулярность) и/или производная давления по плотности*. Показано, что решение устойчиво относительно малых возмущений метрики и самого поля в этих точках.

Продемонстрировано, что получение решений космологических уравнений методом преобразования Дарбу может существенно упростить решение проблемы естественного выхода из инфляционной стадии эволюции Вселенной. Найдены новые инфляционные потенциалы, обладающие упомянутым свойством. Анализ решений показал, что значение спектрального индекса в период выполнения условия медленного скатывания может приближаться к наблюдаемым значениям.

Научная и практическая ценность. Основные результаты диссертации могут иметь значение для изучения космологических моделей, описывающих инфляцию (глава 1). Основное достоинство метода сведения уравнений Эйнштейна–Фридмана к уравнению Абеля 1-го рода, состоит в том, что он облегчает исследование инфляционных моделей с единственным скалярным полем и позволяет достаточно просто определить, в частности, будет ли в некоторой модели реализовываться инфляция, при каких условиях, происходит ли выход из инфляции. Комбинация метода суперпотенциала и метода $U(\varphi)$ (глава 2) может быть полезной при поиске аналитических решений космологических уравнений. Наконец, изученная связь между уравнением для спектрального индекса спектра возмущений плотности с иерархией уравнений Кортевега–де Фриза и линейным стационарным уравнением Шредингера (глава 3) может быть использована для построения новых инфляционных потенциалов и получения решений космологических уравнений.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на Международной научной конференции «Фридмановские чтения»

(Пермь, 2013), II Российско-Испанском конгрессе по физике ядра и элементарных частиц на любых расстояниях и космологии (Санкт-Петербург, 2013), Российской школе «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений» и Международном семинаре «Нелинейные поля в теории гравитации и космологии» (Казань, 2013).

Публикации. Основное содержание работы изложено в четырех публикациях, список которых приведен в конце автореферата.

Структура работы. Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка цитируемой литературы (127 наименований) и приложения, содержит 23 рисунка и 16 таблиц. Общий объем диссертации — 152 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении показывается актуальность работы, цели и задачи исследования, основные результаты и положения выносимые на защиту, отражена их научная новизна и практическая значимость.

Глава 1 посвящена исследованию метода решения уравнений Эйнштейна–Фридмана путем сведения их к уравнению Абеля первого рода и применению метода для анализа космологической инфляции в случае трех полиномиальных потенциалов скалярного поля.

В разделе 1.1 главы 1 рассматривается метод суперпотенциала и процедура редукции уравнений Эйнштейна–Фридмана к уравнению Абеля, а также исследование некоторых его свойств.

Вводя суперпотенциал как функцию, описывающую зависимость плотности энергии поля от самого поля,

$$W(\varphi) \equiv \rho(\varphi) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)$$

и используя подстановку

$$\begin{aligned} &x = 3\sqrt{3\pi}/\mathrm{M_P}\,\varphi, \\ &\chi = V'(x)/V(x), \\ &W(x;C) = V(x)\left(1 + \frac{1}{y^2-1}\right), \quad C = \mathrm{const} \end{aligned}$$

можно показать, что $\varphi(t)$ и $H(\varphi)$ удовлетворяют уравнениям динамики действительного скалярного поля в плоской вселенной ФЛРУ

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0, \\ &H^2 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \end{aligned}$$

где штрих обозначает производную $d/d\varphi$, если функция $y(x;C)$ является решение уравнения Абеля первого рода

$$y' = -\frac{1}{2}\left(y^2-1\right)\left(\sigma - \chi' y\right), \quad \sigma = \pm 1,$$

где штрих обозначает производную d/dx. При этом знание решения данного уравнения позволяет однозначно определить поведение масштабного фактора и скалярного поля во времени. Его точное решение может быть получено, например, в том случае, когда потенциал поля имеет вид

$$V(x) = A_1 \mathrm{e}^{-x/3}\left(\mathrm{e}^{2x/3} + A_2\right), \quad A_1,\ A_2 = \mathrm{const}.$$

Особый интерес представляет потенциал

$$V(x) = \mathrm{sh}\left(\frac{x}{3}\right),$$

поскольку в точке $x = 0$ ($\varphi = 0$), он меняет знак. Оказывается, что в этом случае существует единственное решение уравнения Абеля, которое в точке $x = 0$ также обращается в ноль, причем для скалярного поля такая точка будет точкой максимума.

