На правах рукописи

Опритова Мария Александровна

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КАВАХАРЫ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2016

Работа выполнена на кафедре нелинейного анализа и оптимизации Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Научный руководитель: Фаминский Андрей Вадимович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации факультета физико-математических и естественных наук ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» .

Официальные оппоненты: Розанова Ольга Сергеевна, доктор физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова.

Шананин Николай Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент Государственного университета управления.

Ведущая организация: Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород).

Защита состоится “11” октября 2016 года в 15ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д.212.203.27 в Российском университете дружбы народов по адресу: 117419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 495а.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117419, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте "Диссертационные советы РУДН"и в сети интернет (http://dissovet.rudn.ru).

Автореферат разослан “____” ________ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук — Савин Антон Юрьевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В работе рассматривается обобщенное уравнение Кавахары

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + uu_x + g_1(t,x)u_x + g_0(t,x)u = f(t,x), \tag{1}$$

где $u = u(t,x)$, b — действительная константа. Для этого уравнения изучаются две задачи: 1) задача Коши в полосе $\Pi_T = (0,T) \times \mathbb{R}$ с начальным условием при $x \in \mathbb{R}$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

2) начально-краевая задача а полуполосе $\Pi_T^+ = (0,T) \times \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$) с начальным условием (2) при $x \geq 0$ и краевыми условиями при $0 \leq t \leq T$

$$u\big|_{x=0} = \mu(t), \quad u_x\big|_{x=0} = \nu(t). \tag{3}$$

Обе задачи рассматриваются в нелокальной постановке: T — любое положительное число. При изучении поведения решений при больших временах решения, разумеется, рассматриваются при всех $t \geq 0$.

Уравнение Кавахары

$$u_t - \partial_x^5 u + b\partial_x^3 u + au_x + uu_x = 0 \tag{4}$$

впервые было выведено в статье T. Kawahara [1] и является модельным для описания длинных нелинейных волн в средах со слабой дисперсией. Следует отметить, что в различных физических ситуациях коэффициент b может быть положительным, отрицательным или нулевым (см., например, работы А. В. Марченко [2], А. Т. Ильичева [3]). Это уравнение является

[1] *Kawahara T.* Oscillatory solitary waves in dispersive media // J. Phys. Soc. Japan. 1972. V. 33, № 1. P. 260–264.

[2] *Марченко А. В.* О длинный волнах в мелкой воде под ледяным покровом // Прикл. матем. мех. 1988. Т. 52, № 2. С. 230–234.

[3] *Ильичев А. Т.* О свойствах одного нелинейного эволюционного уравнения пятого порядка, описывающего волновые процессы в средах со слабой дисперсией // Труды МИАН. 1989. Т 186. С. 222–226.

модификацией уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t + u_{xxx} + au_x + uu_x = 0 \tag{5}$$

на случай дисперсионного соотношения более высокого порядка. Уравнение Кавахары иногда называют уравнением Кортевега–де Фриза 5-го порядка. Переход от уравнения (4) к уравнению (1) позволяет учесть дополнительные эффекты, в частности, связанные с неоднородностью среды.

Интенсивное изучение краевых задач для уравнения Кортевега–де Фриза началось с 60-х годов XX века. За прошедшее время в трудах таких математиков, как R. Temam, J.-C. Saut, T. Kato, J. Bona, С.Н. Кружков, А.В. Фаминский, J. Ginibre, Y. Tsutsumi, C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, J. Bourgain, T. Tao, J. Colliander и других была развита теория разрешимости и корректности задачи Коши и начально-краевых задач для этого уравнения в различных функциональных пространствах.

Теория краевых задач для уравнения Кавахары разработана значительно меньше. Основные результаты были получены начиная с 90-х годов XX века в трудах таких математиков, как J.C. Saut, А.В. Фаминский, H. Biagioni, F. Linares, S Cui, D. Deng, H. Wang, Н.А. Ларькин, Г.Г. Доронин, и других, но эта теория далека от завершения.

При изучении свойств решений уравнения Кортевега–де Фриза в работах С.Н. Кружкова, А.В. Фаминского [4], T. Kato [5] было обнаружено свойство повышения их внутренней регулярности в зависимости от скорости убывания на бесконечности начальной функции, которая сама может оставаться нерегулярной.

