

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

На правах рукописи

Тютюнник Анастасия Александровна

**Символьно-численное исследование векторной модели
волноводного распространения электромагнитного
излучения**

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Научный руководитель,
доктор физико-математических
наук, профессор
Севастьянов Л. А.

Москва – 2018

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Модели закрытых и открытых волноводов.....	19
1.1. Закрытые волноводы	19
1.2. Общие принципы дискретизации непрерывных моделей закрытого волновода	22
1.3. Конечномерная аппроксимация непрерывной модели волновода	23
1.3.1. Конечномерная аппроксимация скалярной модели по методу Галеркина	26
1.3.2. Конечномерная аппроксимация по методу конечных элементов.....	28
1.3.3. Сравнение неполного метода Галеркина и метода конечных элементов	29
1.4. Распространение монохроматического излучения по регулярному волноводу	30
1.5. Спектральная задача теории волноводов	32
1.5.1. Постановка задачи	32
1.5.2. Теорема о разложении по нормальным модам	33
1.5.3. Классификация нормальных мод	35
1.6. Задача о волноводной дифракции	37
1.6.1. Постановка задачи дифракции	37
1.6.2. Консервативность дискретизации.....	43
1.6.3. Разрешимость задачи волноводной дифракции.....	46
1.6.4. Задача дифракции как задача о ЛОДУ с выделенными переменными ...	48
1.6.5. Обоснование конечномерной аппроксимации.....	51
1.6.6. Численные методы решения задачи дифракции.....	52

Глава 2. Запись уравнений Максвелла при помощи четырех скалярных уравнений.....	54
2.1. Исключение продольных компонент из системы уравнений Максвелла	54
2.2. Частный случай, когда система распадается на два скалярных уравнений Гельмгольца.....	58
2.3. Слабая постановка задачи об отыскании потенциалов в общем случае	59
2.4. Сведение системы уравнений Максвелла к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.....	65
Глава 3. Спектральная задача	67
3.1. Конечномерная аппроксимация бесконечномерной системы.....	67
3.2. Постановка задачи приближенного отыскания нормальных мод.....	68
3.3. Символьно-численный алгоритм приближенного отыскания нормальных мод	69
3.3.1. Символьный расчет элементов матриц	70
3.3.2. Численный расчет собственных значений и собственных векторов.....	76
3.4. Вычисление нормальных мод квадратных волноводов с прямоугольной вставкой.....	81
3.4.1. Анализ символьной структуры матриц.....	81
3.4.2. Численный расчет нормальных мод квадратного волновода с прямоугольной вставкой	83
3.4.3. Численный анализ сходимости собственных значений и собственных функций	88
3.4.4. Верификация метода (сравнение с полым волноводом)	91
3.5. Модель «ящика Дирихле» приближенного описания открытых волноводов	94
3.5.1. Численный расчет нормальных мод открытых трехслойных волноводов в «ящике Дирихле».....	96
3.5.2. Численный анализ сходимости собственных значений и собственных функций	104
3.6. Верификация метода (сравнение с открытым трехслойным волноводом) ..	107

3.7.	Анализ численных результатов	108
Глава 4.	Постановка задачи дифракции.....	111
4.1.	Задача дифракции на стыке двух волноводов.....	111
4.2.	Постановка задачи дифракции в приближении распространяющихся мод.....	114
4.3.	Численный анализ задачи дифракции на стыке открытых планарных волноводов в «ящике Дирихле»	115
4.4.	Верификация метода решения задачи дифракции на стыке открытых планарных волноводов в «ящике Дирихле».....	120
4.5.	Постановка задачи дифракции на линзе.....	123
4.6.	Верификация метода решения задачи дифракции на волноводной линзе.....	131
4.7.	Анализ результатов.....	133
Заключение	136
Литература.....	139

Введение

Общая характеристика работы

В диссертации предложен и обоснован метод численного моделирования волноводного распространения электромагнитного излучения в волноводах, заполненных неоднородным веществом, основанный на представлении электромагнитного поля при помощи четырех потенциалов. Это представление было предложено в серии наших работ, выполненных совместно с Д.В. Диваковым, М.Д. Малых и Л.А. Севастьяновым [6, 116-118, 128], на пути обобщения классических результатов Тихонова А.Н. и Самарского А.А. [1-4], посвященных описанию поля волновода, заполненного однородным веществом.

В настоящей работе на основе введения потенциалов построен метод, позволяющий в случае произвольного заполнения волновода приближенно вычислить моды такого волновода. Система уравнений Максвелла в рамках предложенного метода преобразуется к эквивалентной системе уравнений в частных производных, которая, благодаря введению четырех скалярных функций, редуцируется к системе дифференциальных уравнений относительно введенных функций. Показано, что введенные скалярные потенциалы, пара из которых удовлетворяет условиям Дирихле, а пара – условиям Неймана, позволяют однозначно определить электромагнитное поле в рассматриваемой структуре. С помощью описанного метода формулируется краевая задача для системы уравнений в частных производных с классическими условиями Дирихле и Неймана.

Используя векторный аналог неполного метода Галеркина, предложенного Свешниковым А.Г. [5] для построения приближенного решения волноводных задач, можно сформулировать задачу о численном отыскании нормальных мод рассматриваемого класса волноводов как алгебраическую задачу на собственные значения. Предложенный метод позволяет также сформулировать задачи волноводной дифракции в различных

волноводных структурах, таких как волноводные стыки и волноводы с протяженными нерегулярностями. При реализации метода четырех потенциалов удастся использовать инструментарий символьных вычислений, позволяющий исследовать структуру получаемых в задаче матриц в аналитическом виде и ускорить ряд вычислительных процедур, заменив численное интегрирование символьным.

Актуальность темы

Изначально моделирование распространения волноводных мод по закрытым волноводам выполнялось для нужд проектирования каналов передачи СВЧ излучения. Закрытые волноводы, заполненные неоднородным веществом, в первую очередь волноводы с диэлектрическим сердечником (жилой, англ. «core») активно используются в радиофизике еще с середины прошлого века. Однако моделирование распространения волн по таким волноводам обычно приводится в рамках скалярной модели и, более того, маломодового приближения. Того рода моделирование, выполненное на физическом уровне строгости, позволяет грубо прикинуть параметры основных волноводных мод и перераспределение поля по модам при прохождении через нерегулярности. Однако эти модели не предлагают никакой оценки точности своих предсказаний, оставляя открытым и вопрос о количественной характеристике допустимости пренебрежения векторным характером поля, и вопрос о числе учитываем мод. В 1990-х годах в распоряжении инженеров появились новые материалы и мета- материалы, что позволяет на данном этапе создавать волноводы, диэлектрическая проницаемость которых имеет произвольный профиль или даже мелкую фрактальную структуру [6]. Нет никаких оснований считать, что при моделировании распространения волн по таким структурам можно пренебрегать векторным характером поля, поэтому исследование полной

векторной модели волновода, заполненного неоднородным веществом, становится все более и более актуальной задачей.

С середины прошлого века активно начало развиваться направление интегральной оптики. Этот раздел современной оптики направлен на изучение процессов генерации, распространения и преобразования оптических волн в тонкопленочных диэлектрических волноводах. Важнейшей задачей интегральной оптики является разработка методов проектирования и интеграции оптических и оптоэлектронных волноводных элементов, позволяющих эффективно управлять световыми потоками. Поэтому развитие интегральной оптики направлено на расширение функциональных возможностей и миниатюризацию оптических и оптоэлектронных устройств, что позволит на принципиально новом уровне проектировать различные приборы на основе оптических элементов.

На основе оптических волноводов проектируются оптические линии связи, системы оптической обработки информации, интегрально-оптические датчики и сенсоры, позволяющие получать различную информацию о состоянии систем.

В настоящее время появляются новые материалы и технологии, позволяющие создавать новые элементы интегральной оптики, что приводит к необходимости создания новых методов исследования оптических устройств. При этом развитие вычислительной техники привело к тому, что сейчас в распоряжении у исследователей имеются высокопроизводительные компьютеры, позволяющие ускорить процесс обработки данных измерений и численного моделирования. Поэтому появилась возможность разработки и создания новых методов, позволяющих проектировать новые типы интегрально-оптических устройств с улучшенными характеристиками и параметрами.

На сегодняшний день хорошо изучены и описаны скалярные модели волноводов, в которых рассматривается двумерная структура волновода. Однако для элементов интегрально-оптических устройств, линейные размеры

которых сопоставимы с длиной волны, двумерная модель является очень грубой и не дает полного представления о поведении электромагнитного поля в данных устройствах. Использование приближенной двумерной теории справедливо только для слабо направляющих структур и не подходит для описания нерегулярных оптических волноводов, у которых, диэлектрическая проницаемость функционально зависит от всех трех пространственных координат. К последним относится и целый ряд волноводов, используемых для создания интегрально-оптических химических сенсоров. Перечисленные выше вопросы исследовались в работах сотрудников и выпускников кафедры радиофизики РУДН [7-16].

Одним из важнейших элементов, исследуемым в интегральной оптике, является волноводная линза Люнеберга. На ее основе проектируется анализатор спектра радиочастот, работающий в реальном масштабе времени. При этом линза плавно нерегулярна по трем направлениям, и к ней плохо применимо скалярное двумерное приближение. Поэтому для моделирования прохождения электромагнитного излучения через линзу Люнеберга необходимо решать векторную задачу.

В таких устройствах сопряжения, как линзы, призмы, разветвители, связывающих различные элементы в единую интегрально-оптическую схему, основной задачей является согласование электромагнитного поля в сопрягаемых элементах. От согласования между полями падающей волны и волноводной моды существенно зависит эффективность передачи энергии через устройства сопряжения. Следовательно, для решения задачи эффективной передачи энергии необходимо знать представление согласуемых полей. И чем точнее будет известен вид полей, тем успешнее будет решена задача. Таким образом, разработка и исследование векторной модели волновода является актуальной задачей на текущий момент.

Основы теории плавно-нерегулярных трехмерных интегрально-оптических волноводов были разработаны в работах [17-48]. В этих работах для описания связи направляемых мод на плавно-нерегулярных участках

рассматриваемых волноводов была предложена модель адиабатических мод, позволяющая решить проблему эффективной передачи энергии в устройствах сопряжения в интегрально-оптических схемах.

Попытка рассматривать открытый волновод как структуру в \mathbb{R}^3 , часто встречающаяся в радиофизической литературе [49,50], приводит к необходимости обобщения теорема о разложении поля по нормальным модам на системы имеющие непрерывный спектр. В теории это означает, что сумму в этом разложении, равно как и в парциальных условиях излучения предстоит заменить на интеграл по непрерывному спектру. Это превращает задачу о волноводной дифракции в весьма плохо изученную задачу, корректность которой к настоящему моменту не изучена. Более того, любой численный метод решения этой задачи неизбежно требует дискретизации интегралов по непрерывному спектру.

При моделировании распространения направляемых мод по открытому волноводу в оптическом диапазоне естественно принять, что поле на расстоянии нескольких длин волн от границы такого волновода равно нулю. Поэтому, поместив открытый волновод в ящик Дирихле, мы получим приближенную модель открытого волновода, на что впервые указал А.Г. Свешников [51-53]. Модель открытый волновод в ящике была предметом исследований диссертации на соискание степени кандидата физико-математических наук Дивакова Д.В. [54], где было показано, что эта модель является корректной математической моделью, описывающей распространение волноводных мод. Применимость этой модели можно количественно описать, сравнив результаты, получающиеся при разном удалении стенок ящика от границы волновода. Безусловным недостатком модели «волновод в ящике» является чрезмерная канализация энергии, вытекающей из волноводов, в направлении оси волновода. Это не существенно для моделирования распространения волноводных мод, но важно, например, для задач о вытекании энергии из такого волновода через открытый торец.

Модель «волновод в ящике» дает естественную дискретизацию этих сумм и фактически является единственной корректной моделью, описывающей волноводную дифракцию в открытых оптических системах.

Таким образом, область применения модели закрытого волновода много шире классических задач о распространении радиоволн, поскольку модель закрытого волновода используется и при моделировании открытых волноводящих систем, то есть являются одной из важнейших моделей волноводной и интегральной оптики.

Исследование векторной модели распространения волноводных мод было начато в ставших уже классическими работах А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [1-4]. В этих работах был рассмотрен полый волновод постоянного сечения и показано, что электромагнитное поле в таком волноводе может быть описано при помощи двух скалярных потенциалов — функций Боргниса [65]. С их помощью была построена система собственных мод волновода и как следствие теоремы Стеклова строго доказано, что всякое монохроматическое поле в таком волноводе является суперпозицией нормальных мод. Для построения базиса из нормальных мод требуется решить две скалярные задачи на собственные значения для оператора Лапласа, первая — с условиями Дирихле на границе волновода, вторая — с условиями Неймана.

Перенести прямо теорию функций Боргниса на случай волновода, внутрь которого вставлен один или несколько сердечников, не удалось. Теорема о полноте системы нормальных мод стала предметом серии работ Краснушкина П.Е., Моисеева Е.И., Смирнова Ю.Г., Боголюбова А.Н., Делицына А.Л. и Малых М.Д., выполненных в 1990-2000-х годах, разработке программного обеспечения для вычисления нормальных мод таких волноводов был посвящен ряд исследований, в том числе Боголюбова А.Н., Делицына А.Л. и Едакиной Т.В. в РФ, Лазара и Девидсона в рамках Fenics Project за рубежом. При расчете полей потенциалы не вводились, а сами

компоненты электромагнитного поля рассматривались как искомые в спектральной задаче теории волноводов. При таком подходе задача об отыскании нормальных мод волновода записывается как задача на собственные значения с бесконечным ядром, что приводит к ряду вычислительных трудностей, главной из которых следует назвать возникновение нефизических мод, так называемых «духов».

В наших работах [6, 116, 117, 128] было предложено обобщить теорию, развитую Тихоновым и Самарским, путем развития теории функций Боргна. Для рассмотрения волноводов, диэлектрическая и магнитная проницаемости которых не являются постоянными, мы предлагаем увеличить число потенциалов с двух до четырех. Это позволяет сохранить важнейшие свойства потенциалов — их принадлежность пространствам Соболева и, следовательно, удобство их аппроксимации в рамках проекционных методов. Этот подход открывает новые, почти не исследованные перспективы в исследовании полной векторной модели, причем как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Объект моделирования

Объектом теоретического рассмотрения выступает распространение электромагнитного излучения в классе волноводов произвольного поперечного сечения S с условиями идеальной проводимости на границе ∂S с произвольными диэлектрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon > 0, \mu > 0$, причем заполнение и поперечное сечение постоянны по z .

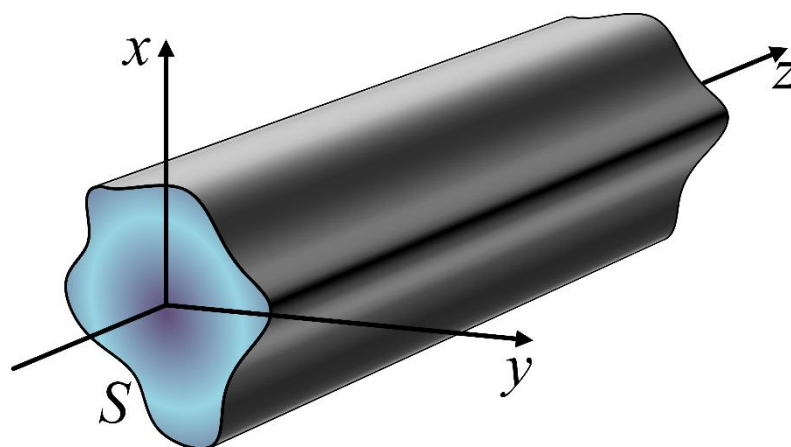


Рисунок 1. Геометрия рассматриваемых волноводов

Объектом численного моделирования выступает распространяющееся электромагнитное излучение в закрытых волноводах прямоугольного поперечного сечения с различным заполнением, а также дифракция электромагнитного излучения на волноводных стыках и в волноводах с плавной нерегулярностью по z .

Предмет исследования – математическая модель распространения поляризованного электромагнитного излучения в волноводах с учетом векторного характера излучения. В классе волноводных структур нерегулярных в направлениях Oy и Oz уравнения Максвелла не распадаются на две независимые подсистемы для TE - и TM -мод, поэтому в таком случае нужно рассматривать систему, учитывающую векторный характер электромагнитного поля.

Цель диссертационной работы

На основе представления электромагнитного поля при помощи четырех потенциалов разработать метод исследования распространения волноводных мод в волноводах, диэлектрическая проницаемость которых описывается произвольной кусочно-постоянной функцией в многомодовом режиме, и исследовать состоятельность этого метода путем проведения серии численных экспериментов.

Задачи диссертационной работы

Исследование состоятельности метода не требует создания универсального комплекса программ, пригодного для волноводов с произвольным сечением. Поэтому для достижения цели диссертации было решено ограничить численные эксперименты исследованием волноводов прямоугольного сечения. Это обстоятельство не должно существенным образом влиять на состоятельность самого метода, но существенно упрощает применение неполного метода Галеркина, базис которого в случае волноводов прямоугольного сечения описывается при помощи тригонометрических функций. Исследование волновода круглого сечения требует работы с функциями Бесселя и на первом этапе исследования метода не проводится.

Поэтому для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- разработать метод вычисления нормальных мод закрытых волноводов в векторной постановке на основе сочетания представления электромагнитного поля при помощи четырех потенциалов и неполного метода Галеркина;
- составить на его основе алгоритм вычисления нормальных мод закрытых волноводов прямоугольного сечения с прямоугольными диэлектрическими вставками, реализовать его в виде программного комплекса;
- оптимизировать этот алгоритм путем инкорпорации в численные расчеты символьных преобразований, заменив многократные численные расчеты интегралов от быстро осциллирующих функций однократными символьными вычислениями;
- провести серию численных экспериментов и исследовать состоятельность предложенного метода вычисления нормальных мод, в том числе убедиться в сходимости метода Галеркина, состоятельности комплекса программ для

вычислений, провести сравнение результатов экспериментов с уже известными результатами;

- провести серию численных экспериментов и исследовать состоятельность предложенного метода в задачах дифракции на стыке двух волноводов, для чего разработать и реализовать в виде программного комплекса алгоритм решения задачи дифракции на стыке планарных интегрально-оптических волноводов;
- провести серию численных экспериментов и исследовать состоятельность предложенного метода в задачах дифракции на протяженном теле, помещенном внутрь волновода, для чего разработать и реализовать в виде программного комплекса алгоритм решения задачи дифракции на диэлектрическом теле, помещенном в планарный волновод.

Методы исследований

- *векторный аналог неполного метода Галеркина* решения задачи дифракции волноводной моды на стыке двух волноводов и на протяженной нерегулярности;
- *методы символьного интегрирования, дифференцирования, упрощения символьных выражений, встроенные в систему компьютерной алгебры Maple* для исследования уравнений исследуемой модели;
- *QR-алгоритм, встроенный в библиотеку LinearAlgebra системы компьютерной алгебры Maple* для численного отыскания собственных значений и собственных векторов квадратных матриц;
- *LU-разложение, встроенное в библиотеку LinearAlgebra системы компьютерной алгебры Maple* для численного решения систем линейных алгебраических уравнений;

Научная новизна

Обобщение теории функций Борнуса, то есть представление электромагнитного поля при помощи четырех потенциалов, было предложено совсем недавно – в 2017г. Этот подход позволяет предложить новый метод вычисления нормальных мод волновода с диэлектрическими вставками, в настоящем диссертационном исследовании этот метод разрабатывается и реализуется в виде комплекса программ впервые.

Этот метод обладает рядом очевидных достоинств по сравнению со стандартными методами, предлагающими проводить прямые расчеты компонент электромагнитных полей, поскольку он свободен от нефизических мод («духов») и удобен для реализации как в системах компьютерной алгебры, так и в системах, основанных на методе конечных элементов. Перспективы и состоятельность этого метода исследуются в этой диссертационной работе впервые.

Практическая значимость

Полученные в диссертации результаты используются в учебном процессе при подготовке магистров направлений «Прикладная математика и информатика» и «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Разработанный в работе программный комплекс можно использовать для верификации результатов численного моделирования волноводного распространения другими методами, а также для решения прикладных задач, связанных с проектированием интегрально-оптических волноводов.

Основные положения, выносимые на защиту

- На основе неполного метода Галеркина и метода четырех потенциалов предложен метод конечномерного приближения бесконечномерной системы дифференциальных уравнений.

- На основе предложенного метода разработан символьно-численный алгоритм приближенного вычисления нормальных мод регулярных волноводов с кусочно-постоянным заполнением.
- На основе предложенного метода разработан символьно-численный алгоритм приближенного решения задачи дифракции на стыке закрытых и планарных интегрально-оптических волноводов.
- На основе предложенного метода разработан символьно-численный алгоритм приближенного решения задачи дифракции на протяженных нерегулярностях в интегрально-оптических волноводах.

Обоснованность и достоверность полученных результатов

Обоснованность результатов следует из использования строгой модели, учитывающей векторный характер распространения электромагнитного поля. В работе доказана эквивалентность полученной модели уравнениям Максвелла.

Численные расчеты, проведенные в рамках работы, опираются на точные символьные выражения, полученные в системе компьютерной алгебры: расчет интегралов от быстро осциллирующих функций проводился в символьном виде. Численный расчет собственных значений и собственных векторов матриц больших размеров осуществлялся встроенными средствами системы компьютерной алгебры, обеспечивающими точность расчета, близкую к компьютерной.

Достоверность результатов исследования вытекает из совпадения полученных автором численных результатов с аналитически известными результатами для модельных структур, а также из совпадения результатов автора диссертации с аналогичными результатами, полученными другими авторами.

Апробация результатов

Основные результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях:

- Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и информатики» (МРАМCS'2014). Дубна, 25–29 августа 2014 г.
- Всероссийской конференции «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем». Москва, РУДН, 22–25 апреля 2014 г.
- Научная сессия НИЯУ МИФИ-2014. Москва, МИФИ, 27 января – 01 февраля 2014 г.
- Международная конференция «18th Workshop on Computer Algebra DUBNA-2015». Дубна 25 – 27 мая 2015 г.
- Всероссийская конференция «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем». Москва, РУДН, 20–24 апреля 2015 г.
- Научная сессия НИЯУ МИФИ-2015. Москва, МИФИ, 16–20 февраля 2015 г.
- Международная конференция «International Conference on Mathematical Modeling and Computational Physics» (ММСР'2015). StaraLesna, Словакия, 13–17 июля 2015 г.
- Международная научная конференция «Компьютерная алгебра». Москва, 29 июня – 2 июля 2016 г.
- Всероссийская конференции «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем». Москва, РУДН, 18–22 апреля 2016 г.
- Симпозиум международных научных конференций «Оптика и биофотоника IV» (SFM'2016). Саратов, СГУ, 27–30 сентября 2016 г.
- VI Международная конференция «Проблемы математической физики и математическое моделирование». Москва, НИЯУ МИФИ, 25–27 мая 2017 г.

- Симпозиум: Оптика и биофотоника 2017 (SFM 2017). Саратов, СГУ, 26 – 29 сентября 2017 г.
- The International Conference «Mathematical Modeling and Computational Physics, 2017» (ММСР 2017). Дубна, Россия, 3–7 июля 2017 г.
- The 7th International Conference on Engineering Mathematics and Physics (ICEMP 2018), Прага, Чешская республика, 15–18 июня 2018 г.
- 21st International Conference, DCCN 2018, Москва, Россия, 17–21 сентября, 2018 г.

Основные результаты диссертационной работы докладывались на следующих семинарах:

- Семинар «Компьютерная алгебра» факультета ВМК МГУ и ВЦ РАН, 27 декабря 2017 г.
- Московский научный семинар «Интегральная оптика и волноводная оптоэлектроника» Московского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова, 28 июня 2018 г.
- Научный семинар «Проблемы современной математики», МИФИ, 1 ноября 2018 г.
- Научный семинар «Математическое моделирование», РУДН, 13 ноября 2018 г.
- Семинар по вычислительной и прикладной математике, Лаборатория информационных технологий, ОИЯИ, Дубна, 16 ноября 2018 г.

Глава 1. Модели закрытых и открытых волноводов

1.1. Закрытые волноводы

Под *закрытым волноводом* в самом широком смысле этого слова понимают область в \mathbb{R}^2 или \mathbb{R}^3 , имеющую выделенную ось, и набор функций, характеризующих заполнение этой области веществом. Такие области используют для создания волн, бегущих вдоль выделенного направления – оси волновода [55].

Наличие оси следует понимать в том смысле, что в некоторой, вообще говоря, криволинейной системе координат область может быть описана как полоса или цилиндр постоянного сечения и некоторой, весьма значительной относительно диаметра сечения высоты. При этом волновод называют *регулярным*, если заполнение не меняется вдоль оси. Обычно в качестве оси принимают координатную линию для последней переменной, поэтому в плоских задачах осью волновода служит линия $x_1 = 0$, а в трехмерных – линия $x_1 = x_2 = 0$. В задачах, которые будут рассмотрены ниже, всегда используется декартова система координат, в которой ось волновода совпадает с осью Oy в двумерном случае и осью Oz в трехмерном.

В настоящей работе будут рассматриваться только электромагнитные волны, хотя развиваемые в ней методы могут быть приспособлены и к расчету акустических волноводов. В зависимости от подхода к описанию поля непрерывные математические модели закрытых волноводов делятся на два класса – скалярные и векторные.

Наиболее естественный подход к описанию электромагнитного поля состоит в использовании уравнений Максвелла, что приводит к *векторной модели волновода*. Для задания заполнения волновода в этой модели используют две функции – диэлектрическую проницаемость ε и магнитную проницаемость μ . Вообще говоря, эти величины могут быть тензорами. Однако на практике волноводы заполняют одним или несколькими

диэлектриками, для которых эти величины положительны и постоянны. Поэтому заполнение описывается кусочно-постоянными функциями, принимающими положительные значения. Если внутрь волновода вставлено много различных диэлектриков с близкими ε , то для описания заполнения можно аппроксимировать ступенчатую функцию ε гладкой. Такой подход был особенно популярен в прошлом веке, когда стремились получить выражение для полей в символьном виде. Развитие теории и практики создания новых материалов и мета-материалов позволяет думать, что в будущем этот класс будет весьма существенно расширен. Следует также заметить, что для описания диссипативных свойств заполнения используют малые мнимые добавки к этим функциям.

Под электромагнитным полем в трехмерном волноводе $S \times [a, b]$ понимают пару векторов \vec{E}, \vec{H} , удовлетворяющих:

- уравнениям Максвелла внутри волновода всюду, кроме поверхностей разрыва заполнения,
- условиям идеальной проводимости на стенках волновода $\partial S \times [a, b]$.
- условиям сопряжения на поверхностях разрыва заполнения.

В декартовой системе координат эти условия могут быть записаны так.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \vec{H} &= -ik_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = ik_0 \mu \vec{H}, \\
 \vec{E}_\perp \times \vec{n} \Big|_{\partial S} &= \vec{0}, \quad \vec{H}_\perp \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S} = 0, \quad E_z \Big|_{\partial S} = 0, \\
 [\vec{E}_\tau] \Big|_S &= 0, \quad [\vec{H}_\tau] \Big|_S = \vec{j}^{ПОВ}, \\
 [\mu H_n] \Big|_S &= 0, \quad [\varepsilon E_n] \Big|_S = \rho^{ПОВ}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Этот подход вытекает из общих положений предметной области – классической электродинамики и поэтому не требует какого-либо дальнейшего обоснования в рамках математического моделирования. Именно он и будет использоваться в настоящей работе.

Применение векторных моделей осложнено необходимостью создания алгоритмов их численного анализа, существенно выходящих за рамки

классических методов математической физики, ориентированных на скалярные задачи. Поэтому большое распространение получили скалярные модели, в рамках которых «пренебрегают векторным характером электромагнитного поля», как емко выразился А. Зоммерфельд в своей знаменитой «Опике» [56].

Для задания заполнения волновода в рамках *скалярной модели* используют одну функцию – положительнозначную функцию q , а под полем в волноводе $S \times [a, b]$ понимают скаляр u , удовлетворяющий:

- волновому уравнению,
- условию Дирихле или Неймана на стенках волновода $\partial S \times [a, b]$,
- условиям непрерывности u и ее нормальной производной на поверхностях разрыва заполнения.

В декартовой системе координат эти условия могут быть записаны так.

$$\begin{aligned} \Delta u + \frac{q}{c^2} u_{tt} &= 0, \\ u|_{\partial S} &= 0 \quad (\nabla u \cdot n|_{\partial S} = 0), \\ [u] &= [\nabla u \cdot n] = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Этот подход не вытекает из общих законов электродинамики и поэтому его применение всегда требует обсуждения. Наиболее обоснованным является применения этой модели для исследования некоторых классов волн, распространяющихся по планарным волноводам; мы рассмотрим эту модель открытого волновода ниже. Трехмерные скалярные волноводы используются не столько для реальных расчетов, сколько для развития новых методов анализа более сложной векторной модели. Так, например, неполный метод Галеркина был сначала описан А.Г. Свешниковым для скалярного случая [52], а затем обобщен на векторный [53]. На наш взгляд, численные методы анализа закрытых скалярных волноводов хорошо развиты, поэтому в настоящей

работе уделено основанное внимание перенесению этих методов на векторный случай.

В теории волноводов рассматривают две основные задачи:

1. Спектральная задача позволяет описать распространение волн по регулярному участку волновода,
2. Задача дифракции позволяет описать прохождение и отражение волн на нерегулярности в волноводе.

При строго математическом изложении следовало бы сформулировать эти задачи, а лишь затем обсуждать методы приближенного решения этих задач. Однако в основе этих методов лежит общий принцип дискретизации непрерывных моделей, который можно изложить в общем виде, абстрагируясь от конкретной задачи. Поэтому в нашем изложении мы сначала опишем дискретные модели закрытых волноводов, а затем перейдем к постановке и исследованию названных задач. При этом теоремы о разрешимости задач в рамках непрерывной или дискретной моделей идентичны, но в рамках дискретной модели доказываются они значительно проще.

