На правах рукописи

САВЧУК Артем Маркович

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ И СИСТЕМЫ ДИРАКА

01.01.01 — вещественный, комплексный
и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Москва, 2019

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА».

Научный консультант:	**ШКАЛИКОВ Андрей Андреевич** доктор физико–математических наук, профессор, руководитель лаборатории операторных моделей и спектрального анализа кафедры теории функций и функционального анализа механико–математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет» имени М. В. Ломоносова.
Официальные оппоненты:	**ПЯТКОВ Сергей Григорьевич** доктор физико–математических наук, профессор института цифровой экономики ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет» (специальность 01.01.02);
	СУЛТАНАЕВ Яудат Талгатович доктор физико–математических наук, профессор, профессор кафедры математики и статистики физико–математического факультета ФГБОУ ВО «Башкирский государственный педагогический университет имени М. Акмуллы» (специальность 01.01.02);
	ЮРКО Вячеслав Анатольевич доктор физико–математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики механико–математического факультета ФГБОУ ВО «Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского» (специальность 01.01.01).
Ведущая организация:	ФГБУ науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук.

Защита диссертации состоится 04.06.2019 в 15:30 на заседании диссертационного совета Д 212.203.27 на базе ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» по адресу: Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Орджоникидзе, д.3, ауд. 495а.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте "Диссертационные советы РУДН" в сети интернет (http://dissovet.rudn.ru).

Автореферат разослан 2019 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.203.27 на базе
ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»
доктор физико–математических наук, А. Ю. Савин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В теории операторов Штурма–Лиувилля, порожденных на конечном отрезке $[a,b]$ дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + q(x)y \tag{1}$$

стандартным условием на потенциал $q(\cdot)$ является требование локальной суммируемости $q \in L_1(\alpha,\beta)$ для любых $a < \alpha < \beta < b$. При этом, если $q \in L_1[a,b]$, говорят о регулярном случае, а если $q \notin L_1[a,b]$, оператор считается сингулярным. Заметим однако, что выражение (1) (после добавления необходимых граничных условий) порождает корректно определенный в L_2 оператор и в более общей ситуации. Действительно, оператор второго дифференцирования ограниченно действует из соболевского пространства $W_2^1[a,b]$ в дуальное пространство $W_2^{-1}[a,b]$. То же справедливо и для оператора умножения на комплекснозначную функцию $q \in W_2^{-1}[a,b]$, поскольку для любых $y,\ \varphi \in W_2^1$ имеем $(qy,\varphi) = (q,y\varphi)$, а W_2^1 является банаховой алгеброй относительно поточечного умножения. Таким образом, корректно определяется билинейная форма $(l(y),\varphi)$.

Задачи об изучении таких оператора естественным образом возникли в начале 50–х годов при изучении задачи о колебаниях так называемой «стилтьесовской струны» — струны, нагруженной набором точечных масс. Многомерные аналоги вида $-\Delta + q(x)$ возникли впервые в физической литературе. Интерес к ним был вызван задачей о рассеянии потока заряженных частиц на атомном ядре, где потенциал типа δ–функции моделирует короткодействующее электромагнитное поле. Математические исследования соответствующих операторов были предприняты Крейном[1], Феллером[2], Кацем[3], Березиным и Фаддеевым[4], Минлосом и Фаддеевым[5].

Дальнейшие исследования в течение 30 лет были в основном связаны с δ–образными потенциалами[6] и потенциалами специального вида. Например, в работах Гунсона[7], Аткинсона, Эверитта и Зеттла[8] изучались кулоновские потенциалы типа $1/x$ на отрезке $[-1,1]$ или на всей оси.

Работа[9] позволила включить большое число описанных выше задач в общую теорию дифференциальных операторов с коэффициентами — распределениями, и вызвала поток

[1] М. Г. Крейн, “Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля”, ДАН СССР, 1951, Т. 76, № 1, С. 21–24.

[2] W. Feller, “Generalized second order differential operators and their lateral conditions, Illinois Journal of Mathematics”, 1957, Т. 1, № 4, С. 459-504.

[3] И. С. Кац, “О существовании спектральных функций некоторых сингулярных дифференциальных систем второго порядка”, ДАН СССР, 1956, Т. 106, № 1, С. 15-18.

[4] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, “Замечания об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом”, ДАН СССР, 1961, Т. 137, № 7, С. 1011-1014.

[5] Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддев, “О точечном взаимодействии для систем из трех частиц в квантовой механике”, ДАН СССР, 1961, Т. 141, № 6, С. 1335-1338.

[6] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Höegh-Krohn, and H. Holden, “Solvable Models in Quantum Mechanics”, 2nd ed., AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005.

[7] J. Gunson, “Perturbation theory for a Sturm–Liouville problem with an interior singularity”, Proc.R.Soc.London, A 414, 1987.

[8] F. Atkinson, W. Everitt, A. Zettl, “Regularization of a Sturm–Liouville problem with an interior singularity using quasi-derivatives”, Diff. Integr. Eq., V. 1, № 2, 1988, pp. 213–221.

[9] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами”, Матем. заметки, Т. 66, № 6, 1999, С. 897–912.

статей на данную тему. В работе[10] был найден спектральный след первого порядка для операторов вида (1) с потенциалом $q = u'$, $u \in BV_0[0, \pi]$. В работах Савчука[11] и Шкаликова[12] были предложены различные эквивалентные способы определения операторов указанного вида, получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций, доказана базисность Рисса системы собственных и присоединенных функций. Гринив и Микитюк[13] изучили оператор Хилла — оператор вида (1) на всей оси с периодическим потенциалом $q \in W^{-1}_{2,loc}$ (в частности, было доказано, что спектр имеет лакунарную структуру). Эти исследования были продолжены Коротяевым[14]. Появились работы Михайлеца и Молибоги[15]. Затем оператор Хилла с потенциалом $q \in W_2^{-1}$ весьма детально был изучен Джаковым и Митягиным[16]. Эти исследования естественным образом вовлекли в рассмотрение вопросы базисности[17], а также сходимости и равносходимости спектральных разложений[18]. Точные результаты о равносходимости спектральных разложений для пар операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами получила Садовничая[19]. В работе Джакова и Митягина[20] были изучены периодические задачи в полной шкале пространств Соболева $q \in W_2^{\theta}$, $\theta \geq -1$. Отметим также недавние работы Баскакова и Полякова[21], где периодическая задача такого вида изучалась методом подобных операторов. В работе Гринива и Микитюка[22] на случай операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами — распределениями была перенесена классическая теория операторов преобразования. Это позволило записать для данного типа операторов Штурма–Лиувилля уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко[23], что, в свою очередь повлекло распростра-

[10] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, "Формула следа для оператора Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами", Мат. заметки, Т. 68, No. 3, 2000, С. 427–442.

[11] А. М. Савчук, "О собственных значениях и собственных функциях оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом", Математические заметки, Т. 69, № 2, 2001, С. 277-285.

[12] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, "Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами — распределениями", Труды Моск. мат. общ., Т. 64, 2003, С. 159–219.

[13] R. Hriniv , Ya. Mykytyuk, "1D Schrödinger operators with singular periodic potentials", Meth. Funct. Anal. Topol., V. 7, No. 4, 2001, pp. 31–42.

[14] E. Korotyaev, "Characterization of the spectrum of Schrödinger operators with periodic distributions", Int. Math. Res. Notices, 2003, no. 37, 2019–2031.

[15] V. A. Mikhailets and V. M. Molyboga, "Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials", Meth. Funct. Anal. Topology, V. 15, no. 1, 2009, pp. 31–40.

[16] P. Djakov, B. S. Mityagin, "Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators", Russian Mathematical Surveys, V. 61, № 4, 2006, P. 663.

[17] P. Djakov, B. Mityagin, "Bari-Markus property for Riesz projections of Hill operators with singular potentials", Contemporary Mathematics, V. 481, 2009, P. 59-80.

[18] P. Djakov, B. Mityagin, "Equiconvergence of spectral decompositions of Hill–Schrödinger operators", Journal of Differential Equations, V. 255, № 10, 2013, P. 3233-3283.

[19] И. В. Садовничая, "О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями", Математический сборник, Т. 201, № 9, 2010, С. 61-76.

[20] P. Djakov, B. Mityagin, "Riesz basis property of Hill operators with potentials in weighted spaces", Transactions of the Moscow Mathematical Society, V. 75, 2014, P. 151-172.

[21] A. G. Baskakov, D. M. Polyakov, "Spectral properties of the Hill operator", Mathematical Notes, V. 99, № 3-4, 2016, P. 598-602.

[22] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, "Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials, II. Reconstruction by two spectra", North-Holland Mathematics Studies, North-Holland, V. 197, 2004, P. 97-114.

[23] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, "Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular

нение на операторы с потенциалами — распределениями других результатов и методов теории обратных спектральных задач.

В диссертации изучению прямых спектральных задач для оператора Штурма–Лиувилля вида (1) с потенциалом $q = u'$, $u \in L_2[0, \pi]$, посвящена глава III.

Отдельного упоминания требует тематика обратных спектральных задач. Эта тема весьма обширна и включает самые разнообразнные постановки задач. Исторически одной из первых постановок была задача восстановления потенциала оператора Штурма–Лиувилля на конечном отрезке по спектрам двух краевых задач[24] (задача Борга). Другую постановку предложили Гельфанд и Левитан[25] — восстановить потенциал по спектральной функции оператора. В случае оператора на конечном отрезке спектральная функция однозначно задается последовательностью собственных значений и нормировочных чисел оператора. Для решения этой задачи Марченко[26] использовал теорию операторов преобразования. Довольно быстро выяснилось, что две эти спектральные задачи экивалентны друг другу. В то же время появилась работы Кодаиры[27] и Тихонова[28], где для решения обратной спектральной задачи было предложено использовать функцию Вейля–Титчмарша. Этот подход оказывается весьма удачным, поскольку позволил получать результаты и для обратной задачи Борга, и для задачи Гельфанда–Левитана. Кроме того, и это очень важно, вместо теории операторов преобразования, восстановление потенциала по функции Вейля требует лишь контурного интегрирования. Впервые эту технику, называемую теперь методом спектральных моделей, применил Левинсон[29]. Другой метод предложил Крейн[30]. Этот метод основан на тесной связи спектральной (или стационарной) обратной задачи с динамической обратной задачей восстановления функции $u_{tt} = c^2(z)u_{zz}$, $z > 0$, по граничной функции $u(0, t)$. И та, и другая задача сводятся к решению интегральных уравнений типа Вольтерра[31]. В рамках этого подхода уравнения типа Гельфанда–Левитана были обобщены на многомерный случай Белишевым[32].

Интерес к теме обратных задач многократно усилился после работ Лакса[33], Фаддее-

---

potentials. IV. Potentials in the Sobolev space scale", Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, V. 49, № 2, 2006, P. 309-329.

[24]Borg G. "Eine Umkehrung der Sturm–Liouvillishen Eigenwertaufgabe", Acta Math., V. 78, 1946, pp. 1–96.

[25]И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, "Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции", Изв. АН СССР, сер. Математика, Т. 15, 1951, 309-350.

[26]В.А. Марченко, "Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, I, Труды Моск. матем. общества, Т. 1, 1952, С. 327-420.

[27]K. Kodaira, "The eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order and Heisenberg's theory of S-matrices", Amer. J. Math., V. 71, 1949, pp. 921–945.

[28]А. Н. Тихонов, "О единственности решения задачи электроразведки", ДАН СССР, Т. 69, № 6, 1949, С. 797–800.

[29]N. Levinson, "The inverse Sturm–Liouville problem", Math. Tidsskr., V. 13, 1949, P. 25–30.

[30]М. Г. Крейн, "Об одном методе эффективного решения обратной задачи", ДАН СССР, Т. 94, № 6, 1954, С. 987–990.

[31]А. С. Благовещенский, "О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны", Тр. МИАН СССР, Т. 115, 1971, С. 28–38.

[32]М. И. Белишев, "Уравнения типа Гельфанда–Левитана в многомерной обратной задаче для волнового уравнения", Зап. научн. сем. ЛОМИ, Т. 165, 1987, С. 15–20.