Одним из важных вопросов, возникающих при изучении свойств решений эволюционных уравнений, является вопрос об их поведении, в частности, об убывании при больших временах. В случае уравнения Кортевега–де Фриза или уравнения Кортевега–де Фриза с дополнительной абсорбцией подобные вопросы были изучены в работах E. Zuazua, G.P. Menzala, A.F. Pazoto, L. Rosier, B.Y. Zhang, F. Linares, M. Cavalcanti, V. Domingos Cavalcanti, А.В. Фа-

[4] *Кружков С. Н., Фаминский А. В.* Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега—де Фриза // Мат. сб. 1983. Т. 120, № 3. С. 396–425.

[5] *Kato T.* On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg–de Vries equation // Stud. Appl. Math., Adv. Math. Suppl. Stud. 1983. V. 8. P. 93–128.

минского, Н.А. Ларькина [6]. В этих работах для различных краевых задач были найдены некоторые достаточные условия убывания решений при больших временах.

Цели исследования

Целью работы является изучение свойств внутренней регулярности слабых решений задачи Коши и начально-краевой задачи в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары в зависимости от скорости убывания на бесконечности нерегулярной начальной функции и правой части уравнения, а также достаточных условий убывания этих решений при больших временах. Также в работе рассматриваются вопросы единственности в различных классах слабых решений задачи Коши для уравнения Кавахары.

Методика исследования

Исследование носит теоретический характер. Оно основано на сочетании нелинейных интегральных оценок решений рассматриваемых задач, обращении линейной части уравнения и использовании свойств линеаризованного уравнения Кавахары. В последнем случае при изучении фундаментального решения соответствующего дифференциального оператора применяются методы гармонического анализа и комплексного анализа.

Основные положения, выносимые на защиту

1) Теоремы о существовании и единственности слабых решений задачи Коши для обобщенного уравнения Кавахары, уточнение классов единственности в случае самого уравнения Кавахары.

2) Теоремы о существовании обобщенных производных слабых решений задачи Коши и начально-краевой задачи в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары, порядок которых зависит от скорости убывания на бесконечности нерегулярной начальной функции и правой части уравнения. В случае начально-краевой задачи производные до второго порядка построены вплоть до пространственной границы, все остальные производные — строго внутри рассматриваемых областей.

3) Теоремы о существовании строго внутри рассматриваемых областей непрерывных производных слабых решений задачи Коши и начально-краевой задачи в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары. Порядок производных и их оценки в нормах Гёльдера зависят

[6] *Faminskii A.V., Larkin N.A.* Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed on a bounded interval // Electronic J. Differential Equ. 2010. № 1. P. 1–20.

от скорости убывания на бесконечности нерегулярной начальной функции и правой части уравнения.

4) Теоремы об убывании при больших временах слабых решений задачи Коши и начально-краевой задачи в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары в случае абсорбции, локализованной на бесконечности.

5) Оценки фундаментального решения дифференциального оператора, соответствующего линеаризованному уравнению Кавахары.

Научная новизна

Все полученные в диссертации результаты являются новыми.

1) Результаты о существовании и единственности слабых решений задачи Коши для обобщенного уравнения Кавахары ранее были известны при других условиях на коэффициенты уравнения. Установлены новые классы единственности в случае самого уравнения Кавахары.

2) Результаты о существовании обобщенных производных слабых решений начально-краевой задачи в полуполосе для уравнения Кавахары не имеют аналогов. Аналогичные результаты для задачи Коши в значительной степени усиливают известные ранее результаты.

3) Результаты о существовании непрерывных производных слабых решений задачи Коши и начально-краевой задачи в полуполосе для уравнения Кавахары и оценки этих производных в нормах Гёльдера получены впервые.

4) Результаты об убывании при больших временах слабых решений задачи Коши и начально-краевой задачи в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары в случае абсорбции, локализованной на бесконечности, получены впервые.

5) Подробное изучение свойств фундаментального решения дифференциального оператора, соответствующего линеаризованному уравнению Кавахары проведено впервые. Полученные оценки являются аналогами классических оценок функции Эйри.