Исследование решений уравнения Абеля $y(x)$ позволяет сделать выводы о динамике скалярного поля и масштабного фактора. В частности, если $y \geq \sqrt{11}$, то выполняется условие медленного скатывания $2\,|V(\varphi)|\,/\ddot{\varphi} \geq 10$, если $y > \sqrt{3}$, то вселенная расширяется ускоренно. Кроме того, $|y| < 1$ при $V < 0$ и $|y| > 1$ при $V > 0$, и при смене знака потенциала решение уравнения Абеля естественным образом переходит из одной области значений в другую.

Раздел 1.2 посвящен исследованию динамики инфляционной вселенной для скалярных полей с потенциалами $V(\varphi) = m^2\varphi^2/2$, $V(\varphi) = \lambda\varphi^4/4$ и $V(\varphi) = m^2\varphi^2/2 + \lambda\varphi^4/2$. Такие потенциалы не позволяют получить точное решение соответствующих уравнений Абеля, однако анализ их численных решений показывает, что существует минимальное значение скалярного поля, при котором в ходе динамики вселенной может начаться ее ускоренное расширение. Для начала же «сильной» инфляции с числом е-расширений не менее 100, произошедших за время порядка 10^{-35} с, минимальное начальное значение поля составляет $\varphi_0 = 4{,}0 - 5{,}3\,\mathrm{M_P}$ (в зависимости от модели). Также на число е-расширений оказывает влияние начальное соотношение между потенциальным и кинетическим членами плотности энергии поля, причем это влияние быстро уменьшается с ростом начального значения поля.

Значительная доля времени инфляции (в среднем 80%) и е-расширений (в среднем 98%) приходится на период выполнения условия медленного скатывания, однако инфляция может начинаться до выполнения этого условия и оканчиваться через некоторое время после того, как оно перестало работать. Впрочем, в ходе «сильной инфляции» условие медленного скатывания возникает естественным образом в ходе динамики поля.

В разделе 1.3 подводятся итоги главы 1.

В главе 2 метод $U(\varphi)$ в комбинации с методом суперпотенциала дают иной подход к сведению уравнений Эйнштейна–Фридмана к уравнению Абеля первого рода. Далее с использованием уравнения Абеля получаются общие решения для масштабного фактора и действительного скалярного поля с положительным и отрицательным экспоненциальными потенциалами в пространственно-плоской вселенной.

В разделе 2.1 рассматривается метод $U(\varphi)$. Скорость изменения скалярного поля при этом определяется как некоторая функция самого поля

$$\dot{\varphi} \equiv U(\varphi).$$

Предполагая, что $U(\varphi)$ является производной некоторой функции $g(\varphi)$ по φ, и выражая суперпотенциал $W(\varphi)$, потенциал поля $V(\varphi)$ и параметр Хаббла $H(\varphi)$ через $g(\varphi)$, а также масштабируя g и φ, подстановкой в уравнения Эйнштейна–Фридмана в форме

$$H^2 = \frac{8\pi}{3\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^2}\rho,$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0,$$

можно вновь свести их к в точности такому же уравнению Абеля первого рода, что и в главе 1. При этом сохраняются все соотношения между независимой переменной x, решением уравнения Абеля $y(x)$, скалярным полем φ и скоростью его изменения $\dot{\varphi}$.