[33]П. Лакс, "Интегралы нелинейных уравненийэволюции и уединенные волны", Математика, Т. 13, № 5, 1969, С. 128–150.

ва[34] и многих последователей, где был предложен метод решения различных нелинейных уравнений математической физики с использованием обратных задач. Ознакомится с самыми разными аспектами классической стационарной обратной задачи можно, например, в монографии Юрко[35]. Обозначим несколько направлений (мы ограничимся одномерным случаем), которые на сегодняшний день разрабатываются наиболее активно. Большой интерес в последнее время вызвали обратные задачи для операторов Штурма–Лиувилля на графах[36]. Продолжается изучение обратных задач с краевыми условиями различного вида[37]. Что касается динамических обратных задач, то здесь следует различать уравнения гиперболического[38] и параболического[39] типа.

Библиография по тематике обратных спектральных задач для операторов с потенциалами — распределениями также весьма обширна. Метод, основанный на теории операторов преобразования разработан в уже упомянутых статьях Гринива и Микитюка. Вопросы обратной задачи для оператора Хилла — в работах Джакова и Митягина[40], Коротяева[41] и других авторов. Обратная задача рассеяния для операторов с потенциалами — распределениями изучалась многими авторами[42]. Обзор этих и других результатов, а также дополнительную литературу можно найти в недавней статье Экхарда, Гештези, Николса и Тешля[43].

Результаты автора по этой теме, составившие главу IV данной работы, являются новыми не только для сингулярных, но и для классических операторов вида (1) с потенциалом $q \in L_2[0, \pi]$. При этом предложенный метод позволяет конструктивно строить искомый потенциал. Наиболее важно при этом то, что метод позволяет давать оценки погрешности при построении потенциала, которые полностью аналогичны оцекам типа Бернштейна–Джексона в теории тригонометрических рядов.[44] Соответствующие теоремы об устойчивости обратой задачи получены[45] для всей шкалы соболевских пространств $q \in W_2^\theta[0, \pi]$,

[34] Л. Д. Фаддеев, “О связи S–матрицы и потенциала для одномерного оператора Шредингера”, ДАН СССР, Т. 121, № 1, 1958, С. 63–66.

[35] В. А. Юрко, Введение в теорию обратных спектральных задач, М.:Физматлит, 2007.

[36] В. А. Юрко, “Обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов на пространственных сетях”, УМН, Т. 71, № 3(429), 2016, 149–196.

[37] A. M. Akhtyamov, V. A. Sadovnichy, Ya. T. Sultanaev, “Generalizations of Borg’s uniqueness theorem to the case of nonseparated boundary conditions”, Eurasian Math. J., V. 3, No. 4, 2012, 10–22

[38] М. И. Белишев, С. А. Симонов, “Волновая модель оператора Штурма–Лиувилля на полуоси”, Алгебра и анализ, Т. 29, № 2, 2017, 3–33.

[39] С. Г. Пятков, Е. И. Сафонов, “О некоторых классах обратных задач об определении функции источников”, Матем. тр., Т. 19, № 1, 2016, 178–198.

[40] P. Djakov, B. Mityagin, “Fourier method for one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials”, Topics in operator theory. Birkhäuser Basel, 2010, P. 195-236.

[41] E. Korotyaev, Characterization of the spectrum of Schrödinger operators with periodic distributions, Int. Math. Res. Notices 2003, no. 37, 2019–2031.

[42] C. Frayer, R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, and P. A. Perry, Inverse scattering for Schrödinger operators with Miura potentials: I. Unique Riccati representatives and ZSAKNS system, Inverse Probl. 25, 115007, 2009, 25pp.

[43] J. Eckhardt, F. Gesztesy, R. Nichols and G. Teschl, “Weyl–Titchmarsh theory for Sturm–Liouville operators with distributional potentials”, Journal of the London Mathematical Society, V. 88, No. 3, 2013, pp. 801-828.

[44] А. М. Савчук, “Восстановление потенциала оператора Штурма–Лиувилля по конечному набору собственных значений и нормировочных чисел”, Математические заметки, Т. 99, №. 5, 2016, С. 715-731.

[45] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость, Функц. анализ и его прил., Т. 44, № 4, 2010, С.

$\theta \geq -1$. При этом работа с дробными индексами гладкости потребовала доказательства новых теорем в области интерполяции нелинейных отображений банаховых пространств.[46]

Одномерная система Дирака

$$By' + P(x)\mathbf{y}, \qquad B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \ P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

обычно изучается в паре с оператором (1). При этом аналогом для случая, когда $q \in W_2^\theta$ является случай $P \in W_2^{\theta+1}$. Все результаты для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом $q = u'$, $u \in L_2$, имеют свои аналоги для системы Дирака с потенциалом $P \in L_2$. Более того, для системы Дирака соответствующие теоремы обычно звучат проще. Однако оператор Штурма–Лиувилля с потенциалом — распределением класса W_p^θ при $p < 2$ или $\theta < -1$, не допускает однозначного определения. В то же время, система (2) корректно определена не только при $P \in L_2$, но и при $P \in L_1$. Случай суммируемого комплексного потенциала в системе Дирака является вполне естественным с точки зрения приложений, но представляет значительные сложности для исследования.

Система (2) была впервые введена Дираком в 1928 году для описания поведения заряженной частицы в электромагнитном поле с учетом релятивистских эффектов. Оператор, порождаемый выражением (2) после добавления подходящих краевых условий, изучался во многих работах, но, вплоть до последнего времени, при условии непрерывности функций p_j. Изучение случая $P \in L_1$ началось с работы Трушина и Ямамото[47], где, в частности, была установлена базисность Рисса в случае $P \in L_2$ и разделенных краевых условий. Альбеверио, Гринив и Микитюк[48] предложили использовать метод операторов преобразования для изучения обратной задачи восстановления вещественного внедиагонального потенциала по двум спектрам. Джаков и Митягин[49] провели детальное изучение периодической и антипериодической задачи, а затем[50] и произвольной регулярной задачи, но лишь для случая $P \in L_2$. В частности, при условии сильной регулярности краевых условий была доказана базисность Рисса системы собственных и присоединенных функций. В случае слабой регулярности была доказана базисность Рисса системы корневых двумерных подпространств. Эти результаты были перенесены автором[51] на случай суммируемого потенциала, что потребовало применения качественно иных идей и методов. Независимо (на другом пути) те же результаты были получены Луневым и Маламудом[52].

34–53.

[46]А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Об интерполяции аналитических отображений”, Математические заметки, Т. 94, №. 4, 2013, С. 578-581.

[47]Trooshin I., Yamamoto M., “Riesz basis of root vectors of a nonsymmetric system of first-order ordinary differential operators and application to inverse eigenvalue problems,” Appl. Anal, 80, 2001, p. 19–51.

[48]S. Albeverio, R. O. Hryniv, and Ya.Mikytyuk, “Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials,” Russian J.Math. Phys. 12 (4), 406–423 (2005).

[49]P. Djakov, B. Mityagin, “Bari–Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators”, Mat. Nachr., V. 283, no. 3, 2010, C. 443–462.

[50]P. Djakov, B. Mityagin, “Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions”, Indiana Univ. Math. J., V. 61, no. 1, 2012, p. 359–398.

[51]A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, “The Dirac Operator with Complex–Valued Summable Potential”, Math.Notes, V. 96, № 5, 2014, P. 3–36.

[52]Lunyov A. A., Malamud M. M., “On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, V. 441, № 1, 2016, pp. 57-103.

Метод подобных операторов применили к изучению системы (2) Баскаков, Дербушев и Щербаков[53].

Изучению спектральных свойств системы Дирака (2) посвящена вторая глава диссертации. Помимо результатов об асимптотическом поведении и базисности системы собственных и присоединенных функций, сюда вошли теоремы о базисности системы корневых двумерных подпространств (в случае слабой регулярности оператора)[54], условной и безусловной базисности в шкалах пространств Соболева и Бесова[55], равномерные оценки константы Рисса для базиса[56].

Спектральные задачи естественным образом обобщаются и приводят к изучению дифференциальных выражений вида

$$-\mathbf{y}' + \lambda\rho(x)\mathrm{B}\mathbf{y} + \mathrm{A}(x)\mathbf{y} + \mathrm{C}(x,\lambda)\mathbf{y}. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, B — постоянная матрица, $\mathrm{A}(x)$ — матрица, зависящая только от переменной $x \in [0,1]$, а $\mathrm{C}(x,\lambda)$ — матрица, зависящая и от x и от спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$. Такие системы возникают и при изучении задачи $Ly = \lambda y$ для оператора Штурма–Лиувилля, и при изучении задачи $\mathcal{L}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$ для одномерной системы Дирака. К таким системам сводятся и задачи для операторов высокого порядка, и для операторов с полиномиальным вхождением спектрального параметра (операторных пучков).

Задача о поведении матрицы решений систем вида (3) имеет долгую историю, восходящую к работам Биркгофа[57], Перрона[58], Тамаркина[59]. Позже идеи и методы этих работ были развиты в статьях Тамаркина[60], Биркгофа и Лангера[61]. Эти работы определили круг понятий и методов, которые активно и постоянно используются: разделение плоскости параметра λ на сектора, поиск фундаментальной матрицы решений отдельно в каждом секторе и метод последовательных приближений для соответствующих систем интегральных уравнений. Коэффициенты, конечно, предполагались достаточно гладкими. Затем эти предположения многократно ослаблялись. Так, в монографии Рапопорта[62] были изучены асимптотические свойства системы вида

$$\mathbf{u}' = \lambda\mathrm{V}(x)\mathbf{u} + \mathrm{A}_0(x)\mathbf{u} + \mathrm{C}_0(x,\lambda)\mathbf{u} \tag{4}$$

---

[53] A. G. Baskakov, A. V. Derbushev, and A. O. Shcherbakov, “The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials”, Izv. RAN Ser. Mat. 75 (3), 2011, 3–28.

[54] А. М. Савчук, И. В. Садовничая, “Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом”, Совр. математика. Фунд. направления, Т. 58, 2015, С. 128–152.

[55] А. М. Савчук, “О базисности системы собственных и присоединенных функций одномерного оператора Дирака”, Известия Российской академии наук. Серия математическая, Т. 82, – № 2, 2018, С. 113-139.

[56] А. М. Савчук, “Система Дирака с потенциалом из пространств Бесова”, Дифференциальные уравнения, Т. 52, № 4, 2016, С. 454-469.

[57] G. D. Birkhoff, ”Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations”, Trans. Amer. Math. Soc., V. 9, No. 2, 4, 1908, 219–231, 373-395.

[58] O. Perron, “Über lineare differenzengleichungen”, Acta Mathematica, V. 34, № 1, 1911, pp. 109-137.

[59] J. D. Tamarkine, ”Application de la méthode des fonctions fondamentales a l’étude de l’équation différentielle des verges vibrantes élastiques Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер., 12, 1911, 19–46, 65–69.

[60] Y. D. Tamarkin, ”Some general problems of the theory of linear differential equations and expansions of an arbitrary functions in series of fundamental functions”, Math. Zeitschrift, V. 27, no. 1, 1928, 1-54.

[61] G. D. Birkhoff, R. E. Langer, ”The boundary problems and developments associated with a system of ordinary differential equations of the first order”, Proc. Am. Acad. Arts Sci., V. 58, 1923, 49-128.

[62] И. М. Рапопорт, “О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений”, Изд-во Акад. Наук Укр. ССР, Киев, 1954.

с вещественным параметром λ в предположении, что элементы матрицы $\mathrm{V}(x)$ лежат в пространстве $W_1^2[0,1]$, элементы матрицы $\mathrm{A}_0(x)$ — в пространстве $\mathrm{AC}[0,1]$, а $\mathrm{C}_0(x,\lambda) = O(\lambda^{-1})$. В более поздней работе Вагабова[63] условия на коэффициенты (4) уже более слабые: $\mathrm{V}(x) \in C^1[0,1]$, $\mathrm{A}_0(x) \in C[0,1]$. В целом, для классической теории стандартными являются условия непрерывности коэффициентов системы при абсолютной непрерывности матрицы V. По-видимому, наиболее общий случай был разобран Рыхловым[64], где элементы матрицы V предполагаются абсолютно непрерывными, а элементы матриц A_0 и C_0 — суммируемыми по Лебегу.