1.2. Общие принципы дискретизации непрерывных моделей закрытого волновода

Как отмечалось выше, в теории волноводов изучают волны, бегущих вдоль выделенного направления – оси волновода. В трехмерном регулярном волноводе под бегущей вдоль оси волной понимают волну вида

$$u = u(x, y, z - vt), \quad (3)$$

где v – постоянная величина, характеризующая скорость распространения волны. Если $v > 0$, то говорят, что волна бежит по направлению оси Oz , в противном случае, говорят, что волна бежит против направления оси Oz .

Регулярный волновод представляет собой прямое произведение $S \times [a, b]$. Форма искомого решения указывает на то, что переменные x, y, z, t следует разделить на две группы: пара (x, y) – точка на сечении S волновода,

а пара (z, t) – точка на произведении $[a, b] \times [0, \infty)$. Область $[a, b] \times [0, \infty)$ допускает разделение переменных, а область S , вообще говоря, нет. Поэтому зависимость полей именно от переменных x, y невозможно описать аналитически. Это означает, что в волноводных задачах (как и во всех задачах с выделенной осью) естественно проводить дискретизацию по сечению.

Безотносительно от того, рассматривается ли скалярная или векторная модель, эту процедуру можно описать так.

1. Выяснить, какому функциональному пространству принадлежит поле в рамках той или иной модели, интерпретировав граничные условия сопряжения на разрывах как условия принадлежности к этому функциональному пространству.

2. Выбрать конечномерное подпространство этого пространства, в которое должно помещаться большая по норме часть искомого поля.

3. Спроектировать дифференциальные уравнения (уравнения Максвелла или волновое уравнение) на это подпространство по методу усечения.

Модель, получающуюся при такой дискретизации непрерывной модели, будем называть *конечномерной моделью волновода*.

1.3. Конечномерная аппроксимация непрерывной модели волновода

Поле в волноводе $S \times [a, b]$, заполнение которого характеризуется функцией $q(x, y, z)$, удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta u + \frac{q}{c^2} u_{tt} = 0 \text{ на } S \times [a, b], t \in T, \quad (4)$$

и краевым условиям, примем для определенности, что эти условия – условия Дирихле

$$u = 0 \text{ на } \partial S \times [a, b], t \in T. \quad (5)$$

Примем для простоты, что q – непрерывная функция и тогда условия на разрывах не нужны. Граничные условия указывают, что решение следует искать в пространстве Соболева $W_2^1(S)$.

Поскольку элементы этого пространства могут не иметь второй производной, требуется перейти к обобщенной записи волнового уравнения. С этой целью возьмем произвольную гладкую функцию $w(x, y)$, обращающуюся в нуль на границе области S . Умножая волновое уравнение на w и интегрируя по сечению S , получим

$$\iint_S (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) w dx dy + \iint_S \partial_z^2 u w dx dy = \frac{1}{c^2} \iint_S \partial_t^2 u w q dx dy. \quad (6)$$

После применения формулы Гаусса-Остроградского, это соотношение дает

$$\partial_z^2 \iint_S u w dx dy - \iint_S (\nabla_{\perp} u, \nabla_{\perp} w) dx dy = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \iint_S u w q dx dy. \quad (7)$$

Здесь появились три симметричные билинейные формы:

1. Форма

$$\iint_S u w dx dy, \quad (8)$$

которая представляет собой скалярное произведение в $L^2(S)$,

2. Форма

$$\iint_S (\nabla_{\perp} u, \nabla_{\perp} w) dx dy, \quad (9)$$

которая представляет собой скалярное произведение в $W_2^1(S)$,

3. Форма

$$\iint_S u w q(x, y, z) dx dy. \quad (10)$$

которая представляет собой еще одну положительно определенную форму, которую мы будем далее обозначать тоже буквой q , что не может быть источником двусмысленности.

Таким образом, в рамках непрерывной модели поле u в волноводе – элемент пространства Соболева $W_2^1(S)$, удовлетворяющий условию

$$\partial_z^2 \iint_S u w dx dy - \iint_S (\nabla_{\perp} u, \nabla_{\perp} w) dx dy = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \iint_S u w q dx dy \quad \forall w \in C_0^{\infty}(S). \quad (11)$$

Для дискретизации мы должны выбрать такое линейное подпространство H пространства Соболева, что величина

$$\min_{v \in H} \|u - v\|, \quad (12)$$

характеризующая возможность приближения поля элементами этого подпространства, достаточно мала. Выбрав пространство H , мы примем, что в рамках дискретной модели поле u в волноводе – элемент пространства H , удовлетворяющий условию

$$\partial_z^2 \iint_S u w dx dy - \iint_S (\nabla_{\perp} u, \nabla_{\perp} w) dx dy = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \iint_S u w q dx dy \quad \forall w \in H. \quad (13)$$

При таком подходе к дискретизации формулировки описания дискретной и непрерывной модели отличаются лишь выбором пространства – в непрерывной модели используется бесконечномерное пространство Соболева, а в ее дискретном аналоге – его конечномерное подпространство.

В действительности, самый тонкий и неформальный момент в дискретизации непрерывной модели – выбор конечномерного подпространства. Методы дискретизации волноводных задач как раз и отличаются выбором этого подпространства. При этом в основе всех этих методов лежит предположение о том, что в любой фиксированный момент времени t и на любом фиксированном сечении S поле представляет собой медленно меняющуюся функцию.

1.3.1. Конечномерная аппроксимация скалярной модели по методу Галеркина

Метод Галеркина основан на теореме Стеклова. Напомним, что собственные функции задачи

$$\begin{cases} \Delta v + \alpha^2 v = 0, \\ v|_{\partial S} = 0, \end{cases} \quad (14)$$

образуют ортонормированный базис пространства $L^2(S)$. Как обычно перенумеруем собственные значения в порядке возрастания и с учетом кратности. Согласно теореме Стеклова поле при фиксированных z и t можно разложить в ряд по собственным функциям

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z, t) v_n(x, y), \quad (15)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$u_n = \iint_S u(x, y, z, t) v_n(x, y) dx dy. \quad (16)$$

Этот ряд сходится по норме L^2 и даже пространства Соболева [57], однако вопрос о равномерности сходимости является более тонким; с уверенностью можно говорить о равномерной сходимости только для случая волноводов прямоугольного сечения [58].

Хорошо известно, что старшие собственные функции оператора Лапласа быстро осциллируют [59], поэтому при больших N должно быть верно

$$\iint_S u(x, y, z, t) v_n(x, y) dx dy \approx 0. \quad (17)$$

Поэтому можно надеяться на то, что, взяв N достаточно большим и натянув линейную оболочку на первые N собственных функций, мы можем с хорошей точностью приблизить поля элементами из конечномерного пространства

$$H = L(v_1, \dots, v_N). \quad (18)$$

Мы будем его решать исключительно в рамках численного эксперимента: увеличение N приводит к изменению искомым параметров поля, возникающее приращение мы будем считать оценкой точности вычислений.

Таким образом, в рамках дискретизации по неполному методу Галеркина скалярной модели волновода поле – это сумма

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z, t) v_n(x, y), \quad (19)$$

удовлетворяющая уравнениям

$$\partial_z^2 \iint_S u v_n dx dy - \iint_S (\nabla_{\perp} u, \nabla_{\perp} v_n) dx dy = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \iint_S u v_n q dx dy, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (20)$$

В базисе собственных функций оператора Лапласа, нормированных по норме L^2 , эти формулы можно упростить:

$$\iint_S u w dx dy = u_n, \quad (21)$$

$$\iint_S (\nabla_{\perp} u, \nabla_{\perp} v_n) dx dy = \alpha_n^2 u_n, \quad (22)$$

$$\iint_S u v_n q dx dy = \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm} u_m, \quad (23)$$

где

$$q_{nm}(z) = \iint_S q(x, y, z) v_n(x, y) v_m(x, y) dx dy. \quad (24)$$

Поэтому волновое уравнение можно записать в матричном виде

$$\partial_z^2 \vec{u} - A^2 \vec{u} = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 Q \vec{u}, \quad (25)$$

где A – диагональная матрица

$$A = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots). \quad (26)$$

А Q – матрица, элементами которой служат q_{nm} . Это означает, что скалярная дискретная модель волновода – система связанных волновых уравнений.

Замечание. В дальнейшем при использовании неполного метода Галеркина мы будем без лишних слов переходить от столбцов к функциям и обратно, например, от столбца \vec{u} к функции

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m v_m(x, y) \quad (27)$$

и обратно.

1.3.2. Конечномерная аппроксимация по методу конечных элементов

Метод конечных элементов предлагает использовать в качестве подпространства пространства Соболева пространство конечных элементов [60,61]. Выбор параметров сети определяется леммой Наттерера [62], согласно которой

$$\min_{v \in H} \|u - v\|_1 \leq ch \|u\|_2 \quad (28)$$

Здесь $\|u\|_n$ – норма в W_2^n , h – линейный размер треугольников сети, а константа c зависит от пропорций треугольников. Величина $\|u\|_2$ не зависит от сетки и поэтому для любого гладкого поля величина

$$\min_{v \in H} \|u - v\|_1 \quad (29)$$

может быть сделана произвольно малой уменьшением размера треугольников сети.

В рамках дискретизации по методу конечных элементов скалярной модели волновода поле – это линейная комбинация

$$u = \sum_{n=1}^N u_n(z, t) v_n(x, y), \quad (30)$$

коэффициенты которой удовлетворяют системе связанных волновых уравнений

$$\partial_z^2 A\vec{u} - B\vec{u} = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 Q\vec{u}, \quad (31)$$

Здесь коэффициенты матриц определяются формулами

$$\iint_S v_n v_m dx dy = a_{nm}, \quad (32)$$

$$\iint_S (\nabla_{\perp} v_n, \nabla_{\perp} v_m) dx dy = b_{nm}, \quad (33)$$

$$\iint_S v_n v_m q dx dy = q_{nm}. \quad (34)$$

Это означает, что и при этом подходе к дискретизации скалярная дискретная модель волновода – система связанных волновых уравнений.

1.3.3. Сравнение неполного метода Галеркина и метода конечных элементов

Принципиальное отличие неполного метода Галеркина и метода конечных элементов состоит в размерности используемого линейного пространства. Для приближения гладкой функции по методу Галеркина с точностью до нескольких процентов достаточно 10-20 собственных функций, для достижения той же точности при приближении метода конечных элементов необходимо несколько сотен конечных элементов. Поэтому размерность пространства конечных элементов на порядок, а то и на два больше размерности пространства, используемого в неполном методе Галеркина.

В рамках неполного метода Галеркина мы работаем с матрицами порядка $N = 10 \div 20$, эти работы вполне можно выполнять аналитически или сочетая точные символьные манипуляции с применением приближенных численными методами.

В рамках метода конечных элементов мы должны работать с матрицами порядка $N = 10^2 \div 10^3$, эти работы естественно выполнять, используя

приближенной численные методы. При этом базис пространства конечных элементов был сконструирован таким образом, чтобы получались разреженные матрицы [62]. В нашем распоряжении имеются весьма эффективные численные методы для обращения таких матриц и вычисления их собственных значений. Применение этих методов делает работу с моделью, дискретизированной по методу конечных элементов, более быстрой в сравнении с моделью, основано на неполном методе Галеркина. Однако неполный метод Галеркина позволяет проводить некоторые вычисления точно, примеры чем будут приведены в следующих главах, и обладает, несомненно, большей наглядностью.

1.4. Распространение монохроматического излучения по регулярному волноводу

Обратимся теперь к наиболее интересному для практики случаю монохроматического излучения.

Определение. Будем называть поле *u* монохроматическим, если его можно представить

$$u = u(x, y, z)e^{-i\omega t}. \quad (35)$$

Здесь ω – положительный параметр, именуемый круговой частотой поля. В скобках заметим, что ниже будут рассматриваться задачи с частотами в оптическом диапазоне.

В рамках конечномодовой скалярной модели, подстановка выписанного выражения для поля в систему волновых уравнений сразу приводит к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ)

$$\partial_z^2 \vec{u} = (A^2 - k^2 Q) \vec{u}, \quad (36)$$

где $k = \omega / c$ – волновое число. Таким образом, в рамках конечномодовой модели скалярного волновода распространение монохроматического излучения описывается системой ЛОДУ.

В рамках непрерывной модели, монохроматическое поле $u = u(x, y, z)e^{-i\omega t}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 qu = 0 \quad (37)$$

и краевым условиям Дирихле

$$u = 0 \quad (38)$$

на боковой поверхности волновода. В волноводных задачах поле u естественно рассматривать как функцию, отображающую ось волновода в пространство Соболева $\overset{\circ}{W}_2^1(S)$:

$$u: Z \rightarrow \overset{\circ}{W}_2^1(S) \quad (39)$$

Такой подход был предложен в работах А.Н. Боголюбова, М.Д. Малых и Ю.В. Мухартовой [63-67]. С этой точки зрения уравнение Гельмгольца – ЛОДУ вида

$$\partial_z^2 Au = (E - k^2 Q)u, \quad (40)$$

где A и Q – ограниченные относительно нормы пространства Соболева самосопряженные операторы (бесконечномерные матрицы). Таким образом, в рамках непрерывной модели монохроматические волны описываются ЛОДУ, только теперь число уравнений становится бесконечным.

Переход от непрерывной модели, описываемой дифференциальными уравнениями в частных производных, к конечномодовой модели, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, называют *методом Канторовича* [68-74].

Составлению системы ЛОДУ, описывающей распространение волн в волноводе в рамках векторной модели будет посвящена глава 2.

1.5. Спектральная задача теории волноводов

1.5.1. Постановка задачи

Рассмотрим регулярный волновод или регулярный участок волновода, то есть участок оси $a < z < b$, на котором заполнение не зависит от z . На этом участке коэффициенты матрицы Q не зависят от z .

В рамках конечномодовой скалярной модели это означает, что на рассматриваемом участке коэффициенты матрицы Q не зависят от z . Система ЛОДУ вида

$$\partial_z^2 \vec{u} = (A^2 - k^2 Q) \vec{u} \quad (41)$$

возникла в механике при исследовании связанных колебаний маятников [75], только там вместо z фигурировало время t . Именно в этой теории возникло представление о нормальных колебаниях и их суперпозиции, перенесенное в теорию волноводов П.Е. Краснушкиным и Е.И. Моисеевым [76]

Определение. *Нормальной модой* регулярного волновода $S \times [a, b]$ будем называть нетривиальное поле вида

$$u = v(x, y) e^{ik\beta z - i\omega t}. \quad (42)$$

Здесь β - комплексный параметр, именуемый *коэффициентом фазового замедления* нормальной моды.

Это определение мы сохраним и в непрерывной. Теперь мы можем сформулировать первую из двух упомянутых выше задач.

Спектральная задача теории волноводов. Дана частота ω или волновое число $k = \frac{\omega}{c}$. Требуется найти все значения параметра β , при которых существуют нормальные моды и вычислить сами эти моды.

В рамках дискретной скалярной модели волновода (неполный метод Галеркина), эта задача - алгебраическая задача на собственные значения

$$k^2 \beta^2 \vec{v} + (A^2 - k^2 Q) \vec{v} = \vec{0}. \quad (43)$$

Для матриц небольших размерностей эта задача решается при помощи определителей. Если размерность матриц в районе $10 \div 100$, то для решения этой задачи можно применить аналитические методы, например, метод Крылова [77], которые позволяют составить характеристически многочлен, минуя этап вычисления определителя. Такого рода методы реализованы в современных системах компьютерной алгебры. Если же размерности матрицы велики, то естественно применять итерационные методы отыскания собственных значений, реализованные в специальных пакетах и библиотеках, ориентированных на вычисления с матрицами больших размерностей [78]. При этом крайне важно следить за тем, чтобы используемый метод дискретизации приводил к разреженным матрицам.

1.5.2. Теорема о разложении по нормальным модам

Это понятие позволяет сформулировать важнейшую теорему теории волноводов, без которой невозможно даже сформулировать другие задачи теории волноводов.

Теорема о разложении по нормальным модам. Любое монохроматическое поле в регулярном волноводе можно представить в виде суперпозиции нормальных мод.

Как уже отмечалось выше, в рамках конечномодовой скалярной модели волновода, спектральная задача – алгебраическая задача на собственные значения

$$k^2 \beta^2 \vec{v} + (A^2 - k^2 Q) \vec{v} = 0. \quad (44)$$

Матрица

$$A^2 - k^2 Q \quad (45)$$

является симметричной. Поэтому в рамках этой модели теорема о разложении по нормальным модам следует из известной теоремы из линейной алгебры

[79], согласно которой собственные векторы симметричной матрицы образуют полную систему пространства столбцов длины N .

В рамках непрерывной скалярной модели спектральная задача – задача на собственные значения для дифференциального оператора 2-го порядка. В самом деле, подставив в волновое уравнение выражение (42) получим уравнение

$$\Delta v + k^2 q v - \beta^2 v = 0, \quad (46)$$

к которому следует прибавить краевые условия Дирихле

$$v = 0 \quad (47)$$

на границе области S . Таким образом, в рамках непрерывной скалярной модели спектральная задача – задача на собственные значения для дифференциального оператора $\Delta + k^2 q$ в пространстве Соболева $W_2^1(S)$. Используя стандартную технику пространств Соболева [80] мы можем переписать эту задачу при помощи операторов

$$(E - k^2 Q)v + \beta^2 Av = 0, \quad (48)$$

где A и Q – ограниченные относительно нормы пространства Соболева самосопряженные операторы. Поэтому полнота системы собственных функций этой задачи следует из теоремы о полноте системы собственных векторов самосопряженного оператора [80].

В рамках векторной модели для волновода, заполненного однородным веществом, теорема о разложении по нормальным модам была установлена в работах А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [4,55,81], послуживших началом математической теории электромагнитных волноводов. Распространение этой теоремы на случай волновода с неоднородным заполнением представляет значительные математические трудности, связанные с тем, что спектральная задача оказывается несамосопряженной. Этому вопросу были посвящены

работы П.Е. Краснушкина и Е.И. Моисеева [76], Ю.Г. Смирнова [82-84], А.Н. Боголюбов и А.Л. Делицына [85-87]. В работах А.Л. Делицына как следствие теоремы М.В. Келдыша об операторных пучках [85] было показано, что система собственных и присоединенных векторов волновода с произвольным заполнением полна в надлежащем образом определенном функциональном пространстве. Однако собственные векторы несамосопряженного оператора уже не будут ортогональны друг другу, поэтому не всегда удастся составить из них базис. Вопрос о базисности рассматривался в работах А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицына и М.Д. Малых [88,89], удалось обосновать базисность системы собственных и присоединенных векторов для волновода круглого сечения, заполнение которого зависит только от радиуса.

Замечание. Техника четырех потенциалов, изложенная ниже в главе 2, позволила совсем недавно доказать теорему о разложении поля по нормальным модам, используя лишь теорему о базисности системы собственных векторов самосопряженного оператора [90].

1.5.3. Классификация нормальных мод

Обратимся теперь к собственным значениям β спектральной задачи.

Теорема о коэффициенте фазового замедления. Значения коэффициента фазового замедления β нормальной моды волновода может быть или вещественным, или чисто мнимым.

Для ее доказательства в рамках конечномодовой скалярной модели достаточно заметить, что собственные значения матрицы $A^2 - k^2 Q$ – вещественные числа. В рамках непрерывной скалярной модели достаточно сделать аналогичное наблюдения, но относительно операторов. В рамках векторной модели теорема о коэффициенте фазового замедления была установлена только для полого волновода как следствие теорем А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [55]. Мы убедимся в справедливость этой теоремы и для

волноводов, заполненных неоднородным веществом, в серии численных экспериментов в главе 3.

Определение. При $\beta > 0$ поле

$$u = v(x, y)e^{ik\beta z - i\omega t}$$

называют нормальной волной, бегущий по направлению оси Oz , при $\beta < 0$ поле

$$u = v(x, y)e^{ik\beta z - i\omega t}$$

называют нормальной волной, бегущий против направлению оси Oz , при $\beta = \pm i\sigma$ поле

$$u = v(x, y)e^{ik\beta z - i\omega t} = v(x, y)e^{\mp k\sigma z - i\omega t}$$

называют запертой или эванесцентной нормальной модой, в одном из направлений ($z \rightarrow \infty$ или $z \rightarrow -\infty$) запертая мода экспоненциально убывает.

В рамках конечномодовой модели матрицы A^2, Q - положительно определенные. Если обозначить как q_{\max} - максимальное значение заполнения q , то

$$v^T Q \vec{v} = \iint_S v^2 q(x, y) dx dy \leq q_{\max} \|v\|^2, \quad (49)$$

и поэтому

$$v^T (A^2 - k^2 Q) \vec{v} \geq (\alpha_1^2 - k^2 q_{\max}) \|v\|^2. \quad (50)$$

Подставляя сюда собственный вектор \vec{v} , отвечающий собственному значению β операторного пучка $k^2 \beta^2 E + (A^2 - k^2 Q)$, получим

$$k^2 \beta^2 \leq k^2 q_{\max} - \alpha_1^2. \quad (51)$$

Отсюда получается вторая теорема о распространяющихся нормальных модах, также справедливая во всех моделях теории волноводов.

Теорема о распространяющихся нормальных модах. Параметр β распространяющейся нормальной моды удовлетворяет неравенству

$$\beta^2 \leq q_{\max} - \frac{\alpha_1^2}{k^2}. \quad (52)$$

Таким образом, лишь начиная с некоторого волнового числа, а именно с $k = \frac{\alpha_1}{\sqrt{q_{\max}}}$ в волноводе могут появиться распространяющиеся моды. При k , больших этого порогового числа, могут появиться одна или несколько распространяющихся мод. Число нормальных волн, бегущих вдоль оси волновода при данном k , будем обозначать как M .

Это утверждение имеет большое практическое значение: при фиксированной частоте по волноводу может распространяться лишь конечное число бегущих волн. Именно эти волны и используются для передачи энергии или информации по волноводу.

1.6. Задача о волноводной дифракции

1.6.1. Постановка задачи дифракции

Распространение монохроматического излучения

$$u = u(x, y, z)e^{-i\omega t} \quad (53)$$

по нерегулярному волноводу в рамках конечномодовой скалярной модели (неполный метод Галеркина) описывается системой ЛОДУ:

$$\partial_z^2 \vec{u} = (A^2 - k^2 Q) \vec{u}. \quad (54)$$

В случае нерегулярных волноводов заполнение q зависит не только от x, y , но и от z , поэтому матрица Q зависит от z . При рассмотрении такого рода задач обычно предполагают, что q не зависит от z вне некоторого сегмента $a < z < b$, то есть, что волновод имеет два регулярных участка $z < a$ и $z > b$, которые мы будем для краткости называть левым и правым рукавами волновода.

На физическом уровне строгости задача дифракции на локальной неоднородности, помещенной волновод, может быть сформулирована так: в левом рукаве задана волна, распространяющаяся вдоль оси и налетающая на

неоднородность. Эта волна частично отражается от неоднородности и образует в левом рукаве волну, бегущую от неоднородности (то есть против оси волновода), а частично проходит в правый рукав и образует волну, бегущую от неоднородности (то есть вдоль оси волновода). Задача состоит в отыскании этих двух волн – отраженной и прошедшей.

Математическая формулировка этой задачи, предложенная А.Г. Свешниковым [55], опирается на теорему о разложении по нормальным модам. Используя введенные выше обозначения, любое монохроматическое поле в левом рукаве можно представить как

$$ue^{-i\omega t} = \sum_{n=1}^M a_n v_n(x, y) e^{ik\beta_n z - i\omega t} + \sum_{n=1}^M r_n v_n(x, y) e^{-ik\beta_n z - i\omega t} + \sum_{n=M+1}^N a_n v_n(x, y) e^{-k\sigma_n z - i\omega t} + \sum_{n=M+1}^N r_n v_n(x, y) e^{k\sigma_n z - i\omega t}, \quad (55)$$

где a_n, r_n – некоторые числа. Сумма

$$\sum_{n=1}^M a_n v_n(x, y) e^{ik\beta_n z - i\omega t} \quad (56)$$

является суперпозицией нормальных волн, бегущих к неоднородности, поэтому величины a_1, \dots, a_M мы можем считать заданными. Сумма

$$\sum_{n=1}^M r_n v_n(x, y) e^{-ik\beta_n z - i\omega t} \quad (57)$$

является суперпозицией нормальных волн, бегущих от неоднородности, то есть описывает волну, отраженную от неоднородности, поэтому величины r_1, \dots, r_M являются искомыми. Сумма

$$\sum_{n=M+1}^N a_n v_n(x, y) e^{-k\sigma_n z - i\omega t} \quad (58)$$

описывает поле, экспоненциально растущее при $z \rightarrow -\infty$, а сумма

$$\sum_{n=M+1}^N r_n v_n(x, y) e^{k\sigma_n z - i\omega t} \quad (59)$$

описывает поле, экспоненциально убывающее при $z \rightarrow -\infty$. Мы не можем предположить, что обе эти суммы отсутствуют, поскольку тогда задача дифракции записывается как несовместная система уравнений. Утверждение о том, что волна в левом рукаве является суперпозиции волны падающей и отраженной верно лишь в дальней зоне, то есть при $z \rightarrow -\infty$. В таком случае сумму

$$\sum_{n=M+1}^N r_n v_n(x, y) e^{k\sigma_n z - i\omega t} \quad (60)$$

можно оставить, а сумму

$$\sum_{n=M+1}^N a_n v_n(x, y) e^{-k\sigma_n z - i\omega t} \quad (61)$$

необходимо устранить из разложения поля, приняв

$$a_{M+1} = a_{M+2} = \dots = 0 \quad (62)$$

Обозначения, введенные выше для описания нормальных мод, сохраним и для правого рукава, только будем помечать их штрихом. Тогда любое монохроматическое поле в правом рукаве можно представить как

$$\begin{aligned} ue^{-i\omega t} = & \sum_{n=1}^{M'} b_n v_n'(x, y) e^{ik\beta_n z - i\omega t} + \sum_{n=1}^{M'} t_n v_n'(x, y) e^{-ik\beta_n z - i\omega t} + \\ & + \sum_{n=M'+1}^N b_n v_n'(x, y) e^{k\sigma_n z - i\omega t} + \sum_{n=M'+1}^N t_n v_n'(x, y) e^{-k\sigma_n z - i\omega t} \end{aligned} \quad (63)$$

где b_n, t_n – некоторые числа. Сумма

$$\sum_{n=1}^{M'} b_n v_n'(x, y) e^{ik\beta_n z - i\omega t} \quad (64)$$

является суперпозицией нормальных волн, бегущих к неоднородности, поэтому ее мы должны устранить из разложения поля, приняв

$$b_1 = \dots = b_{M'} = 0. \quad (65)$$

Сумма

$$\sum_{n=1}^{M'} t_n v_n'(x, y) e^{-ik\beta_n z - i\omega t} \quad (66)$$

является суперпозицией нормальных волн, бегущих от неоднородности, то есть описывает волну, прошедшую через неоднородность, поэтому величины $t_1, \dots, t_{M'}$ являются искомыми. Сумма

$$\sum_{n=M'+1}^N b_n v_n'(x, y) e^{k\sigma_n z - i\omega t} \quad (67)$$

описывает поле, экспоненциально растущее при $z \rightarrow +\infty$, и поэтому ее нужно устранить из разложения поля, приняв

$$b_{M'+1} = \dots = 0. \quad (68)$$

Сумма

$$\sum_{n=M+1}^N r_n v_n(x, y) e^{-k\sigma_n z - i\omega t} \quad (69)$$

описывает поле, экспоненциально убывающее при $z \rightarrow +\infty$, поэтому в дальней зоне ее не видно.

Математически корректная формулировка задачи волноводной дифракции выглядит следующим образом: в левом рукаве дана падающая волна

$$\sum_{n=1}^M a_n v_n(x, y) e^{ik\beta_n z - i\omega t}, \quad (70)$$

требуется найти монохроматическое поле

$$u = u(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (71)$$

удовлетворяющая при $z < a$ (в левом рукаве) условию

$$\begin{aligned} u e^{-i\omega t} &= \sum_{n=1}^M a_n v_n(x, y) e^{ik\beta_n z - i\omega t} + \sum_{n=1}^M r_n v_n(x, y) e^{-ik\beta_n z - i\omega t} + \\ &+ \sum_{n=M+1}^N r_n v_n(x, y) e^{k\sigma_n z - i\omega t}, \end{aligned} \quad (72)$$

а при $z > b$ (в правом рукаве) условию

$$ue^{-i\omega t} = \sum_{n=1}^{M'} t_n v_n'(x, y) e^{-ik\beta_n z - i\omega t} + \sum_{n=M'+1}^N t_n v_n'(x, y) e^{-k\sigma_n z - i\omega t}. \quad (73)$$

Здесь r_n, t_n – некоторые неизвестные числа.

Решение этой задачи сводится к отысканию решения системы ЛОДУ

$$\partial_z^2 \vec{u} = (A^2 - k^2 Q) \vec{u}, \quad (74)$$

представимого при $z < a$ в виде

$$\vec{u} = \sum_{n=1}^M a_n e^{ik\beta_n z} \vec{v}_n + \sum_{n=1}^M r_n e^{-ik\beta_n z} \vec{v}_n + \sum_{n=M'+1}^N r_n e^{k\sigma_n z} \vec{v}_n, \quad (75)$$

а при $z > b$ в виде

$$\vec{u} = \sum_{n=1}^{M'} t_n e^{-ik\beta_n z} \vec{v}_n' + \sum_{n=M'+1}^N t_n e^{-k\sigma_n z} \vec{v}_n. \quad (76)$$

Обозначим для краткости правые части этих равенств как u_l и u_r , соответственно. По построению u_l и u_r – решение системы ЛОДУ в левом и правом рукавах соответственно. Поэтому, если Q зависит от z непрерывным образом, то условия сопряжения на $z = a$

$$u|_{z=a} = u_l, \quad \partial_z u|_{z=a} = \partial_z u_l, \quad (77)$$

и на $z = b$

$$u|_{z=b} = u_r, \quad \partial_z u|_{z=b} = \partial_z u_r \quad (78)$$

гарантируют выполнение равенств

$$u = u_l, \quad z < a \quad (79)$$

и

$$u = u_r, \quad z > b. \quad (80)$$

Замечание. Если Q имеет разрывы, то в саму непрерывную модель закладывают условия сопряжения на разрывах. Из этих условий нетрудно вывести выписанные выше условия сопряжения, заметно труднее прояснить физический смысл этих условий, поскольку хорошо известно, что некоторые

компоненты электромагнитного поля должны терпеть разрыв на разрыве заполнения.