Раздел 2.2 посвящен получению и анализу общего решения уравнений Эйнштейна–Фридмана для скалярного поля с экспоненциальным потенциалом посредством уравнения Абеля. Для потенциала вида

$$V(\varphi) = V_c \mathrm{e}^{\varkappa\varphi/\varphi_c}, \quad \varkappa = \pm 1, V_c, \ \varphi_c = \mathrm{const}$$

соответствующее уравнение Абеля

$$y' = -\frac{1}{2}\left(y^2 - 1\right)\left(1 - \frac{\varkappa}{3}y\right),$$

где штрих обзначает производную d/dx, может быть решено в элементарных функциях. Все его решения в зависимости от начальных условий $y(x_0) = y_0$ и значения $\varkappa$ разделяются на три класса, а общее решение имеет вид

$$y(x) = \varkappa + \frac{2\varsigma}{\sqrt{1 - C\mathrm{e}^{4\varkappa x/3}}}, \quad C = \mathrm{e}^{-4\varkappa x_0/3}\frac{(y_0 - \varkappa)^2 - 4}{(y_0 - \varkappa)^2}, \quad \varsigma = \pm 1.$$

При $C = 0$ решения постоянны: $y = \pm 1$ и $y = \pm 3$. При $C < 0$ решения не имеют особенностей и монотонно возрастают или убывают в зависимости от знаков $\varkappa$ и ς; при $C > 0$ каждое решение имеет одну особенность в точке

$$x_s = x_0 + \frac{3\varkappa}{4}\ln\left[\frac{(y_0 - \varkappa)^2}{(y_0 - \varkappa)^2 - 4}\right],$$

в целом же они также монотонно растут или убывают.

Решениям уравнения Абеля с $C = 0$ отвечает частный случай нулевого потенциала поля $V_c = 0$. Соответствующие решения уравнений Эйнштейна–Фридмана описывают замедленно расширяющуюся вселенную с сингулярностью типа «Большой взрыв» в прошлом и без сингулярностей в будущем.

При $C < 0$ и $y_0 \in (-1;1)$ космологические решения описывают вначале замедленно расширяющуюся, а затем ускоренно сжимающуюся вселенную с начальной и конечной сингулярностями. При этом в тот момент времени, когда расширение сменяется сжатием наблюдается w-сингулярность, а также расходится производная $dp/d\rho$, однако решение остается устойчивым относительно малых скалярных возмущений метрики и поля. Если же $C < 0$, а $y_0 \in (-3;-1)$ или $y_0 \in (1;3)$, то вселенная вначале расширяется замедленно, а затем ускоренно, имеет сингулярность в прошлом и не имеет сингулярностей в будущем.

При $C > 0$ решение описывает вселенную, расширяющуюся вначале замедленно, а затем ускоренно, имеющую сингулярность в прошлом и не имеющую сингулярностей в будущем. В отличие от случаев $C \leq 0$ скалярное поле изменяется не монотонно, а имеет один максимум или минимум. В точке максимума (минимума) поля расходится производная $dp/d\rho$, однако решение также устойчиво относительно малых скалярных флуктуаций метрики и поля.

В разделе 2.3 подводятся итоги главы 2.

Глава 3 посвящена исследованию связи уравнения для спектрального индекса спектра возмущений плотности в приближении медленного скатывания с иерархией уравнений Кортевега–де Фриза и построению новых инфляционных потенциалов и соответствующих им спектральных индексов.