Теоретическая значимость

Развитые в диссертации методы изучения свойства повышения внутренней гладкости слабых решений и поведения решений при больших временах могут быть использованы при изучении других классов квазилинейных эволюционных уравнений нечетного порядка. Самостоятельный интерес имеют результаты о свойствах фундаментального решения дифференциального оператора $\partial_t - \partial^5_{xxxxx} + b\partial^3_{xxx} + a\partial_x$, которые могут быть применены при изучении широкого круга вопросов, связанных с уравнением Кавахары и его обобщениями.

Апробация диссертационной работы

Результаты диссертации докладывались на следуюших семинарах и конференциях:

• семинар кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН под руководством профессора А.В. Арутюнова;

• семинар кафедры прикладной математики РУДН под руководством профессора А.Л. Скубачеcкого;

• Всероссийская научно-практическая конференция "Дифференциальных уравнения, Теория фунций, Нелинейный анализ и оптимизация", РУДН, Москва, 2013;

• The Seventh International Conference on Differential and Functional Differential Equations, РУДН, Москва, 2014;

• Международная конференция "Quasilinear Equations, Inverse Problems and Their Applications", МФТИ, Долгопрудный, 2015.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 6 работах, из них 4 статьи в научных изданиях, входящих в список ВАК, и 2 тезисов докладов на научных конференциях.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из 45 наименований. Объем диссертации составляет 98 страниц.

Содержание работы

Во введении дается исторический обзор работ по теме диссертации и формулируются основные результаты. Там же вводятся основные обозначения.

Символы j, k, l, m, n везде в дальнейшем обозначают неотрицательные целые числа (если не оговорено противное). Символом $[s]$ обозначается целая часть числа $s \geqslant 0$. Пусть $x_+ = \max(x, 0)$, $x_- = -\min(x, 0)$.

Для любых $T > 0$, $\delta \in [0, T)$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ положим $\Pi_T^{\delta, x_0} = (\delta, T) \times (x_0, +\infty)$ (в частности $\Pi_T^+ = \Pi_T^{0,0}$).

Для $p \in [1, +\infty]$ положим $L_p = L_p(\mathbb{R})$, $L_{p,+} = L_p(\mathbb{R}_+)$, $W_p^k = W_p^k(\mathbb{R})$, $W_{p,+}^k = W_p^k(\mathbb{R}_+)$, $H^k = H^k(\mathbb{R})$, $H_+^k = H^k(\mathbb{R}_+)$.

Для $x_0 \in \mathbb{R}$ положим $L_{p,x_0} = L_p(x_0, +\infty)$, $W_{p,x_0}^k = W_p^k(x_0, +\infty)$, $H_{x_0}^k = H^k(x_0, +\infty)$ (в частности, в наших обозначениях $W^k_{p,0} = W^k_{p,+}$, $H^k_0 = H^k_+$).

Введем специальные весовые пространства. Для $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty]$ положим

$$L^\alpha_p = \{f(x) : (1 + x_+)^\alpha f \in L_p\}, \quad L^\alpha_{p,x_0} = \{f(x) : (1 + x - x_0)^\alpha f \in L_{p,x_0}\}$$

и введем на этих пространствах естественные нормы. В дальнейших результатах начальная функция u_0 будет выбираться из пространств L^α_2, $L^\alpha_{2,+} = L^\alpha_{2,0}$ при $\alpha \geqslant 0$.

Для описания свойств краевых условий будем использовать пространства Соболева дробного порядка: для $s \in \mathbb{R}$ положим

$$H^s(\mathbb{R}) = \{\mu(t) : (1 + |\xi|^2)^{s/2})\widehat{\mu}(\xi) \in L_2\},$$

где символом $\widehat{\mu}$ обозначено преобразование Фурье функции μ. Для интервала $I \subset \mathbb{R}$ через $H^s(I)$ обозначим пространство сужений на I функций из $H^s(\mathbb{R})$ с естественной нормой.