Результаты об асимптотическом поведении фундаментальной матрицы решений соответствующей системы дифференциальных уравнений приведеы в главе I работы. Они образуют своего рода технический фундамент. Ключом к использованию этих методов и результатов является переход от дифференциальных выражений высокого порядка к системам. Этот переход основан на понятии квазипроизводных (весьма подробное изложение теории квазипроизводных, в том числе, высоких четных и нечетных порядков можно найти в монографиях Вайдмана[65], Эверитта и Маркуса[66], Зеттла[67]). При этом основным результатом первой главы является не сама форма главного и второго асимптотических слагаемых, а равномерная по $x \in [0,1]$ оценка остаточных членов, зависящая откласса гладкости и суммируемости коэффициентов системы.[68]

Цель работы. Целью диссертационной работы является постановка новых современных задач и получение новых результатов в спектральной теории и теории обратных спектральных задач для операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами — распределениями, одномерных операторов Дирака с суммируемыми потенциалами и более общих дифференциальных систем высокого порядка, а также обобщение классических теорем в этой области.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем:

1. Для оператора Штурма–Лиувилля (1) решена проблема Марченко о равномерной устойчивости решения обратной спектральной задачи восстановления потенциала по спектральной функции и по двум спектрам.
2. Для оператора Штурма–Лиувилля (1) предложен алгоритм построения потенциала по конечному набору спектральных данных, получены квалифицированные оценки погрешности типа Бернштейна–Джексона.
3. Для системы Дирака (2) с регулярными краевыми условиями доказаны результаты об

[63] А. И. Вагабов, “Об уточнении асимптотической теоремы Тамаркина”, Дифференц. уравн., Т. 29, № 1, 1993, 41–49.

[64] V. S. Rykhlov, “Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order”, Result. Math., V. 36, 1999, 342–353.

[65] J. Weidmann, “Spectral Theory of Ordinary Differential Operators”, Lecture Notes in Math., Vol. 1258, Springer, Berlin, 1987.

[66] W. N. Everitt and L. Markus, “Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differential Operators”, Math. Surv. and Monographs, Vol. 61, Amer. Math. Soc., RI, 1999.

[67] A. Zettl, “Sturm–Liouville Theory”, Math. Surv. and Mon., V. 121, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[68] А. М. Савчук, “Оператор типа Кальдерона—Зигмунда и его связь с асимптотическими оценками для обыкновенных дифференциальных операторов”, Современная математика. Фундаментальные направления, Т. 63, № 4, 2017, С. 689-702.

условной и безусловной базисности (базисности со скобками) системы собственных и присоединенных векторов в различных функциональных пространствах. В некоторых случаях даны равномерные оценки константы Рисса.

4. Для оператора Штурма–Лиувилля (1) с регулярными краевыми условиями найдены асимптотические формулы для собственных значений, собственных функций, двумерных спектральных проекторов, резольвенты с квалифицированной оценкой остатков в зависимости от гладкости потенциала $q(\cdot)$.
5. Для систем вида (3) при условии $\rho(x) \in \mathrm{AC}[0,1]$, $\mathrm{A}(x), \mathrm{C}(x,\lambda) \in L_1[0,1]$, $\|\mathrm{C}(\cdot,\lambda)\|_{L_1} \to 0$ при $\lambda \to \infty$ получены асимптотические формулы для фундаментальной матрицы решений с квалифицированной оценкой остатков в зависимости от гладкости функций $\rho(x)$ и $\mathrm{A}(x)$ и от скорости убывания $\|\mathrm{C}(\cdot,\lambda)\|$.

Методы исследования. В работе используются классические и современные методы функционального и комплексного анализа, в том числе, методы асимптотической теории обыкновенных дифференциальных операторов, теории рядов Фурье и гармонического анализа, общей теории функциональных пространств (пространства Соболева, Бесова, Харди и т.д.), теории интерполяции банаховых пространств.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы получены с помощью строгих математических доказательств.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и систем, в теории полугрупп, а также при построении математических моделей различных прикладных задач. Результаты диссертационной работы могут быть интересны специалистам, работающим в МГУ имени М.В.Ломоносова, Математическом институте имени В.А.Стеклова РАН, СПбГУ и других высших учебных заведениях и научных центрах. Результаты диссертации могут составить содержание специальных курсов для магистров и аспирантов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научных семинарах механико–математического факультета МГУ: «Теория операторов» (руководитель — профессор А. Г. Костюченко); «Спектральная теория дифференциальных операторов» (руководитель — академик РАН В. А. Садовничий); научно–исследовательский семинар по теории функций (руководитель — академик РАН Б. С. Кашин); «Дифференциальные уравнения и их приложения» (руководитель — профессор М.И.Вишик); «Операторные модели в математической физике» (руководитель — профессор А. А. Шкаликов); научно–исследовательский семинар по тригонометрическим рядам (руководители — профессор А. М. Седлецкий и профессор В. В. Власов); на семинаре факультета ВМК МГУ «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» (руководители — академик РАН Е. И. Моисеев и профессор И. С. Ломова); на семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики Математического института им. В. А. Стеклова (руководитель — член–корреспондент РАН О. В. Бесов); на семинаре по дифференциальным и функционально–дифференциальным уравнениям факультета физико–математических и естественных наук РУДН (руководитель — профессор А. Л. Скубачевский) и на семинаре «Обратные задачи математической физики» НИВЦ МГУ (руководители — профессор А. Г. Ягола, профессор А. Б. Бакушинский, профессор А. В. Тихонравов.), а также на следующих конференциях: 11-я Саратовская зимняя математическая школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», Саратов, 2002; Research Seminar «Spectral analysis of differential and difference operators», Warsaw, Poland, 2002; Международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, Москва, 2002; 12-я Крымская осенняя математическая школа по спектральным и эволюционным задачам, Ласпи, Крым, 2002; Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения - XV», Воронеж, 2004; Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная 103-летию со дня рождения И. Г. Петровского, Москва, 2004; Международная конференция «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвященная столетию С. М. Никольского, Москва, 2005; Международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, Москва, 2005; 15-я Крымская осенняя математическая школа по спектральным и эволюционным задачам, Ласпи, Крым, 2005; Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2006; Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная 106-летию со дня рождения И. Г. Петровского, Москва, 2007; 14-я Саратовская зимняя математическая школа, Саратов, 2008; Международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», посвященная 85-летию Л. Д. Кудрявцева, Москва, 2008; Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-XIX», Воронеж, 2008; Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения», Ростов-на Дону, 2008; Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина, Москва, 2008; Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2008; Международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, Москва, 2008; 8th Workshop on Operator Theory in Krein Spaces, Berlin, Germany, 2008; Международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященная 70-летию В. А. Садовничего, Москва, 2009; International Conference «Infinite-Dimensional Analysis and Topology», Yaremche, Ukraine, 2009; Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2010; International Workshop on Operator Theory and Applications, Berlin, Germany, 2010; Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы», посвященная 110-ой годовщине И. Г. Петровского, Москва, 2011; Международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, Москва, 2011; Научная конференция «Ломоносовские чтения», посвященная 300-летию М. В. Ломоносова, Москва, 2011; Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2012; Научная конференция «Тихоновские чтения», Москва, 2013; Международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», Москва, 2013; Научная конференция «Тихоновские чтения», Москва, 2014; Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2014; Международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, Москва, 2014; Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: Международная конференция, Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия, 2014;

Международная конференция «Spectral Theory and Differential Equations», посвященная 100-летию Б. М. Левитана, МГУ имени М.В.Ломоносова, 2014; International Workshop «Probability, Analysis and Geometry», Moscow State University, Moscow, Russia, 2014; Международная конференция «Функциональные пространства и теория приближения функций», посвященная 110-летию со дня рождения С. М. Никольского, Москва, 2015; 3rd Workshop on Analysis, Geometry and Probability (Ulm, Germany), Ulm, Германия, 2015; Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 2016; 4-th International Workshop on Analysis, Probability and Geometry, Москва, Россия, 2016; Международная научная конференция «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики», посвященная 110-летию академика А.Н. Тихонова, Москва, 2016; Международная конференция «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXVIII»., Воронеж, Россия, 2017; Международная конференция по теории функций, посвящённая 100-летию А.Ф. Леонтьева, Уфа, Россия, 2017; Международная конференция «Вычислительная и прикладная математика 2017 (ВПМ'17)», Новосибирск, Академгородок, Россия, 2017; Девятая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», посвященная 85-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева , Академгородок, Новосибирск, Академгородок, Новосибирск, Россия, 2017; Международная конференция «The 8th International Conference on Differential and Functional Differential Equations (Moscow, Russia, August 17–19, 2017)», Москва, Россия, 2017; Международная конференция «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXIX», посвященная 90-летию В.А.Ильина, Москва, Россия, 2018; Международная конференция «Спектральная теория и смежные вопросы», г. Уфа, Россия, 2018; 7th International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences, Moscow, Россия, 2018; Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 2018.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах автора [1]–[14] в журналах из списка ВАК. Из них 7 работ выполнены без соавторов. Основные результаты совместных работ, вошедшие в диссертацию, получены автором лично.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, каждая из которых разбита на несколько параграфов, заключения и списка литературы, включающего 201 наименований. Полный объем диссертации составляет 334страницы.

Основное содержание работы. Во введении приведен краткий исторический обзор по тематике работы, обоснованы актуальность и научная новизна исследования, его теоретическая и практическая ценность, изложены методы исследования, даны сведения об апробации работы, изложено ее основное содержание.

В **первой главе** рассматривается система n линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\mathbf{y}' = \lambda\rho(x)\mathrm{B}\mathbf{y} + \mathrm{A}(x)\mathbf{y} + \mathrm{C}(x,\lambda)\mathbf{y} \tag{5}$$

на отрезке $x \in [0,1]$ с комплексным параметром λ. Здесь

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^t$$

— вектор-столбец, составленный из абсолютно непрерывных на $[0,1]$ функций $y_j(x)$. В качестве множества значений параметра λ мы будем рассматривать область вида

$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \lambda_0\}$. Мы предполагаем, что коэффициенты системы удовлетворяют следующим условиям.
(i) Матрица B является диагональной и постоянной: $\mathrm{B} = \mathrm{diag}\{b_1, \ldots, b_n\}$, а числа b_j — комплексными и ненулевыми.
(ii) Все коэффициенты системы — функции $\rho(x)$, $a_{jk}(x)$ и $c_{jk}(x, \lambda)$ переменной x (при каждом фиксированном λ) мы будем считать суммируемыми по Лебегу на отрезке $[0, 1]$.
(iii) Будем считать, что функция $\rho(x)$ вещественна и положительна почти всюду. Первообразную функции $\rho(x)$ будем обозначать через $\omega(x) := \int_0^x \rho(t)\, dt$.
(iv) Будем предполагать, что при $|\lambda| \to \infty$ функции $c_{jk}(x, \lambda) = o(1)$, а именно, что $\int_0^1 |c_{jk}(x, \lambda)|\, dx \to 0$ для всех $1 \le j,\, k \le n$.