В разделе 3.1 приводятся истоки самой идеи связи между двумя указанными уравнениями. Дж. Лидси в работе [19] указывает, что уравнение, связывающее параметр Хаббла $H(\varphi)$ и спектральный индекс спектра возмущений плотности n_s в приближении медленного скатывания

$$4\frac{H''}{H} - 8\frac{H'^2}{H^2} = \frac{8\pi}{\mathrm{M_P^2}}(1 - n_s),$$

где штрих обзначает производную $d/d\varphi$, путем определенных преобразований может приведено к виду

$$-\lambda^2 \left(H^2\right)' + \left(H^2\right)''' + \frac{3}{H_0^2} H^2 \left(H^2\right)' = 0, \quad \lambda^2 = \frac{8\pi}{\mathrm{M_P^2}}(1 - n_s),$$

который по форме в точности совпадает с уравнением КдФ

$$u_t + u_{3x} + \frac{3}{u_0} u u_x = 0,$$

где нижний индекс обозначает частную производную по соответствующей переменной, если положить $u(x,t) = H^2(\varphi)$, $\varphi = x - \lambda^2 t$.

Связь двух уравнений может быть расширена на всю иерархию уравнений КдФ

$$v_t - \frac{\partial}{\partial x} L_{n+1}[v] = 0,$$

где $L_{n+1}[v]$ — оператор Ленарда [15].

Уравнения иерархии можно представить в виде условия совместности пары Лакса

$$\begin{cases} \psi_{xx} = (v - \vartheta)\psi, \\ \psi_t = a\psi_x - b\psi, \end{cases}$$

где $v = v(x,t)$, $a = a(x,t)$, $b = b(x,t)$, $\vartheta = \mathrm{const}$. Первое уравнение в паре имеет вид ЛСУШ по переменной x. Это означает, что к нему можно применить преобразование Дарбу, а значит, можно конструировать решения всех уравнений иерархии КдФ посредством преобразования Дарбу.

В частности, в данном разделе показывается, что солитонные решения всех уравнений из иерархии КдФ также оказываются решениями уравнения, связывающего параметр Хаббла и спектральный индекс в приближении медленного скатывания.

В разделе 3.2 уравнение для спектрального индекса в приближении медленного скатывания сводится к ЛСУШ

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = -\psi$$

посредством подстановки

$$\begin{aligned} &\varphi = \frac{\mathrm{M_P}}{\sqrt{8\pi}} \widetilde{\varphi}, \\ &H(\widetilde{\varphi}) = H_c \psi(\widetilde{\varphi}), \quad H_c = \mathrm{const}, \\ &\widetilde{\varphi} = 2x, \\ &n_s(x) = -U(x). \end{aligned}$$

Далее, применяя преобразование Дарбу, можно строить новые решения ЛСУШ и соответствующие им потенциалы $U(\varphi)$, таким образом получая новые выражения для параметра Хаббла, соответствующего инфляционного потенциала и спектрального индекса.

В качестве начальных спектральных индексов выбраны $n_s = 0$, $n_s = 1$ и $n_s = 1 - \mu^2$, $0 < \mu^2 < 1$. На основе первого из них посредством двукратного преобразования Дарбу получены решения, описывающие вечную инфляцию во вселенной с начальной сингулярностью $a \to +\infty$. Модель Харрисона–Зельдовича с $n_s = 1$ после однократного преобразования Дарбу дает решение, описывающее бесконечную во времени вселенную без сингулярностей, в которой масштабный фактор вначале монотонно растет, а затем монотонно убывает, причем имеется этап укоренного расширения. В модели с $n_s = 1 - \mu^2$, $0 < \mu^2 < 1$ однократное преобразование Дарбу определяет вселенную, имеющую начальную и конечную сингулярности. При этом также наличествует этап ускоренного расширения. Во всех указанных случаях в период выполнения приближения медленного скатывания спектральный индекс может принимать значения, укладывающиеся в наблюдаемый диапазон [26].

В разделе 3.3 подводятся итоги главы 3.