Положим

$$\lambda(f; T) = \sup_{a \in \mathbb{R}} \int_0^T \int_a^{a+1} f^2(t, x)\, dxdt, \quad \lambda(f; T, \delta, x_0) = \sup_{a \geq 0} \int_\delta^T \int_{x_0+a}^{x_0+a+1} f^2(t, x)\, dxdt.$$

Для описания классов функций, в которых будут рассматриваться слабые решения, при $\alpha \geq 0$ введем пространство $X^\alpha(\Pi_T)$, состоящее из функций $f(t, x)$ таких, что

$$f \in C_w([0, T]; L^\alpha_2), \quad \lambda(f_{xx}; T) < +\infty$$

и, если $\alpha > 0$, то дополнительно

$$f_{xx} \in L_2(0, T; L^{\alpha-1/2}_{2,+})$$

(символ C_w обозначает пространство слабых отображений) и пространство $X^\alpha(\Pi^{\delta,x_0}_T)$, состоящее из функций $f(t, x)$ таких, что

$$f \in C_w([\delta, T]; L^\alpha_{2,x_0}), \quad \lambda(f_{xx}; T, \delta, x_0) < +\infty$$

и, если $\alpha > 0$, то дополнительно

$$f_{xx} \in L_2(\delta, T; L_{2,x_0}^{\alpha-1/2})$$

с естественными нормами. Тогда $X^\alpha(\Pi_T^+) = X^\alpha(\Pi_T^{0,0})$.

Для области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ символом $C_b(\overline{\Omega})$ будем обозначать пространство функций, непрерывных и ограниченных в $\overline{\Omega}$.

В первой главе диссертации изучены свойства фундаментального решения оператора $\partial_t - \partial^5_{xxxxx} + b\partial^3_{xxx} + a\partial_x$, приведены вспомогательные результаты о задаче Коши для линеаризованного уравнения уравнения Кавахары, в частности, об обращении оператора $\partial_t - \partial^5_{xxxxx} + b\partial^3_{xxx} + a\partial_x$.

Фундаментальное решение оператора $\partial_t - \partial^5_{xxxxx} + b\partial^3_{xxx} + a\partial_x$ задается формулой

$$G_{a,b}(t,x) = \theta(t)\mathcal{F}^{-1}\big[e^{it(\xi^5 + b\xi^3 - a\xi)}\big](x) = G_{0,b}(t, x - at) = \frac{\theta(t)}{t^{1/5}}\Phi_{bt^{2/5}}\Big(\frac{x - at}{t^{1/5}}\Big), \qquad (6)$$

где

$$\Phi_{\widetilde{b}}(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}\big[e^{i(\xi^5 + \widetilde{b}\xi^3)}\big](x), \qquad (7)$$

θ – функция Хевисайда.

Лемма 1. *Для любого $\widetilde{b} \in \mathbb{R}$ функция $\Phi_{\widetilde{b}}$ задается сходящимся интегралом*

$$\Phi_{\widetilde{b}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi^5 + \widetilde{b}\xi^3 + x\xi)}\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad (8)$$

бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет уравнению

$$5y^{(4)}(x) - 3\widetilde{b}y''(x) + xy = 0, \qquad (9)$$

кроме того, для любого $b_0 \geq 1$ и любого целого $n \geq 0$ при $|\widetilde{b}| \leq b_0$ справедливы оценки

$$|\Phi^{(n)}_{\widetilde{b}}(x)| \leq \begin{cases} c(b_0, n)(1 + |x|)^{n/4 - 3/8}, & x < 0, \\ c(b_0, n)e^{-c_0 x^{5/4}}, & x \geq 0 \end{cases} \qquad (10)$$

для некоторых положительных констант $c(b_0, n)$ *и* c_0.

Из приведенной леммы, вытекают, например, следующие свойства уже самого фундаментального решения $G_{a,b}$.

Следствие 1. *Функция* $G_{a,b}(t,x)$, *заданная формулами* (6), (7), *бесконечно дифференцируема при* $t > 0$ *и для любых* $T > 0$ *и целом* $n \geq 0$ *при* $0 < t \leq T$ *удовлетворяет неравенствам*

$$|\partial_x^n G_{a,b}(t,x)| \leq \begin{cases} c(T,a,b,n)t^{-q(n)}(1+|x|)^{n/4-3/8}, & x < 0, \\ c(T,a,b,n)t^{-(n+1)/5}e^{-c_0 x^{5/4} t^{-1/4}}, & x \geq 0, \end{cases} \tag{11}$$

где $q(n) = (n+1)/5$ *при* $n = 0$ *или* $n = 1$ *и* $q(n) = n/4 + 1/8$ *при* $n \geq 2$.