Исключая из условия сопряжения неопределенные параметры r_n, t_n мы получим краевые условия третьего рода на решение системы ЛОДУ. Например, на левом конце мы имеем

$$\bar{u} = \sum_{n=1}^M \left(a_n e^{ik\beta_n a} + r_n e^{-ik\beta_n a} \right) \bar{v}_n + \sum_{n=M+1}^N r_n e^{k\sigma_n a} \bar{v}_n \quad (81)$$

$$\partial_z \bar{u} = \sum_{n=1}^M ik\beta_n \left(a_n e^{ik\beta_n a} - r_n e^{-ik\beta_n a} \right) \bar{v}_n + \sum_{n=M+1}^N k\sigma_n r_n e^{k\sigma_n a} \bar{v}_n \quad (82)$$

Исключая из этих равенств r_1, \dots, r_N , получим

$$\partial_z (\bar{u}, \bar{v}_n) + ik\beta_n (\bar{u}, \bar{v}_n) = 2ik\beta_n a_n e^{ik\beta_n a}, \quad n = 1, \dots, M \quad (83)$$

и

$$\partial_z (\bar{u}, \bar{v}_n) - k\sigma_n (\bar{u}, \bar{v}_n) = 0, \quad n = M + 1, \dots, N \quad (84)$$

Для удобства ссылок сформулируем эту задачу

Задача о волноводной дифракции (в рамках скалярной модели, дискретизованной по неполному методу Галеркина). Найти решение системы ЛОДУ

$$\partial_z^2 \bar{u} = (A^2 - k^2 Q) \bar{u} \quad (85)$$

на отрезке $a < z < b$ с краевыми 3-го рода: при $z = a$

$$\partial_z (\bar{u}, \bar{v}_n) + ik\beta_n (\bar{u}, \bar{v}_n) = 2ik\beta_n a_n e^{ik\beta_n a}, \quad n = 1, \dots, M \quad (86)$$

и

$$\partial_z (\bar{u}, \bar{v}_n) - k\sigma_n (\bar{u}, \bar{v}_n) = 0, \quad n = M + 1, \dots, N, \quad (87)$$

а при $z = b$

$$\partial_z (\bar{u}, \bar{v}_n') - ik\beta_n (\bar{u}, \bar{v}_n') = 0, \quad n = 1, \dots, M' \quad (88)$$

и

$$\partial_z (\bar{u}, \bar{v}_n') + k\sigma_n (\bar{u}, \bar{v}_n') = 0, \quad n = M + 1, \dots, N. \quad (89)$$

Краевые условия в этой задаче имеют несколько необычную структуру, их называют *парциальными условиями излучения* [55].

Постановка задачи о волноводной дифракции в рамках непрерывной скалярной модели дословно повторяет выписанную выше, только $N = \infty$. В рамках векторной модели структура задачи остается той же, но меняется ЛОДУ (см. глава 4).

1.6.2. Консервативность дискретизации

Сформулированная выше задача – не совсем классическая, поскольку при малых n в краевые условия входит мнимая единица [91]. Это в частности означает, что эта система не является самосопряженной. Однако именно эта мнимая единица позволяет доказать следующую замечательную теорему.

Теорема о законе сохранения. Для решения задачи дифракции справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^M \beta_n |a_n|^2 = \sum_{n=1}^M \beta_n |r_n|^2 + \sum_{n=1}^{M'} \beta'_n |t_n|^2 \quad (90)$$

Доказательство в рамках конечномодовой модели состоит в следующем. Умножим слева уравнение Гельмгольца

$$\partial_z^2 \bar{u} = (A^2 - k^2 Q) \bar{u} \quad (91)$$

на \bar{u}^* и проинтегрируем по отрезку $a < z < b$. Тогда получится, что

$$\int_{z=a}^b \bar{u}^* \partial_z^2 \bar{u} dz = \int_{z=a}^b \bar{u}^* (A^2 - k^2 Q) \bar{u} dz. \quad (92)$$

Интегрируя левую часть по частям, имеем

$$\int_{z=a}^b \bar{u}^* \partial_z^2 \bar{u} dz = \bar{u}^* \partial_z \bar{u} \Big|_{z=a}^b - \int_{z=a}^b |\partial_z \bar{u}|^2 dz. \quad (93)$$

В силу самосопряженности матриц, из равенства

$$\vec{u}^* \partial_z \vec{u} \Big|_{z=a}^b = \int_{z=a}^b |\partial_z \vec{u}|^2 dz + \int_{z=a}^b \vec{u}^* (A^2 - k^2 Q) \vec{u} dz \quad (94)$$

следует, что мнимая часть выражения

$$\vec{u}^* \partial_z \vec{u} \Big|_{z=a}^b \quad (95)$$

равна нулю. Используя парциальные условия излучения, мы можем переписать

$$\vec{u}^* \partial_z \vec{u} \quad (96)$$

при $z = a$ как скалярное произведение вектора

$$\sum_{n=1}^M (a_n e^{ik\beta_n a} + r_n e^{-ik\beta_n a}) \vec{v}_n + \sum_{n=M+1}^N r_n e^{k\sigma_n a} \vec{v}_n \quad (97)$$

на вектор, комплексно сопряженный к вектору

$$\sum_{n=1}^M ik\beta_n (a_n e^{ik\beta_n a} - r_n e^{-ik\beta_n a}) \vec{v}_n + \sum_{n=M+1}^N k\sigma_n r_n e^{k\sigma_n a} \vec{v}_n. \quad (98)$$

Для простоты рассмотрим ортонормированный базис из собственных векторов. Тогда это произведение равно

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1}^M ik\beta_n (a_n e^{ik\beta_n a} + r_n e^{-ik\beta_n a}) (a_n^* e^{-ik\beta_n a} - r_n^* e^{ik\beta_n a}) + \\ & + \sum_{n=M+1}^N k\sigma_n |r_n|^2 e^{k\sigma_n a} \end{aligned} \quad (99)$$

или

$$\sum_{n=1}^M ik\beta_n (|a_n|^2 - |r_n|^2 + (a_n^* r_n - a_n r_n^*)) + \sum_{n=M+1}^N k\sigma_n |r_n|^2 e^{k\sigma_n a}. \quad (100)$$

Числа $a_n^* r_n - a_n r_n^*$ - чисто мнимые, поэтому мнимая часть этого выражения равна

$$\sum_{n=1}^M ik\beta_n (|a_n|^2 - |r_n|^2). \quad (101)$$

Аналогично, мнимая часть $\vec{u}^* \partial_z \vec{u}$ на торце $z = b$ равна

$$\sum_{n=1}^{M'} \beta_n' |t_n|^2. \quad (102)$$

Поэтому обращение в нуль выражения мнимой части

$$\vec{u}^* \partial_z \vec{u} \Big|_{z=a}^b \quad (103)$$

дает то самое выражение, которое требовалось доказать.

Для непрерывной скалярной модели это доказательство можно сохранить дословно [55], а для векторной необходимо внести правки в формулировку теоремы, в которой должен появиться вектор Умова [92].

В теории волноводов это соотношение интерпретируют как закон сохранения энергии: энергия падающей волны делится на энергию отраженной и прошедших волн. Существование точного аналога этого закона в конечномодовой модели говорит о том, что дискретная модель описывает энергетический баланс не только примерно, но и качественно верно. Иными словами, предложенный подход к дискретизации не портит квадратичный закон сохранения.

Замечание. В теории метода конечных разностей численные методы, сохраняющие законы сохранения, называют консервативными. Для построения консервативных разностных схем для гамильтоновых систем строят разностные схемы, сохраняющие симплектическую структуру рассматриваемой динамической системы [93]. Мы достигли сохранения энергии в дискретной модели благодаря тому, что сохранили структуру волноводной задачи как задачи с выделенной осью.

1.6.3. Разрешимость задачи волноводной дифракции

Обратимся теперь к исследованию разрешимости задачи о волноводной дифракции.

Теорема о фредгомовости задачи дифракции. Справедлива альтернатива: или задача дифракции имеет и притом единственное решение, или соответствующая однородная задача (то есть задача при $a_1 = \dots = a_M = 0$) имеет нетривиальное решение.

В рамках конечномодовой скалярной модели эта теорема легко устанавливается при помощи матрицы Коши. Доказательство фредгольмовости в бесконечномерном случае, напротив, требует значительных усилий. В работах А.Л. Делицына [94-97] было введено специальное функциональное пространство, которое играет в задачах с парциальными условиями излучения ту же роль, какую пространства Соболева – в краевых задачах для оператора Лапласа. Это позволило обосновать фредгольмовость и для скалярного, и для векторного случая. В работе М.Д. Малых [98] фредгольмовость обосновывалась без введения новых функциональных пространств.

Нетривиальное решение задачи дифракции при $a_1 = \dots = a_M = 0$ в силу закона сохранения должно иметь

$$r_1 = \dots = r_M = t_1 = \dots = t_{M'} = 0. \quad (104)$$

Определение. Нетривиальное решение системы ЛОДУ

$$\partial_z^2 \vec{w} = (A^2 - k^2 Q) \vec{w}, \quad (105)$$

представимого при $z < a$ в виде

$$\vec{w} = \sum_{n=M+1}^N r_n e^{k\sigma_n z} \vec{v}_n, \quad (106)$$

а при $z > b$ в виде

$$\vec{w} = \sum_{n=M'+1}^N t_n e^{-k\sigma_n z} \vec{v}_n \quad (107)$$

называют ловушечной модой волновода (конечно, в рамках скалярной дискретной модели).

Замечание. Первый пример волноводной задачи, имеющей ловушечную моду, указал Франц Реллих. В настоящее время известно, что ловушечные моды имеются в локально расширенных полых волноводах [99], изогнутых волноводах [100], а волноводах со вставками множество ловушечных мод может быть даже бесконечным [101]. О значении ловушечных мод для радиофизических задач см. обзор А.Н. Боголюбова и М.Д. Малых [102].

Указанное поведение ловушечной моды в рукавах можно сформулировать как требование экспоненциального убывания в дальней зоне обеих рукавов. Поэтому часто принимают за определение, что ловушечная мода – нетривиальное решение системы ЛОДУ

$$\partial_z^2 \vec{w} = (A^2 - k^2 Q) \vec{w}, \quad (108)$$

принадлежащее $L^2(R)$. При таком определении хорошо видно, что ловушечные моды – собственные векторы самосопряженной задачи, в которой k играет роль спектрального параметра. Эта задача очень похожа на классическую задачу для уравнения Шредингера [103], поэтому можно утверждать следующее.

Теорема. Имеется не более чем счетный набор частот, при которых волновод имеет ловушечные моды. Это множество не может иметь конечных предельных точек.

Правая часть в краевых условиях задачи дифракции имеет весьма специальный вид, поэтому существование нетривиального решения однородной задачи не влечет за собой неразрешимости. Падающая волна

$$\sum_{n=1}^M a_n e^{-ik\beta_n z} \vec{v}_n \quad (109)$$

всегда ортогональна к ловушечной моде

$$\vec{w} = \sum_{n=M+1}^N r_n e^{k\sigma_n z} \vec{v}_n. \quad (110)$$

Теорема. Если частота совпадает с частотой, при которой в волноводе существует ловушечная мода, то решение задачи дифракции существует, но не является единственным.

Поскольку решение задачи дифракции зависит от заданных чисел a_1, \dots, a_M линейным образом, устойчивость решения задачи дифракции по входным данным очевидна.

Теорема о корректности задачи дифракции. Если частота не совпадает с частотой, при которой в волноводе существует ловушечная мода, то задачи дифракции корректна по Адамару [104], то есть ее решение существует, единственно и зависит от входных данных непрерывным образом. Если же частота, совпадает с частотой существования ловушечной моды, то решение не единственно.

1.6.4. Задача дифракции как задача о ЛОДУ с выделенными переменными

Выше мы сформулировали задачу дифракции как задачу об отыскании поля u во всем волноводе и столкнулись с отсутствием единственности у ее решения при частотах существования ловушечной моды. В этом случае решения могут различаться на ловушечную моду. Ловушечная мода убывает экспоненциально в обоих рукавах волновода, поэтому в дальней зоне это различие не заметно. Роль ловушечных мод в описании эффектов, происходящих в ближней зоне, например, при исследовании фокусировки на волноводных линзах, напротив, может быть весьма значительной, однако в имеющейся литературе она практически не исследована.

Если переформулировать задачу дифракции как задачу, входными данными которой служит падающая волна

$$\sum_{n=1}^M a_n v_n(x, y) e^{ik\beta_n z - i\omega t}, \quad (111)$$

то есть числа a_1, \dots, a_M , а выходными – отраженная волна

$$\sum_{n=1}^M r_n v_n(x, y) e^{-ik\beta_n z - i\omega t} \quad (112)$$

и прошедшая волна

$$\sum_{n=1}^{M'} t_n v_n'(x, y) e^{-ik\beta_n z - i\omega t}, \quad (113)$$

то есть числа $t_1, \dots, t_M, r_1, \dots, r_{M'}$, то получится задача, имеющая решение при всех частотах. Неединственность проявится, если мы станем искать $t_{M+1}, \dots, r_{M'+1}, \dots$. Таким образом, задача дифракции, в которой ищутся поля в дальней зоне, является корректной математической задачей.

С точки зрения теории дифференциальных уравнений, нас интересует не все решение краевой задачи для системы ЛОДУ

$$\partial_z^2 \vec{u} = (A^2 - k^2 Q) \vec{u} \quad (114)$$

а лишь несколько линейных функционалов от этого решения, а именно

$$l_n(\vec{u}) = (\vec{v}_n, \vec{u}), \quad n = 1, \dots, M \quad (115)$$

и

$$l_{M+n}(\vec{u}) = (\vec{v}_n', \vec{u}), \quad n = 1, \dots, M'. \quad (116)$$

В волноводных задачах

$$M + M' \ll N, \quad (117)$$

поэтому задача дифракции содержит значительное число переменных, значения которых найти не требуется. Если левый и правый рукав имеют одинаковое заполнение, то штрихи можно опустить, и число искомым функционалов ополовинить до

$$l_n(\vec{u}) = (\vec{v}_n, \vec{u}), \quad n = 1, \dots, M. \quad (118)$$

Такого рода задачи для ЛОДУ, в которых выделено множество искомым переменных, в теории дифференциальных уравнений называют уравнениями

с выделенными переменными [105-107]. Алгоритм Абрамова-Броштейна позволяет свести систему ЛОДУ

$$\partial_z^2 \vec{u} = (A^2 - k^2 Q) \vec{u} \quad (119)$$

к системе уравнений большего порядка относительно переменных l_1, \dots, l_M .

Это обстоятельство может быть применено, например, для разработки эффективных символьных алгоритмов отыскания ловушечных мод. Если левый и правый рукав имеют одинаковое заполнение, то ловушечная мода \vec{w} удовлетворяет условиям

$$l_n(\vec{w}) = (\vec{v}_n, \vec{w}) = 0, \quad n = 1, \dots, M, \quad (120)$$

в обоих рукавах волновода. Применив алгоритм Абрамова-Броштейна, мы приведем систему ЛОДУ

$$\partial_z^2 \vec{u} = (A^2 - k^2 Q) \vec{u} \quad (121)$$

к однородной системе ЛОДУ большего порядка относительно переменных l_1, \dots, l_M , скажем к

$$F(l_1, \dots, \partial_z l_1, \dots) = 0. \quad (122)$$

Поскольку l_n в обоих рукавах равна нулю тождественно, к этой системе ЛОДУ можно приписать краевые условия Дирихле в любом числе. Однородная задача Коши имеет только тривиальное решение.

Теорема. Если левый и правый рукав имеют одинаковое заполнение, то для любой его ловушечной моды w функционалы (\vec{v}_n, \vec{w}) обращаются в нуль тождественно при всех z и $n = 1, \dots, M$.

Эта теорема указывает на очень простой способ исследования свойств ловушечных мод. В частности, на ее основе очень легко доказывается неустойчивость ловушечных мод по отношению к малым вещественным возмущениям заполнениям [108,109].

1.6.5. Обоснование конечномерной аппроксимации

Исследование бесконечномерной скалярной модели волновода подразумевает выполнение конечномерной аппроксимации для перехода. При этом подразумевается, что решение задачи дифракции, найденное в рамках конечномерной модели, сходится к точному решению той же задачи, рассмотренной в рамках непрерывной модели. Более развернуто. Пусть имеется последовательность конечномерных пространств

$$H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset W_2^1(S), \quad (123)$$

такая, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = W_2^1(S). \quad (124)$$

Пусть заданы заполнения числа a_1, \dots, a_M . Тогда в рамках конечномерной модели в каждом из пространств H_n можно поставить и решить задачу о волноводной дифракции, обозначим ее решение как

$$r_1^{(n)}, \dots, r_M^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{M'}^{(n)}. \quad (125)$$

Наше предположение состоит в том, что при $n \rightarrow \infty$ верно

$$r_1^{(n)} \rightarrow r_1, \dots, r_M^{(n)} \rightarrow r_M, t_1^{(n)} \rightarrow t_1, \dots, t_{M'}^{(n)} \rightarrow t_{M'}. \quad (126)$$

Это означает, что взяв достаточно большое конечномерное пространство, мы получим коэффициенты прохождения и отражения близкие к тем, которые получились бы в рамках непрерывной модели. Под обоснованием конечномерной аппроксимации обычно и понимают доказательство этой гипотезы.

К сожалению, этот вопрос в теории еще не исследован в необходимой полноте. В работах А.Г. Свешникова [52,53] было дано обоснование неполного метода Галеркина только для случая сред с затуханием, обоснованию численных методов расчета планарных волноводов без затухания посвящена недавняя статья А.Л. Делицына [110].

1.6.6. Численные методы решения задачи дифракции

Система ЛОДУ

$$\partial_z^2 \vec{u} = (A^2 - k^2 Q(z)) \vec{u} \quad (127)$$

с переменным матричным коэффициентом Q , обычно, не решается в символьном виде или это решение оказывается весьма сложным. Поэтому наиболее естественный и простой с точки зрения реализации на ЭВМ способ решения задачи дифракции – дискретизация ЛОДУ по z методом конечных разностей или конечных элементов.

После дискретизации по z ЛОДУ и краевых условий, мы получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая может быть решена численно в любом программном обеспечении (ПО), специализированном на работе с линейными системами (Matlab). Если при дискретизации по x использовался неполный метод Галеркина, то матрица Q имеет небольшой размер N , но заполнена плотно. Дискретизация по z по методу конечных разностей или методу конечных элементов превратит ЛОДУ в СЛАУ большой размерности, однако ее матрицы будет разреженной, в простейших случаях – трех диагональной. Поэтому в нашем распоряжении имеются весьма эффективные методы решения этой системы.

Неклассичность условий третьего рода с мнимой единицей существенно уменьшает число готового ПО для решения задачи дифракции. Наиболее точно условия задачи волноводной дифракции подпадают под ПО, написанное для нужд квантово-механической теории рассеяния в группе С.И. Виницкого (ОИЯИ, Дубна) [68,70].

Следует заметить, что дискретизация по z не сохраняет квадратичный интеграл, поэтому этот метод не будет консервативным. Среди консервативных методов для волноводных задач наиболее естественным представляется метод, предложенный А.А. Петуховым, и получил в его работах название «гибридного» метода [111-114].

Допустим для начала, что волновод можно разбить на несколько регулярных кусков. Пусть этих кусков всего имеется K . В каждом из этих кусков поле можно представить в виде суперпозиции нормальных мод. Это представление использует $2N$ неизвестных констант – амплитуд мод. Всего получается $2NK$ констант. Парциальные условия излучения дают нам значения N констант в самом левом куске и N в самом правом. Всего остается $2N(K-1)$ неизвестных. K кусков имеют $K-1$ границ, общих для двух кусков, условия сопряжения на них дают $2N(K-1)$ линейных уравнений. Поэтому из этой системы можно найти все неизвестные и тем самым точно решить задачу дифракции в рамках дискретной по x модели. Корректность задачи уже была доказана выше.

В общем случае, саму матрицу Q можно аппроксимировать ступенчатой по z функцией, то есть, порезать нерегулярный волновод на слои, в каждом из которых можно считать заполнение q не зависящим от z . В этом волноводе задача дифракции решается описанным выше методом точно. Ошибка же в методе заключена только в кусочно-постоянной аппроксимации матрицы Q . Поскольку точное решение задачи дифракции, пусть и при другом Q , удовлетворяет закону сохранения, описанный метод является консервативным. Поскольку система ЛОДУ устойчива по отношению к малым возмущениям коэффициентов, сходимость описанного метода не вызывает сомнений.

Этот метод идеально подходит для расчетов по неполному методу Галеркина, поскольку в этом случае размерность матрицы Q не велика. Ниже в главе 4 этот подход будет использоваться для расчета задач дифракции в векторной постановке.

Глава 2. Запись уравнений Максвелла при помощи четырех скалярных уравнений

2.1. Исключение продольных компонент из системы уравнений Максвелла

Рассмотрим волновод постоянного сечения S с идеально проводящими стенками; относительно заполнения ε, μ которого не будет делать пока никаких предположений. Ось Oz направим по оси цилиндра, нормаль к S будем обозначать как \vec{n} , касательный вектор, перпендикулярный к \vec{e}_z как $\vec{\tau}$ (рис.2). За основу возьмем систему уравнений Максвелла, из которой исключим E_z и H_z .

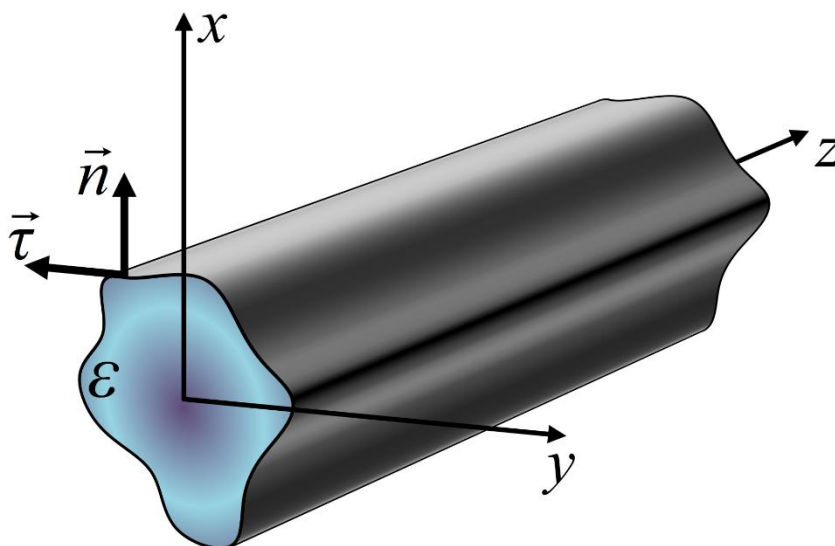


Рисунок 2. Волновод постоянного сечения S

Замечание. При решении задач в волноводах в полной векторной постановке можно выбирать в качестве основных различные наборы координат векторов \vec{E} и \vec{H} . Обзор возможностей на примере спектральной задачи дан в [115].

Положим

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y)^T, \quad \nabla' = (-\partial_y, \partial_x)^T. \quad (128)$$

Как известно,

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y)^T, \quad \nabla' = (-\partial_y, \partial_x)^T. \quad (129)$$

Поэтому уравнения Максвелла можно записать так

$$\begin{cases} \vec{e}_z \times \partial_z \vec{H}_\perp + \nabla H_z \times \vec{e}_z + ik\varepsilon \vec{E}_\perp = 0 \\ (\text{rot } H_\perp)_z + ik\varepsilon E_z = 0, \\ \vec{e}_z \times \partial_z \vec{E}_\perp + \nabla E_z \times \vec{e}_z - ik\mu \vec{H}_\perp = 0, \\ (\text{rot } E_\perp)_z - ik\mu H_z = 0. \end{cases} \quad (130)$$

Исключая отсюда продольные компоненты, имеем

$$\begin{cases} \vec{e}_z \times \partial_z \vec{H}_\perp + \nabla \frac{1}{ik\mu} (\text{rot } E_\perp)_z \times \vec{e}_z + ik\varepsilon \vec{E}_\perp = 0, \\ \vec{e}_z \times \partial_z \vec{E}_\perp - \nabla \frac{1}{ik\varepsilon} (\text{rot } H_\perp)_z \times \vec{e}_z - ik\mu \vec{H}_\perp = 0. \end{cases} \quad (131)$$

На границе выполняются условия идеальной проводимости

$$\vec{E}_\perp \times \vec{n} = 0, \quad H_\perp \cdot \vec{n} = 0, \quad E_z = 0. \quad (132)$$

Теорема 1.

Пусть S - односвязная область на плоскости. Если вектор $\vec{A} = (A_x, A_y)^T$ удовлетворяет граничному условию

$$\vec{A} \cdot \vec{\tau} = 0 \quad (133)$$

и имеет первые непрерывные производные в S , то найдется такие функции

$u \in W_2^1(S)$ и $v \in W_2^1(S)$, что

$$\vec{A} = \nabla u + \nabla' v; \quad (134)$$

при этом u - решение задачи

$$\Delta u = \partial_x A_x + \partial_y A_y, \quad u|_{\partial S} = 0, \quad (135)$$

а v - решение задачи

$$\Delta v = \partial_x A_y - \partial_y A_x, \quad \nabla v \cdot \vec{n}|_{\partial S} = 0. \quad (136)$$

Указанное представление единственно с точностью до аддитивных констант [116-118].

Доказательство. Задачи (135) и (136) имеют решение в $u \in W_2^1(S)$ и $v \in W_2^1(S)$ [57], которое во внутренних точках области S является дважды непрерывно дифференцируемым в силу леммы Вейля [119]. Вектор

$$\vec{B} = \nabla u + \nabla' v - \vec{A} \quad (137)$$

удовлетворяет в обобщенном смысле двум условиям

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y = \Delta u - \partial_x A_x - \partial_y A_y = 0 \quad (138)$$

и

$$\vec{E}_\perp = \nabla' \tilde{v}_h - \nabla \tilde{u}_h, \quad \vec{H}_\perp = \nabla' \tilde{u}_e - \nabla \tilde{v}_e. \quad (139)$$

Отсюда следует, что $\vec{B} = \nabla w$, где w гармоническая функция. На границе

$$\vec{B} \cdot \tau = \nabla u \cdot \tau + \nabla' v \cdot \tau - \vec{A} \cdot \tau = 0, \quad (140)$$

то есть w принимает на границе постоянное значение. В силу принципа максимума это означает, что $w = \text{const}$, а $\vec{B} = 0$.

Теорема 2.

Пусть S - односвязная область на плоскости. Если вектор $\vec{A} = (A_x, A_y)^T$ удовлетворяет граничному условию

$$\vec{A} \cdot \vec{n} = 0 \quad (141)$$

и имеет первые непрерывные производные в S , то найдется такие функции

$u \in W_2^1(S)$ и $v \in W_2^1(S)$, что

$$\vec{A} = \nabla v + \nabla' u; \quad (142)$$

при этом v - решение задачи

$$\Delta v = \partial_x A_x + \partial_y A_y, \quad \nabla v \cdot n|_{\partial S} = 0, \quad (143)$$

а u - решение задачи

$$\Delta u = \partial_x A_y - \partial_y A_x, \quad u|_{\partial S} = 0. \quad (144)$$

Указанное представление единственно с точностью до аддитивных констант [116-118].

Доказательство. Задачи (143) и (144) имеют решение в $u \in W_2^1(S)$ и $v \in W_2^1(S)$ [57], которое во внутренних точках области S является дважды непрерывно дифференцируемым в силу леммы Вейля [119]. Вектор

$$\vec{B} = \nabla v + \nabla' u - \vec{A} \quad (145)$$

удовлетворяет в обобщенном смысле двум условиям

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y = \Delta v - \partial_x A_x - \partial_y A_y = 0 \quad (146)$$

и

$$\partial_x B_y - \partial_y B_x = \Delta u - \partial_x A_y + \partial_y A_x = 0. \quad (147)$$

Отсюда следует, что $\vec{B} = \nabla w$, где w гармоническая функция. На границе

$$\vec{B} \cdot n = \nabla v \cdot n + \nabla' u \cdot n - \vec{A} \cdot n = 0, \quad (148)$$

то есть $\nabla w \cdot n = 0$. Это означает, что $w = \text{const}$, а $\vec{B} = 0$.

Эти теоремы позволяют в случае волноводов с односвязным сечением не ограничивая общности рассмотрения искать решение системы (131) в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_\perp &= \nabla u_e + \nabla' v_e, \\ \vec{H}_\perp &= \nabla v_h + \nabla' u_h, \end{aligned} \quad (149)$$

Если сечение является многосвязным, то искать решение в таком виде можно, сознавая, что так теряются некоторые «электростатические» решение.

Введенные здесь на основании теоремы 1 четыре скалярные функции будем называть потенциалами и всегда предполагать, что они удовлетворяют граничным условиям

$$u_e = u_h = n \cdot \nabla v_e = n \cdot \nabla v_h \quad (150)$$

на границе волновода. При этом автоматически выполняются два из трех граничных условий (132)

$$\begin{aligned}\vec{E}_\perp \cdot \vec{\tau} &= \nabla u_e \cdot \vec{\tau} + \nabla' v_e \cdot \vec{\tau} = 0, \\ \vec{H}_\perp \cdot \vec{n} &= \nabla v_h \cdot \vec{n} + \nabla' u_h \cdot \vec{n} = 0.\end{aligned}\quad (151)$$

Что же касается третьего условия E_z , то его можно записать как

$$(\text{rot } H_\perp)_z = 0 \quad (152)$$

или

$$\Delta u_h |_{\partial S} = 0. \quad (153)$$

В простых случаях на физическом уровне строгости третье условие выводят из первых двух и поэтому про него можно было бы забыть. К выяснению его места мы еще вернемся.