Матрицей фундаментальной системы решений (матрицей монодромии) мы называем матрицу $\mathrm{Y}(x, \lambda)$ ранга n, определенную при $x \in [0, 1]$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \lambda_0$, каждый столбец которой $\mathrm{Y}_k(x, \lambda)$ является решением системы (5). Таким образом, матрица Y удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\mathrm{Y}'(x, \lambda) = (\lambda\rho(x)\mathrm{B} + \mathrm{A}(x) + \mathrm{C}(x, \lambda))\, \mathrm{Y}(x, \lambda)$$

при каждом фиксированном λ. Сформулируем основные результаты. Определим семейство секторов $\Gamma_\kappa = \{\lambda : \arg\lambda \in (\alpha_{\kappa-1}, \alpha_\kappa)\}$, $\kappa = 1, \ldots, J$. Если все числа b_j совпадают, то наше семейство будет состоять ровно из одного сектора $\Gamma_1 = \mathbb{C}$. В противном случае зафиксируем два произвольных индекса $1 \le k < l \le n$ таких, что $b_k \ne b_l$, и рассмотрим уравнение

$$\mathrm{Re}(b_k\lambda) = \mathrm{Re}(b_l\lambda) \iff \mathrm{Re}((b_k - b_l)\lambda) = 0.$$

Легко видеть, что решением этого уравнения является некоторая прямая, проходящая через начало координат. Общее число уравнений такого вида равно $n(n-1)/2$, так что в результате получаем разбиение комплексной плоскости на $1 \le J \le (n^2 - n)$ секторов. Мы определим сектор Γ_κ^r как результат параллельного переноса сектора Γ_κ вдоль его биссектрисы (или вдоль продолжения этой биссектрисы за пределы Γ_κ):

$$\Gamma_\kappa^r := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda + re^{\frac{i}{2}(\alpha_{\kappa-1}+\alpha_\kappa)} \in \Gamma_\kappa\},$$

где $r \in \mathbb{R}$ фиксировано. В случае, когда $J = 1$ и $\Gamma_1 = \mathbb{C}$ положим $\Gamma_1^r = \mathbb{C}$.

Теорема 1.1 *Рассмотрим систему (4), коэффициенты которой удовлетворяют условиям (i) — (iv). Пусть Γ_κ^r — один из секторов, определенных выше. Тогда в области $\mathfrak{D} = \{\lambda \in \Gamma_\kappa^r : |\lambda| > \lambda_0\}$ определена матрица $\mathrm{Y}(x, \lambda)$ фундаментальной системы решений, удовлетворяющая асимптотическому условию*

$$\mathrm{Y}(x, \lambda) = \mathrm{Y}^0(x, \lambda) + \mathcal{A}(x, \lambda)\mathcal{E}(x, \lambda), \quad \text{где}$$
$$\mathcal{A}(x, \lambda) = (\alpha_{jk}(x, \lambda))_{j,k=1}^n, \qquad \max_{j,\,k,\,x} |\alpha_{jk}(x, \lambda)| \le C(\Upsilon(\lambda) + \mathrm{R}(\lambda)).$$

Здесь

$$\Upsilon(\lambda) = \max_{j,\,k,\,l,\,s,\,x} |\upsilon_{jkl}(s, x, \lambda)|, \qquad \mathrm{R}(\lambda) = \max_{j,\,k,\,l,\,s,\,x} |\varrho_{jkl}(s, x, \lambda)|,$$

$$\upsilon_{jkl}(s, x, \lambda) = (\pm)_{jk}(\pm)_{lk} \int q_{jl}(t) e^{(b_l - b_k)\lambda(\omega(t)-\omega(s)) + (b_j - b_k)\lambda(\omega(x)-\omega(t))}\, dt,$$

$$\varrho_{jkl}(s, x, \lambda) = (\pm)_{jk}(\pm)_{lk} \int r_{jl}(t, \lambda) e^{(b_l - b_k)\lambda(\omega(t)-\omega(s)) + (b_j - b_k)\lambda(\omega(x)-\omega(t))}\, dt,$$

где q_{jl} и r_{jl} — элементы матриц

$$\mathrm{Q}(x) = \mathrm{M}^{-1}(x)(\mathrm{A}(x) - \mathrm{D}(x))\mathrm{M}(x), \qquad \mathrm{R}(x,\lambda) = \mathrm{M}^{-1}(x)\mathrm{C}(x,\lambda)\mathrm{M}(x).$$

Матрица $\mathrm{M}(x)$ определяется следующим образом. Выделим диагональную часть матрицы $\mathrm{A}(x)$: представим матрицу $\mathrm{A}(x)$ в виде

$$\mathrm{A}(x) = \mathrm{D}(x) + (\mathrm{A}(x) - \mathrm{D}(x)), \quad \text{где } \ \mathrm{D}(x) = \begin{cases} a_{jk}(x), & \text{если } b_j = b_k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теперь положим

$$\mathrm{Y}^0(x,\lambda) = \mathcal{E}(x,\lambda) \cdot \mathrm{M}(x), \qquad \mathcal{E}(x,\lambda) = \mathrm{diag}\{e^{b_1\lambda\omega(x)}, \dots, e^{b_n\lambda\omega(x)}\},$$

где $\omega(x) = \int_0^x \rho(t)\,dt$, матрицы $\mathrm{M}_j(x)$, $1 \le j \le \nu$, имеют размер $n_j \times n_j$ каждая, а

$$\mathrm{M}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_1(x) & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \dots\dots & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{M}_2(x) & \mathrm{O} & \dots\dots & \mathrm{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{O} & \dots\dots & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{M}_\nu(x) \end{pmatrix}.$$

Каждая из матриц $\mathrm{M}_j(x)$ является решением уравнения $\mathrm{M}_j'(x) = \mathrm{D}_j(x)\mathrm{M}_j(x)$ с начальным условием $\mathrm{M}_j(0) = \mathrm{I}$, где $\mathrm{D}_j(x)$ — блок–диагональная часть матрицы $\mathrm{D}(x)$.

Теорема 1.1 применяется для нахождения асимптотики фундаментальной системы решений уравнения $l(y) = \lambda^n \varrho(x) y$ порядка $n = 2m$ вида со спектральным параметром в правой части. Функцию $\varrho(x)$ будем предполагать абсолютно непрерывной и положительной на $[0,1]$. Будем считать, что дифференциальное выражение $l(y)$ приведено к виду

$$l(y) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} (\tau_k(x) y^{(m-k)}(x))^{(m-k)} + \\ + i \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} \left[(\sigma_k(x) y^{(m-k-1)})^{(m-k)} + (\sigma_k(x) y^{(m-k)})^{(m-k-1)} \right],$$

где функция $\tau_0(x)$ абсолютно непрерывна и положительна, а $\tau_k^{(-k)}$, $\sigma_k^{(-k)} \in L_2[0,1]$. При $n = 2$ разобьем комплексную плоскость на два сектора — верхнюю и нижнюю полуплоскость; при $n > 2$ плоскость разбивается на $2n$ секторов вида

$$\Gamma_k = \left\{ \lambda : \frac{\pi(k-1)}{n} \le \arg\lambda \le \frac{\pi k}{n} \right\}, \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Теорема 1.2 *В любом секторе Γ_k^r уравнение $l(y) = \lambda^n \varrho(x) y$ имеет систему фундаментальных решений $y_k(x,\lambda)$, $k = 1, \dots, n$, для каждого из которых справедливо асимптотическое представление*

$$y_k(x) = e^{\omega_{k-1}\lambda\omega(x)} \left[\varrho^{\frac{1-n}{2n}}(x) \tau_0^{-\frac{1}{2n}}(x) \exp\left\{ \frac{2i}{n} \int_0^x \frac{\sigma_0(t)}{\tau_0(t)} dt \right\} + \zeta_{1\,k}(x,\lambda) \right].$$

При этом для квазипроизводных порядка $j=1,\dots,m-1$ этих функций также справедливы асимптотические представления

$$y_k^{[j]}(x)=\lambda^j e^{\omega_{k-1}\lambda\omega(x)}\left[(\omega_{k-1})^j\varrho^{\frac{2j-n+1}{2n}}(x)\tau_0^{-\frac{1+2j}{2n}}(x)\exp\left\{\frac{2i}{n}\int_0^x\frac{\sigma_0(t)}{\tau_0(t)}dt\right\}+\zeta_{j\,k}(x,\lambda)\right],$$

а для квазипроизводных порядка $j=m,\dots,n-1$ — представления

$$y_k^{[j]}(x)=\lambda^j e^{\omega_{k-1}\lambda\omega(x)}\left[(\omega_{k-1})^j\varrho^{\frac{2j-n+1}{2n}}(x)\tau_0^{1-\frac{1+2j}{2n}}(x)\exp\left\{\frac{2i}{n}\int_0^x\frac{\sigma_0(t)}{\tau_0(t)}dt\right\}+\zeta_{j\,k}(x,\lambda)\right].$$

Остатки в этих представлениях допускают при $\Gamma_\kappa^r\ni\lambda\to\infty$ оценку

$$\max_{j,\,k}\|\zeta_{j,\,k}(x,\lambda)\|_{L_\infty}\le C(\Upsilon(\lambda)+|\lambda|^{-1}),$$

где через ω_k, $0\le k\le n-1$, обозначаем корни степени n из $(-1)^m$, занумерованные в порядке

$$\omega_k=\begin{cases}\epsilon_l^{\frac{2k+1}{2}}, & \text{если число } m \text{ нечетно},\\ \epsilon_l^k, & \text{если } m \text{ четно},\end{cases}\qquad \epsilon_l=e^{\frac{i\pi l}{m}},$$

а $\rho(x)=\varrho^{\frac{1}{n}}(x)\tau_0^{-\frac{1}{n}}(x)$.

Далее мы получаем оценки на функцию $\Upsilon(\lambda)$ в зависимости от класса гладкости и суммируемости функций $q_{jl}(x)$. Условимся называть меру μ с носителем в Γ_κ^r *допустимой*, если она является мерой Карлесона в каждой полуплоскости $\{z:\ \mathrm{Re}((\beta_k-\beta_l)z)>-h\}$, $k<l$.

Теорема 1.3 *Пусть все функции q_{jl} лежат в пространстве $L_p[0,1]$ для некоторого $p\in[1,2]$. Зафиксируем некоторую допустимую меру μ в секторе Γ_κ^r с носителем в области $\mathcal{D}om_{\kappa,\lambda_0}=\{\lambda\in\Gamma_\kappa^r:\ |\lambda|>\lambda_0\}$. Тогда функция $\Upsilon(\lambda)$ принадлежит пространству $L_{p'}(\mu)$, $1/p+1/p'=1$. При этом*

$$\|\Upsilon(\lambda)\|_{L_{p'}(\mu)}\le C\max_{j,l}\|q_{jl}\|_{L_p[0,1]},$$

где C зависит только от функции ρ, меры μ, чисел r и λ_0.

Обозначим через $L_\infty^\theta(\Gamma_\kappa^r)$, $\theta\in[0,1]$, пространство ограниченных измеримых на Γ_κ^r функций $f(z)$, для которых норма

$$\|f\|_{L_\infty^\theta}=\sup_{z\in\Gamma_\kappa^r}|f(z)|(1+|z|)^\theta$$

конечна. Это пространство, как легко видеть, состоит из функций $f(z)=O(|z|^{-\theta})$ при $z\to\infty$. Подпространство в L_∞^θ, состоящее из функций $f(z)=o(|z|^{-\theta})$ при $z\to\infty$, обозначим через $L_{\infty,0}^\theta(\Gamma_\kappa^r)$.

Теорема 1.4 *Пусть функция $\rho(\cdot)$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$ и $\inf_{x\in[0,1]}\rho(x)>0$. Если все функции q_{jl} лежат в пространстве $B_{1,\infty}^\theta[0,1]$, $\theta\in(0,1)$, то $\Upsilon(\lambda)\in L_\infty^\theta(\Gamma_\kappa^r)$, причем*

$$\|\Upsilon(\lambda)\|_{L_\infty^\theta}\le C\max_{j,l}\|q_{jl}\|_{B_{1,\infty}^\theta},$$

где величина C зависит только от функции ρ и выбора r. Если все функции q_{jl} абсолютно непрерывны, то $\Upsilon(\lambda)\in L_\infty^1(\overline{\mathbb{C}}_r)$, причем

$$\|\Upsilon(\lambda)\|_{L_\infty^1}\le C\max_{j,l}\|q_{jl}\|_{W_1^1}.$$

При замене пространства $B^{\theta}_{1,\infty}$ на $B^{\theta}_{1,\infty,0}$ получим $\Upsilon(\lambda) \in L^{\theta}_{\infty,0}$ с сохранением оценки на норму.

Теорема 1.5 *Пусть все функции q_{jl} лежат в пространстве Бесова $B^{\theta}_{p,p'}[0,1]$ для некоторого $p \in (1,2]$ и $\theta \in (0,1/p)$. Зафиксируем некоторую несгущающуюся последовательность $\{\lambda_n\}$ в секторе Γ^r_{κ}. Тогда последовательность $\{\Upsilon(\lambda_n)\}$ принадлежит пространству $l^{\theta}_{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$. При этом*

$$\|\{\Upsilon(\lambda_n)\}\|_{l^{\theta}_{p'}} \le C \max_{j,l} \|q_{jl}\|_{B^{\theta}_{p,p'}[0,1]},$$

где C зависит только от функции ρ, последовательности $\{\lambda_n\}$ и числа r.