В заключении формулируются главные выводы из работы и перспективы дальнейшего исследования ее тем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные выводы диссертационной работы заключаются в следующем:

- уравнения Эйнштейна–Фридмана для пространственно-плоской вселенной Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера, заполненной единственным действительным скалярным полем φ, могут быть путем несложных математических преобразований сведены к уравнению Абеля первого рода; анализ решений этого уравнения, аналитических или численных, позволяет выявить тонкую структуру инфляции, вызываемой скалярным полем, оценить роль медленного скатывания в ней, а также определить начальные условия, необходимые и достаточные для ее начала;
- исследование инфляции, генерируемой каждым скалярным полем с одним трех полиномиальных потенциалов $m^2\varphi^2/2$, $\lambda\varphi^4/4$, $m^2\varphi^2/2 + \lambda\varphi^4/4$, показывает, что при «сильной» инфляции условие медленного скатывания возникает в динамике скалярного поля естественным образом; препятствовать его возникновению может крайняя малость начального соотношения между потенциальным и кинетическим членами плотности энергии поля $2\left|V(\varphi_0)\right|/\dot{\varphi}_0^2$; в частности, для потенциала $m^2\varphi^2/2 + \lambda\varphi/4$ и начального значения поля $\varphi_0 = 8{,}05\,\mathrm{M_P}$ медленное скатывание не реализуется при $2\left|V(\varphi_0)\right|/\dot{\varphi}_0^2 \lesssim 10^{-18}$; более 70% времени инфляции и более 97% числа е-расширений приходится на период выполнения условия медленного скатывания, однако инфляции прекращается позже, чем перестает работать медленное скатывание;
- при выборе в потенциалах поля $\lambda = 10^{-14}$ и $m^2 = \lambda\mathrm{M_P^2}$ минимальные начальные условия, достаточные для начала «сильной» инфляции (число е-расширений ~ 100, время $\sim 10^{-35}\,\text{с}$) — это $\varphi_0 = 5{,}6\,\mathrm{M_P}$, $\dot{\varphi}_0 = -1{,}3\cdot 10^{-7}\,\mathrm{M_P^2}$ в случае потенциала $V(\varphi) = m^2\varphi^2/2$, $\varphi_0 = 4{,}0\,\mathrm{M_P}$, $\dot{\varphi}_0 = 1{,}8\cdot 10^{-8}\,\mathrm{M_P^2}$ в случае потенциала $V(\varphi) = \lambda\varphi^4/4$, $\varphi_0 = 5{,}3\,\mathrm{M_P}$, $\dot{\varphi}_0 = -1{,}2\cdot 10^{-7}\,\mathrm{M_P^2}$ в случае потенциала $V(\varphi) = m^2\varphi^2/2 + \lambda\varphi^4/4$;
- определяющее значение для возникновения инфляции в ходе эволюции вселенной имеет начальное значение скалярного поля и начальное значение соотношения между потенциальным и кинетическим членами его плотности энергии; благоприятными оказываются бóльшие начальные значение для обеих величин, причем увеличение начального значения поля ослабляет влияние начального соотношения между потенциальным и кинетическим членами плотности энергии;
- посредством сведения уравнений Эйнштейна–Фридмана к уравнению

Абеля первого рода получены их общие точные аналитические решения для скалярного поля экспоненциальным потенциалом как в случае положительного, так и в случае отрицательного потенциала; исследовано поведение всех возможных типов решений, выделенных в зависимости от знака постоянной интегрирования в соответствующих решениях уравнения Аблея;

- нулевая постоянная интегрирования соответствует двум случаям: один отвечает нулевому потенциалу поля; решение описывает замедленно расширяющуюся вселенную с сингулярностью типа «Большой Взрыв» в прошлом и без сингулярностей в будущем; другой — положительному потенциалу и фиксированному абсолютному значению начальной скорости изменения поля; решение описывает ускоренно расширяющуюся вселенную с сингулярностью типа «Большой Взрыв» в прошлом и без сингулярностей в будущем;

- отрицательная постоянная интегрирования в случае также отрицательного потенциала определяет вселенную вначале замедленно расширяющуюся, а затем ускоренно сжимающуюся, с сингулярностями типа «Большой Взрыв» в прошлом и «Большой Хруст» в будущем; в случае положительного потенциала мы имеем вселенную, расширяющуюся вначале замедленно, а затем ускоренно, с сингулярностью типа «Большой Взрыв» в прошлом и без сингулярностей в будущем;