Подставляя выражения (149) в уравнения Максвелла (131), получим

$$\begin{cases} \nabla' \left(\partial_z v_h - \frac{1}{ik\mu} \Delta v_e \right) + ik\varepsilon \nabla' v_e - \nabla \partial_z u_h + ik\varepsilon \nabla u_e = 0, \\ \nabla' \left(\partial_z u_e + \frac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h \right) - ik\mu \nabla' u_h - \nabla \partial_z v_e - ik\mu \nabla v_h = 0. \end{cases} \quad (154)$$

2.2. Частный случай, когда система распадается на два скалярных уравнений Гельмгольца

Если ε и μ не зависят от x и y , то система (154) принимает вид

$$\begin{cases} \nabla' \left(\partial_z v_h - \frac{1}{ik\mu} \Delta v_e + ik\varepsilon v_e \right) - \nabla (\partial_z u_h - ik\varepsilon u_e) = 0, \\ \nabla' \left(\partial_z u_e + \frac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h - ik\mu u_h \right) - \nabla (\partial_z v_e + ik\mu v_h) = 0. \end{cases} \quad (155)$$

Всякое решение этой системы, удовлетворяющее граничным условиям

$$u_e = \Delta u_e = 0, \quad \nabla v_e \cdot n = \nabla \Delta v_e \cdot n = 0, \quad (156)$$

в силу теорем 1 и 2 удовлетворяет системе из четырех уравнений, которая распадается на две системы:

$$\begin{cases} \partial_z v_h - \frac{1}{ik\mu} \Delta v_e + ik\varepsilon v_e = 0, \\ \partial_z v_e + ik\mu v_h = 0. \end{cases} \quad (157)$$

и

$$\begin{cases} \partial_z u_e + \frac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h - ik\mu u_h = 0, \\ \partial_z u_h - ik\varepsilon u_e = 0. \end{cases} \quad (158)$$

Исключая v_h и u_e , получим два уравнения

$$\mu \partial_z \frac{1}{\mu} \partial_z v_e + \Delta v_e + k^2 \varepsilon \mu v_e = 0. \quad (159)$$

и

$$\varepsilon \partial_z \frac{1}{\varepsilon} \partial_z u_h + \Delta u_h + k^2 \varepsilon \mu u_h = 0. \quad (160)$$

В том случае, когда ε и μ не зависят и от z , уравнения (159) и (160) переходят в уравнение Гельмгольца.

Переход от системы уравнений первого порядка к эквивалентному им уравнению второго порядка хорошо известен в классической механике как переход от уравнений Гамильтона к уравнениям Ньютона. Следуя этой аналогии будем называть системы (157) и (158) гамильтоновыми формами уравнения Гельмгольца (159) и (160). В дальнейшей зацепление между уравнениями Гельмгольца будет удобно записать именно для уравнений в такой гамильтоновой форме.

2.3. Слабая постановка задачи об отыскании потенциалов в общем случае

Вернемся теперь к общему случаю, когда ε и μ являются переменными величинами и разделить систему (130) на два независимых уравнения Гельмгольца не удастся. Изложение целого ряда вопросов математической теории волноводов, в том числе постановку парциальных условий излучения

в закрытых и открытых малосведущих системах, сведение уравнений Максвелла в задаче дифракции к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, можно провести единообразно, если рассматривать поле как функцию z со значениями в подходящим образом выбранном гильбертовом пространстве. Такой подход был использован в серии работ [63-67], посвященных парциальным условиям излучения. Введению гильбертова пространства предположим следующую теорему.

Теорема 3.

Пусть электромагнитное поле удовлетворяет в классическом смысле системе уравнений Максвелла (131) в волноводе и граничным условиям

$$\vec{E}_\perp \times \vec{n} = \vec{0}, \quad \vec{H}_\perp \cdot \vec{n} = 0, \quad E_z = 0, \quad \nabla H_z \cdot \vec{n} = 0. \quad (161)$$

на его границе. Тогда вектор

$$(v_h, v_e, u_e, u_h),$$

составленный из потенциалов, удовлетворяет в классическом смысле системе (154) в волноводе и граничным условиям (150) и (153) на его границе. Тогда соотношение

$$\begin{aligned} & \partial_z \iint_S (\nabla' v_h \cdot \nabla' \tilde{v}_h + \nabla' u_e \cdot \nabla' \tilde{u}_e + \nabla v_e \cdot \nabla \tilde{v}_e + \nabla u_h \cdot \nabla \tilde{u}_h) dx dy + \\ & + \frac{1}{ik} \iint_S \left(\frac{\Delta v_e \Delta \tilde{v}_h}{\mu} - \frac{\Delta u_h \Delta \tilde{u}_e}{\varepsilon} \right) dx dy + ik \iint_S \varepsilon (\nabla' v_e + \nabla u_e) \cdot (\nabla' \tilde{v}_h - \nabla \tilde{u}_h) dx dy + \\ & + ik \iint_S \mu (\nabla' u_h + \nabla v_h) \cdot (\nabla \tilde{v}_e - \nabla' \tilde{u}_e) v dx dy = 0. \end{aligned} \quad (162)$$

выполняется на любом векторе

$$(\tilde{v}_h, \tilde{v}_e, \tilde{u}_e, \tilde{u}_h),$$

u -компоненты которого обращаются в нуль на границе волновода [116-118].

Доказательство. Умножим первое уравнение

$$\nabla' \left(\partial_z v_h - \frac{1}{ik\mu} \Delta v_e \right) + ik\varepsilon \nabla' v_e - \nabla \partial_z u_h + ik\varepsilon \nabla u_e = 0 \quad (163)$$

системы (154) на вектор

$$\nabla' \tilde{v}_h - \nabla \tilde{u}_h \quad (164)$$

и проинтегрируем по сечению S волновода. Заметим, во-первых, что интеграл

$$\iint_S (\nabla' v_h - \nabla u_h) \cdot (\nabla' \tilde{v}_h - \nabla \tilde{u}_h) dx dy \quad (165)$$

распадается на 4 слагаемых, из которых два равны нулю: интеграл

$$\iint_S \nabla' v_h \cdot \nabla \tilde{u}_h dx dy = \int_{\partial S} \nabla' v_h \cdot \tilde{n} u_h ds - \iint_S \nabla (\nabla' v_h) \cdot \tilde{u}_h dx dy \quad (166)$$

равен нулю, поскольку $\tilde{u}_h = 0$ на ∂S , а интеграл

$$\iint_S \nabla u_h \cdot \nabla' \tilde{v}_h dx dy \quad (167)$$

равен нулю, поскольку $u_h = 0$ на ∂S . Во-вторых, интеграл

$$\iint_S \nabla' \frac{1}{ik\mu} \Delta v_e \cdot (\nabla' \tilde{v}_h - \nabla \tilde{u}_h) dx dy \quad (168)$$

равен сумме интегралов

$$\int_{\partial S} \frac{1}{ik\mu} \Delta v_e \tilde{\tau} \cdot (\nabla' \tilde{v}_h - \nabla \tilde{u}_h) ds = \int_{\partial S} \frac{1}{ik\mu} \Delta v_e \cdot (\tilde{n} \cdot \nabla \tilde{v}_h - \tilde{\tau} \cdot \nabla \tilde{u}_h) ds \quad (169)$$

и

$$-\iint_S \frac{1}{ik\mu} \Delta v_e \nabla' (\nabla' \tilde{v}_h - \nabla \tilde{u}_h) dx dy = -\iint_S \frac{1}{ik\mu} \Delta v_e \Delta \tilde{v}_h dx dy. \quad (170)$$

Первый из них равен нулю в силу граничных условий (150). Таким образом, первое уравнение системы (154) в слабой форме можно записать как

$$\begin{aligned} & \partial_z \iint_S (\nabla' v_h \cdot \nabla' \tilde{v}_h + \nabla u_h \cdot \nabla \tilde{u}_h) dx dy + \iint_S \frac{1}{ik\mu} \Delta v_e \Delta \tilde{v}_h dx dy + \\ & + \iint_S ik\varepsilon (\nabla' v_e + \nabla u_e) \cdot (\nabla' \tilde{v}_h - \nabla \tilde{u}_h) dx dy = 0. \end{aligned} \quad (171)$$

Аналогично, умножим второе уравнение

$$\nabla' \left(\partial_z u_e + \frac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h \right) - ik\mu \nabla' u_h - \nabla \partial_z v_e - ik\mu \nabla v_h = 0 \quad (172)$$

системы (154) на

$$\nabla' \tilde{u}_e - \nabla \tilde{v}_e. \quad (173)$$

Интеграл

$$\iint_S \nabla' \left(\frac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h \right) (\nabla' \tilde{u}_e - \nabla \tilde{v}_e) dx dy \quad (174)$$

равен

$$- \iint_S \left(\frac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h \right) \nabla' (\nabla' \tilde{u}_e - \nabla \tilde{v}_e) dx dy \quad (175)$$

с точностью до интеграла по границе

$$\iint_{\partial S} \tau \cdot \left(\frac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h \right) (\nabla' \tilde{u}_e - \nabla \tilde{v}_e) ds. \quad (176)$$

Этот интеграл равен нулю в силу граничного условия (153). Поэтому после учета граничных условий второе соотношение можно записать так

$$\begin{aligned} & \partial_z \iint_S (\nabla' u_e \cdot \nabla' \tilde{u}_e + \nabla v_e \cdot \nabla \tilde{v}_e) - \iint_S \frac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h \Delta \tilde{u}_e dx dy - \\ & - \iint_S ik\mu (\nabla' u_h + \nabla v_h) \cdot (\nabla' \tilde{u}_e - \nabla \tilde{v}_e) dx dy = 0. \end{aligned} \quad (177)$$

Для краткости следует еще заметить, что

$$\nabla' w \cdot \nabla' \tilde{w} = \nabla w \cdot \nabla \tilde{w}. \quad (178)$$

Складывая найденные выражения, получим утверждение теоремы.

Докажем теперь обратное утверждение, из которого в частности следует, что условие (153) является естественными.

Теорема 4.

Пусть вектор

$$(v_h, v_e, u_e, u_h),$$

составленный из гладких потенциалов, удовлетворяет соотношению (162) на любом векторе

$$(\tilde{v}_h, \tilde{v}_e, \tilde{u}_e, \tilde{u}_h),$$

компоненты которого удовлетворят краевым условиям (150). Тогда этот вектор удовлетворяет в классическом смысле системе (154) в волноводе и условию (153) на его границе [116-118].

Доказательство. Пусть \tilde{E}_\perp и \tilde{H}_\perp - произвольные векторы на плоскости, удовлетворяющие граничным условиям

$$\tau \cdot \tilde{E}_\perp = n \cdot \tilde{H}_\perp = 0. \quad (179)$$

В силу теоремы 1 эти векторы можно представить при помощи 4-х потенциалов

$$\tilde{E}_\perp = \nabla' \tilde{v}_h - \nabla \tilde{u}_h, \quad \tilde{H}_\perp = \nabla' \tilde{u}_e - \nabla \tilde{v}_e. \quad (180)$$

Запишем соотношение (162) на этих потенциалах и произведем интегрирование по частям в направлении, обратном доказательству теоремы 3. Тогда получится, что обращается в нуль сумма интегралов по сечению

$$\iint_S \left(\nabla' \left(\partial_z v_h - \frac{1}{ik\mu} \Delta v_e \right) + ik\epsilon \nabla' v_e - \nabla \partial_z u_h + ik\epsilon \nabla u_e \right) \tilde{E}_\perp dx dy, \quad (181)$$

и

$$\iint_S \left(\nabla' \left(\partial_z u_e + \frac{1}{ik\epsilon} \Delta u_h \right) - ik\mu \nabla' u_h - \nabla \partial_z v_e - ik\mu \nabla v_h = 0 \right) \tilde{E}_\perp dx dy \quad (182)$$

и интеграла по границе ∂S

$$\iint_{\partial S} \tau \cdot \left(\frac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h \right) (\nabla' \tilde{u}_e - \nabla \tilde{v}_e) ds. \quad (183)$$

В частности можно взять \tilde{E}_\perp и \tilde{H}_\perp в форме «шапочек Соболева», тогда интеграл по границе равен нулю, а из получившегося соотношения следуют уравнения (154) в силу основной леммы вариационного исчисления.

Теперь вновь возьмем произвольные \tilde{E}_\perp и \tilde{H}_\perp . В силу уже установленных соотношений (154) интегралы по S обращаются в нуль. Таким образом, теперь соотношение (162) означает, что

$$\iint_{\partial S} \left(\frac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h \right) (n \cdot \nabla \tilde{u}_e - \tau \cdot \nabla \tilde{v}_e) ds = 0. \quad (184)$$

Величины $n \cdot \nabla \tilde{u}_e$ и $\tau \cdot \nabla \tilde{v}_e$ можно сделать на границе любыми, поэтому отсюда следует, что $\Delta u_h = 0$.

Доказанные теоремы позволяют свести систему уравнений Максвелла к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. С этой целью рассмотрим решение

$$w = (v_h, v_e, u_e, u_h)$$

системы (154) как отображение $z \in \mathbb{R}$ в гильбертово пространство

$$\mathfrak{H} = \left\{ v_h, v_e, u_e, u_h \in W_2^2(S) : u_e, u_h, n \cdot \nabla v_e, n \cdot \nabla v_h |_{\partial S} = 0 \right\}. \quad (185)$$

В этом пространстве введем три билинейные формы

$$\begin{aligned} a(\tilde{w}, w) = & \iint_S \varepsilon (\nabla' v_e + \nabla u_e) \cdot (\nabla' \tilde{v}_h - \nabla \tilde{u}_h) dx dy + \\ & + \iint_S \mu (\nabla' u_h + \nabla v_h) \cdot (\nabla \tilde{v}_e - \nabla' \tilde{u}_e) v dx dy \end{aligned} \quad (186)$$

$$b(\tilde{w}, w) = \iint_S (\nabla' v_h \cdot \nabla' \tilde{v}_h + \nabla' u_e \cdot \nabla' \tilde{u}_e + \nabla v_e \cdot \nabla \tilde{v}_e + \nabla u_h \cdot \nabla \tilde{u}_h) dx dy, \quad (187)$$

$$c(\tilde{w}, w) = \iint_S \left(\frac{\Delta v_e \Delta \tilde{v}_h}{\mu} - \frac{\Delta u_h \Delta \tilde{u}_e}{\varepsilon} \right) dx dy. \quad (188)$$

Тогда условие (162) можно записать так

$$\partial_z b(\tilde{w}, w) + ika(\tilde{w}, w) + \frac{1}{ik} c(\tilde{w}, w) = 0 \quad \forall \tilde{w} \in \mathfrak{H}. \quad (189)$$

Эти формы ограничены в \mathfrak{H} , поэтому в силу теоремы Рисса названное условие можно переписать в операторах, порожденными этими билинейными формами:

$$B \frac{dw}{dz} + ikAw + \frac{1}{ik} Cw = 0. \quad (190)$$

В силу компактности вложения пространств Соболева, операторы A и B являются компактными, а C к тому же еще и самосопряженным.

Из теоремы 3 сразу следует, что всякое классическое решение этой системы, удовлетворяющее на границе волновода четырем условиям (156), удовлетворяет и этой системе линейных дифференциальных уравнений. Однако не всякое решение названной системы дифференциальных уравнений, лежащие в гильбертовом пространстве \mathfrak{H} , является достаточно гладким. Поэтому условимся называть решение бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений (190) будем называть обобщенным решением системы уравнений Максвелла в волноводе.

2.4. Сведение системы уравнений Максвелла к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть $\{\varphi_n\}$ - набор из N линейно независимых векторов из \mathfrak{H} , а \mathcal{L} - линейное пространство, натянутое на эти вектора. Всякий элемент $w \in \mathfrak{H}$ можно отождествить с набором из N чисел - коэффициентов разложения его проекции в \mathcal{L} в базисе $\{\varphi_n\}$. Пусть элементы матриц A, B, C вычисляются по формулам

$$a_{mn} = a(\varphi_m, \varphi_n), \dots \quad (191)$$

Тогда всякое решение \vec{w} конечномерной системы ОДУ

$$B \frac{dw}{dz} + ikAw + \frac{1}{ik}Cw = 0 \quad (192)$$

будем называть приближенным решением системы (190), найденным относительно базиса $\{\varphi_n\}$ [116-118].

Глава 3. Спектральная задача

3.1. Конечномерная аппроксимация бесконечномерной системы

Рассмотрим вначале однородный вдоль оси z волновод квадратного сечения $S = \{x \in [0;1], y \in [0;1]\}$. Пусть на некотором отрезке $a < z < b$ диэлектрическая и магнитная проницаемости ε, μ не меняются вдоль оси. Конечномерную аппроксимацию будем проводить, используя стандартный базис метода Галёркина. Раскладывая приближенное решение будем по конечному числу линейно независимых функций, удовлетворяющих граничным условиям. В качестве базиса в данном случае подходит базис $\{\bar{\varphi}_j\}_{j=1}^{4N^2-2}$, составленный из собственных функций оператора Лапласа с условиями Дирихле и условиями Неймана, а именно:

$$\{\bar{\varphi}_j\}_{j=1}^{N^2-1} = (\cos(\pi nx)\cos(\pi my), 0, 0, 0)^T, \quad m, n = 0, \dots, N-1, m+n > 0, \quad (193)$$

$$\{\bar{\varphi}_j\}_{j=N^2-1}^{2N^2-2} = (0, \cos(\pi nx)\cos(\pi my), 0, 0)^T, \quad m, n = 0, \dots, N-1, m+n > 0, \quad (194)$$

$$\{\bar{\varphi}_j\}_{j=2N^2-2}^{3N^2-2} = (0, 0, \sin(\pi nx)\sin(\pi my), 0)^T, \quad m, n = 1, \dots, N, \quad (195)$$

$$\{\bar{\varphi}_j\}_{j=3N^2-2}^{4N^2-2} = (0, 0, 0, \sin(\pi nx)\sin(\pi my))^T, \quad m, n = 1, \dots, N. \quad (196)$$

Приближенное решение системы будем строить по аналогии с неполным методом Галёркина [55, 119-123] в виде разложения

$$(v_h, v_e, u_e, u_h)^T = \sum_{j=1}^{4N^2-2} w_j(z) \bar{\varphi}_j(x, y). \quad (197)$$

После подстановки приближенного решения в уравнения системы и применения проекционной схемы метода Галёркина получим систему

обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора искомых коэффициентных функций $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_{4N^2-2})^T$:

$$B \frac{d\vec{w}}{dz} + ik_0 A \vec{w} + \frac{1}{ik_0} C \vec{w} = \vec{0}, \quad (198)$$

где A , B и C – квадратные матрицы, элементы которых представляют собой двойные интегралы по сечению волновода S :

$$a_{ij} = \iint_S \varepsilon (\nabla' \varphi_{j2} + \nabla \varphi_{j3}) \cdot (\nabla' \varphi_{i1} - \nabla \varphi_{i4}) dx dy + \iint_S \mu (\nabla' \varphi_{j4} + \nabla \varphi_{j1}) \cdot (\nabla' \varphi_{i2} - \nabla \varphi_{i3}) dx dy, \quad (199)$$

$$b_{ij} = \iint_S (\nabla' \varphi_{j1} \cdot \nabla' \varphi_{i1} + \nabla' \varphi_{j3} \cdot \nabla' \varphi_{i3} + \nabla \varphi_{j2} \cdot \nabla \varphi_{i2} + \nabla \varphi_{j4} \cdot \nabla \varphi_{i4}) dx dy, \quad (200)$$

$$c_{ij} = \iint_S \left(\frac{\Delta \varphi_{j2} \Delta \varphi_{i1}}{\mu} - \frac{\Delta \varphi_{j2} \Delta \varphi_{i3}}{\varepsilon} \right) dx dy, \quad (201)$$

где через φ_{jn} , $n = 1, \dots, 4$ обозначена n -я компонента j -й вектор-функции $\vec{\varphi}_j$.

3.2. Постановка задачи приближенного отыскания нормальных мод

Однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений (198) допускает решения, которые зависят от z как $e^{ik_0 \beta z}$, такие решения называют нормальными модами волновода. Подставляя вид решения $\vec{w}(z) = \vec{\psi} e^{ik_0 \beta z}$ в (198) и сокращая ненулевые множители, получим задачу на собственные значения и собственные векторы

$$K \vec{\psi} = \beta \vec{\psi} \quad (202)$$

где матрица K выражается через матрицы A , B и C следующим образом:

$$K = B^{-1} \left(A - \frac{1}{k_0^2} C \right). \quad (203)$$

Величина β , входящая в степень экспоненты, называется коэффициентом фазового замедления моды, он определяет характер распространения моды. Моды с вещественным $\beta > 0$ представляют собой волны, бегущие вдоль оси волновода в положительном направлении, моды с $\beta < 0$ распространяются в отрицательном направлении. Моды с вещественным β называют распространяющимися. Моды с мнимым β экспоненциально убывают в одном из направлений и их называют эванесцентными.

3.3. Символьно-численный алгоритм приближенного отыскания нормальных мод

Вычисление элементов матриц по формулам (199)-(201) сопряжено с определенными сложностями в случае произвольной зависимости диэлектрической и магнитной проницаемостей от переменных x, y . Диэлектрическая и магнитная проницаемости $\varepsilon(x, y)$, $\mu(x, y)$ входят в подынтегральные выражения в (199), а в подынтегральные выражения в (201) входят $1/\varepsilon(x, y)$ и $1/\mu(x, y)$. Например если ε полином, то вычислить интеграл (201) в символьном виде невозможно в силу теоремы Лиувилля [124]. В таком случае двойные интегралы по поперечному сечению необходимо вычислять используя численные методы интегрирования, причем в подынтегральном выражении при больших N будут содержаться и быстро осциллирующие функции, которые необходимо интегрировать с использованием специальных численных методов [125-127]. Поэтому в общем случае задача вычисления матриц системы представляется достаточно трудоемкой.

Исследование метода будем проводить для важного частного случая волноводов – волноводов с кусочно-постоянными $\varepsilon(x, y)$, $\mu(x, y)$. В таком случае интегралы в (199), (201) можно вычислить в символьном виде [129,129]. Далее будем рассматривать класс квадратных волноводов с произвольной прямоугольной вставкой.

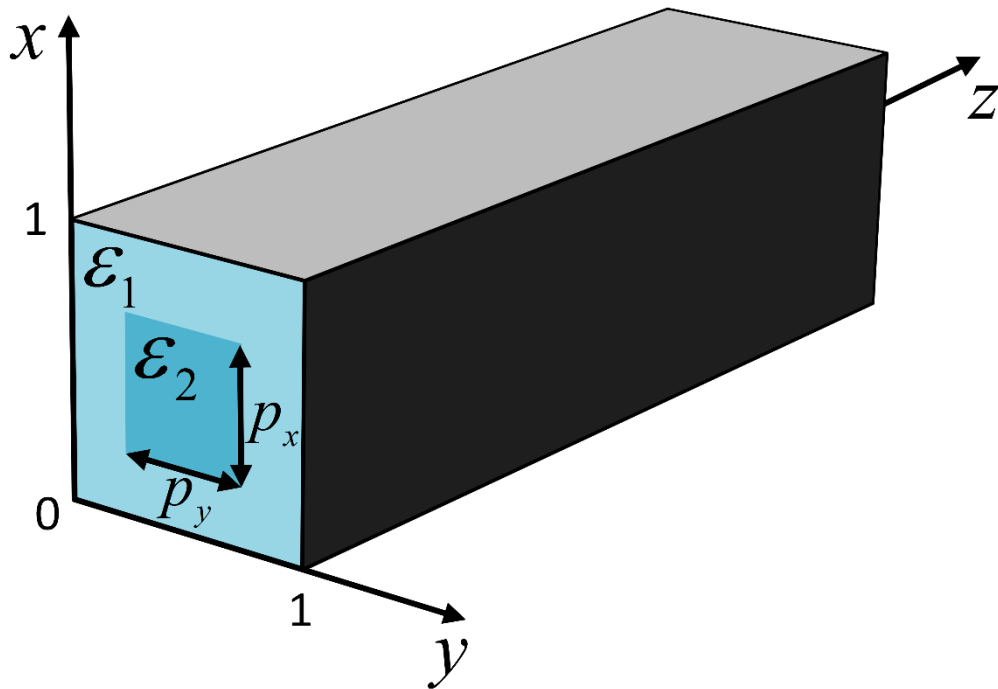


Рисунок 3. Геометрия квадратного волновода с произвольной прямоугольной вставкой ширины p_y , высоты p_x

3.3.1. Символьный расчет элементов матриц

Расчет элементов матрицы A осуществляется в символьном виде посредством приведенной ниже процедуры *maSymb* символьного вычисления элементов a_{ij} , определенных в (199).

```

maSymb := proc(w1, w2, ppx, ppy, e1, e2)
local vh1, vh2, ve1, ve2, ue1, ue2, uh1, uh2, p1, q1,
      r1, p2, q2, r2, r;

vh1 := w2[1];
ve1 := w2[2];
ue1 := w2[3];
uh1 := w2[4];

vh2 := w1[1];
ve2 := w1[2];
ue2 := w1[3];
uh2 := w1[4];

p1 := D2(ve1) + D1(ue1);
q1 := D2(vh2) - D1(uh2);

p2 := D2(uh1) + D1(vh1);
q2 := D1(ve2) - D2(ue2);

r1 := VectorCalculus[DotProduct](p1, q1);
r2 := VectorCalculus[DotProduct](p2, q2);

return ( int(e1·r1 + r2, [x = 0 ..1, y = 0 ..1])
          + int( (e2 - e1)·r1, [ x =  $\frac{-ppx + 1}{2}$ 
          ..  $\frac{ppx + 1}{2}$ , y =  $\frac{-ppy + 1}{2}$  ..  $\frac{ppy + 1}{2}$  ] ) );
end proc;

```

Рисунок 4. Процедура символьного расчета элементов матрицы A

Входными данными в процедуру выступают два элемента базиса неполного метода Галеркина $w1 = \vec{\varphi}_i(x, y)$ и $w2 = \vec{\varphi}_j(x, y)$ для расчета элемента a_{ij} матрицы A и две пары символьных констант: ppx и ppy определяют ширину и высоту вставки, а $e1$ и $e2$ есть диэлектрические проницаемости материала волновода и волноводной вставки соответственно.

Процедура возвращает символьное выражение, определяющее элемент a_{ij} в зависимости от символьных констант ppx , ppy , $e1$ и $e2$. Аналогичным образом выглядит процедура *mbSymb* символьного вычисления элемента матрицы B , текст которой приведен ниже.

```

mbSymb := proc(w1, w2)
local vh1, vh2, ve1, ve2, ue1, ue2, uh1, uh2, p1, q1,
    r1, p2, p3, p4, r;

vh1 := w2[1];
ve1 := w2[2];
ue1 := w2[3];
uh1 := w2[4];

vh2 := w1[1];
ve2 := w1[2];
ue2 := w1[3];
uh2 := w1[4];

p1 := VectorCalculus[DotProduct](D2(vh1),
    D2(vh2));
p2 := VectorCalculus[DotProduct](D2(ue1),
    D2(ue2));
p3 := VectorCalculus[DotProduct](D1(ve1),
    D1(ve2));
p4 := VectorCalculus[DotProduct](D1(uh1),
    D1(uh2));

if (p1 = 0 and p2 = 0 and p3 = 0 and p4 = 0) then
    return (0); end if;

r := (int((p1 + p2 + p3 + p4), [x = 0 ..1, y = 0
    ..1]));

return (r);

end proc;

```

Рисунок 5. Процедура символьного расчета элементов матрицы B

Для расчета элемента b_{ij} матрицы B требуется только два элемента базиса $w1 = \bar{\varphi}_i(x, y)$ и $w2 = \bar{\varphi}_j(x, y)$. В отличие от символического значения, возвращаемого процедурой *maSymb*, символическое выражение для элемента b_{ij} матрицы B не будет зависеть от параметров ppx , ppy , $e1$ и $e2$, а будет определяться только элементами базиса.

Процедура символического расчета элементов матрицы C приведена ниже.

```

mcSymb := proc(w1, w2, ppx, ppy, e1, e2)
local vh1, vh2, ve1, ve2, ue1, ue2, uh1, uh2, p1, q1,
      r1, p2, p3, p4, r;

  vh1 := w2[1];
  ve1 := w2[2];
  ue1 := w2[3];
  uh1 := w2[4];

  vh2 := w1[1];
  ve2 := w1[2];
  ue2 := w1[3];
  uh2 := w1[4];

  p1 := D0(ve1) · D0(vh2);
  p2 := D0(uh1) · D0(ue2);
  if (p1 = 0 and p2 = 0 ) then return (0); end if;

  r := ( int( ( p1 - (  $\frac{p2}{e1}$  ) ), [ x = 0 ..1, y = 0 ..1 ] )
    + int(  $\frac{(e2 - e1) \cdot p2}{e1 \cdot e2}$ , [ x =  $\frac{-ppx + 1}{2}$ 
      ..  $\frac{ppx + 1}{2}$ , y =  $\frac{-ppy + 1}{2}$  ..  $\frac{ppy + 1}{2}$  ] ] ) );

return (r);

end proc;

```

Рисунок 6. Процедура символического расчета элементов матрицы C

Входные данные процедуры *mcSymb* аналогичны входным данным процедуры *maSymb* и описаны выше. Возвращаемое значение будет также, как и возвращаемое значение процедуры *maSymb*, зависеть от символьных констант *ppx*, *ppy*, *e1* и *e2*.