Вторая глава посвящена исследованию спектральных свойств системы Дирака (2). Функции p_j, $j = 1,2,3,4$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0,\pi]$ и комплекснозначными. Мы вводим оператор $\mathfrak{L}_{P,U}$, порожденный ℓ_P на области

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,U}) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,M}) : U(\mathbf{y}) = 0\}, \quad \text{где}$$
$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix}$$

с регулярными краевыми условиями U. А именно, предполагаем, что $J_{14} \cdot J_{23} \ne 0$, где через $J_{\alpha\beta}$ обозначаем определитель, составленный из α-го и β-го столбца матрицы $\mathcal{U}$. Оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ называется *сильно регулярным*, если он регулярен и к тому же $(J_{12} + J_{34})^2 + 4J_{14}J_{23} \ne 0$. Регулярный, но не сильно регулярный оператор называем *слабо регулярным*.

Первыми результатами этой главы являются теоремы об асимптотическом поведении собственных значений, собственных функций и резольвенты оператора $\mathcal{L}_{P,U}$.

Теорема 2.1 *Пусть потенциал P имеет внедиагональный вид*

$$P(x) = \begin{pmatrix} 0 & p_2(x) \\ p_3(x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad p_2(x),\ p_3(x) \in L_1[0,\pi],$$

и $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака. Обозначим через λ^0_n собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ и через λ_n — собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с учетом алгебраической кратности. Тогда при подходящей нумерации последовательности $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (и такая нумерация возможна)

$$\lambda_n = \lambda^0_n + s_n \quad s_n \to 0 \text{ при } |n| \to \infty.$$

Если $P \in L_p$, $p \in (1,2]$, то

$$\{s_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_{p'},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \text{и} \quad \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |s_n|^{p'}\right)^{1/p'} \le C\|P\|_{L_p}.$$

Если $P \in B^{\theta}_{1,\infty}$ (пространство Бесова), $\theta \in (0,1)$, то

$$\{n^{\theta}s_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_{\infty} \quad \text{и} \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}} n^{\theta}|s_n| \le C\|P\|_{B^{\theta}_{1,\infty}},$$

причем это утверждение при $\theta = 1$ *справедливо для потенциалов* $P \in W_1^1$.
Если $P \in B^\theta_{1,\infty,0}$, $\theta \in (0,1)$, *то*

$$n^\theta s_n \to 0 \text{ при } |n| \to \infty \quad \text{и} \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}} n^\theta |s_n| \le C\|P\|_{B^\theta_{1,\infty,0}}.$$

Если $P \in B^\theta_{p,p'}$, $p \in (1,2]$, $\theta \in (0,1/p)$, *то*

$$\{n^\theta s_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_{p'},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \text{и} \quad \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{p'\theta}|s_n|^{p'}\right)^{1/p'} \le C\|P\|_{B^\theta_{p,p'}}.$$

Если потенциал P *внедиагонален, а оператор* $\mathcal{L}_{P,U}$ *слабо регулярен, то все оценки сохраняются с заменой* s_n *на* $|s_n|^2$.
Если матрица P *имеет общий вид, то все утверждения теоремы сохраняются с той лишь разницей, что числа* λ_n^0 *являются собственными значениями оператора* $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}$, *где матрица краевых условий* $\widetilde{U}$ *имеет вид*

$$\widetilde{\mathcal{U}} = (\widetilde{C},\, \widetilde{D}), \quad \text{где } \ \widetilde{C} = C, \ \text{а } \widetilde{D} = \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\pi (p_1(t) - p_4(t))dt\right) D.$$

Аналогичное утверждение имеет место для собственных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$.

Теорема 2.2 *Пусть потенциал* $P(x)$ *внедиагонален, а оператор* $\mathcal{L}_{P,U}$ *сильно регулярен. Тогда, начиная с некоторого номера* $|n| > N$ *все его собственные значения просты. Обозначим через* $\{\mathbf{y}_n(x)\}_{|n|>N}$ *нормированные собственные функции этого оператора, отвечающие собственным значениям* $\{\lambda_n\}$, *а через* $\{\mathbf{y}_n^0(x)\}$ *— нормированные собственные функции оператора* $\mathcal{L}_{0,U}$, *отвечающие собственным значениям* $\{\lambda_n^0\}$. *Тогда*

$$\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{y}_n^0(x) + \mathbf{r}_n(x), \qquad \text{где } \|\mathbf{r}_n\|_C \to 0.$$

Если $P \in L_p$, $p \in (1,2]$, *то*

$$\{\|\mathbf{r}_n\|_C\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_{p'},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \text{и} \quad \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\mathbf{r}_n\|_C^{p'}\right)^{1/p'} \le C\|P\|_{L_p}.$$

Если $P \in B^\theta_{1,\infty}$ *(пространство Бесова),* $\theta \in (0,1)$, *то*

$$\{n^\theta\|\mathbf{r}_n\|_C\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty \quad \text{и} \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}} n^\theta \|\mathbf{r}_n\|_C \le C\|P\|_{B^\theta_{1,\infty}},$$

причем это утверждение при $\theta = 1$ *справедливо для потенциалов* $P \in W_1^1$.
Если $P \in B^\theta_{1,\infty,0}$, $\theta \in (0,1)$, *то*

$$n^\theta \|\mathbf{r}_n\|_C \to 0 \text{ при } |n| \to \infty \quad \text{и} \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}} n^\theta \|\mathbf{r}_n\|_C \le C\|P\|_{B^\theta_{1,\infty,0}}.$$

Если $P \in B^\theta_{p,p'}$, $p \in (1,2]$, $\theta \in (0,1/p)$, *то*

$$\{n^\theta\|\mathbf{r}_n\|_C\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_{p'},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \text{и} \quad \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{p'\theta}\|\mathbf{r}_n\|_C^{p'}\right)^{1/p'} \le C\|P\|_{B^\theta_{p,p'}}.$$

В слабо регулярном случае собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ асимптотически двукратны. Выберем число N_0 так, что для всех n, $|n| \geqslant N_0$ выполнено $|\lambda_{2n} - \lambda_{2n}^0| < 1/8$ и $|\lambda_{2n+1} - \lambda_{2n}^0| < 1/8$. Обозначим

$$\mathcal{P}_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_{2n}^0| = 1/4} \mathfrak{R}(\lambda) d\lambda, \quad n = \pm N_0, \pm(N_0 + 1), \dots,$$

где $\mathfrak{R}(\lambda) = (\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-1}$. Можно показать, что $\mathcal{P}_n$ является спектральным проектором на корневое подпространство, отвечающее собственным значениям λ_{2n} и λ_{2n+1}, которое мы обозначим $\mathcal{H}_n$. Определим также операторы

$$\mathcal{P}_n^0 := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_{2n}^0| = 1/4} \mathfrak{R}_0(\lambda) d\lambda, \quad n = \pm N_0, \pm(N_0 + 1), \dots$$

— спектральные проекторы на корневые подпространства оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, отвечающие собственным значениям $\lambda_{2n}^0 = \lambda_{2n+1}^0$.

Теорема 2.3 *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — слабо регулярный. Положим*

$$p_n = \|\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_n^0\|_{L_1 \to C}.$$

Если $P \in L_1$, то $p_n \to 0$ при $|n| \to \infty$.
Если $P \in L_p$, $p \in (1, 2]$, то

$$\{p_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l_{p'}, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \text{и} \quad \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n^{p'} \right)^{1/p'} \leq C\|P\|_{L_p}.$$

Если $P \in B_{1,\infty}^{\theta}$, $\theta \in (0, 1)$, то

$$\{n^{\theta} p_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l_{\infty} \quad \text{и} \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}} n^{\theta} p_n \leq C\|P\|_{B_{1,\infty}^{\theta}},$$

причем это утверждение при $\theta = 1$ справедливо для потенциалов $P \in W_1^1$.
Если $P \in B_{1,\infty,0}^{\theta}$, $\theta \in (0, 1)$, то

$$n^{\theta} p_n \to 0 \ \text{при} \ |n| \to \infty \quad \text{и} \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}} n^{\theta} p_n \leq C\|P\|_{B_{1,\infty,0}^{\theta}}.$$

Если $P \in B_{p,p'}^{\theta}$, $p \in (1, 2]$, $\theta \in (0, 1/p)$, то

$$\{n^{\theta} p_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l_{p'}, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \text{и} \quad \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{p'\theta} p_n^{p'} \right)^{1/p'} \leq C\|P\|_{B_{p,p'}^{\theta}}.$$

Теорема 2.4 *Пусть $\mathcal{L}_{0,U}$ регулярен и $P \in L_1$. Тогда найдется $\alpha > 1$, такое, что при $|\mathrm{Im}\lambda| > \alpha$ резольвента $\mathfrak{R}(\lambda) = (\mathcal{L}_{P,U} - \lambda)^{-1}$ существует как оператор из L_p в L_q для любых $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$, и выполняется оценка*

$$\|\mathfrak{R}(\lambda)\|_{L_p \to L_q} \leq C|\mathrm{Im}\lambda|^{-1+1/p-1/q}$$

с постоянной C, зависящей от α, но не зависящей от λ вне полосы $\Pi_\alpha = \{|\mathrm{Im} z| < \alpha\}$.

Далее мы переходим к исследованию свойств базисности Рисса и Шаудера системы собственных и присоединенных функций системы Дирака. Саму систему мы вводим классическим образом, при помощи канонических по Келдышу цепочек.

Теорема 2.5 *Для любого сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом $P \in L_1[0,\pi]$ система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных и присоединенных функций образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H} = (L_2[0,1])^2$.*

Пусть оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ слабо регулярен. Пусть $\mathcal{H}_n = \mathrm{Rn}\,\mathcal{P}_n$, $|n| \geqslant N_0$, — корневые подпространства этого оператора. Определим дополнительно подпространство $\mathcal{H}_0 = \mathrm{Rn}\,\mathcal{S}_{N_0}$, где $\mathcal{S}_{N_0} := 1/(2\pi i)\int_\gamma \mathfrak{R}(\lambda)\,d\lambda$, а замкнутый кусочно–гладкий жорданов контур γ охватывает все собственные значения λ_n оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с номерами $n : |n| < 2N_0$, и только их.

Теорема 2.6 *Система $\{\mathcal{H}_0,\, \mathcal{H}_n\}_{|n|\geqslant N_0}$ образует базис Рисса из подпространств в пространстве $\mathbb{H}$.*

Теорема 2.7 *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с потенциалом $P \in \mathcal{X}$ внедиагонального вида, где $\mathcal{X}$ — компакт в $L_1[0,\pi]$. Пусть*

$$E_N = \overline{Lin\{\mathbf{e}_n\}_{|n|>N}}, \quad E_0 = Lin\{\mathbf{e}_n\}_{|n|\le N},$$

где $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированный базис,

$$\mathcal{H}_N = \overline{Lin\{\mathbf{y}_n\}_{|n|>N}}, \quad \mathcal{H}_0 = Lin\{\mathbf{y}_n\}_{|n|\le N}.$$

Тогда найдется номер $N = N(\mathcal{X}, U) \in \mathbb{N}$ и постоянная $C = C(\mathcal{X}, U) > 0$ такие, что

$$\|T_N\| \cdot \|T_N^{-1}\| \le C,$$

где оператор T_N определен как сужение оператора $T:\, e_n \to \mathbf{y}_n$ на подпространство E_N.

В случае, когда потенциал пробегает некомпактное множество в L_1, определение оператора T_N усложняется. В §7 второй главы разобран случай $\|P\|_{L_\varkappa} \le R$, где $\varkappa > 1$. Среди собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ мы выделяем иррегулярные (их число конечно и зависит только от краевых условий и числа R) и регулярные (все остальные). Тогда оператор T_N определяется как сужение оператора T на подпространство $E_N = \overline{Lin\{e_n\}_{\lambda_n \text{ регулярно}}}$.