Во второй главе доказаны существование и единственность слабых решений задачи Коши для обобщенного уравнения Кавахары.

Теорема 1. *Пусть для некоторых* $T > 0$ *и* $\alpha \geq 0$

$$g_0 \in L_1(0,T;L_\infty), \qquad g_1 \in L_2(0,T;W_\infty^1),$$
$$u_0 \in L_2^\alpha, \qquad f \in L_1(0,T;L_2^\alpha).$$

Тогда существует слабое решение задачи (1), (2) *из пространства* $X^\alpha(\Pi_T)$. *Если* $\alpha \geq 3/8$, *то решение из этого пространства единственно.*

При других предположениях на функции g_0 и g_1 аналогичный результат был ранее доказан в работе [7]. Для начально-краевой задачи (1)–(3) результат аналогичный Теореме 1 был ранее установлен в работе [8]. Если ограничиться только случаем самого уравнения Кавахары, то классы единственности можно уточнить следующим образом.

Теорема 2. *Слабые решения задачи* (4), (2) *единственны в пространствах* $L_\infty(0,T;L_2^{3/8})$ *и* $X^{3/16}(\Pi_T)$.

[7] *Фаминский А. В.* Задача Коши для квазилинейных уравнений нечетного порядка // Мат. сб. 1989. V. 180, № 9. С. 1183–1210.

[8] *Сангаре К., Фаминский А.В.* Слабые решения смешанной задачи в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары // Матем. заметки. 2009. Т. 85, № 1. С. 98–109.

В рассмотренных классах единственности из Теорем 1 и 2 получены также результаты о непрерывной зависимости слабых решений от начальных данных и правой части уравнения.

В третьей главе приведены результаты о существовании обобщенных производных слабых решений задачи Коши и начально-краевой задачи для обобщенного уравнения Кавахары.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия Теоремы 1 для некоторого $\alpha \geq 1/2$ и дополнительно для любых $\delta \in (0,T)$ и $x_0 \in \mathbb{R}$*

$$g_0, g_1 \in L_1(\delta, T; W^2_{\infty,x_0}), \qquad f_{xx} \in L_1(\delta, T; L^{\alpha-1/2}_{2,x_0}).$$

Тогда слабое решение задачи (1), (2) $u \in X^\alpha(\Pi_T)$ обладает следующим свойством: $u_{xx} \in X^{\alpha-1/2}(\Pi_T^{\delta,x_0})$ для любых $\delta \in (0,T)$ и $x_0 \in \mathbb{R}$.

Теорема 4. *Пусть для некоторых $T > 0$ и $\alpha \geq 1/2$*

$$g_0 \in L_2(0,T; L_{\infty,+}), \qquad g_1 \in L_2(0,T; W^1_{\infty,+}),$$
$$u_0 \in L^\alpha_{2,+}, \qquad f \in L_2(0,T; L^\alpha_{2,+}),$$
$$\mu \in H^{4/5}(0,T), \qquad \nu \in H^{3/5}(0,T)$$

и пусть для некоторого $a_0 > 0$ и любого $\delta \in (0,T)$

$$g_0, g_1 \in L_1(\delta, T; W^2_{\infty,a_0}), \qquad f_{xx} \in L_1(\delta, T; L^{\alpha-1/2}_{2,a_0}).$$

Тогда слабое решение задачи (1)–(3) $u \in X^\alpha(\Pi_T^+)$ обладает следующим свойством: $u_{xx} \in X^{\alpha-1/2}(\Pi_T^{\delta,0})$ для любого $\delta \in (0,T)$.