Генерация базиса неполного метода Галеркина реализована также в символьном виде – четырёхкомпонентные вектор-функции, образующие базис, удовлетворяют граничным условиям, причем каждая из компонент, соответствующая одному из потенциалов, удовлетворяет соответствующему граничному условию Дирихле или Неймана. Символьный код, реализующий генерацию базиса (193)-(196), приведен ниже.

```

vh := seq( seq( Vector( [ cos(π·i·x) · cos(π·j·y), 0, 0, 0 ] ), j = 0..N-1 ), i = 0..N-1 ) :
ve := seq( seq( Vector( [ 0, cos(π·i·x) · cos(π·j·y), 0, 0 ] ), j = 0..N-1 ), i = 0..N-1 ) :
ue := seq( seq( Vector( [ 0, 0, sin(π·i·x) · sin(π·j·y), 0 ] ), j = 1..N ), i = 1..N ) :
uh := seq( seq( Vector( [ 0, 0, 0, sin(π·i·x) · sin(π·j·y) ] ), j = 1..N ), i = 1..N ) :
φ := seq( vh[i], i = 2..N2 ), ue, seq( ve[i], i = 2..N2 ), uh;

```

Рисунок 7. Символьная генерация базисных функций

После генерации базиса можно сформировать символьные матрицы *A*, *B* и *C* посредством кода, приведенного ниже.

```

A := Matrix( (4·N2-2), (4·N2-2), (i,j) → maSymb(φ[i], φ[j], px, py, e1, e2) );
B := Matrix( (4·N2-2), (4·N2-2), (i,j) → mbSymb(φ[i], φ[j], px, py) );
C := Matrix( (4·N2-2), (4·N2-2), (i,j) → mcSymb(φ[i], φ[j], px, py, e1, e2) );

```

Рисунок 8. Символьный расчет матриц *A*, *B* и *C*

В рамках выбранного базиса матрица *B* получается диагональной и, так как для вычисления матрицы *K* необходимо обращать матрицу *B*, матрицу *K* также возможно отыскать в символьном виде. В результате расчета получим символьную матрицу *K*, элементы которой будут символьными выражениями, зависящими от параметров волновода *ppx*, *ppy*, *e1*, *e2* и от

волнового числа k_0 . Полученную символьную матрицу K можно посчитать однократно и сохранить и далее использовать ее для численных расчетов.

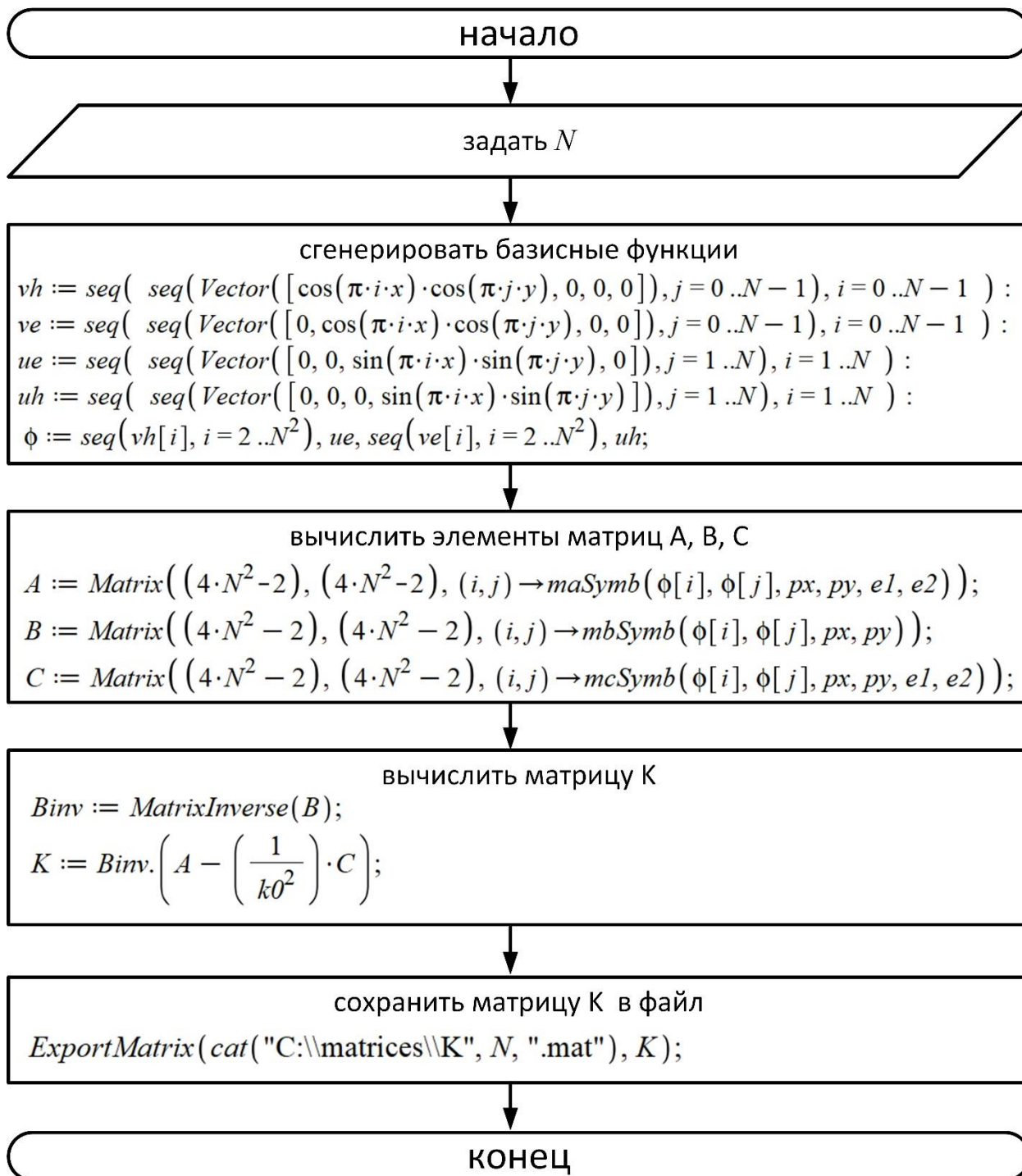


Рисунок 9. Блок-схема алгоритма символьного расчета матрицы K

3.3.2. Численный расчет собственных значений и собственных векторов

Вычислив символично матрицу K для различных значений параметра N , определяющего размерность $M = 4N^2 - 2$ матрицы K , и сохранив результаты в соответствующие файлы, можно переходить к численному расчету нормальных мод.

Расчет собственных векторов и собственных значений в Maple осуществляется с использованием встроенных функций. Maple может выполнять широкий класс различных вычислений. В системе Maple реализованы два варианта вычислений для нужд линейной алгебры: пакет `linalg` и более современный пакет `LinearAlgebra` [130]. Пакет `linalg` устарел, и рекомендуется использовать пакет `LinearAlgebra`.

Maple позволяет проводить различные операции с большими по размеру матрицами и векторами, которые содержат данные с плавающей запятой – как аппаратные данные с плавающей запятой, так и данные с плавающей запятой произвольной точности. Численные расчеты могут быть выполнены достаточно эффективно, используя встроенную в Maple библиотеку подпрограмм численных расчетов линейной алгебры.

Часть подпрограмм вычислительной линейной алгебры в Maple разработаны совместно с Numerical Algorithms Group (NAG) [130]. Кроме того, в Maple также интегрированы части библиотеки CLAPACK и оптимизированных библиотек ATLAS. Maple осуществляет выбор подпрограммы для выполнения запрошенной операции в пакете `LinearAlgebra` на основании различных факторов, к которым относится прежде всего тип данных во входных объектах (матрицы и векторы могут содержать как численные константы, так и символьные), параметры формы хранения и порядка входных объектов.

Если вычисления осуществляются над объектами Maple (матрицы, векторы и скаляры), которые состоят только из числовых данных (например, из констант типа `float`, `complex`) Maple будет применять процедуру `NAG` для выполнения этих вычислений. Кроме того, по крайней мере одна из числовых записей в типах `Matrix` и `Vector` должна быть числом с плавающей запятой. Чтобы определить, выполнено ли это свойство для входных объектов, Maple до начала расчетов проверяет тип данных входных в процедуру объектов. Если определено, что все входные объекты состоят только из числовых данных, и по меньшей мере одно значение является числом с плавающей запятой, то каждая константа в объекте типа `Matrix` и/или `Vector` преобразуется в константу с плавающей запятой по стандартным правилам округления.

Операция проверки входных данных и их преобразование выполняется достаточно быстро, однако на практике при большом числе расчетов, особенно с объектами большой размерности, удобнее избегать дополнительных расходов ресурсов на такие операции и явно указывать при создании объектов типов `Matrix` и `Vector` соответствующий тип данных (`float`).

В некоторых случаях для расчетов доступно сразу несколько различных процедур для выполнения конкретной операции из пакета `LinearAlgebra`, где различия основаны на структуре данных, используемой для представления входных матричных или векторных объектов. Суть этой опции состоит в том, что если заранее известно, что большое количество элементов в матрице всегда равны нулю, то эти элементы не нужно хранить, и вместо стандартной прямоугольной структуры матрицы Maple сможет использовать более компактную структуру данных, адаптированную под конкретный тип разреженной матрицы. Для векторов это также справедливо.

Конструкторы типов данных `Matrix` и `Vector` имеют опцию, с помощью которой можно явно задать форму создаваемого объекта, что позволяет адаптировать матрицы и векторы к оптимальной для расчетов процедуре для данной конкретной задачи. Maple также будет выбирать и соответствующий

тип хранения матриц и векторов, который разработан с учетом особенностей конкретной формы разреженной матрицы.

Если подпрограмма недоступна для выполнения запрошенной операции над входными матрицами и векторами с особой формой разреженности, но эта процедура доступна для более общего вида матриц и векторов, тогда Maple по мере необходимости преобразует матрицы и векторы к более общей форме и будет использована более общая процедура из библиотеки LinearAlgebra.

Для численных расчетов также важно значение переменной UseHardwareFloats – это логический флаг, который управляет средой для вычислений с плавающей запятой. Значение этого флага также подскажет процедурам Maple нужно ли использовать процедуру для работы со стандартными типами данных или же с данными произвольной точности.

Соответствующим образом созданные матрицы и векторы, у которых явно указаны тип данных, форма и установка настроек системы позволяют избежать лишних операций и оптимальным образом хранить матрицы и векторы, а также использовать все преимущества библиотек численных расчетов.

В численных расчетах собственных векторов и собственных значений для произвольных (несимметричных) матриц рассматривается задача следующего вида:

$$A\vec{v}_j = \lambda_j\vec{v}_j \quad (204)$$

где λ_j – собственное значение матрицы A с номером j , а \vec{v}_j – соответствующий правый собственный вектор. Левые собственные векторы \vec{u}_j удовлетворяют задаче:

$$\vec{u}_j^H A = \lambda_j\vec{u}_j^H \quad (205)$$

где введено обозначение $\vec{u}_j^H = \overline{(\vec{u}_j^T)}$.

Сначала матрица A приводится к верхней форме Гессенберга с помощью ортогональных преобразований подобия, а затем QR-алгоритм используется для дальнейшего преобразования матрицы к верхней квазитриугольной форме Шура T с 1×1 и 2×2 блоками, стоящими на главной диагонали [131]. Собственные значения вычисляются из полученной матрицы T . Блоки 2×2 соответствуют комплексно сопряженным парам собственных значений. Собственные векторы исходной матрицы A вычисляются с помощью обратных преобразований подобия.

Точность вычисленных простых собственных значений $\hat{\lambda}_j$ определяется с помощью оценки [132-136]:

$$|\hat{\lambda}_j - \lambda_j| \leq \varepsilon_M \frac{\|A\|_1}{s(\lambda_j)} \quad (206)$$

где λ_j - точные собственные значения, ε_M - машинная точность, а $s(\lambda_j) = \left| \vec{u}_j^H \vec{v}_j \right| / \left\| \vec{u}_j \right\|_2 \left\| \vec{v}_j \right\|_2$. Оценка для угла между вычисленными собственными векторами и точными собственными векторами дается следующим соотношением:

$$\theta(\hat{\vec{v}}_j, \vec{v}_j) \leq \varepsilon_M \frac{\|A\|_1}{sep(\lambda_j)} \quad (207)$$

где $sep(\lambda_j) = \sigma_{\min}(B - \lambda_j I)$, причем B - подматрица матрицы T [133-136].

Более подробно оценки рассмотрены в разделе «Error Bounds for the Nonsymmetric Eigenproblem» [124-126].

Таким образом, используя встроенные функции библиотеки LinearAlgebra, можно численно отыскивать собственные значения и собственные векторы матриц.

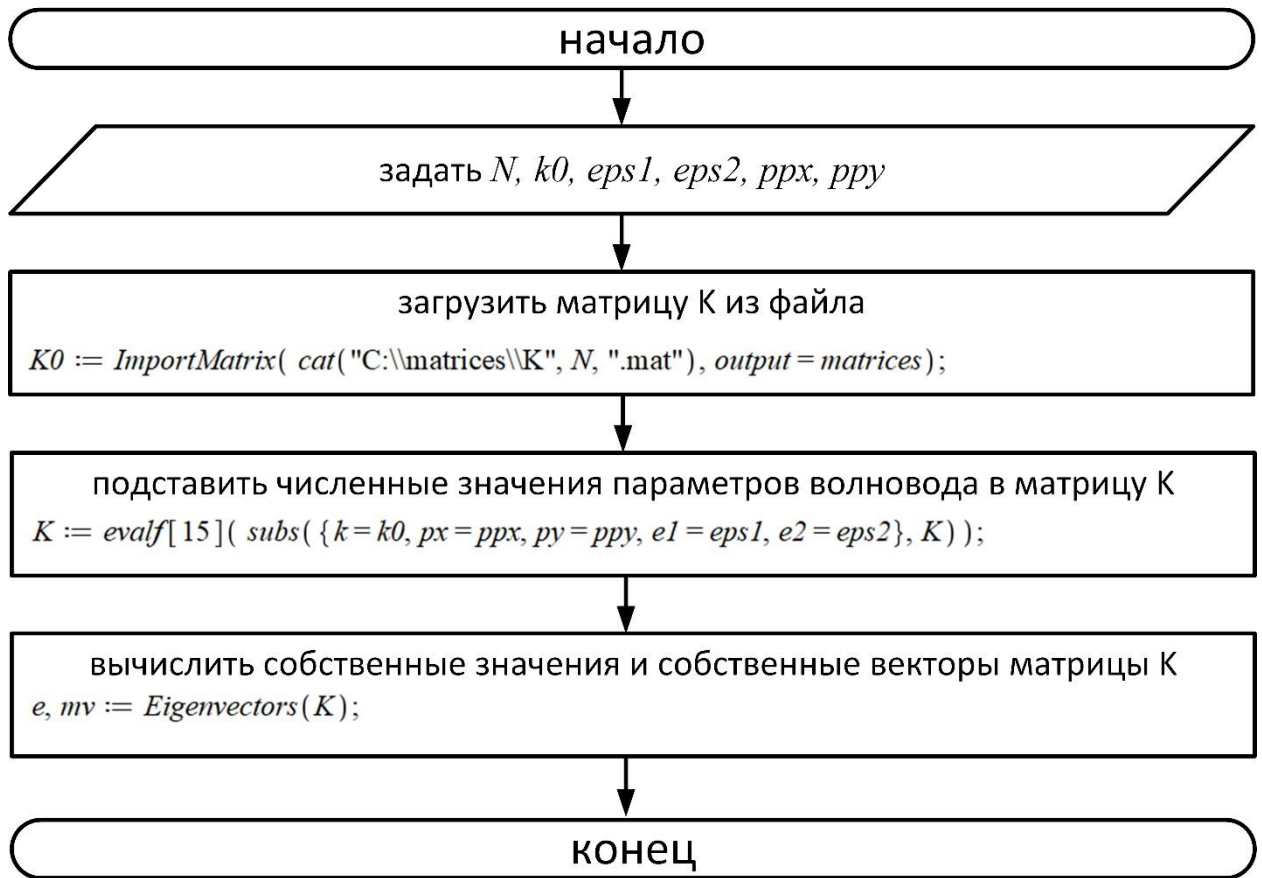


Рисунок 10. Алгоритм расчета собственных значений и собственных функций

Приведенный алгоритм описывает последовательность действий и используемые процедуры Maple, применяемые для вычисления собственных значений и собственных векторов матрицы K . Вычисленные собственные значения есть коэффициенты фазового замедления β_m , а собственные векторы $\vec{\psi}_m = (\psi_{m1}, \psi_{m2}, \dots, \psi_{mM})^T$ определяют поперечную часть нормальной моды номера m :

$$\left(v_h, v_e, u_e, u_h \right)_m^T = e^{ik_0 \beta_m z} \cdot \sum_{j=1}^M \psi_{mj} \bar{\varphi}_j(x, y). \quad (208)$$

3.4. Вычисление нормальных мод квадратных волноводов с прямоугольной вставкой

Используем разработанный алгоритм для вычисления нормальных мод различных квадратных волноводов с прямоугольными вставками различных размеров. Сначала исследуем символьную структуру матриц A, B, C и K , полученных в результате применения разработанного алгоритма, реализованного в системе компьютерной алгебры Maple.

3.4.1. Анализ символьной структуры матриц

Рассмотрим структуру матриц A, B, C , полученных символьно.

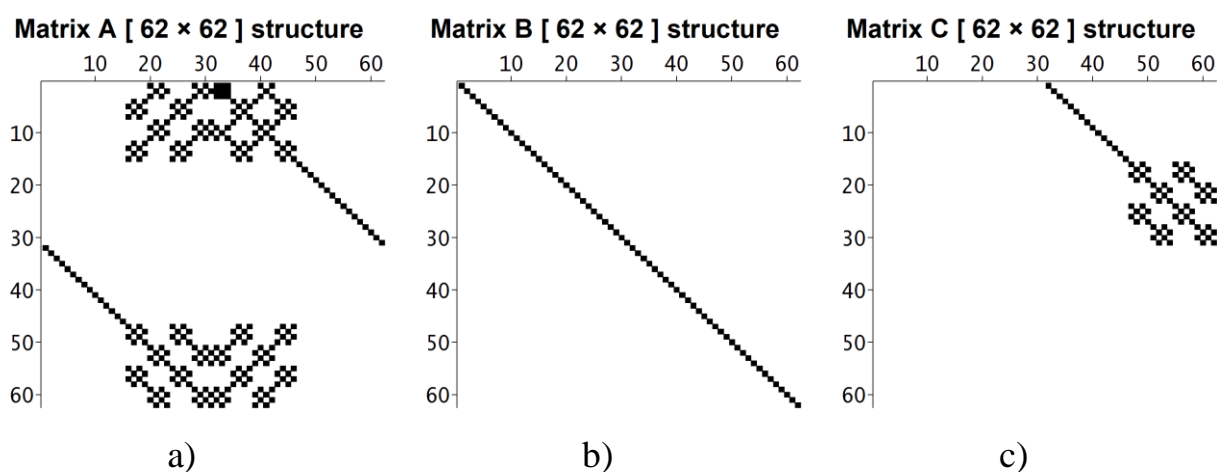


Рисунок 11. Структура матриц A – а), B – б) и C – в) при $N = 4$, что соответствует размерности матриц $M \times M$ при $M = 62$

На приведённом рисунке чёрными квадратами обозначены символьные выражения, тождественно не равные нулю, белыми квадратами – символьные нули. Структура матрицы A сильно разреженная, причём ненулевые символьные элементы матрицы расположены в блочно-шахматном порядке, имеются также блоки матрицы с диагональной структурой. Матрица C обладает также разреженной структурой с блочно-шахматным расположением ненулевых элементов, причём число нулевых элементов значительно превышает количество ненулевых элементов. Можно заметить, что от нуля отличны всего два блока матрицы C : один – с блочно-шахматной структурой,

второй – диагональный. Матрица B обладает более простой – диагональной структурой в рамках выбранного базиса.

Замечание. Отметим еще раз, что структура полученных матриц, изображенная на рисунке выше, символьная. Каждый не равный нулю элемент в ней – нетривиальное символьное выражение, каждый равный нулю элемент – символьный ноль для любого квадратного волновода с любой прямоугольной вставкой.

Подобный анализ символьной структуры матриц позволяет отказаться от расчетов заведомо нулевых элементов, что, во-первых, сэкономит время численных расчетов и во-вторых не будет вносить в матрицу дополнительные погрешности. Рассмотрим теперь структуру матрицы K . Благодаря диагональной структуре матрицы B в выбранном базисе, матрицу K также можно вычислить символьно. Вид матрицы K аналогичен виду матриц A и C и приведен на рисунке ниже.

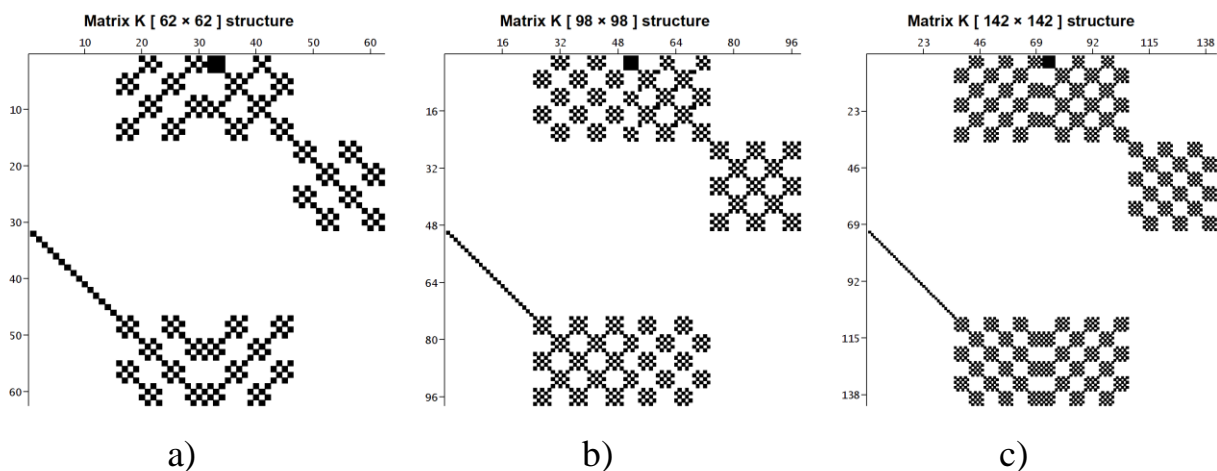


Рисунок 12. Структура матрицы K размерности $M \times M$ при а) $M = 62$,
 б) $M = 98$ и в) $M = 142$

Структура матрицы также содержит большое число символьных нулей, отличны от тождественного нуля только 6 блоков матрицы: 5 из них обладают разреженной шахматной структурой, а оставшийся блок – диагональной. Увеличение числа членов разложения приближенного решения в неполном

методе Галеркина не искажает разреженной структуры матрицы K , а только лишь увеличивает размерность этих блоков.

Далее полученные символьные матрицы K для различного числа удерживаемых членов разложения неполного метода Галеркина M и сохраненные в файлы, использовались для численных расчётов. Подобное использование символьных вычислений позволило избежать многократного повторения трудоёмкой процедуры численного интегрирования и сразу переходить к расчетам, используя реализованный в Maple алгоритм.

3.4.2. Численный расчет нормальных мод квадратного волновода с прямоугольной вставкой

Рассмотрим квадратный волновод единичной ширины и высоты из материала с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 2$ со вставкой ширины и высоты p_x и p_y соответственно из более оптически плотного материала с $\varepsilon_2 = 3$. Вычислим собственные значения (коэффициенты фазового замедления) и нормальные моды для конфигурации $p_x = p_y = 0.5$. В таком случае точные коэффициенты фазового замедления не известны аналитически.

В результате расчета при $N=12$ (что соответствует размерности матрицы $M \times M$ при $M=574$) получились следующие коэффициенты фазового замедления, первые десять из которых приведены ниже:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 1.43296289171709, \\ \beta_2 &= 1.42946771606211, \\ \beta_3 &= 1.23553335397222, \\ \beta_4 &= 1.16064902183147, \\ \beta_5 &= 0.840564995190615, \\ \beta_6 &= 0.811608008252520, \\ \beta_7 &= 0.663953243441277, \\ \beta_8 &= 0.655779874680068, \\ \beta_9 &= 0.399854493680243, \\ \beta_{10} &= 0.396923647592231.\end{aligned}\tag{209}$$

Рассмотрим далее вычисленные собственные функции, соответствующие нескольким первым коэффициентам фазового замедления.

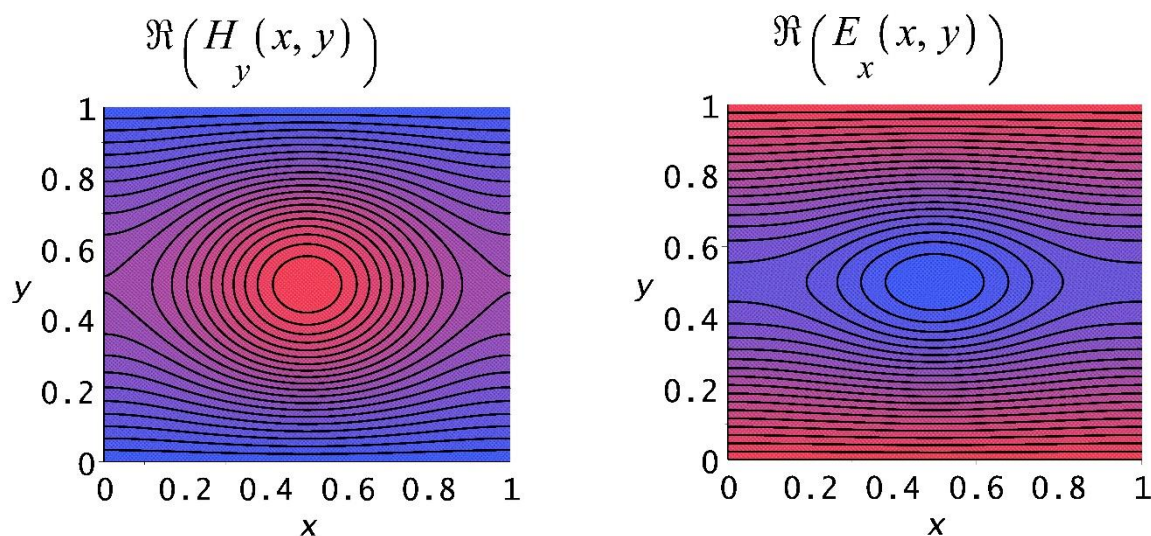


Рисунок 13. Компоненты электромагнитного поля, отвечающие $\beta_1 \approx 1.4330$

На рисунке выше изображены линии уровня, отвечающие первой моде волновода с коэффициентом фазового замедления $\beta_1 \approx 1.4330$.

$\Re(H_y(x, y)) = \text{Re}(H_y(x, y))$ и $\Re(E_x(x, y)) = \text{Re}(E_x(x, y))$ - это действительные части компонент H_y и E_x . Компоненты электромагнитного поля, отвечающие TE-моде, а именно E_y и H_x пренебрежимо малы по сравнению с приведенными на рисунке компонентами H_y и E_x , а потому не приводятся. Из вида представленных на рисунке компонент H_y и E_x можно заметить, что поле для обеих компонент сосредоточено в области, соответствующей вставке из более оптически плотного материала. Подобное поведение иллюстрирует известный оптический принцип распространения излучения в волноводах.

Рассмотрим теперь вторую волноводную моду, характеризующуюся коэффициентом фазового замедления $\beta_2 \approx 1.4294$.

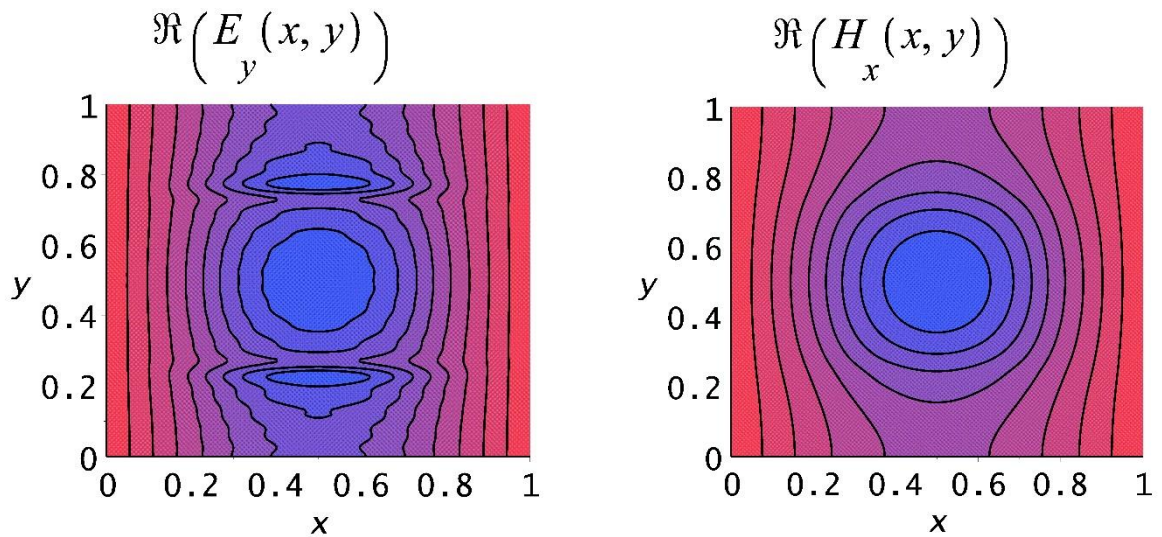


Рисунок 14. Компоненты электромагнитного поля, отвечающие $\beta_2 \approx 1.4294$

На рисунке выше изображены линии уровня, отвечающие второй моде волновода с коэффициентом фазового замедления $\beta_2 \approx 1.4294$. В данном случае от нуля отличны компоненты поля E_y и H_x – компоненты ТЕ-моды. Поле для этой моды также сосредоточено в области, соответствующей вставке из более оптически плотного материала, чего и следовало ожидать. Кроме того, у компоненты поля E_y наблюдаются небольшие дополнительные пики интенсивности вблизи границы вставки из более оптически плотного материала, что может быть следствием наличия скачка диэлектрической проницаемости на границе.