Теорема 2.8 *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с внедиагональным потенциалом $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa \in (1,2]$, $\|P\|_{L_\varkappa} \le R$. Пусть краевые условия U фиксированы. Тогда для каждого P, $\|P\|_{L_\varkappa} \le R$, оператор T смены базиса, построенный выше, допускает оценку $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \le C$, где величины C зависит только от радиуса шара R и краевых условий U.*

Далее мы исследуем свойства условной и безусловной базисности системы $\{y_n\}$ в различных шкалах пространств (определения пространств, учитывающих краевые условия, вынесены в приложение B).

Теорема 2.9 *Пусть оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом $P \in L_\varkappa$, $\varkappa \in [1,2)$, сильно регулярен. Тогда для любого $\theta \in [0, 3/2 - 1/\varkappa)$ система $\{(n^2+1)^{-\theta/2}\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса в пространстве $\mathbb{H}_U^\theta$. При $\varkappa \ge 2$ имеет место базисность Рисса в $\mathbb{H}_U^\theta$ для любого $\theta \in [0,1]$. В случае слабой регулярности оператора базисом Рисса в соответствующем пространстве $\mathbb{H}_U^\theta$ является система двумерных подпространств $\mathcal{H}_n = \mathcal{L}in\{\mathbf{y}_{2n}, \mathbf{y}_{2n+1}\}$.*

Теорема 2.10 *Пусть оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом $P \in L_\varkappa$, $\varkappa \in (1,\infty)$, сильно регулярен. Тогда система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Шаудера в пространствах L_μ при любом $\mu \in (1,\infty)$, в пространствах $W^1_{\mu,U}$ при любом $\mu \in (1,\varkappa]$ и в пространствах $B^\theta_{\mu,q,U}$, где либо $\mu \in (1,\varkappa]$, $q \in (1,\infty)$, $\theta \in (0,1)$, либо $\mu \in (\varkappa,\infty)$, $q \in (1,\infty)$, $\theta \in (0, 1+1/\mu-1/\varkappa)$, либо $\mu \in (\varkappa,\infty)$, $q=\mu$, $\theta = 1+1/\mu-1/\varkappa$. Если оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ слабо регулярен, то система $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует в соответствующем пространстве базис Шаудера из двумерных подпространств.*

В **третьей главе** мы изучаем оператор Штурма–Лиувилля с потенциалом $q(x)$ первого порядка сингулярности и краевыми условиями

$$U_j(y) = a_{j1}y(0) + a_{j2}y^{[1]}(0) + b_{j1}y(\pi) + b_{j2}y^{[1]}(\pi),\ j=1,2,$$

где $q(x) = u'(x)$, а $y^{[1]}(x) := y'(x) - u(x)y(x)$ — первая квазипроизводная. Обозначим через $J_{\alpha\beta}$ определитель, составленный из α-го и β-го столбца матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда оператор L называется *регулярным* (по Биркгофу), если выполнено одно из следующих условий:

1. $J_{42} \neq 0$,
2. $J_{42} = 0$, $J_{14} + J_{32} \neq 0$,
3. $J_{42} = J_{14} = J_{32} = 0$, $J_{12} + J_{34} = 0$, $J_{13} \neq 0$.

При этом в случаях 1) и 3), а также в случае 2) при дополнительном условии $J_{14} + J_{32} \neq \pm(J_{12} + J_{34})$ оператор называется *сильно регулярным*. В противном случае, будем называть его *слабо регулярным*.

Мы предлагаем четыре метода определения оператора L. Первый заключается в замене дифференциального выражения $-y'' + q(x)y$ на регуляризованное выражение

$$-\left(y^{[1]}(x)\right)' - u(x)y^{[1]}(x) - u^2(x)y(x).$$

Действуя этим методом, мы явно предъявляем область определения оператора L. Можно действовать по–другому: взять последовательность гладких функций $u_n \to u$ в пространстве $L_2[0,\pi]$ и зафиксировать краевые условия (квазипроизводную в них определяем по функциям u_n). Оказывается, что классические операторы Штурма–Лиувилля L_n сойдутся к оператору L в смысле равномерной резольвентной сходимости. Третий метод заключается в замыкании квадратичной формы

$$\mathcal{L}(y,y) = \langle y^{[1]}, y^{[1]}\rangle - \langle u^2(x)y, y\rangle + \left(Ay^\wedge, y^\wedge\right),$$

где используются обозначения $y^\wedge = \begin{pmatrix} y(0) \\ y(\pi) \end{pmatrix}$, $y^\vee = \begin{pmatrix} y^{[1]}(0) \\ -y^{[1]}(\pi) \end{pmatrix}$. Четвертый метод позволяет определить оператор $L : W_2^1 \to W_2^{-1}$ как сумму оператора второго дифференцирования и оператора умножения на функцию q (мультипликатор из W_2^1 в W_2^{-1}). Сужение этого оператора на множество таких функций y, что $Ly \in L_2[0,\pi]$ возвращает нас к неограниченному оператору L в пространстве $L_2[0,\pi]$. Мы показываем, что все эти четыре способа приводят к одному и тому же оператору.

Затем мы изучаем спектральные свойства оператора L.

Теорема 3.1 *Пусть $u(x) \in W_2^\theta$ при некотором $0 \le \theta < 1/2$, а $q(x) = u'(x)$ в смысле теории распределений. Пусть L — оператор, порожденный дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$ и регулярными краевыми условиями. Обозначим через $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ собственные значения оператора L, а через $\{\lambda_n^0\}_{n=1}^\infty$ — собственные значения оператора L_0. Для обоих операторов нумерацию собственных значений проводим в порядке возрастания модулей и с учетом алгебраической кратности. Тогда*

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^0} + s_n, \ n = 1, 2, \dots .$$

В случае сильной регулярности краевых условий $\{s_n\}_{n=1}^\infty \in l_2^\theta$, а в случае слабой регулярности $\{|s_n|^2\}_{n=1}^\infty \in l_2^\theta$. При $\theta \in (0, 1/2)$ в дополнение к этим асимптотическим соотношениям выполнены оценки

$$\|\{s_n\}\|_{l_2^\theta} \le C(\|u\|_\theta, U)$$

в случае сильной регулярности краевых условий и

$$\|\{|s_n|^2\}\|_{l_2^\theta} \le C(\|u\|_\theta, U)$$

в случае слабой регулярности.

Теорема 3.2 *Пусть выполнены условия и сохранены обозначения теоремы 3.1, причем краевые условия сильно регулярны. Обозначим через $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и $\{y_n^0(x)\}_{n=1}^\infty$ нормированные в пространстве $L_2[0,\pi]$ собственные функции операторов L и L_0, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\lambda_n^0\}_{n=1}^\infty$ соответственно. Тогда*

$$y_n(x) = y_n^0(x) + r_n(x), \qquad y_n^{[1]}(x) = (y_n^0(x))' + n r_n^1(x),$$

где

$$\sum_{n=1}^\infty n^\theta \left(\|r_n(x)\|^2_{C[0,\pi]} + \|r_n^1(x)\|^2_{C[0,\pi]}\right) \le C.$$

Теорема 3.3 *Пусть $q(\cdot) \in W_2^{-1}$, а оператор L определен выше. Если соответствующие краевые условия сильно регулярны, то система собственных и присоединенных функций оператора L образует базис Рисса в пространстве $L_2[0,\pi]$.*

Мы доказываем далее, что резольвента оператора L есть интегральный оператор с непрерывным ядром $G(t,x,z)$, $z = \sqrt{\lambda}$.

Теорема 3.4 *Пусть L — произвольный оператор Штурма–Лиувилля с потенциалом $q = u'$, $u \in L_2[0,\pi]$ и регулярными краевыми условиями U. Для любых положительных чисел α и δ найдется такое $R > 0$, что при всех $\lambda \in \overline{\Omega_{\alpha,\delta,R}}$ и всех $t, x \in [0,\pi]$ выполнено*

$$|G(t,x,z) - G^0(t,x,z)| < C\Upsilon(z), \quad C = C(u,U), \ \lambda = z^2.$$

В слабо регулярном случае все собственные значения оператора L_0 асимптотически двукратны, а именно $z_{2n}^0 = z_{2n+1}^0 + o(1)$, $n \in \mathbb{N}$ (напомним, что $z = \sqrt{\lambda}$). Поскольку

$z_n = z_n^0 + o(1)$, то $|z_{2n} - z_{2n+1}| \to 0$ при $n \to \infty$. Выберем число N_0 так, что для всех n, $n \geqslant N_0$ выполнено $|z_{2n} - z_{2n}^0| < 1/8$ и $|z_{2n+1} - z_{2n}^0| < 1/8$. Обозначим

$$\mathcal{P}_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\left|\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_{2n}^0}\right| = 1/4} R(\lambda) d\lambda, \quad n = N_0,\, N_0 + 1, \dots,$$

где $R(\lambda) = (L - \lambda I)^{-1}$. Таким образом, P_n является спектральным проектором на корневое подпространство, отвечающее собственным значениям λ_{2n} и λ_{2n+1}, которое мы обозначим $\mathcal{H}_n$. Определим также операторы

$$\mathcal{P}_n^0 := \frac{1}{2\pi i} \int_{\left|\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_{2n}^0}\right| = 1/4} R_0(\lambda) d\lambda, \quad n = N_0,\, N_0 + 1, \dots$$

— спектральные проекторы на корневые подпространства оператора L_0, отвечающие собственным значениям $\lambda_{2n}^0 = \lambda_{2n+1}^0$.

Теорема 3.5 *Пусть оператор L слабо регулярен. Положим $p_n = \|\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_n^0\|_{L_2}$. Если $u \in L_2$, то $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_2$. Если $u \in W_2^\theta$, $\theta \in (0, 1/2)$, то $\{n^\theta p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_2$.*

Последний параграф третьей главы посвящен уточнению асимптотических формул для собственных значений оператора L. Вначале, основываясь на результатах первой главы, мы находим вторые слагаемые в асимптотическом представлении для фундаментальной системы решений. Затем получаем вид вторых слагаемых в асимптотике собственных значений. Поскольку эти результаты имеют достаточно громоздкие формулировки, приведем только теорему для оператора с условиями Дирихле.

Теорема 3.6 *Пусть λ_n — собственные значения оператора Штурма–Лиувилля L с потенциалом $q = u'$, $u \in L_2[0, \pi]$, и краевыми условиями Дирихле. Справедливы равенства*

$$\lambda_n^{1/2} = n - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(t) \sin(2nt) dt + \frac{1}{2\pi n} \int_0^\pi u^2(t) \cos(2nt) dt -$$
$$- \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \int_0^t u(t) u(s) \cos(2nt) \sin(2ns) ds dt - \frac{1}{2\pi n} \int_0^\pi u^2(t) dt + \zeta_n,$$

$$|\zeta_n| \le C(\Upsilon(u(x); \xi_n) + \Upsilon(xu(x); \xi_n) + |\xi_n|^{-1})^2$$

для некоторой C и некоторой несгущающейся последовательности ξ_n. В частности, если $u(x) \in W_2^\theta[0, \pi]$ при некотором $0 \le \theta < 1/2$, то $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty \in l_1^{2\theta}$. При $\theta > 0$ дополнительно имеем оценку

$$\|\{\zeta_n\}_1^\infty\|_{l_1^{2\theta}} \le C(\|u\|_\theta).$$

В заключительной **четвертой главе** мы изучаем обратные спектральные задачи для операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами $q \in W_2^\theta[0, \pi]$, $\theta \in (-1, +\infty)$. Мы рассматриваем три обратные задачи: восстановление функции $u(x)$ по спектрам задач Дирихле и Дирихле–Неймана (задача Борга); восстановление функции $q(x)$ по спектру и нормировочным числам задачи Дирихле (задача Гельфанда–Левитана); восстановление нечетной относительно $\pi/2$ функции $u(x)$ по спектру задачи Дирихле.