- положительная постоянная интегрирования возможна только в случае положительного потенциала поля; вселенная также расширяется вначале замедленно, а затем ускоренно, обладает сингулярностью типа «Большой Взрыв» в прошлом и не имеет сингулярностей в будущем, однако в отличие от остальных вариантов скалярное поле изменяется не в диапазоне $\varphi \in (-\infty; +\infty)$, а оказывается ограничено сверху или снизу единственным максимумом или минимумом;

- для отрицательного потенциала в момент смены расширения вселенной сжатием, а также для положительного потенциала в момент достижения максимума или минимума скалярного поля производная давления поля по его плотности энергии расходится, что может сказываться на устойчивости флуктуаций метрики и поля; нами показано, что и в том и в другом случае скалярные флуктуации метрики и поля остаются малыми;

- предложен новый способ построения инфляционных потенциалов путем сведения уравнения для спектрального индекса спектра возмущений плотности и параметра Хаббла в приближении медленного скатывания к стационарному линейному уравнению Шредингера; выбрав исходный спектральный индекс, составив соответствующее уравнение Шредингра и решив его, затем можно с помощью преобразования Дарбу построить новые выражения для спектрального индекса и параметра Хаббла, из которых сразу же находится новый потенциал скалярного поля; масштабный фактор и зависимость скалярного поля от времени получаются непосредственно интегрированием уравнения Эйнштейна–Фридмана;

- в качестве исходных спектральных индексов были выбраны $n_s = 0$, спектральный индекс спектра Харрисона–Зельдовича $n_s = 1$ и спектральный индекс возмущенного спектра Харрисона–Зельдовича $n_s = 1 - \mu^2$, $\mu = \mathrm{const} < 1$;

- в случае $n_s = 0$ преобразование Дарбу использовано дважды, получены решения, описывающие ускоренно расширяющиеся вселенные с единственной начальной сингулярностью;

- в случае $n_s = 1$ преобразование Дарбу использовано однократно, получено решение, описывающее вселенную, бесконечную во времени и не имеющую сингулярностей; при положительный значениях поля масштабный фактор, вначале ускоренно, а затем замедленно, растет, а при отрицательных, вначале ускоренно, а затем замедленно, убывает; таким образом, мы имеем инфляцию с последующим естественным выходом из нее и сменой расширения сжатием;

- в случае $n_s = 1 - \mu^2$ преобразование Дарбу также использовано однократно, получено решение, описывающее вселенную, имеющую сингулярности типа «Большой Взрыв» в прошлом и «Большой Хруст» в будущем; при этом она расширяется, вначале ускоренно, а затем замедленно, а затем так же сжимается; то есть такой потенциал обеспечивает естественный выход из инфляции;

- во всех этих решениях существуют такие временные интервалы, когда одновременно выполняется условие медленного скатывания и спектральный индекс приближается к наблюдаемым значениям.

Итак, уравнение Абеля оказывается ценным инструментом для анализа динамики вселенной, заполненной скалярным полем, но также его можно применять и для построения новых инфляционных потенциалов. Действительно, задавая решение уравнения Абеля, описывающее вселенную с требуемым поведением, мы получаем дифференциальное уравнение первого порядка для потенциала скалярного поля. Таким образом, можно без особых затруднений получать потенциалы, при которых происходит естественный выход из инфляции.

Методика построения новых потенциалов посредством преобразования Дарбу также оказывается весьма полезной, поскольку позволяет получить не только сам потенциал, но и соответствующие ему спектральный индекс спектра возмущений плотности в приближении медленного скатывания и параметр Хаббла, а значит, и отыскать зависимость масштабного фактора и скалярного поля от времени.