Следующая мода с $\beta_3 \approx 1.2355$ будет содержать отличные от тождественного нуля компоненты и ТЕ-моды и ТМ-моды.

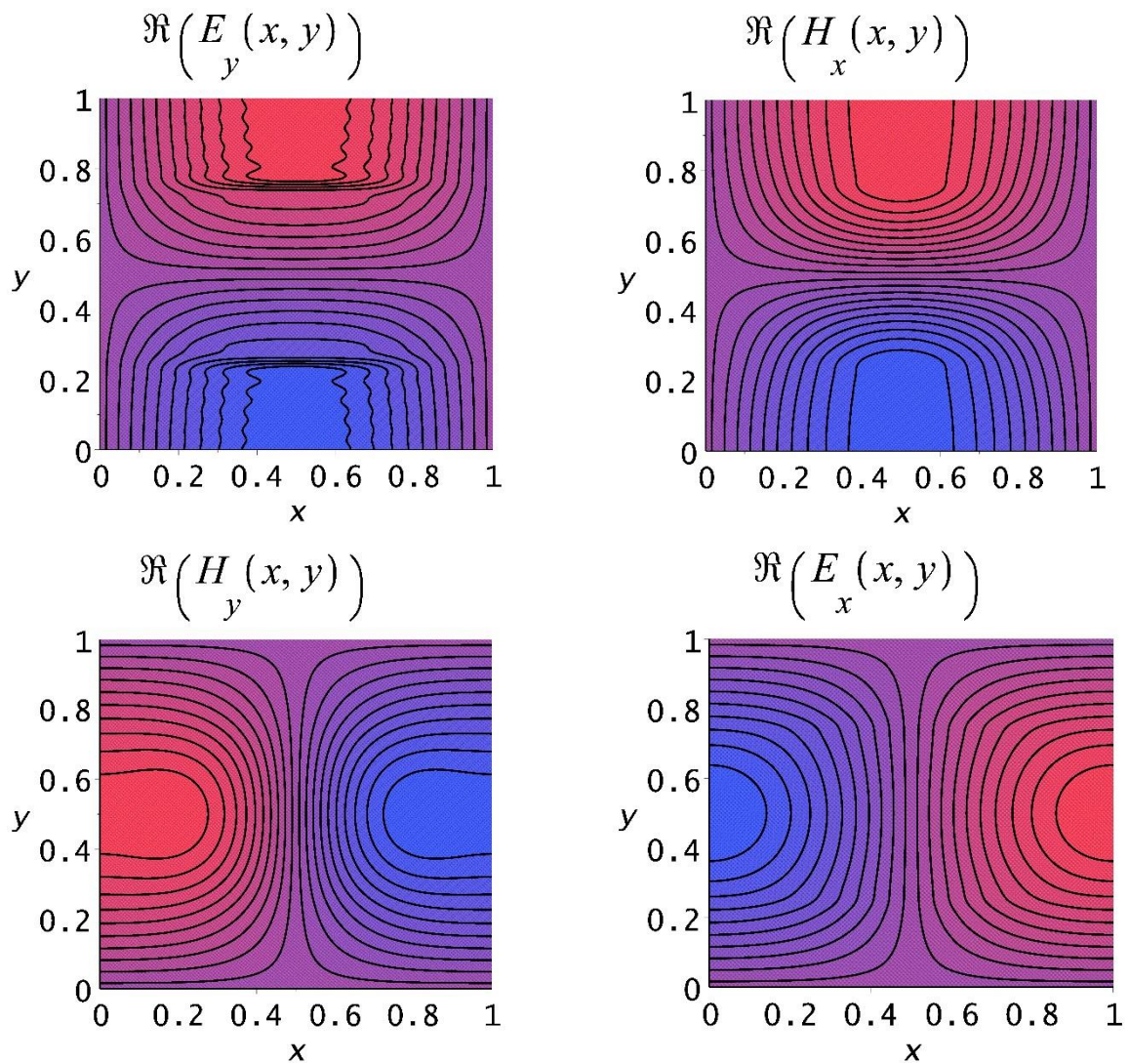


Рисунок 15. Компоненты электромагнитного поля, отвечающие $\beta_3 \approx 1.2355$

У рассматриваемой моды поле уже не локализовано внутри области из более оптически плотного материала, а сосредоточено снаружи этой области. Такие моды также существуют в волноводах и как правило при решении задач дифракции на них приходится значительно меньшая интенсивность, чем на моды, поле которых сосредоточено в области, соответствующей вставке из более оптически плотного материала.

Полученные собственные функции, определяющие распределение волноводных мод в области, соответствующей поперечному сечению волновода, качественно согласуются с физическим представлением о распространении излучения в волноводе. Количественная оценка полученных нормальных мод также будет дана в следующих разделах настоящей главы.

Проанализируем далее дисперсионную зависимость для квадратного волновода с квадратной вставкой $p_x = p_y = p$ в зависимости от параметра p характеризующего размер вставки. Будем увеличивать численное значение параметра p от нуля, что будет соответствовать однородному волноводу с $\varepsilon = \varepsilon_1 = 2$, до единицы, что будет соответствовать однородному волноводу с $\varepsilon = \varepsilon_2 = 3$ и оценивать полученные значения β_j при каждом значении p .

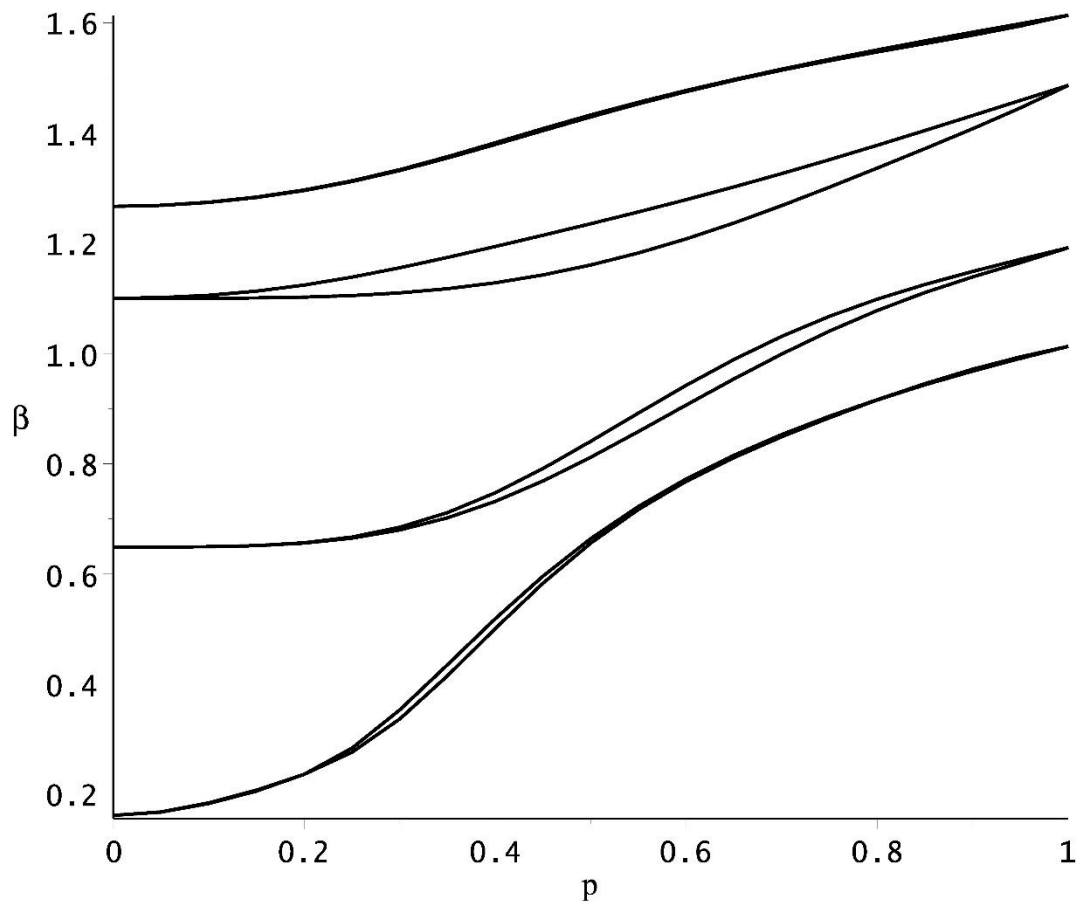


Рисунок 16. График дисперсионной зависимости для квадратного волновода с квадратной вставкой ширины и высоты p

При $p = 0$ в волноводе имеются 4 распространяющихся волноводных моды. Увеличивая значения параметра p до $p = 0.3$ можно заметить, что распространяющихся мод стало больше, причем некоторые собственные значения расщепились и превратились в два близких, но различных собственных значения. Дальнейшее увеличение значения параметра p

приводит сначала к большему расщеплению собственных значений, а потом к их сходимости в одно кратное собственное значение при $p=1$, что соответствует однородному волноводу из более оптически плотного материала с $\varepsilon = \varepsilon_2 = 3$. В таком волноводе также присутствует 4 распространяющихся моды, численные значения коэффициентов фазового замедления которых отличаются от аналогичных коэффициентов для однородного волновода с $p=0$, так как он из менее оптически плотного материала.

Построенные дисперсионные зависимости также укладываются в качественные представления о распространении излучения в оптических волноводах.

3.4.3. Численный анализ сходимости собственных значений и собственных функций

Проанализируем теперь численно полученные результаты. Рассмотрим одну конфигурацию волновода с $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 3$, $p_x = p_y = 0.5$ и вычислим для такого волновода собственные значения (коэффициенты фазового замедления) и собственные функции для различных значений $M(N) = 4N^2 - 2$, где M – число членов разложения приближенного решения в неполном методе Галеркина. Рассмотрим сначала сходимость собственных значений. За меру сходимости возьмем относительную погрешность

$$\delta_M(\beta_j) = \left| \frac{\beta_j^{M(N)} - \beta_j^{M(N+1)}}{\beta_j^{M(N+1)}} \right|, \quad (210)$$

где через $\beta_j^{M(N)}$ обозначено j -е собственное значение, полученное численно при $M = 4N^2 - 2$, а $\beta_j^{M(N+1)}$ – j -е собственное значение, полученное численно при $M = 4(N+1)^2 - 2$. Расчеты будем проводить для $N = 10, 12, 14, 16, 18$,

чему соответствует $M = 398, 574, 782, 1022, 1294$. Приведем ниже график сходимости для первых четырех собственных значений.

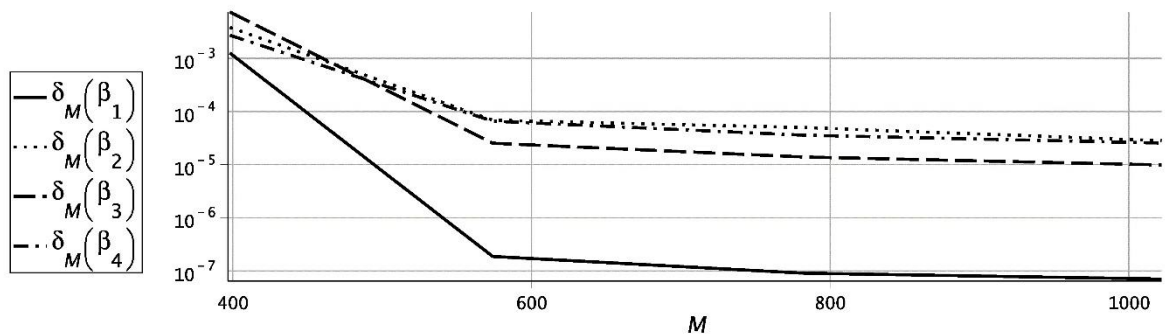


Рисунок 17. Графики относительной погрешности $\delta_M(\beta_j)$ для $j = 1, 2, 3, 4$

Можно заметить, что относительная погрешность первого собственного значения быстрее других убывает. Относительная погрешность в указанном диапазоне значений M для первых четырех собственных значений изначально меньше чем 10^{-2} (меньше 1%) и убывает до значений порядка $5 \cdot 10^{-5}$, а для первого собственного значения относительная погрешность еще меньше – порядка 10^{-7} . Сходимость собственных значений, таким образом, имеет место, порядок величины относительной погрешности $5 \cdot 10^{-5}$ говорит о достаточной точности проводимых расчетов.

Рассмотрим теперь график сходимости собственной функции, отвечающей β_4 : как правило младшие собственные функции определяются с большими погрешностями, поэтому рассмотрим относительную погрешность менее численно устойчивой собственной функции.

За меру сходимости компоненты E_x возьмем относительную погрешность

$$\delta_M(E_x) = \int_0^1 \int_0^1 \left| E_x^{M(N)} - E_x^{M(N+1)} \right|^2 dx dy \quad (211)$$

где через $E_x^{M(N)}$ обозначена полученная численно нормированная на единицу

компонента $E_x \left(\int_0^1 \int_0^1 |E_x^{M(N)}|^2 dx dy = 1 \right)$ при $M = 4N^2 - 2$, а $E_x^{M(N+1)}$ –

нормированная компонента E_x при $M = 4(N+1)^2 - 2$. Для остальных компонент относительная погрешность определяется аналогичным образом.

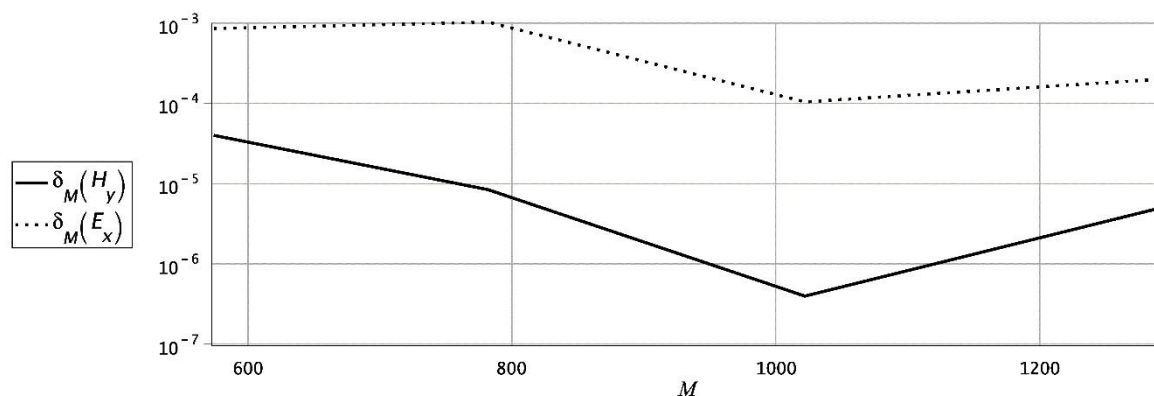


Рисунок 18. Графики относительной погрешности $\delta_M(H_y), \delta_M(E_x)$ компонент TM-моды для четвертой моды

Рассматривая графики относительных погрешностей для компонент TM-моды можно заметить, что сходимость в данном случае не монотонная, в отличие от погрешности собственных значений. Величины относительных погрешностей при этом имеют значение порядка 10^{-4} .

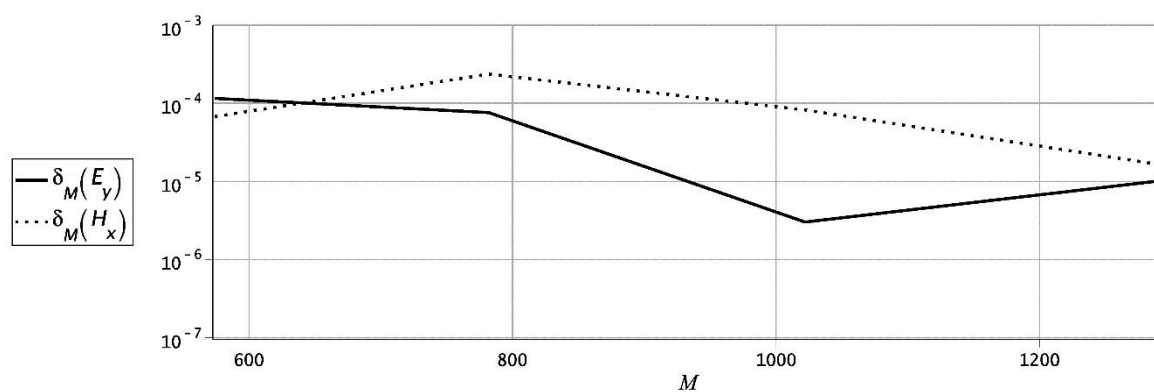


Рисунок 19. Графики относительной погрешности $\delta_M(E_y), \delta_M(H_x)$ компонент TE-моды для четвертой моды

Относительные погрешности для компонент ТЕ-моды также убывают не монотонно. Полученные численные значения их величин на порядок меньше аналогичных величин для ТМ-моды – они имеют порядок 10^{-5} .

Вычисленные собственные значения и собственные функции, определяющие нормальные моды квадратного волновода с прямоугольной вставкой качественно согласуются с физическим представлением о поведении волноводных мод, распространяющихся в закрытом волноводе. Численные оценки относительной погрешности также подтверждают численную устойчивость вычисляемых величин, что косвенно подтверждает адекватность полученных результатов.

Для проверки работоспособности метода также проведем верификацию путем сравнения численных результатов, получаемых в рамках метода с аналитически известными результатами на примере модельной структуры полого волновода.

3.4.4. Верификация метода (сравнение с полым волноводом)

Рассмотрим полый квадратный волновод с единичной шириной и высотой – то есть волновод без вставки ($p_x = p_y = 0$) с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 1$ и магнитной проницаемостью $\mu_1 = 1$.

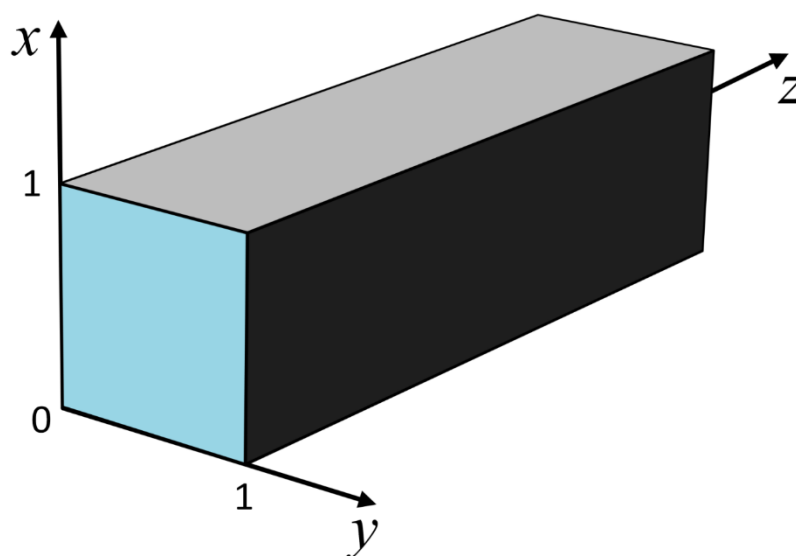


Рисунок 20. Структура полого волновода.

Вычислим методом четырех потенциалов собственные значения β_j , определяющие коэффициенты фазового замедления соответствующих нормальных мод рассматриваемого полого волновода. Спектральная задача для полого волновода будет иметь следующий вид:

$$K_0 \vec{\psi} = \beta \vec{\psi}, \quad (212)$$

где $K_0 = B^{-1} \left(A - \frac{1}{k_0^2} C \right)$, элементы матрицы B определяются формулой (200),

а элементы матриц A, C определяются формулами, приведенными ниже:

$$\begin{aligned} a_{ij}^0 &= \iint_S (\nabla' \varphi_{j2} + \nabla \varphi_{j3}) \cdot (\nabla' \varphi_{i1} - \nabla \varphi_{i4}) dx dy + \\ &+ \iint_S (\nabla' \varphi_{j4} + \nabla \varphi_{j1}) \cdot (\nabla' \varphi_{i2} - \nabla \varphi_{i3}) dx dy, \\ c_{ij}^0 &= \iint_S (\Delta \varphi_{j2} \Delta \varphi_{i1} - \Delta \varphi_{j2} \Delta \varphi_{i3}) dx dy. \end{aligned} \quad (213)$$

С учетом того, что величины ε_1, μ_1 – константы, и в интегралах из (213) подинтегральные выражения упрощаются, как и структура матриц A, C .

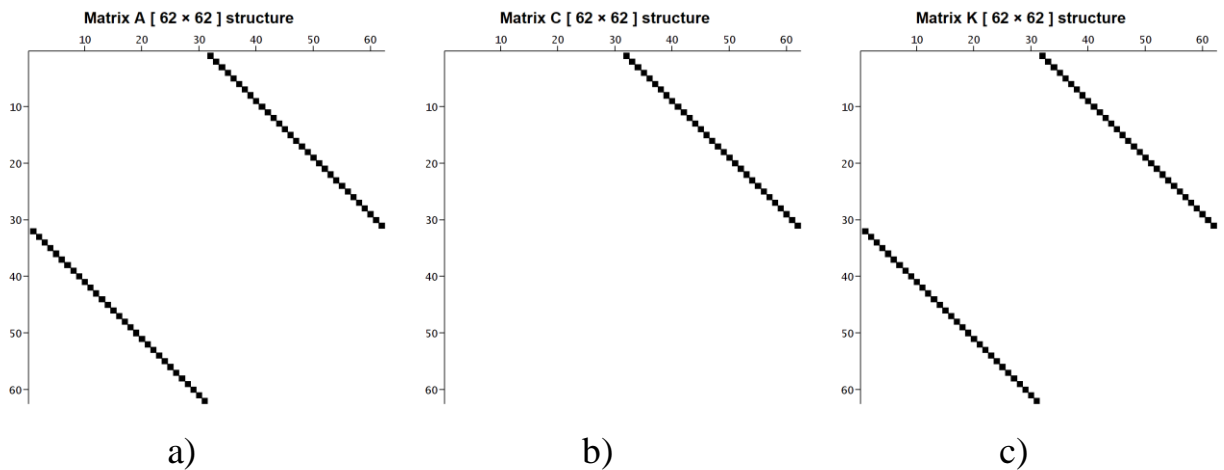


Рисунок 21. Структура матриц A – а), C – б) и K_0 – в) при $N = 4$, что соответствует размерности матриц $M \times M$ при $M = 62$

Можно заметить, что в полном волноводе структура матриц упростилась, у матрицы K_0 от тождественного нуля отличны только две диагонали.

Замечание. Изменяя порядок следования базисных функций можно изменять положение блоков в матрицах A, C, K_0 , поэтому приведенные на рисунках выше структуры определены с точностью до перестановок блоков.

Вычислим далее методом четырех потенциалов собственные значения матрицы K_0 сравним полученные в результате численного расчета собственные значения с аналитически известными собственными значениями, определенными ниже:

$$\beta_{1,2} = \pm \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{k_0^2}}, \quad \beta_{3,4} = \pm \sqrt{1 - \frac{2\pi^2}{k_0^2}}. \quad (214)$$

Собственные значения, полученные в рамках предложенного метода, будем обозначать $\beta_j^{M(N)}$, где параметр $M(N) = 4N^2 - 2$ есть число удерживаемых собственных функций в разложении приближенного решения. Далее приведем абсолютные и относительные погрешности для вычисленных собственных значений, полученных при $N = 3, 4, 5, 6, 7$, чему соответствуют размерности матриц $M = 34, 62, 98, 142, 194$:

$$\begin{aligned} \left| \beta_j^{M(N)} - \beta_j \right| &< 2.82 \cdot 10^{-11}, \\ \frac{\left| \beta_j^{M(N)} - \beta_j \right|}{\left| \beta_j \right|} &< 3.62 \cdot 10^{-11}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (215)$$

Полученные в (215) величины погрешностей демонстрируют высокую точность приближенных расчетов собственных значений β_j , определяющих коэффициенты фазового замедления соответствующих нормальных мод полого волновода.

3.5. Модель «ящика Дирихле» приближенного описания открытых волноводов

На физическом уровне строгости хорошо известно, что собой представляют открытые волноведущие системы. Например, планарный нерегулярный волновод представляет собой диэлектрический слой на подложке, на который нанесена локальная неоднородность. На неоднородность набегают электромагнитное монохроматическое, поляризованное излучение вида

$$\vec{E} = \vec{E}(x, z)e^{-i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}(x, z)e^{-i\omega t} \quad (216)$$

и представляет собой, например, ТЕ-моду, распространяющуюся вдоль оси Oz (в направлении возрастания переменной z), и инвариантную относительно оси Oy . Если бы волновод не имел нерегулярности, волна (216) прошла бы вдоль регулярного волновода без изменений (отражений). Наличие нерегулярности в некотором смысле препятствует прохождению излучения и в результате такого прохождения часть энергии отразится, а часть энергии пройдет. Описанный процесс прохождения волноводного излучения в нерегулярных волноводах называют волноводной дифракцией.

Электромагнитное излучение, распространяющееся в закрытом волноводе, согласно теореме Тихонова А.Н., Самарского А.А. [4] всегда представляет собой суперпозицию нормальных ТЕ- и ТМ-мод. Для открытого волновода в качестве (216) необходимо взять суперпозицию конечного числа так называемых направляемых мод, а также необходимо добавить в разложение интегралы по подложечным и покровным модам, которые соответствуют непрерывному спектру. Аналогичные разложения необходимо будет записать и для отраженного и прошедшего полей.

Такое представление поля не позволяет сформулировать задачу дифракции строго математически по сравнению со случаем закрытого волновода. Представляется очень заманчивой идея отыскания приближенной

модели открытого волновода, в рамках которой возможно применить более привычные и изученные математические конструкции, аналогичные конструкциям в модели закрытых волноведущих систем. В действительности в вычислительных методах интегралы от непрерывных функций приближенно заменяются на конечные суммы, возможно, по аналогии можно ввести приближенную дискретизацию непрерывного спектра.

Один из вариантов дискретизации непрерывного спектра, который приводит к корректной приближенной модели открытого волновода был предложен в работе [54, 137]. В предложенном подходе для построения приближенной модели использовано предположение, что в реальном открытом волноводе объекты, помещенные достаточно далеко от волноводного слоя, не влияют существенным образом на интересующие нас характеристики волны. Описанное предположение вносит некоторое возмущение в задачу. Предложенное построение, другими словами, предполагает помещение рассматриваемого открытого волновода в полный закрытый волновод, границы которого удалены на достаточно большое расстояние от рассматриваемого волноводного объекта.

В работах [54, 137] описанная модель названа моделью «ящика Дирихле» и исследована численно в рамках скалярных спектральных задач и скалярных задач дифракции. В рамках модели поставлены корректные скалярные задачи дифракции и исследована зависимость решения от высоты объемлющего закрытого волновода. Данные численных экспериментов позволили сделать вывод, что направляемые волноводные моды описываются с высокой точностью в рамках модели «ящика Дирихле». Модель ящика также формирует естественный способ дискретизации непрерывного спектра, моды которого также аппроксимируются с высокой точностью.

В рамках настоящей работы также используем модель «ящика Дирихле» в полной векторной постановке и вычисляем волноводные моды планарного трехслойного волновода, помещенного в объемлющий закрытый волновод.

3.5.1. Численный расчет нормальных мод открытых трехслойных волноводов в «ящике Дирихле»

Рассмотрим трехслойный планарный открытый волновод, который изучается в теории интегрально-оптических (открытых) волноводов, в рамках модели «ящика Дирихле», то есть поместим открытый планарный трехслойный волновод в объемлющий закрытый волновод.

Будем проводить расчет для следующей конфигурации трехслойного волновода: трехслойный волновод состоит из волноводного слоя $0 < x < h$, который характеризуется диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_f = 1.565^2$. Покровному слою $h < x < R$ соответствует диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_c = 1.00^2$, а подложке $-R < x < 0$ – $\varepsilon_s = 1.47^2$. Толщина волноводного слоя для рассматриваемого примера составляет $h = 2\lambda$, высота ящика $R = 8\lambda$ и ширина ящика $R_L = 20\lambda$, где λ – длина волны излучения и в дальнейших расчетах открытых волноводов, помещенных в объемлющие закрытые полые волноводы $\lambda = 0.55$.

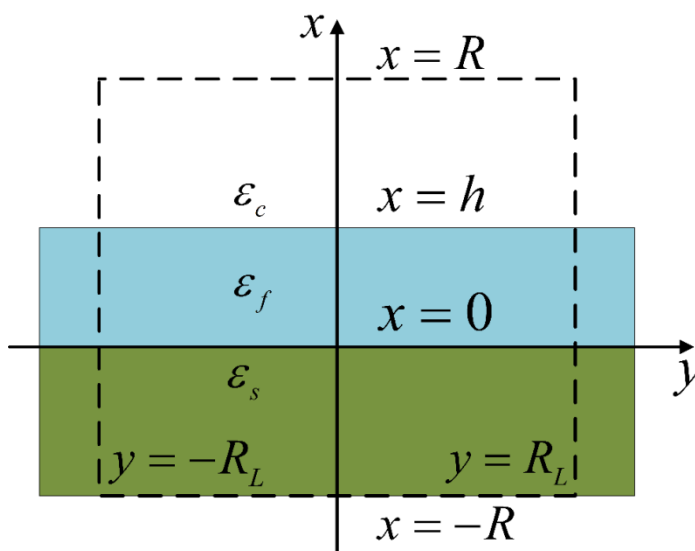


Рисунок 22. Планарный трехслойный волновод, помещенный в объемлющий закрытый волновод $-R < x < R$, $-R_L < y < R_L$

Вычислим коэффициенты фазового замедления и соответствующие им нормальные моды, используя разработанный символьно-численный алгоритм для $N = 18$, что соответствует размерности матриц $M = 1294$. Ниже приведены первые 10 собственных значений, полученных численно в рамках метода четырех скалярных потенциалов:

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= 1.55149075170635, \\
 \beta_2 &= 1.55143949114562, \\
 \beta_3 &= 1.55012661997591, \\
 \beta_4 &= 1.52947594080929, \\
 \beta_5 &= 1.51174127877346, \\
 \beta_6 &= 1.51171067538952, \\
 \beta_7 &= 1.50719395295600, \\
 \beta_8 &= 1.50339026691383, \\
 \beta_9 &= 1.46963697591635, \\
 \beta_{10} &= 1.46880283710918.
 \end{aligned}
 \tag{217}$$

Рассмотрим получаемые при расчетах собственные функции.