Для первой спектральной задачи мы регуляризуем спектральные данные к виду $s_{2n} = \frac{\lambda_n - n^2}{2n}$, $s_{2n-1} = \frac{\mu_n - (n-1/2)^2}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Здесь $\{\lambda_n\}_1^\infty$ и $\{\mu_n\}_1^\infty$ — спектры задач Дирихле и Дирихле–Неймана соответственно. Вектор $\mathbf{s} = (s_n)$ мы помещаем в пространство $\hat{l}_2^\theta$. Приведем конструкцию этого пространства. Фиксируем $\theta \geqslant 0$ и обозначим через l_2^θ пространство последовательностей комплексных чисел $x = \{x_1, x_2, \dots\}$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 k^{2\theta} < \infty.$$

Введем специальные последовательности

$$e^{2s-1} = \{k^{-(2s-1)}\}_{k=1}^\infty, \qquad e^{2s} = \{(-1)^k k^{-(2s-1)}\}_{k=1}^\infty, \quad s = 1, 2, \dots.$$

При заданном $\theta \geqslant 0$ найдется единственное натуральное число m, такое, что $2m - 3/2 \leqslant \theta < 2m + 1/2$ (собственно говоря, $m = [\frac{\theta + 3/2}{2}]$). Для этого числа θ определим пространство $\hat{l}_2^\theta$ как конечномерное расширение пространства l_2^θ, а именно,

$$\hat{l}_2^\theta = l_2^\theta \oplus span\{e^s\}_1^{2m}.$$

Теперь введем отображение $\hat{F}$, сопоставляющее функции $u \in W_2^\theta[0, \pi]$ вектор регуляризованных спектральных данных.

Теорема 4.1 *Две последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и $\{\mu_k\}_1^\infty$ являются спектрами задачи Дирихле и задачи Дирихле–Неймана с вещественным потенциалом $q = u'$, где $u \in W_2^\theta[0, \pi]$ для некоторого $\theta > 0$, тогда и только тогда, когда выполнено условие перемежаемости*

$$\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \dots$$

и условие об асимптотическом поведении

$$\begin{cases} \lambda_k = k^2 + 2k s_{2k}, \; k \geq 1, \\ \mu_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + (2k-1)s_{2k-1}, \; k \geq 1, \end{cases} \qquad \mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots) \in \hat{l}_2^\theta.$$

При этом функция u единственна.

Параллельно выясняется, что отображение $\hat{F}$ является аналитическим в малой окрестности множества вещественных функций u пространства W_2^θ. Дифференциал этого отображения и обратный к нему оператор мы предъявляем явно. Кроме того, мы доказываем, что $\hat{F}$ слабо нелинейно.

Теорема 4.2 *При любом $\theta > 0$ отображение $\hat{F}$ действует из W_2^θ в $\hat{l}_2^\theta$, ограничено на каждом шаре и дифференцируемо по Фреше в каждой вещественной точке u. При $u = 0$*

$$\hat{F}'(0)h = \{b_k\}_1^\infty, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi h(x)\sin kx dx.$$

Линейный оператор $F'(0)$ является изоморфизмом пространств $W_2^\theta[0, \pi]$ и $\hat{l}_2^\theta$. Нелинейная часть функции $\hat{F}$ — отображение $\hat{\Phi}(u) = \hat{F}(u) - \hat{F}'(0)u$ является ограниченным из

W_2^θ *в* $\hat{l}_2^\tau$, *где* $\tau = \begin{cases} 2\theta, & \text{при } \theta \in (0,1], \\ \theta+1, & \text{при } \theta \geq 1 \end{cases}$. *Отображение* $\hat{\Phi} : W_2^\theta \to \hat{l}_2^\tau$ *также дифференцируемо в каждой вещественной точке.*

Обозначим через $\Gamma_{r,h}^\theta$ множество вещественных последовательностей $\mathbf{s}$ из шара $\|\mathbf{s}\|_\theta \leq r$ пространства $\hat{l}_2^\theta$, для которых

$$\mu_1 + h < \lambda_1, \ \lambda_1 + h < \mu_2, \ \mu_2 + h < \lambda_2, \dots .$$

Через Ω_R^θ обозначим открытый шар $\|u\|_\theta \leq R$ вещественного пространства $W_2^\theta[0,\pi]$.

Теорема 4.3 *Пусть $\theta > 0$ фиксировано. Для любого $R > 0$ найдутся такие $r > 0$ и $h > 0$, что образ $\hat{F}(\Omega_R^\theta)$ лежит в $\Gamma_{r,h}^\theta$. Для любой пары $r > 0$ и $h > 0$ найдется такое число $R > 0$, что образ $\hat{F}^{-1}(\Gamma_{r,h}^\theta)$ лежит в Ω_R^θ.*

Теорема 4.4 *Фиксируем $\theta > 0$. Пусть последовательности $\mathbf{s}^0$, $\mathbf{s}^1$ регуляризованных спектральных данных лежат в $\Gamma_{r,h}^\theta$. Тогда прообразы $u_0 = \hat{F}^{-1}\mathbf{s}^0$ и $u_1 = \hat{F}^{-1}\mathbf{s}^1$ лежат в Ω_R^θ, и справедливы оценки*

$$C_1\|\mathbf{s}^0 - \mathbf{s}^1\|_{\hat{l}_2^\theta} \leq \|u_0 - u_1\|_{W_2^\theta} \leq C_2\|\mathbf{s}^0 - \mathbf{s}^1\|_{\hat{l}_2^\theta},$$

где число R и постоянные C_1 , C_2 зависят только от r и h. Обратно, если u_0 и u_1 лежат в Ω_R^θ, то последовательности $\mathbf{s}^0 = \hat{F}(u_0)$ и $\mathbf{s}^1 = \hat{F}(u_1)$ лежат в $\Gamma_{r,h}^\theta$, и справедливы оценки

$$C_1\|u_0 - u_1\|_{W_2^\theta} \leq \|\mathbf{s}^0 - \mathbf{s}^1\|_{\hat{l}_2^\theta} \leq C_2\|u_0 - u_1\|_{W_2^\theta}.$$

Здесь числа $r > 0$, $h > 0$ и постоянные C_1 и C_2 зависят только от R.

В §6 мы предлагаем алгоритм восстановления потенциала по конечному набору спектральных данных $\mathbf{s}^N = (s_1, \dots, s_{2N}, 0, 0 \dots)$ для задачи Борга. Функцию, восстановленную по вектору $\mathbf{s}^N$ мы обозначаем u_N и называем $2N$–аппроксимацией потенциала u. Кроме того, мы предполагаем, что координаты s_k найдены с некоторой погрешностью ε, но взамен считаем выполненным одно из условий: либо $u \in \Omega_R$ для некоторого R, либо $\mathbf{s} \in \Gamma_{r,h}$ для некоторых r и h.

Теорема 4.5 *Пусть $u \in \Omega_R^\theta$ для некоторого $\theta > 0$, а u_N — ее $2N$–аппроксимация, определенная выше, причем $\|u_N\|_\theta \leq R$ (выполнено условие согласованности). Тогда для любого $\tau \in [0,\theta)$ выполнены оценки*

$$\|u - u_N\|_\tau \leq C_1^{-1}\|\mathbf{s} - \mathbf{s}^N\|_\tau \leq C(R)N^{\tau-\theta} + \varepsilon C(R) \begin{cases} N^{\tau-1/2} & \text{если } \tau > 1/2, \\ (\ln N)^{1/2} & \text{если } \tau = 1/2, \\ 1, & \text{если } \tau < 1/2. \end{cases} \tag{5}$$

В частности,

$$\|u(x) - u_N(x)\|_\tau \leqslant C(R) \begin{cases} \varepsilon^\gamma, \ \gamma = \dfrac{2(\theta-\tau)}{2\theta-1}, & \text{если } \tau > 1/2, \quad N = \varepsilon^{-2/(2\theta-1)}, \\ \varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2}, & \text{если } \tau = 1/2, \quad N = \varepsilon^{-1/(\theta-\tau)}, \\ \varepsilon, & \text{если } \tau < 1/2, \quad N \geqslant \varepsilon^{-1/(\theta-\tau)}. \end{cases} \tag{6}$$

Константы в этих оценках зависят только от R, θ и τ.

Теорема 4.6 *Пусть оба вектора регуляризованных спектральных данных $\mathbf{s}$ и $\mathbf{s}^N$ лежат в $\Omega^\theta(r,h)$ для некоторых $\theta > 0$, $r > 0$ и $h \in (0,1)$. Тогда для любого $\tau \in [0,\theta)$ выполнены оценки (5) и (6) с заменой всех констант $C(R)$ на величины $C(r,h)$, зависящие только от θ, τ, r и h.*

Результаты §4 главы IV о задаче восстановления нечетной функции u по спектру задачи Дирихле аналогичны результатам для задачи Борга.

Для обратной задачи по спектральной функции мы регуляризуем спектральные данные к виду $s_{-k} = \frac{\lambda_k - k^2}{2k}$, $s_k = \alpha_k - \pi/2$, $k \in \mathbb{N}$. Здесь λ_k — собственные значения, а

$$\alpha_k = \int_0^\pi y_k(x)^2\,dx, \quad l(y_k) = \lambda_k y_k,\ y_k(0) = 0,\ y_k^{[1]}(0) = \sqrt{\lambda_k}.$$

— соответствующие нормировочные числа оператора L_D. Фиксируем $\theta \geqslant 0$ и обозначим через $l_2^\theta(\mathbb{Z}_0)$ пространство, состоящее из двусторонних последовательностей комплексных чисел $x = \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_1, x_2, \dots\}$ таких, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_0} |x_k|^2 |k|^{2\theta} < \infty$$

(здесь $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — множество целых чисел без нуля). Введем последовательности

$$e^{2s-1} = \{|2k|^{-(2s-1)}\}_{k\in\mathbb{Z}_-} \bigcup \{0\}_{k\in\mathbb{Z}_+}, \qquad e^{2s} = \{0\}_{k\in\mathbb{Z}_-} \bigcup \{(2k)^{-2s}\}_{k\in\mathbb{Z}_+},$$

$s = 1, 2, \dots$. При заданном $\theta \geqslant 0$ найдется единственное натуральное число m, такое, что $m - 1/2 \leqslant \theta < m + 1/2$. Для этого числа θ определим пространство $\check{l}_2^\theta$ как конечномерное расширение пространства $l_2^\theta(\mathbb{Z}_0)$, а именно,

$$\check{l}_2^\theta = l_2^\theta(\mathbb{Z}_0) \oplus span\{e^k\}_1^m.$$

Обозначим $\check{\Gamma}^\theta$ множество векторов пространства $\check{l}_2^\theta$, координаты которых вещественны и

$$2(k+1)s_{-k-1} + 2k + 1 > 2ks_{-k}, \qquad s_k > -\pi/2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Первое условие возникает из условия монотонности последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$. Второе условие — положительность нормировочных чисел. Определим отображение $\check{F}$ из $W_2^\theta[0,\pi]$ в $\check{l}_2^\theta$ равенством $\check{F}(u) = \mathbf{s}$, где координаты вектора $\mathbf{s}$ определяются формулами $s_{-k} = \frac{\lambda_k - k^2}{2k}$, $s_k = \alpha_k - \pi/2$, $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.7 *При любом $\theta > 0$ отображение $\check{F}$ действует из W_2^θ в $\check{l}_2^\theta$, ограничено на каждом шаре и дифференцируемо по Фреше в каждой вещественной точке u. При $u = 0$*

$$F'(0) = S, \quad (Su)_k = -\int_0^\pi (\pi - t)u(t)\cos(2kt)\,dt,\ (Su)_{-k} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi u(t)\sin(2kt)dt,\ k \geq 1.$$

Этот оператор является изоморфизмом пространств $W_2^\theta[0,\pi]$ и $\check{l}_2^\theta$. Нелинейная часть функции $\check{F}$ — отображение $\check{\Phi}(u) = \check{F}(u) - Su$ также дифференцируемо в каждой вещественной точке и является ограниченным из W_2^θ в $\check{l}_2^\tau$, где $\tau = \begin{cases} 2\theta, & \text{при } \theta \in (0,1], \\ \theta + 1, & \text{при } \theta \geq 1. \end{cases}$

Теорема 4.8 *Две последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и $\{\alpha_k\}_1^\infty$ являются спектром и нормировочными числами задачи Дирихле с потенциалом $q = u'$, где $u \in W^\theta_{2,\mathbb{R}}[0,\pi]$ для некоторого $\theta > 0$, тогда и только тогда, когда выполнено условие монотонности $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, неотрицательности $\alpha_k > 0$ и условие об асимптотическом поведении*

$$\begin{cases} \lambda_k = k^2 + 2ks_{-k}, \ k \geq 1, \\ \alpha_k = \frac{\pi}{2} + s_k, \ k \geq 1, \end{cases} \qquad \mathbf{s} \in \check{l}^\theta_2.$$

При этом функция u единственна.