Существование обобщенных производных более высокого порядка слабых решений задачи Коши и начально-краевой задачи для обобщенного уравнения Кавахары доказаны также строго в области $t > 0$ и в случае начально-краевой задачи $x > 0$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия Теоремы 3 для некоторого $\alpha \geq 3/4$ и, дополнительно,* *существует* $m \in [3, 4\alpha]$ *такое, что для любых* $\delta \in (0, T)$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}$

$$g_0, g_1 \in L_\infty(\delta, T; W^m_{\infty, x_0}), \qquad \partial^l_x f \in L_1(\delta, T; L^{\alpha - l/4}_{2, x_0}) \quad \text{при } 3 \le l \le m. \tag{12}$$

Тогда слабое решение задачи (1), (2) $u \in X^\alpha(\Pi_T)$ *обладает следующим свойством:* $\partial^l_x u \in X^{\alpha - l/4}(\Pi^{\delta, x_0}_T)$ *при* $3 \le l \le m$ *для любых* $\delta \in (0, T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Более слабые результаты о существовании обобщенных производных решений задачи Коши для уравнения Кавахары были ранее получены в статье [9].

Теорема 6. *Пусть выполнены условия Теоремы 4 для некоторого* $\alpha \ge 3/4$ *и, дополнительно, существует* $m \in [3, 4\alpha]$ *такое, что для любых* $\delta \in (0, T)$ *и* $x_0 > 0$ *выполнено свойство* (12) *Тогда слабое решение задачи* (1)–(3) $u \in X^\alpha(\Pi^+_T)$ *обладает следующим свойством:* $\partial^l_x u \in X^{\alpha - l/4}(\Pi^{\delta, x_0}_T)$ *при* $3 \le l \le m$ *для любых* $\delta \in (0, T)$, $x_0 > 0$.

В четвертой главе диссертации установлены результаты о непрерывности вместе с производными рассматриваемых слабых решений обобщенного уравнения Кавахары и их оценки в нормах Гёльдера.

Теорема 7. *Пусть для некоторых* $T > 0$, m, $\varepsilon \in (0, 1)$ *и* $\alpha = m/4 + 1/8 + \varepsilon/4$ *выполнены условия Теоремы 1, а если* $m \ge 2$, *то и Теоремы 3. Пусть известно, что для любых* $\delta \in (0, T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$g_0 \in L_\infty(\delta, T; W^{\max(0, m-1)}_{\infty, x_0}), \qquad g_1 \in L_\infty(\delta, T; W^{\max(1, m-1)}_{\infty, x_0}), \tag{13}$$

$$\partial^l_x f \in L_\infty(\delta, T; L^{\alpha - l/4}_{2, x_0}) \quad \text{при } l \le m. \tag{14}$$

Предположим также, что для некоторой константы a функция g_1 *представляется в виде*

$$g_1(t, x) \equiv a + \widetilde{g}_1(t, x), \qquad \widetilde{g}_1 \in L_\infty(\delta, T; L^\beta_{2, x_0}) \quad \forall \delta \in (0, T) \; \forall x_0 \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

где $\beta = -1/8 - \varepsilon/4$ *при* $\alpha < 1/4$, $\beta = -1/4$ *при* $\alpha \ge 1/4$. *Тогда слабое решение задачи* (1), (2) $u \in X^\alpha(\Pi_T)$ *непрерывно в* Π_T *(возможно, после изменения на множестве нулевой меры) и*

[9] *Villagrán O. P. V.* Gain of regularity for a Korteweg – de Vries – Kawahara equation // Electronic J. Differential Equ. 2004. № 71. P. 1–24.

$\partial_x^l u \in C_b(\overline{\Pi}_T^{\delta,x_0})$ при $l \le m$ для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Более того, для любых $t,\tau \in [\delta,T]$, $x,y \in [x_0,+\infty)$

$$\left|\partial_x^m u(t,x) - \partial_y^m u(t,y)\right| \le c(\delta,x_0)|x-y|^{\varepsilon} \tag{16}$$

и при $j \le 4$ если $m \ge j$, то

$$\left|\partial_x^{m-j} u(t,x) - \partial_x^{m-j} u(\tau,x)\right| \le c(\delta,x_0)|t-\tau|^{(\varepsilon+j)/5}. \tag{17}$$

Аналогичный результат получен для начально-краевой задачи.