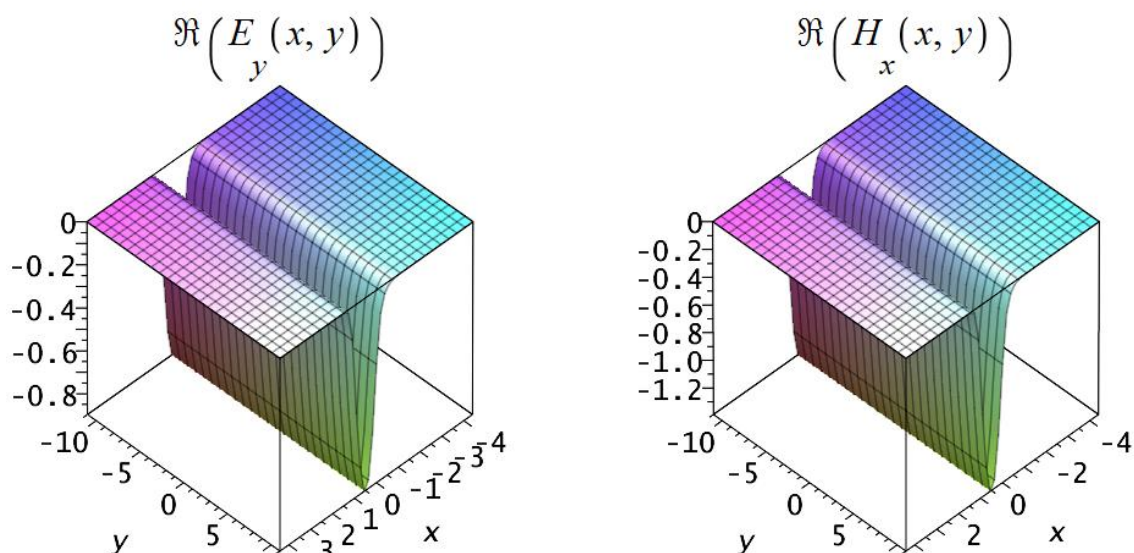


Рисунок 23. Компоненты электромагнитного поля, отвечающие $\beta_1 \approx 1.5515$

При $\beta_1 \approx 1.5515$ компоненты поля E_x и H_y (которые отвечают ТМ-моду) представляют собой малые величины порядка 10^{-9} и в масштабе рисунка

столь малые величины не видны, поэтому их графики не приводятся. В это же время компоненты E_y, H_x - величины порядка единицы. Их качественное поведение – убывание за пределами волноводного слоя и осцилляция внутри волноводного слоя, причем первая мода на отрезке $x \in [0, h]$, соответствующем области волноводного слоя, не имеет узлов – полностью соответствует поведению направляемой моды, получаемой в рамках скалярной модели. При этом мода с численно близким коэффициентом фазового замедления в скалярной модели также является ТЕ-модой. Поэтому, можно заключить, что метод четырех потенциалов качественно описывает поведение ТЕ-моды, полученной в рамках скалярной модели. Аналогичное утверждение можно сделать и для второй ТЕ-моды ($\beta_5 \approx 1.5117$) – см. рисунок ниже.

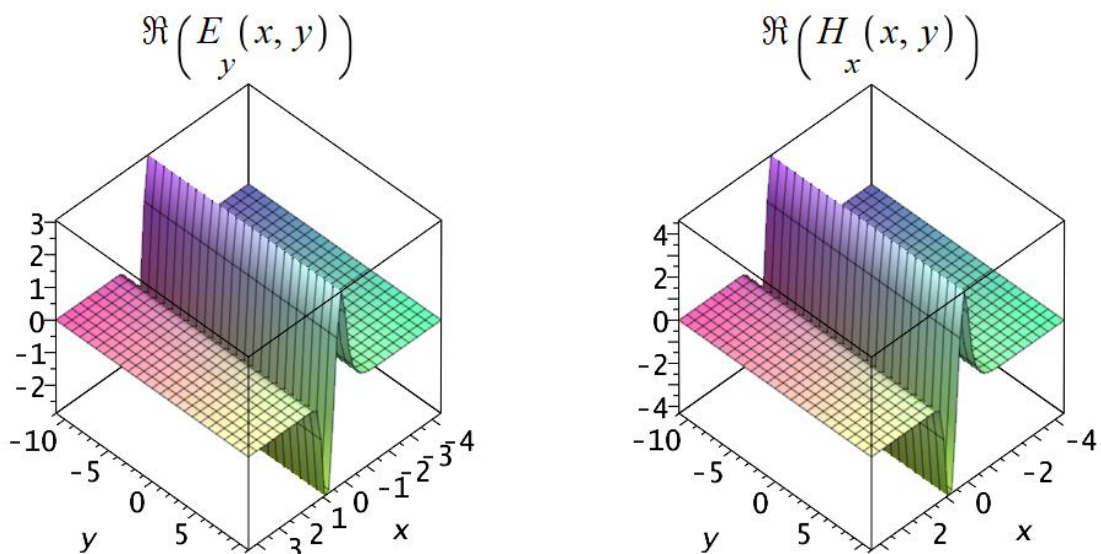


Рисунок 24. Компоненты электромагнитного поля, отвечающие $\beta_5 \approx 1.5117$

У второй ТЕ-моды, соответствующей $\beta_5 \approx 1.5117$, компоненты ТМ-моды также представляют собой величины порядка 10^{-8} (аналогично прошлому случаю, в масштабе рисунка такие величины не видны), при этом качественное поведение компонент E_y и H_x такое же, как в случае скалярной модели – мода осциллирует внутри волноводного слоя и убывает за его

пределами, причем, в отличие от первой ТЕ-моды, у второй моды на отрезке $x \in [0, h]$ имеется один узел.

Отметим также, что кроме мод, описываемых в рамках скалярной модели, имеются также и другие моды, которые скалярная модель не описывает. В действительности уравнения скалярной модели получаются в предположении постоянства компонент поля вдоль оси Oy . Поле, изменяющееся по y , скалярной моделью не описывается.

Рассматриваемый планарный трехслойный открытый волновод помещен в объемлющий закрытый волновод, который вообще говоря конечен в направлениях Ox и Oy . Благодаря наличию конечных границ появляются и новые по сравнению со скалярной моделью решения. Если обратить внимание на вычисленные собственные значения (217), то можно заметить, что первые два собственных значения $\beta_1 = 1.55149075170635, \beta_2 = 1.55143949114562$ различаются в пятом знаке после запятой. При этом первое собственное значение β_1 совпадает с точностью $2 \cdot 10^{-6}$ с собственным значением первой направляемой ТЕ-моды скалярной модели (см. (221)), соответствующая собственная мода также качественно совпадает с первой направляемой ТЕ-модой скалярной модели. Рассмотрим поэтому компоненты моды, отвечающей близкому к β_1 собственному значению β_2 . Графики компонент представлены на рисунке ниже.

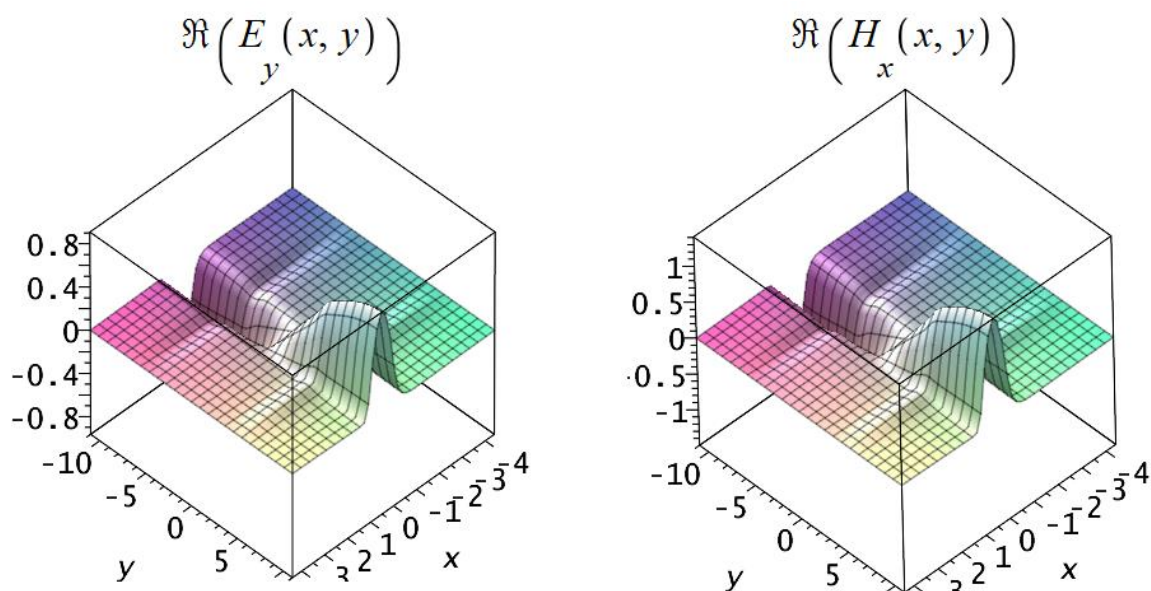


Рисунок 25. Компоненты электромагнитного поля, отвечающие $\beta_2 \approx 1.5514$

Как видно из рисунка, поведение компоненты E_y вдоль оси Ox аналогично поведению собственной моды с $\beta_1 \approx 1.5515$ – убывание за пределами волноводного слоя и осцилляция внутри волноводного слоя. Однако вдоль оси Oy мода, соответствующая $\beta_2 \approx 1.5514$, не постоянна и, соответственно, скалярной моделью не описывается.

Аналогичным образом около каждого собственного значения, описывающего направляемую моду, аналогичную направляемой моде скалярной модели, наблюдаются близкие собственные значения (см. (217)), которые описывают моды, изменяющиеся по y , не описанные скалярной моделью, однако присутствующие в исследуемой векторной модели.

Рассмотрим теперь полученные нормальные моды для $\beta_{10} = 1.4688$. Стоит отметить, что численное значение β_{10} меньше, чем показатель преломления подложки ($n_s = 1.47$), что соответствует так называемой излучательной подложечной моде открытого волновода. Такие моды, в отличие от мод направляемых, осциллируют и в области волноводного слоя, и в области подложки. В покровном слое они убывают экспоненциально подобно направляемым модам. Рассмотрим компоненты моды с $\beta_{10} = 1.4688$.

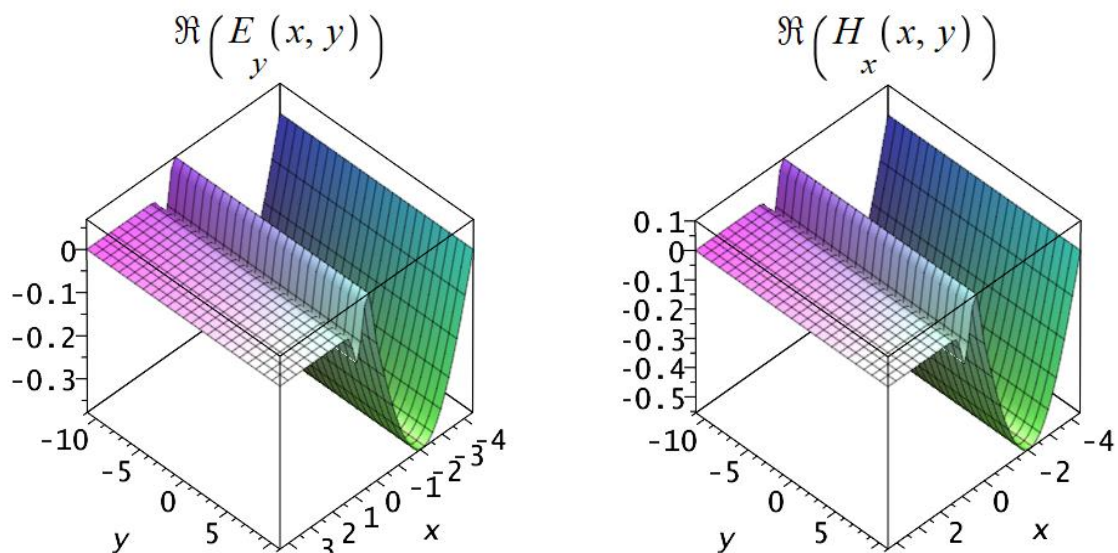


Рисунок 26. Компоненты электромагнитного поля, отвечающие $\beta_{10} \approx 1.4688$

Подобно описанному поведению излучательных мод подложки, полученная мода осциллирует в областях волноводного слоя и подложки и убывает экспоненциально в покрывном слое, что также согласуется с поведением аналогичных мод открытого волновода [26].

Полученные собственные функции, определяющие приближенно волноводные моды открытого волновода в модели «ящика Дирихле», качественно согласуются с физическим представлением о распространении мод в открытом волноводе. Количественная оценка полученных нормальных мод также будет дана в следующих разделах настоящей главы.

Проанализируем далее дисперсионную зависимость направляемых мод открытого трехслойного волновода в зависимости от толщины h волноводного слоя, величину h далее будем представлять в длинах волн излучения. Будем оценивать полученные значения β_j , соответствующие направляемым модам открытого волновода (то есть тем, у которых $\sqrt{\varepsilon_s} < \beta_j < \sqrt{\varepsilon_f}$) при каждом значении h .

На рисунке ниже представлены графики дисперсионных кривых, пунктирными линиями отмечены значения $\sqrt{\varepsilon_s}$ и $\sqrt{\varepsilon_f}$.

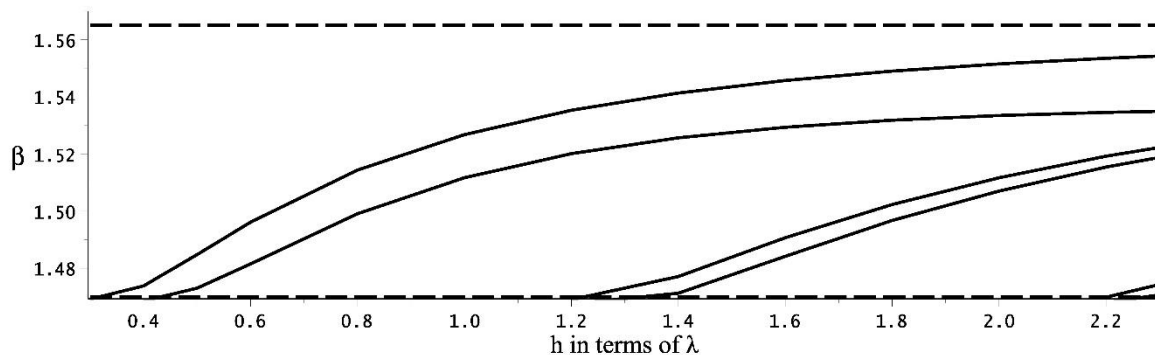
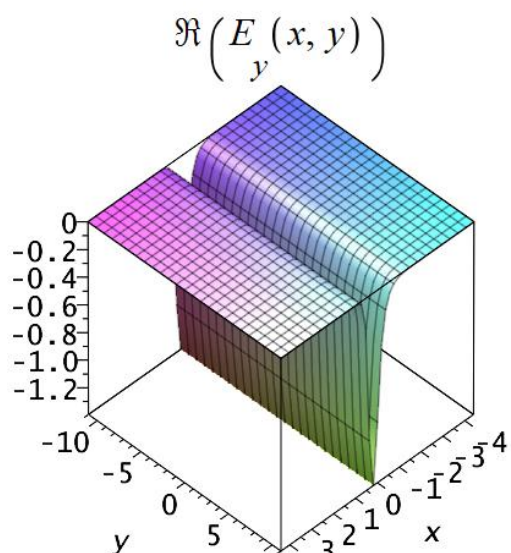


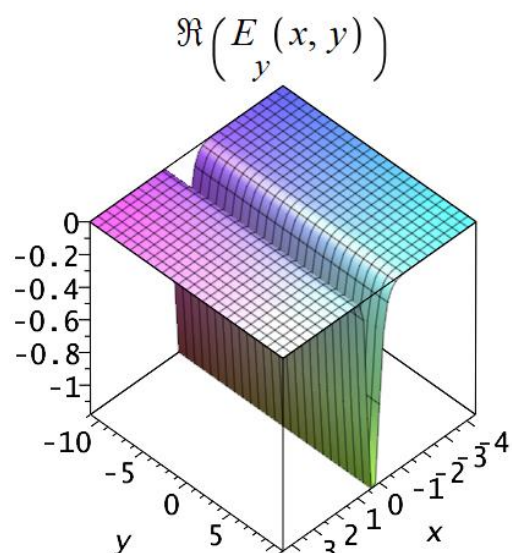
Рисунок 27. График дисперсионной зависимости для открытого трехслойного волновода с толщиной волноводного слоя h в «ящике Дирихле»

Толщинам волноводного слоя порядка $h < 0.3\lambda$ отвечает случай отсутствия направляемых мод, как видно из графика. При увеличении толщины возникают первые волноводные моды. Две моды сохраняются в волноводе при толщинах от $h \approx 0.5\lambda$ до $h \approx 1.2\lambda$ и далее появляются следующие две моды. Дисперсионная зависимость открытого волновода в «ящике Дирихле», приведенная на графике выше, качественно согласуется с типичными для открытых волноводов дисперсионными зависимостями [26].

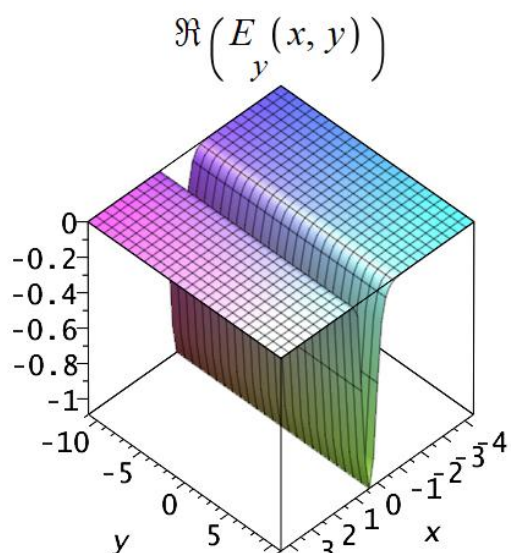
Рассмотрим далее вид собственной функции, отвечающей первому собственному значению для различных толщин волноводного слоя (то есть для различных точек дисперсионной кривой).



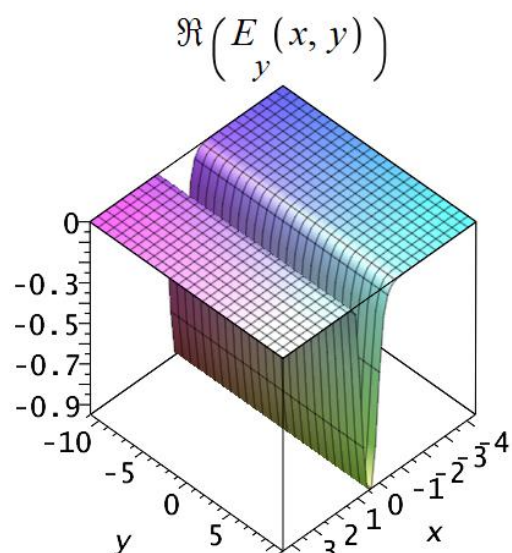
a) компонента E_y для $h = 0.9\lambda$



b) компонента E_y для $h = 1.2\lambda$



c) компонента E_y для $h = 1.5\lambda$



d) компонента E_y для $h = 1.8\lambda$

Рисунок 28. Компонента E_y первой нормальной моды открытого трехслойного волновода в «ящике Дирихле» при различных толщинах h (в разных точках дисперсионной кривой)

Приведенные выше графики демонстрируют сохранение качественного поведения первой моды в различных точках дисперсионной кривой. Изображенная на графиках компонента E_y соответствует первой ТЕ-моды волновода: за пределами волноводного слоя поле убывает, внутри волноводного слоя – осциллирует, причем первая мода не имеет узлов на

отрезке, соответствующему области волноводного слоя, и такое поведение характерно вдоль всей дисперсионной кривой – см. рисунок выше.

Описанное поведение качественно согласуется с известными свойствами волноводных мод открытых волноводов. Количественные оценки полученных результатов приведем в следующих разделах настоящей главы.

3.5.2. Численный анализ сходимости собственных значений и собственных функций

Проанализируем теперь численно полученные результаты. Рассмотрим одну конфигурацию волновода с $\varepsilon_f = 1.565^2$, $\varepsilon_c = 1.00^2$, $\varepsilon_s = 1.47^2$, $h = 2\lambda$, высота ящика $R = 8\lambda$ и ширина ящика $R_L = 20\lambda$, где λ – длина волны излучения, причем $\lambda = 0.55$. Вычислим для такого волновода собственные значения (коэффициенты фазового замедления) и собственные функции для различных значений $M(N) = 4N^2 - 2$, где M – число членов разложения приближенного решения в неполном методе Галеркина. За меру сходимости собственных значений возьмем относительную погрешность

$$\delta_M(\beta_j) = \left| \frac{\beta_j^{M(N)} - \beta_j^{M(N+1)}}{\beta_j^{M(N+1)}} \right|, \quad (218)$$

где через $\beta_j^{M(N)}$ обозначено j -е собственное значение, полученное численно при $M = 4N^2 - 2$, а $\beta_j^{M(N+1)}$ – j -е собственное значение, полученное численно при $M = 4(N+1)^2 - 2$. Расчеты будем проводить для $N = 10, 12, 14, 16, 18$, чему соответствует $M = 398, 574, 782, 1022, 1294$. Приведем ниже графики сходимости для первых четырех собственных значений.

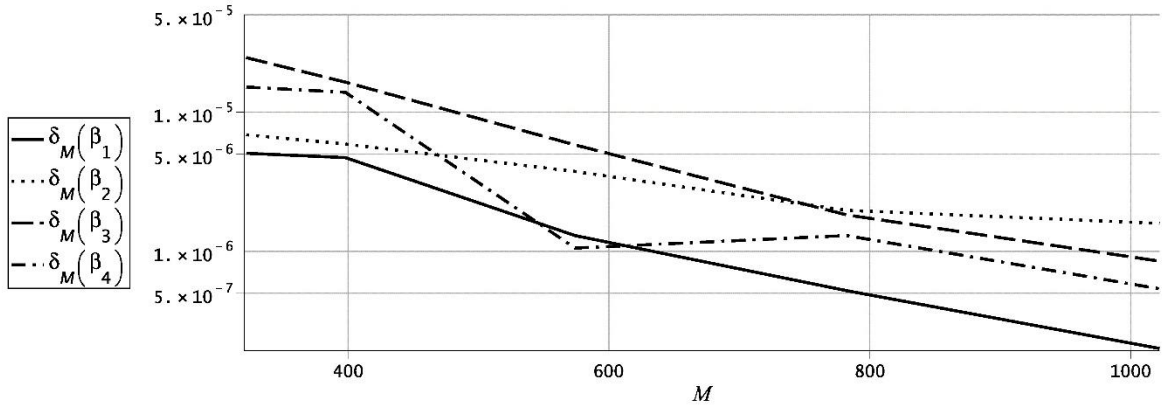


Рисунок 29. Графики относительной погрешности $\delta_M(\beta_j)$ для $j = 1, 2, 3, 4$

Относительная погрешность первого собственного значения убывает быстрее, чем погрешность остальных рассматриваемых собственных значений. Относительная погрешность всех рассматриваемых собственных значений меньше чем 10^{-5} при $M = 500$ и убывает до значений порядка $2 \cdot 10^{-6}$ при $M = 1000$. При этом относительная погрешность первого собственного значения на один порядок меньше и составляет примерно $2 \cdot 10^{-7}$ при $M = 1000$. Сходимость собственных значений, таким образом, имеет место, порядок величины относительной погрешности $2 \cdot 10^{-6}$ говорит о достаточной точности проводимых расчетов.

Рассмотрим относительную погрешность менее численно устойчивой собственной функции, отвечающей β_4 . За меру сходимости компоненты E_x возьмем относительную погрешность

$$\delta_M(E_x) = \int_{-R-R_L}^{+R+R_L} \int \left| E_x^{M(N)} - E_x^{M(N+1)} \right|^2 dx dy \quad (219)$$

где через $E_x^{M(N)}$ обозначена полученная численно нормированная на единицу

компонента $E_x \left(\int_{-R-R_L}^{+R+R_L} \int \left| E_x^{M(N)} \right|^2 dx dy = 1 \right)$ при $M = 4N^2 - 2$, а $E_x^{M(N+1)}$ —

нормированная компонента E_x при $M = 4(N + 1)^2 - 2$. Для остальных компонент относительная погрешность определяется аналогичным образом

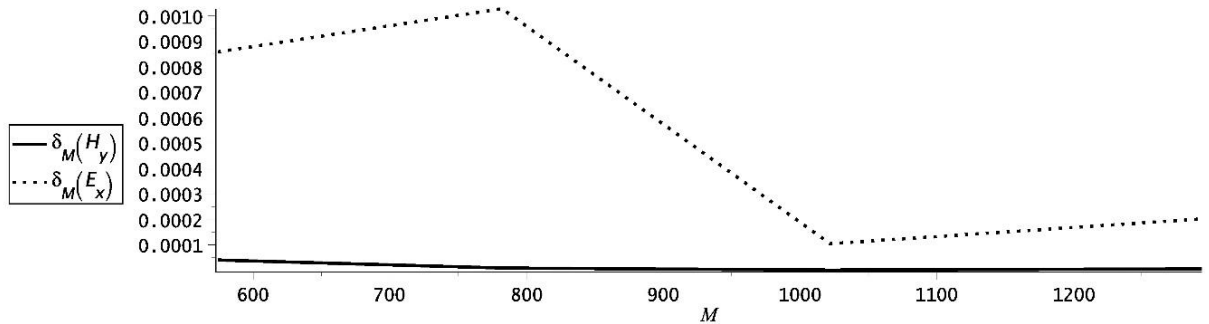


Рисунок 30. Графики относительной погрешности $\delta_M(H_y), \delta_M(E_x)$

компонент TM-моды для моды отвечающей β_4

Компоненты TM-моды при $M = 600$ характеризуются относительной погрешностью, не превышающей 10^{-2} , при этом относительная погрешность для компоненты H_y на порядок меньше и не превышает 10^{-3} . С увеличением M удается уменьшить относительную погрешность обеих компонент до величины, не превышающей $2 \cdot 10^{-4}$.

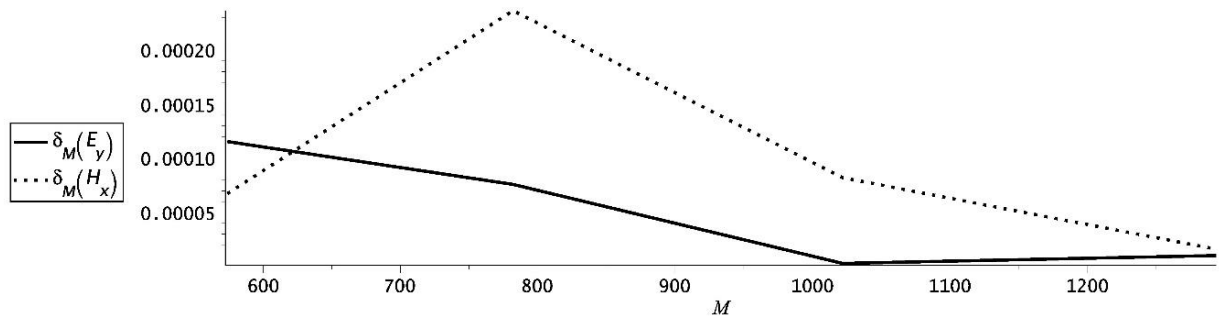


Рисунок 31. Графики относительной погрешности $\delta_M(E_y), \delta_M(H_x)$

компонент TE-моды для моды отвечающей β_4

Компоненты TE-моды характеризуются меньшей относительной погрешностью, которая при $M > 1200$ не превышает 10^{-4} .

Вычисленные собственные значения и собственные функции, определяющие нормальные моды трехслойного открытого волновода,

помещенного в «ящик Дирихле», качественно согласуются с физическим представлением о поведении волноводных мод, распространяющихся в открытом волноводе. Численные оценки относительной погрешности также подтверждают численную устойчивость вычисляемых величин, что косвенно подтверждает адекватность полученных результатов.

Для проверки работоспособности метода также проведем верификацию путем сравнения численных результатов для открытого волновода в «ящике Дирихле», получаемых в рамках метода, с вычисленными в рамках скалярной модели на примере модельной структуры открытого трехслойного волновода.

3.6. Верификация метода (сравнение с открытым трехслойным волноводом)

Сравним полученные коэффициенты фазового замедления с вычисленными с точностью порядка 10^{-10} коэффициентами фазового замедления ТЕ- и ТМ-мод, полученными в рамках скалярной задачи для планарного трехслойного волновода: $\beta_1^{TE} = 1.55149273806929$, $\beta_2^{TE} = 1.51175061453744$ и $\beta_1^{TM} = 1.55018111589010$, $\beta_2^{TM} = 1.50727495127642$.