Очевидно, что обе методики заслуживают дальнейшего рассмотрения и развития.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, включенных в перечень ВАК Министерства образования и науки РФ:

1 Yaparova, A.V. The KdV in cosmology: A useful tool or a distraction? / A.V. Yaparova, A.V. Yurov, V.A. Yurov // Gravitation and Cosmology. — 2015. — Vol. 21, no. 2. — P. 166–170.

2 Yurov, V.A. Application of the Abel equation of the 1st kind to inflation analysis of non-exactly solvable cosmological models / A.V. Yurov, A.V. Yaparova, V.A. Yurov // Gravitation and Cosmology. — 2014. — Vol. 20, no. 2. — P. 106–115.

Статьи в других научных изданиях и тезисы докладов на конференциях:

1 Юров, В.А. Уравнение Абеля и нули потенциала космологического скалярного поля / В.А. Юров, А.В. Япарова // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. — 2015. — Вып. 4. — С. 30–36.

2 Япарова, А.В. Использование уравнения Абеля первого рода для анализа космологической инфляции / А.В. Япарова // Известия Калининградского государственного технического университета. — 2012. — №. 26. — С. 111–120.

3 Япарова, А.В. Применение уравнение Абеля для анализа космологической инфляции / А.В. Япарова // Фридмановские чтения: тезисы докладов международной научной конференции (Пермь, 24 июня – 28 июня 2013 г.) / Пермский государственный национальный исследовательский университет. — Пермь, 2013. — С. 51.

4 Yaparova, A.V. Spectral index and Srödinger equation / A.V. Yaparova, A.V. Yurov // Труды Российской школы «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений» и Международного научного семинара «Нелинейные поля в теории гравитации и космологии» (Казань, 21 – 26 октября 2013 г.) / Казанский (Приволжский) федеральный университет. — Казань: Отечество, 2013. — С. 77.

ЛИТЕРАТУРА

1 Верещагин, С. Преобразование Дарбу и точно решаемые космологические модели / С.Д. Верещагин, А.В. Юров // ТМФ. — 2004. — Т. 139, № 3. — С. 405–422.

2 Гурович, В. Квантовые эффекты и регулярные космологические модели / В.Ц. Гурович, А.А. Старобинский // ЖЭТФ. — 1979. — Т. 77, № 5. — С. 1683–1700.

3 Журавлев, В. Новые классы точных решений в инфляционной космологии / В.М. Журавлев, С.В. Червон, В.К. Щиголев // ЖЭТФ. — 1998. — Т. 114, № 2. — С. 406–417.

4 Муханов, В. Квантовые флуктуации и несингулярная Вселенная / В.Ф. Муханов, Г.В. Чибисов // Письма в ЖЭТФ. — 1981. — Т. 33. — С. 549–553.

5 Потенциал полной энергии как суперпотенциал в интегрируемых космологических моделях / А.В. Юров, В.А. Юров, С.В. Червон, М. Сами // ТМФ. — 2011. — Т. 166, № 2. — С. 299–311.

6 Старобинский, А. Спектр реликтового гравитационного излучения и начальное состояние Вселенной / А.А. Старобинский // Письма в ЖЭТФ. — 1979. — Т. 30, № 11. — С. 719–723.

7 Червон, С. Точные космологические решения для фантомных полей / С.В. Червон, О.Г. Панина // Вестник Самарского государственного технического университетаю Серия физ.-мат. науки. — 2011. — Т. 24, № 3. — С. 129–135.

8 Юров, А. Преобразование Дарбу в квантовой механике: Учеб. пособие / А.В. Юров. — Калининград: Калининградский университет, 1998.

9 Юров, А. Исследование космологий скалярной материи методом спектрального дизайна: Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / Санкт–Петербургский государственный университет. — СПб., 2007.

10 Albrecht, A. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking / A. Albrecht // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 48. — P. 1220–1223.