Теорема 8. *Пусть для некоторых $T>0$, m, $\varepsilon \in (0,1)$ и $\alpha = m/4 + 1/8 + \varepsilon/4$*

$$g_0 \in L_1(0,T;L_{\infty,+}), \qquad g_1 \in L_2(0,T;W^1_{\infty,+}),$$
$$u_0 \in L^{\alpha}_{2,+}, \qquad f \in L_1(0,T;L^{\alpha}_{2,+}),$$
$$\mu \in H^{2/5}(0,T), \qquad \nu \in H^{1/5}(0,T).$$

Пусть в случае $m \ge 2$ выполнены также условия Теоремы 4. Пусть известно, что для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 > 0$ справедливы свойства (13)–(15). Тогда слабое решение задачи (1)–(3) $u \in X^{\alpha}(\Pi_T^+)$ непрерывно в Π_T^+ (возможно, после изменения на множестве нулевой меры) и $\partial_x^l u \in C_b(\overline{\Pi}_T^{\delta,x_0})$ при $l \le m$ для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 > 0$. Более того, для любых $t,\tau \in [\delta,T]$, $x,y \in [x_0,+\infty)$ справедливы неравенства (16), (17).

Для обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза результаты о повышении внутренней гладкости решений аналогичные теоремам 3–8 были получены в случае задачи Коши в работе [10], а в случае начально-краевой задачи в полуполосе Π_T^+ — в работе [11].

В пятой главе диссертации доказаны теоремы об убывание решений задачи Коши и начально-краевой задачи для уравнения Кавахары при больших временах. В основе доказательства убывания решений задачи Коши лежит следующая лемма:

[10] *Фаминский А. В.* Задача Коши для уравнения Кортевега—де Фриза и его обобщений // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1988. V. 13. С. 56–105.

[11] *Фаминский А.В.* Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений // Труды ММО. 1988. Т. 51. С. 54–94.

Лемма 2. *Пусть* $u_0 \in H^2$, $f \equiv 0$, $g_0, g_1 \in L_\infty(0,T;W^2_\infty)$ *для некоторого* $T > 0$ *и при* $t \in (0,T)$ *выполнены условия* (19), (20). *Тогда для решения* $u \in C([0,T];H^2)$ *задачи* (1), (2) *справедливо неравенство*

$$\int_0^T \int_{-R}^R u^2 dxdt \le c \iint_{\Pi_T} (2g_0 - g_{1x}) u^2 \, dxdt, \tag{18}$$

где константа c *зависит от нормы функции* u_0 *в пространстве* L_2 *и норм функций* g_0, g_1 *в пространстве* $L_\infty(0,T;W^2_\infty)$.

Теорема 9. *Пусть* $u_0 \in L_2$, $g_0, g_1 \in L_\infty(\mathbb{R}^t_+;W^2_\infty)$, $f \equiv 0$. *Предположим также, что*

$$2g_0(t,x) - g_{1\,x}(t,x) \ge 0 \qquad \forall t > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{19}$$

и существуют константы $R > 0$, $\alpha_0 > 0$ *такие, что*

$$2g_0(t,x) - g_{1\,x}(t,x) \ge \alpha_0 \qquad \forall t > 0 \quad \forall |x| > R. \tag{20}$$

Тогда существуют положительные константы c *и* c_0, *зависящие от* $\|u_0\|_{L_2}$, $\|g_0\|_{L_\infty(\mathbb{R}^t_+;W^2_\infty)}$, $\|g_1\|_{L_\infty(\mathbb{R}^t_+;W^2_\infty)}$ *такие, что для слабого решения задачи* (1), (2) $u \in X^0(\Pi_T)$ $\forall T > 0$, *построенного в Теореме 1, справедливо неравенство*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L_2} \le c e^{-c_0 t} \qquad \forall t \ge 0. \tag{21}$$

Аналогично, для доказательства убывания решений при больших временах начально-краевой задачи рассматривается следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $u_0 \in L^{1/2}_{2,+}$, $g_0, g_1 \in L_\infty(0,T;W^2_{\infty,+})$ *для некоторого* $T > 0$, $\mu = \nu \equiv 0$, $f \equiv 0$. *Предположим также, что для функций* g_0, g_1 *при* $t \in (0,T)$, $x > 0$ *выполнены условия* (19), (20). *Тогда для решения задачи* (1)–(3) $u \in X^{1/2}(\Pi^+_T)$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^T \int_0^R u^2 \, dxdt \le c \iint_{\Pi^+_T} (2g_0 - g_{1\,x}) u^2 \, dxdt + c \int_0^T u^2_{xx}\big|_{x=0} \, dt, \tag{22}$$

где константа c *зависит от* $\|u_0\|_{L_{2,+}}$ *и норм функций* g_0, g_1 *в пространстве* $L_\infty(0,T;W^2_{\infty,+})$.