Обозначим через $\check{\Gamma}^\theta_{r,h}$ множество вещественных последовательностей $\mathbf{s}$ из шара $\|\mathbf{s}\|_\theta \leq r$ пространства $\check{l}^\theta_2$, для которых

$$\lambda_1 + h < \lambda_2, \ \lambda_2 + h < \lambda_3, \ \lambda_3 + h < \lambda_4, \dots .$$

Через Ω^θ_R обозначим открытый шар $\|u\|_\theta \leq R$ вещественного пространства $W^\theta_2[0,\pi]$.

Теорема 4.9 *Пусть $\theta > 0$ фиксировано. Для любого $R > 0$ найдутся такие $r > 0$ и $h > 0$, что образ $\check{F}(\Omega^\theta_R)$ лежит в $\check{\Gamma}^\theta_{r,h}$. Для любой пары $r > 0$ и $h > 0$ найдется такое число $R > 0$, что образ $\check{F}^{-1}(\check{\Gamma}^\theta_{r,h})$ лежит в Ω^θ_R.*

Теорема 4.10 *Пусть последовательности $\mathbf{s}^0$, $\mathbf{s}^1$ регуляризованных спектральных данных лежат в $\check{\Gamma}^\theta_{r,h}$. Тогда прообразы $u_0 = \check{F}^{-1}\mathbf{s}^0$ и $u_1 = \check{F}^{-1}\mathbf{s}^1$ лежат в Ω^θ_R и справедливы оценки*

$$C_1\|\mathbf{s}^0 - \mathbf{s}^1\|_{\check{l}^\theta_2} \leq \|u_0 - u_1\|_{W^\theta_2} \leq C_2\|\mathbf{s}^0 - \mathbf{s}^1\|_{\check{l}^\theta_2},$$

где число R и постоянные C_1 , C_2 зависят только от r и h. Обратно, если u_0 и u_1 лежат в Ω^θ_R, то последовательности $\mathbf{s}^0 = \check{F}(u_0)$ и $\mathbf{s}^1 = \check{F}(u_1)$ лежат в $\check{\Gamma}^\theta_{r,h}$ и справедливы оценки

$$C_1\|u_0 - u_1\|_{W^\theta_2} \leq \|\mathbf{s}^0 - \mathbf{s}^1\|_{\check{l}^\theta_2} \leq C_2\|u_0 - u_1\|_{W^\theta_2}.$$

Здесь числа $r > 0$, $h > 0$ и постоянные C_1 и C_2 зависят только от R.

В последнем параграфе четвертой главы мы получаем результаты о восстановлении потенциала по конечному набору спектральных данных — собственных значений и нормировочных чисел оператора L_D. А именно, предположим, что с погрешностью ε измерены координаты s_k, $0 < |k| \leq N$, вектора $\mathbf{s}$. Дополним эти данные нулями и обозначим построенный вектор $\widetilde{\mathbf{s}}$. По спектральным данным мы найдем $2N$–аппроксимацию потенциала — функцию u_N (мы считаем, что ε достаточно мало, а N настолько велико, так, что $\mathbf{s} \in \check{\Gamma}^\theta$).

Теорема 4.11 *Пусть $u \in \Omega^\theta_R$ для некоторого $\theta > 0$, а $\widetilde{u}_N$ — ее $2N$–аппроксимация, определенная выше, причем $\|\widetilde{u}_N\|_\theta \leq R$. Тогда для любого $\tau \in [0,\theta)$ выполнены оценки*

$$\|u - \widetilde{u}_N\|_\tau \leq C_1^{-1}\|\mathbf{s} - \widetilde{\mathbf{s}}\|_\tau \leq C(R)N^{\tau-\theta} + \varepsilon C(R) \begin{cases} N^{\tau-1/2} & \text{если } \tau > 1/2, \\ (\ln N)^{1/2} & \text{если } \tau = 1/2, \\ 1, & \text{если } \tau < 1/2. \end{cases}$$

В частности,

$$\|u(x) - \widetilde{u}_N(x)\|_\tau \leqslant C(R) \begin{cases} \varepsilon^\gamma, \ \gamma = \dfrac{2(\theta-\tau)}{2\theta-1}, & \text{если } \tau > 1/2, \quad N = \varepsilon^{-2/(2\theta-1)}, \\ \varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2}, & \text{если } \tau = 1/2, \quad N = \varepsilon^{-1/(\theta-\tau)}, \\ \varepsilon, & \text{если } \tau < 1/2, \quad N \geqslant \varepsilon^{-1/(\theta-\tau)}. \end{cases}$$

Константы в этих оценках зависят только от R, θ и τ.

Теорема 4.12 *Пусть оба вектора регуляризованных спектральных данных* $\mathbf{s}$ *и* $\widetilde{\mathbf{s}}$ *лежат в* $\check{\Gamma}^{\theta}_{r,h}$ *для некоторых* $\theta > 0$, $r > 0$ *и* $h \in (0,1)$. *Пусть* $\widetilde{u}_N$ *—* $2N$*–аппроксимация, определенная выше. Тогда для любого* $\tau \in [0, \theta)$ *выполнены оценки теоремы 4.11 с заменой всех констант* $C(R)$ *на величины* $C(r,h)$, *зависящие только от* θ, τ, r *и* h.

В заключении излагаются итоги проведенного исследования, даются рекомендации по использованию полученных результатов, отмечаются дальнейшие перспективы разработки данной темы.

Автор искренне благодарен своему научному консультанту доктору физико–математических наук профессору Андрею Андреевичу Шкаликову за постоянную поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

[1] А. М. Савчук О собственных значениях и собственных функциях оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом // Математические заметки. – 2001. – Т. 69. - №. 2. – С. 277-285.

[2] A. M. Savchuk Sturm-Liouville operators with singular potentials // Journal of Mathematical Sciences. – 2007. – V. 144. - № 4. – P. 4264-4266.

[3] А. М. Савчук Метод отображений в обратных задачах Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. – 2008. – Т. 261. – С. 243-248.

[4] А. М. Савчук Система Дирака с потенциалом из пространств Бесова // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52. – №. 4. – С. 454-469.

[5] А. М. Савчук Восстановление потенциала оператора Штурма–Лиувилля по конечному набору собственных значений и нормировочных чисел // Математические заметки. – 2016. – Т. 99. – №. 5. – С. 715-731.

[6] А. М. Савчук Оператор типа Кальдерона—Зигмунда и его связь с асимптотическими оценками для обыкновенных дифференциальных операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2017. – Т. 63. – №. 4. – С. 689-702.

[7] А. М. Савчук О базисности системы собственных и присоединенных функций одномерного оператора Дирака // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2018. – Т. 82. – №. 2. – С. 113-139.

[8] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. - 1999. - Т. 66. -№. 6. - С. 897-912.

[9] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами — распределениями // Труды Моск. мат. общ. - 2003. - Т. 64. - С. 159-219.

[10] A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov Inverse problem for Sturm–Liouville operators with distribution potentials: Reconstruction from two spectra // Russian Journal of Mathematical Physics. - 2005. - V. 12. - No. 4. - P. 507-514.

[11] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // Функц. анализ и его прил., 2010, том 44, выпуск 4, 34–53.

[12] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов Об интерполяции аналитических отображений // Математические заметки. – 2013. – Т. 94. – №. 4. – С. 578-581.

[13] A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov The Dirac Operator with Complex–Valued Summable Potential // Mathematical Notes. - 2014. - V. 96. - No. 5. - P. 3–36.

[14] *А. М. Савчук, И. В. Садовничая* Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом // Современная математика. Фундаментальные направления. 2015. Т.58. С. 128–152.

Прочие публикации автора в журналах из списка ВАК

[15] А. М. Савчук Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ–потенциалом // УМН, 55:6 (336) (2000), 155–156.

[16] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов Формула следа для оператора Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки, Т. 68, No. 3, 2000, С. 427–442.

[17] М. И. Нейман-заде, А. М. Савчук Операторы Шредингера с сингулярными потенциалами // Тр. МИАН, 2002, том 236, 262–271.

[18] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов О собственных значениях оператора Штурма—Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева // Матем. заметки, 80:6 (2006), 864–884.

[19] А. М. Савчук, А. А.Шкаликов О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма–Лиувилля // Труды МИАН им. В. А. Стеклова, 260 (2008), 227–247.

[20] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов Равномерная устойчивость обратной задачи Штурма–Лиувилля по спектральной функции в шкале соболевских пространств // Теория функций и уравнения математической физики, Тр. МИАН, 283, МАИК, М., 2013, 188–203.

[21] А. М. Савчук, И. В. Садовничая Асимптотические формулы для фундаментальных решений системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 5. С. 573–584.

[22] Т. Каппелер, А. М. Савчук, П. Ж. Топалов, А. А. Шкаликов Интерполяция нелинейных отображений // Математические заметки, 96(6), (2014), 896-904.

[23] A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov Recovering of a potential of the Sturm–Liouville problem from finite sets of spectral data // Spectral Theory and Differential Equations, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 233, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, 211–224.

[24] А. М. Савчук, И. В. Садовничая Базисность Рисса из подпространств для системы Дирака с суммируемым потенциалом // Доклады Академии наук. Наука, 2015. – Т. 462. – №. 3. – С. 274-277.

[25] А. С. Иванов, А. М. Савчук След порядка (-1) для струны с сингулярными весом // Матем. заметки, 102:2 (2017), 197–215.

[26] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси // Функц. анализ и его прил., 51:1 (2017), 82–98.

[27] Савчук А. М., Садовничая И. В. Равномерная базисность системы корневых векторов оператора Дирака // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2018. – Т. 64. – №. 1. – С. 180-193.

Прямые и обратные спектральные задачи для оператора Штурма–Лиувилля и системы Дирака

А. М. Савчук

Аннотация

В диссертации изложены полученные автором новые результаты в спектральной теории операторов Штурма–Лиувилля, одномерной системы Дирака и обыкновенных дифференциальных операторов высокого порядка. Даны определения операторов с коэффициентами — распределениями определенного порядка сингулярности и операторов в пространстве вектор–функций с суммируемыми коэффициентами. Для таких операторов определен класс регулярных по Биркгофу краевых условий. Изучено асимптотическое по спектральному параметры поведение матрицы фундаментальных решений. В случае оператора Штурма–Лиувилля и системы Дирака получены результаты об асимптотическом поведении собственных значений, собственных функций, резольвенты. Доказаны результаты об условной и безусловной базисности системы собственных и присоединенных функций в различных шкалах пространств. Для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом — распределением изучены несколько обратных спектральных задач. Доказана равномерная устойчивость решений этих задач, доказаны оценки погрешности и определен порядок сходимости аппроксимаций при восстановлении потенциала по конечному набору спектральных данных.

Spectral and inverse spectral problems for Sturm–Liouville operator and Dirac system

A. M. Savchuk

Abstract

In his doctoral thesis the author presents new results in spectral theory of Sturm-Liouville operator, 1D Dirac system and ordinary differential operators of high order. The work gives definitions of operators with coefficients — distributions of cerrain order of singularity and differential operators in space of vector–functions with summable coefficients. For such operators the author defines Birkhoff regular boundary conditions. The author also succesfully investigates high–energy asymptotic behavior of fundamental matrix. For Sturm–Liouville and Dirac operator are obtained asymptotic formulae for eigenvalues, eigenfunctions and for resolvent operator. The results of Riesz and Shauder basicity in different functional spaces for the system of eigen and associated functions are prooved. For Sturm–Liouville operator with potential — distribution the author investigates several inverse spectral problems. The results of uniform stability for these inverse problems are obtained and the errors and rate of convergence of approximations in the problem of reconstructing the potential by finite sets of spectral data are estimated.