11 Bazeia, D. First-order formalism for scalar field in cosmology // arXiv.org. — 2014. — http://arxiv.org/abs/hep-th/0610028 (online; accessed: 01.10.2015).

12 Cheb-Terraba, E. Abel ODEs: Equivalence and integrable classes / E.S. Cheb-Terraba, A.D. Rochec // Computer Physics Communications. — 2000. — Vol. 130, no. 1–2. — P. 204–231.

13 Chervon, S. Exact cosmology and specification of an inflationary scenario / S.V. Chervon, M. Novello, R. Triay // Grav. Cosm. — 2005. — Vol. 11, no. 4. — P. 329–332.

14 Chervon, S. V. On calculation of the cosmological parameters in exact models of inflation / S. V. Chervon, I.V. Fomin // Grav. Cosm. — 2008. — Vol. 75, no. 9. — P. 163–167.

15 Das, A. Integrable Models / A. Das. — Teaneck: World Scientific Publishing Co. Inc., 1989. — Vol. 30 of World Scientific Lecture Notes in Physics.

16 First-order formalism and dark energy / D. Bazeia, C.B. Gomes, L. Losano, R. Menezes // Phys. Lett. B. — 2006. — Vol. 663, no. 4-5. — P. 415–419.

17 Guth, A. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems / A. Guth // Phys. Rev. D. — 1981. — Vol. 23. — P. 347–356.

18 Hawking, S. The development of irregularities in a single bubble inflationary universe / S.W. Hawking // Phys. Lett. B. — 1982. — Vol. 115. — P. 295–297.

19 Lidsey, J. Cosmology and the Korteweg-de Vries equation / J.E. Lidsey // Phys. Rev. D. — 2012. — Vol. 86. — P. 123523–1–123523–7.

20 Linde, A. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems / A.D. Linde // Phys. Lett. B. — 1982. — Vol. 108. — P. 389–393.

21 Linde, A. Chaotic inflation / A.D. Linde // Phys. Lett. B. — 1983. — Vol. 129. — P. 177–181.

22 Linde, A. Axions in inflationary cosmology / A.D. Linde // Phys. Lett. B. — 1991. — Vol. 259, no. 1–2. — P. 38–47.

23 Linde, A. Hybrid inflation / A.D. Linde // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 49, no. 2. — P. 748–754.

24 Mukhanov, V. Theory of cosmological perturbations / V.F. Mukhanov, H.A. Feldman, R.H. Brandenberger // Phys. Rept. — 1992. — Vol. 215. — P. 203–333.

25 New exact cosmologies on the brane / A.V. Astashenok, A.V. Yurov, S.V. Chervon et al. // Astrophys. and Space Sci. — 2014. — Vol. 353, no. 2. — P. 219–328.

26 Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Cosmological interpretation / E. Komatsu, K.M. Smith, J. Dunkley et al. // Astrophys. J. Suppl. — 2011. — Vol. 192, no. 2. — P. 18–1–18–47.

27 Starobinsky, A. A new type of isotropic cosmological models without singularity / A.A. Starobinsky // Phys. Lett. B. — 1980. — Vol. 91, no. 1. — P. 99–102.

28 Starobinsky, A. Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations / A.A. Starobinsky // Phys. Lett. B. — 1982. — Vol. 117. — P. 175–178.

29 Yurov, A. Friedman versus Abel equations: A connection unraveled / A.V. Yurov, V.A. Yurov // J. Math. Phys. — 2010. — Vol. 51, no. 8. — P. 082503–1–082503–17.

Япарова Анна Валентиновна

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНФЛЯЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ПОСРЕДСТВОМ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ ПЕРВОГО РОДА

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 10.03.2017
Бумага для множительных аппаратов. Формат 60x90 1/16.
Ризограф. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 1,3
Тираж 100 экз. Заказ 55

Отпечатано в типографии
Издательства Балтийского федерального университета им. Иммануила Канта
236022, г. Калининград, ул. Гайдара, 6