Теорема 10. *Пусть* $u_0 \in L_{2,+}$, $g_0, g_1 \in L_\infty(\mathbb{R}^t_+; W^2_{\infty,+})$, $\mu = \nu \equiv 0$, $f \equiv 0$. *Предположим также, что свойство* (19) *справедливо при любом* $x > 0$, *а свойство* (20) *— при любом* $x > R$. *Тогда существуют положительные константы* c *и* c_0, *зависящие от* $\|u_0\|_{L_{2,+}}$, $\|g_0\|_{L_\infty(\mathbb{R}^t_+; W^2_{\infty,+})}$, $\|g_1\|_{L_\infty(\mathbb{R}^t_+; W^2_{\infty,+})}$ *такие, что для слабого решения задачи* (1)–(3) $u \in X^0(\Pi^+_T)$ $\forall T > 0$, *построенного в работе* [8] , *справедливо неравенство* (21).

В случае уравнения Кортевега–де Фриза с дополнительным абсорбирующим слагаемым $g_0(x)u$ аналогичный результат для задачи Коши был ранее установлен в статье [12], а для начально-краевой задачи при $x > 0$ — в статье [13].

[12] *Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Faminskii A., Natali F.* Decay of solutions to damped Korteweg–de Vries equation // Appl. Math. Optim. 2012. V. 65, № 2. P. 221–251.

[13] *Linares F., Pazoto A.F.* Asymptotic behavior of the Korteweg–de Vries equation posed in a quarter plane // J. Differential Equ. 2009. V. 246. P. 1342–1353.

Публикации по теме диссертации

Статьи в научных изданиях из списка ВАК

1. *Фаминский А.В., Опритова М.А.* О задаче Коши для уравнения Кавахары // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 45. С. 132–150.

2. *Opritova M. A., Faminskii A. V.* On the initial-boundary-value problem in a half-strip for a generalized Kawahara equation // J. Math. Sci. 2015. V. 206, № 1. P. 17–38.

3. *Опритова М. А., Фаминский А. В.* Об убывании при больших временах решений начально-краевой задачи на полуоси для обобщённого уравнения Кавахары // Вестник Тамбовского ун-та., 2015. Т. 20, вып. 5. С. 1331–1337.

4. *Опритова М. А., Фаминский А. В.* О задаче Коши для обобщенного уравнения Кавахары // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 3. С. –378–390.

Прочие публикации

5. *Опритова М.А.* О внутренней регулярности решений смешанной задачи для уравнения Кавахары// Труды Всероссийской научно-практической конференции (Москва, РУДН, 23–26 апреля 2013 г.), 2013. С. 36.

6. *Opritova M. A., Faminskii A. V.* On properties of solutions to Kawahara equation// Abstracts, The seventh international conference on differential and functional differential equations, Moscow, 2014. P. 40–41.

Опритова М.А.

Свойства решений краевых задач для уравнения Кавахары

Аннотация

В работе рассмотрен вопрос о повышении внутренней гладкости решений задачи Коши и начально-краевой задачи для обобщенного уравнения Кавахары. Были доказаны теоремы существования и единственности решений, а также существование обобщенных производных решений и их непрерывность. Получены также результаты об убывании решений при больших временах.

Opritova M.A.

Properties of solutions of boundary value problems for the equation of Kawahara

Abstract

The paper considers the issue of enhancing the internal smoothness of solutions of the Cauchy problem and initial-boundary value problem for the equation of Kawahara. Were proved theorems on the solutions existence and uniqueness, existence of generalized derivatives of solutions and their continuity. Results on large-time decay of solutions were also obtained.