Сравнивая численные значения, полученные в рамках метода четырех потенциалов (217) и приведенные выше значения $\beta_{1,2}^{TE}$ и $\beta_{1,2}^{TM}$, полученные в рамках скалярной задачи, получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left| \beta_1 - \beta_1^{TE} \right| < 0.000002, \quad \frac{\left| \beta_1 - \beta_1^{TE} \right|}{\beta_1^{TE}} < 0.000002, \\ \left| \beta_3 - \beta_1^{TM} \right| < 0.000006, \quad \frac{\left| \beta_3 - \beta_1^{TM} \right|}{\beta_1^{TM}} < 0.000004, \end{aligned} \quad (220)$$

$$\left| \beta_5 - \beta_2^{TE} \right| < 0.00001, \frac{\left| \beta_5 - \beta_2^{TE} \right|}{\beta_2^{TE}} < 0.000007, \quad (221)$$

$$\left| \beta_7 - \beta_2^{TM} \right| < 0.00009, \frac{\left| \beta_7 - \beta_2^{TM} \right|}{\beta_2^{TM}} < 0.00006.$$

Обобщая полученные результаты, для относительной погрешности вычисления коэффициентов фазового замедления направляемых мод открытого волновода в «ящике Дирихле» методом четырех потенциалов по сравнению с коэффициентами фазового замедления скалярной модели, справедлива оценка:

$$\delta(\beta_{1,2}^{TE, TM}) < 6 \cdot 10^{-5} \quad (222)$$

Из полученных оценок можно заключить, что коэффициенты фазового замедления, полученные методом четырех потенциалов, согласуются с коэффициентами фазового замедления, полученными в рамках скалярной модели с достаточной точностью.

3.7. Анализ численных результатов

Предложенный подход, основанный на введении потенциалов, позволяет адекватно описывать нормальные моды закрытых волноводов квадратного поперечного сечения, а также позволяет приближенно описать моды открытого волновода, помещенного в объемлющий закрытый волновод («ящике Дирихле»).

Состоятельность метода четырех потенциалов в рамках исследований текущей главы проверена путем качественного и численного анализа получаемых методом четырех потенциалов собственных значений и собственных функций, а также путем сравнения с известными результатами для закрытых и открытых волноводов:

- для закрытых волноводов исследована сходимость собственных значений (коэффициентов фазового замедления волноводных мод) и собственных функций, полученные значения относительной погрешности для собственных значений $5 \cdot 10^{-5}$, а для собственных функций имеют порядок 10^{-4} ;
- на примере модельной структуры (полого волновода), для которой аналитически известны точные собственные значения предложенный метод дает погрешность порядка 10^{-11} ;
- для открытых трехслойных волноводов, помещенных в объемлющий закрытый волновод («ящик Дирихле»), исследована сходимость собственных значений (коэффициентов фазового замедления волноводных мод) и собственных функций, полученные значения относительной погрешности для собственных значений $2 \cdot 10^{-6}$, а для собственных функций имеют порядок 10^{-4} ;
- собственные значения и собственные функции открытых трехслойных волноводов, помещенных в объемлющий закрытый волновод («ящик Дирихле») сравнивались с собственными значениями и собственными функциями аналогичной структуры в рамках скалярной модели: результаты верификации дают относительную погрешность, не превышающую $6 \cdot 10^{-5}$;
- качественное поведение волноводных мод рассмотренных закрытых и открытых волноводов также согласуется с физическими представлениями об их поведении.

Закрытые волноводы круглого поперечного сечения в рамках проведенных численных экспериментов не рассматривались. Рассмотрение круглых волноводов как правило связано с использованием разложений по системе функций Бесселя, с чем связаны известные вычислительные трудности. В рамках рассмотрения подобных волноводов изменилась бы

структура матриц, входящих в спектральную задачу, вполне прогнозируемо ухудшение обусловленности задачи, однако принципиально новой качественной информации в рамках такого исследования мы не видим и в рамках настоящей работы, поэтому, такое исследование проводить не будем.

Прочие волноводные структуры экзотического поперечного сечения, вроде овалов, треугольников и других областей, нарушающих разреженную и блочную структуру матриц модели, также на первом этапе исследования метода рассматриваться нами не будут.

Глава 4. Постановка задачи дифракции

4.1. Задача дифракции на стыке двух волноводов

Рассмотрим задачу дифракции на стыке двух регулярных по z волноводов. В случае регулярного волновода по теореме о полноте [87] монохроматическое поле в волноводе можно представить в виде суперпозиции нормальных мод, бегущих по направлению волновода и в обратную сторону. Предложенный подход к представлению уравнений Максвелла через вспомогательные потенциалы с последующей конечномерной аппроксимацией бесконечномерной системы позволяет приближенно вычислять нормальные моды регулярных волноводов. Сформулируем далее задачу волноводной дифракции – задачу о дифракции нормальной волноводной моды на стыке двух волноводов.

Пусть имеются два волновода, имеющие одинаковые сечения, но различное заполнение, и пусть они стыкуются при $z = 0$. Иными словами, пусть

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1(x, y), & z < 0, \\ \varepsilon_2(x, y), & z > 0, \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} \mu_1(x, y), & z < 0, \\ \mu_2(x, y), & z > 0. \end{cases} \quad (223)$$

Будем рассматривать случай дифракции волноводной моды, налетающей из левого ($z < 0$) волновода на правый ($z > 0$). Поле в левом и правом волноводах может быть представлено в виде суперпозиции нормальных мод, приближенное вычисление которых осуществляется методом четырёх потенциалов. При $z < 0$ задача отыскания нормальных мод редуцируется к задаче на собственные значения и собственные векторы матрицы $K^{(1)}$

$$K^{(1)}\vec{\psi}^{(1)} = \beta^{(1)}\vec{\psi}^{(1)}, \quad (224)$$

а при $z > 0$ – к задаче

$$K^{(2)}\vec{\psi}^{(2)} = \beta^{(2)}\vec{\psi}^{(2)}, \quad (225)$$

где матрицы $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$ определяются структурой левого и правого стыкующихся при $z = 0$ волноводов соответственно.

Поле в левом волноводе состоит из одной распространяющейся в положительном направлении оси Oz моды, которая характеризуется коэффициентом фазового замедления $\beta_1^{(1)}$ с $\Re(\beta_1^{(1)}) > 0$ и амплитудным коэффициентом A и отражённых мод с $\Re(\beta_j^{(1)}) < 0$ и амплитудными коэффициентами отражения R_j , $j = 1, \dots, 2N^2 - 1$. Поле в правом волноводе состоит из прошедших мод с $\Re(\beta_j^{(2)}) > 0$, характеризующихся амплитудными коэффициентами прохождения T_j , $j = 1, \dots, 2N^2 - 1$.

Задача дифракции такой волны на стыке состоит в отыскании поля, равного

$$\vec{w}_1(x, y, z) = A\vec{w}^{(1)}(x, y)e^{ik_0\beta_1^{(1)}z} + \sum_j R_j\vec{w}_j^{(1)}(x, y)e^{ik_0\beta_j^{(1)}z} \quad (226)$$

при $z < 0$ и

$$\vec{w}_2(x, y, z) = \sum_j T_j\vec{w}_j^{(2)}(x, y)e^{ik_0\beta_j^{(2)}z}$$

при $z > 0$, где $w_j^{(1)}(x, y)$ и $w_j^{(2)}(x, y)$ определяет поперечное распределение j -й нормальной моды левого и правого волноводов соответственно. Они определены как

$$\vec{w}_j^{(1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{4N^2-2} \psi_{mj}^{(1)}\vec{\phi}_m(x, y), \quad \vec{w}_j^{(2)}(x, y) = \sum_{m=1}^{4N^2-2} \psi_{mj}^{(2)}\vec{\phi}_m(x, y), \quad (227)$$

где $\psi_{mj}^{(1)}$ и $\psi_{mj}^{(2)}$ - это m -я компонента j -го собственного вектора задачи (224) и (225) соответственно. На границе $z=0$ должно выполняться условие непрерывности тангенциальных составляющих полей:

$$\left[\vec{E}_\perp \right]_{z=0} = \vec{0}, \quad \left[\vec{H}_\perp \right]_{z=0} = \vec{0}, \quad (228)$$

где через $\left[\vec{F} \right]_{s=a}$ обозначен скачок вектор-функции \vec{F} в точке $s=a$.

В силу единственности (с точностью до аддитивной константы) представления полей через потенциалы, это условие выполняется, если потенциалы непрерывны. Таким образом, условие сопряжения полей ведёт к легко выписываемому условию на коэффициенты R_j, T_j

$$A\vec{w}^{(1)}(x, y) + \sum_j R_j \vec{w}_j^{(1)}(x, y) = \sum_j T_j \vec{w}_j^{(2)}(x, y). \quad (229)$$

Поскольку и $w_j^{(1)}(x, y)$, и $w_j^{(2)}(x, y)$ согласно (227) раскладываются по системе функций $\{\vec{\varphi}_j\}_{j=1}^{4N^2-2}$ для выполнения равенств (229) коэффициенты при каждой функции $\vec{\varphi}_j$, $j=1, \dots, 4N^2-2$, должны быть равны между собой. Приравнявая коэффициенты при каждой $\vec{\varphi}_j$, $j=1, \dots, 4N^2-2$, в которые входят линейные комбинации R_j, T_j , получим систему из $4N^2-2$ линейных алгебраических уравнений относительно искомым коэффициентов отражения R_j , $j=1, \dots, 2N^2-1$ и прохождения T_j , $j=1, \dots, 2N^2-1$. Число неизвестных R_j, T_j в точности равно числу уравнений, матрица коэффициентов, составленная из компонент собственных векторов получается невырожденной, поэтому полученная система линейных алгебраических уравнений имеет и притом единственное решение.

4.2. Постановка задачи дифракции в приближении распространяющихся мод

Результаты вычисления нормальных мод, подробно рассмотренные в третьей главе, показывают, что низкая относительная погрешность и собственных значений (коэффициентов фазового замедления), и собственных функций, достигается при числе членов разложения приближенного решения в $M > 400$ членов. Вычисляемые моды в количестве $M > 400$ как правило содержат достаточно большое число мод эванесцентных, которые вычисляются как правило с большими погрешностями. Поэтому кроме общей постановки задачи дифракции на стыке (229), хотелось бы поставить задачу, в которой учитываемое число мод можно задать самостоятельно. Рассмотрим случай, когда мы хотим исследовать задачу в приближении S мод, где $S < 2N^2 - 1$. В таком случае имеем

$$A\vec{w}^{(1)}(x, y) + \sum_{j=1}^S R_j \vec{w}_j^{(1)}(x, y) = \sum_{j=1}^S T_j \vec{w}_j^{(2)}(x, y). \quad (230)$$

Применим к полученной системе (230) метод Галеркина, а именно проецируя полученное соотношение на $\left\{ \vec{w}_j^{(1)} \right\}_{j=1}^S$ и на $\left\{ \vec{w}_j^{(2)} \right\}_{j=1}^S$ получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} W_1^H W_2 \vec{t} - W_1^H W_1 \vec{r} = A \vec{p}_1, \\ W_2^H W_2 \vec{t} - W_2^H W_1 \vec{r} = A \vec{p}_2, \end{cases} \quad (231)$$

где $W_{1,2}$ – матрицы, составленные из первых S собственных векторов матриц $K^{(1,2)}$, через $W_{1,2}^H$ обозначена матрица, эрмитово сопряженная к матрице $W_{1,2}$; $\vec{p}_{1,2} = A W_{1,2}^H \vec{\psi}_0$, где $\vec{\psi}_0$ – собственный вектор матрицы $K^{(1)}$, определяющий коэффициента разложения падающей моды по базису (аналогично (227)), а $\vec{r} = (R_1, R_2, \dots, R_S)^T$, $\vec{t} = (T_1, T_2, \dots, T_S)^T$. В полученной системе $2S$ уравнений

и $2S$ неизвестных. Решая эту систему численно определим векторы искомых амплитудных коэффициентов отражения \vec{r} и прохождения \vec{t} .

4.3. Численный анализ задачи дифракции на стыке открытых планарных волноводов в «ящике Дирихле»

Исследовать рассматриваемую систему будем на примере стыка двух симметричных открытых волноводов в «ящике Дирихле» одинаковой толщины $h = 0.4\lambda$, но различными диэлектрическими проницаемостями. Левый волновод характеризуется диэлектрической проницаемостью волноводного слоя $\varepsilon_0 = 2$, правый – $\varepsilon_1 = s \cdot \varepsilon_0$. Окружающая среда будет характеризоваться $\varepsilon_c = 1$, $\mu_{1,2} = 1$. Параметры волновода взяты из работы [141], с результатами которой будет далее проводиться сравнение. Исследуем сначала структуру получаемых матриц системы (231), соответствующей рассматриваемым параметрам волноводов.

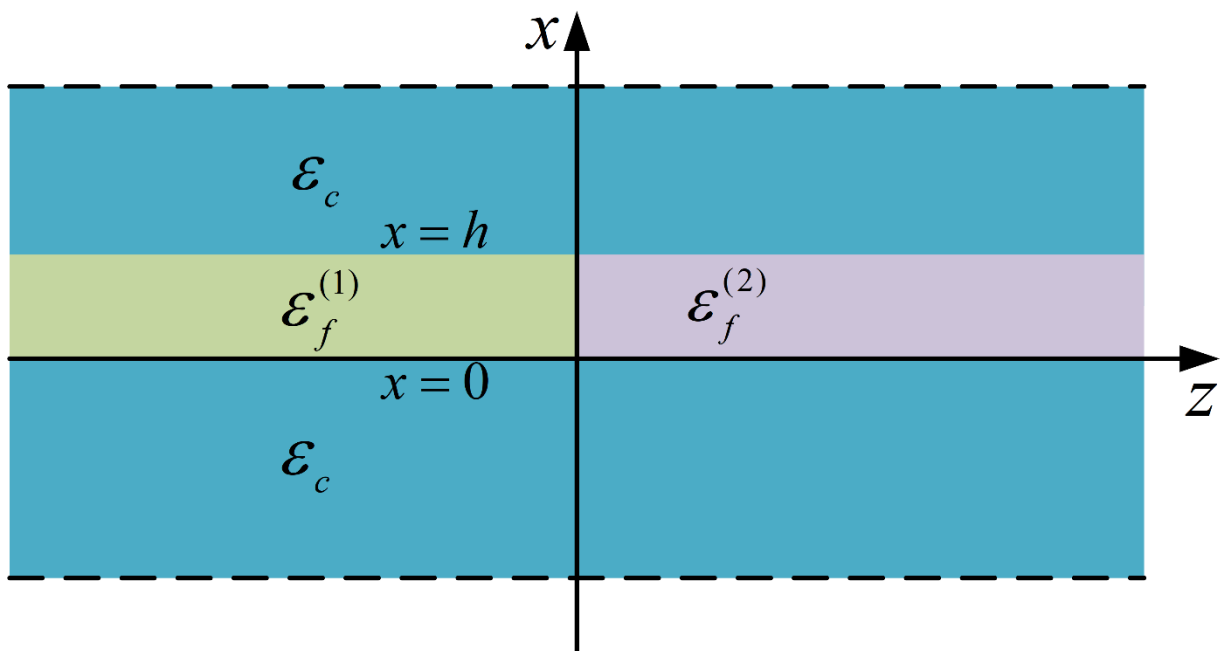


Рисунок 32. Стык двух открытых планарных волноводов, помещенных в ящик «Дирихле»

При $s = 1$ матрица системы получается диагональной, как и ожидалось, так как этот случай соответствует трехслойному симметричному волноводу и стык как таковой отсутствует ($\varepsilon_1 = \varepsilon_0$), поэтому рассматривать ее структуру не будем. Рассмотрим несколько случаев, соответствующих разным s .

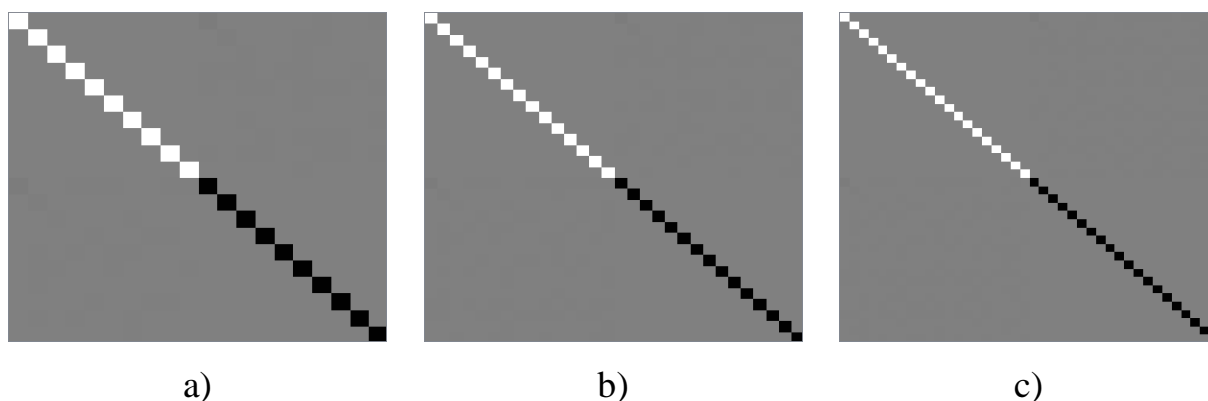


Рисунок 33. Структура матриц системы для рассматриваемой конфигурации стыка при $s = 0.9$ при а) $S = 10$, б) $S = 15$, в) $S = 20$

В рассматриваемом случае $s = 0.9$ и структура матрицы с ярко выраженным диагональным преобладанием, причем элементы не на диагонали по модулю намного меньше, чем диагональные элементы. На рисунках они практически не видны. Стоит также заметить, что при увеличении числа удерживаемых мод S структура матрицы остается одинаковой – везде наблюдается диагональное преобладание.

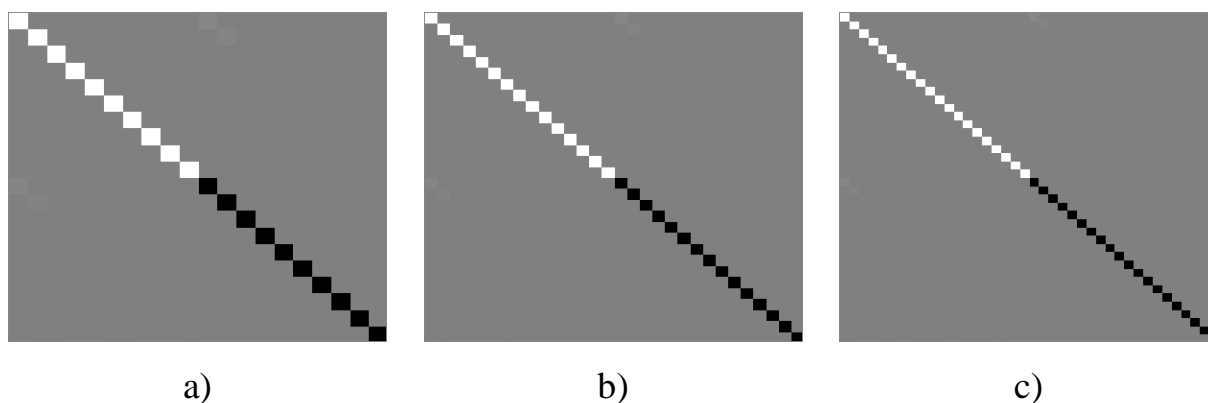


Рисунок 34. Структура матриц системы для рассматриваемой конфигурации стыка при $s = 0.8$ при а) $S = 10$, б) $S = 15$, в) $S = 20$

В рассматриваемом случае $s = 0.8$ и структура матрицы также как и в прошлом случае обладает ярко выраженным диагональным преобладанием. Внедиагональные элементы по модулю намного меньше, чем диагональные элементы, однако на рисунке они уже более различимы, что ожидаемо, так как диэлектрические проницаемости левого и правого волноводов стали отличны друг от друга сильнее. При увеличении числа удерживаемых мод S структура матрицы остается одинаковой – везде наблюдается диагональное преобладание.

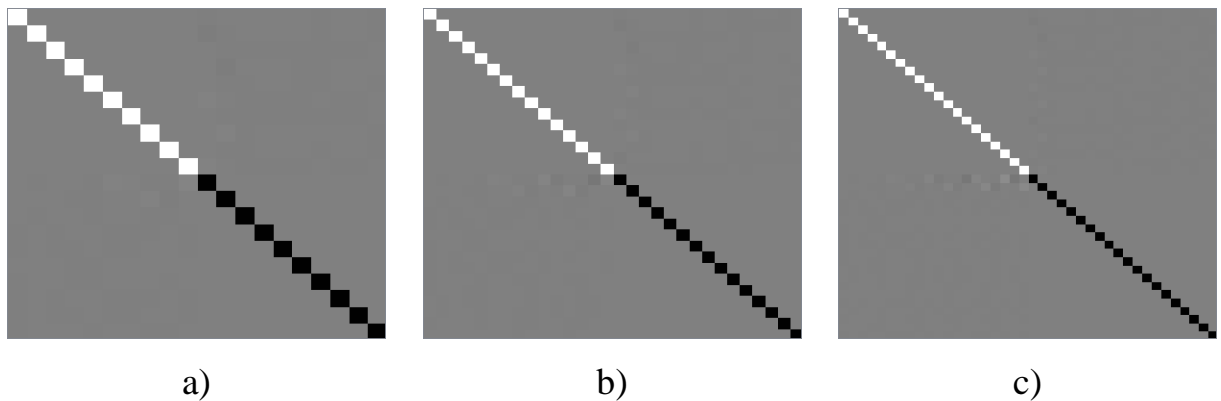


Рисунок 35. Структура матриц системы для рассматриваемой конфигурации стыка при $s = 0.4$ при а) $S = 10$, б) $S = 15$, в) $S = 20$

Рассмотрим случай еще более градиентного стыка - $s = 0.4$. Структура матрицы также обладает ярко выраженным диагональным преобладанием. Внедиагональные элементы стали более различимы на рисунке, что отражает большую разницу в структурах левого и правого стыкующихся волноводов. При увеличении числа удерживаемых мод S структура матрицы также остается одинаковой.

Рассмотрим теперь важную характеристику рассматриваемой системы линейных алгебраических уравнений – число обусловленности матрицы коэффициентов системы (231) (оно обозначено $cond(P)$) для различного числа удерживаемых мод разложения S .

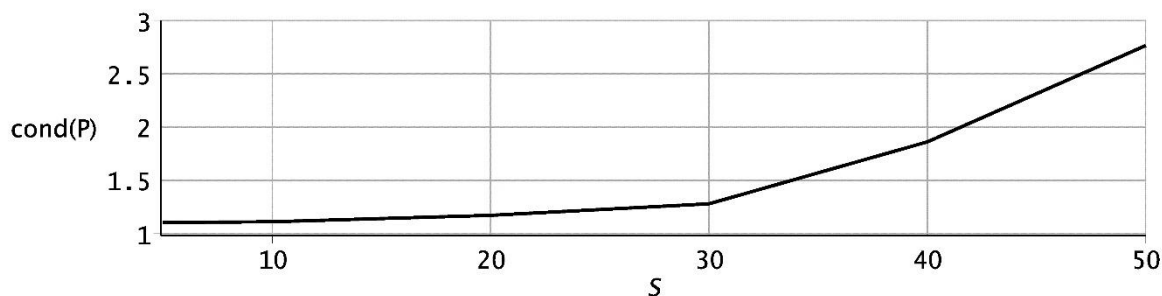


Рисунок 36. Число обусловленности матрицы системы для рассматриваемой конфигурации стыка при $s = 0.8$ для различного числа удерживаемых мод разложения S

Рисунок выше демонстрирует рост числа обусловленности матрицы системы при увеличении числа S . Рост числа обусловленности объясняется тем фактом, что, как правило, включение эванесцентных мод в разложении ухудшает обусловленность решаемой задачи. Однако стоит отметить, что при всех рассматриваемых значениях S заключена в промежутке $1 < cond(P) < 3$.

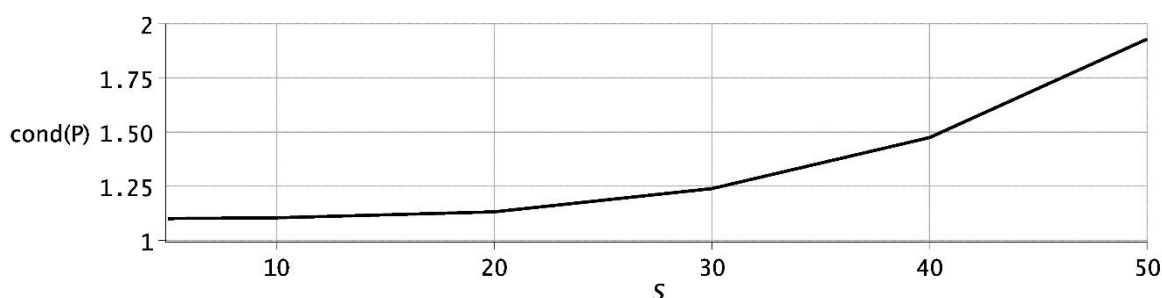


Рисунок 37. Число обусловленности матрицы системы для рассматриваемой конфигурации стыка при $s = 1.2$ для различного числа удерживаемых мод разложения S

Увеличивая значение параметра s до значения $s = 1.2$ рассмотрим график изменения обусловленности. Как видно из рисунка выше обусловленность изменилась, характер зависимости от числа S остался неизменным, однако обусловленность стала лучше: $1 < cond(P) < 2$.

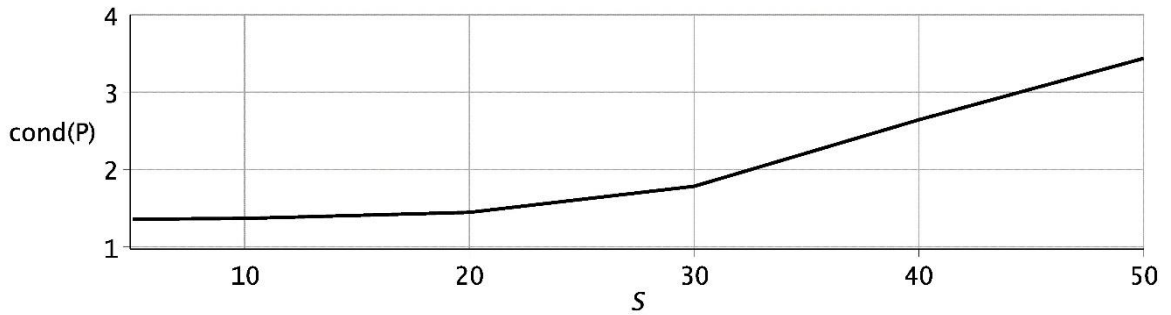


Рисунок 38. Число обусловленности матрицы системы для рассматриваемой конфигурации стыка при $s = 1.8$ для различного числа удерживаемых мод разложения S

Увеличим теперь значение параметра s до значения $s = 1.8$ и рассмотрим график изменения обусловленности. Как видно из рисунка выше обусловленность также изменилась, характер зависимости от числа S также неизменен, число обусловленности $1 < \text{cond}(P) < 3.5$.

Обобщая вышеизложенные факты можно заключить, что рассматриваемая система линейных алгебраических уравнений обладает хорошей устойчивостью: структура матрицы коэффициентов системы при различном количестве удерживаемых мод сохраняется, причем матрица во всех рассматриваемых случаях обладает диагональным преобладанием. Матрица коэффициентов системы в рассматриваемых случаях хорошо обусловлена – число обусловленности $\text{cond}(P) < 3.5$.

Рассмотрим теперь сходимость амплитудных коэффициентов прохождения в зависимости от увеличения числа базисных функций разложения M . Оценивать, как и ранее, будем относительную погрешность, определенную как

$$\delta_M(T_j) = \left| \frac{T_j^{M(N)} - T_j^{M(N+1)}}{T_j^{M(N+1)}} \right|, \quad (232)$$

где через $T_j^{M(N)}$ обозначен j -й коэффициент прохождения, полученный численно при $M = 4N^2 - 2$, а $T_j^{M(N+1)}$ – j -й коэффициент прохождения, полученный численно при $M = 4(N+1)^2 - 2$. Расчеты будем проводить для $N = 10, 12, 14, 16, 18$, чему соответствует $M = 398, 574, 782, 1022, 1294$. Приведем ниже графики сходимости для первых двух коэффициентов прохождения рассматриваемого волноводного стыка для $s = 0.8, S = 20$.

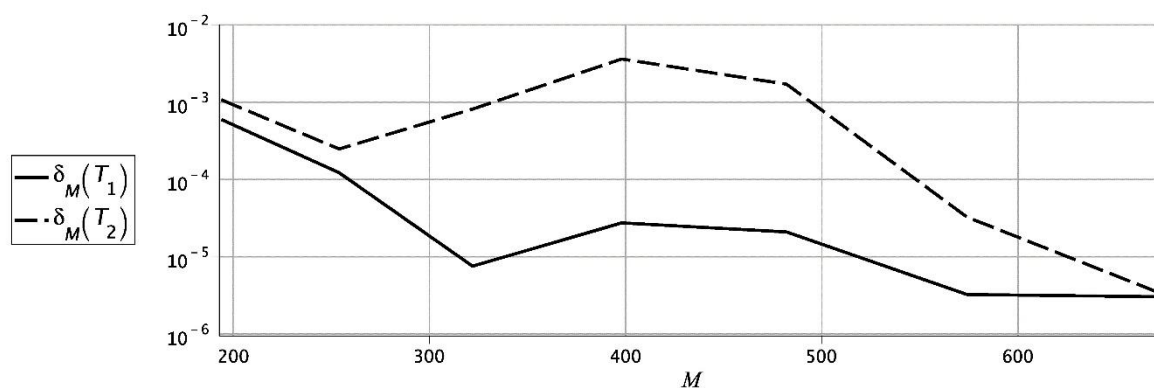


Рисунок 39. Относительная погрешность амплитудных коэффициентов прохождения направляемых мод

Как видно из приведенных графиков, изначально относительная погрешность амплитудных коэффициентов прохождения имеет порядок 10^{-3} , при определенных значениях $M = 400$ относительная погрешность приближается к величине 10^{-2} . В целом сходимость наблюдается, как в случае сходимости собственных функций характер сходимости не монотонный. При $M > 650$ относительная погрешность имеет порядок 10^{-5} .

4.4. Верификация метода решения задачи дифракции на стыке открытых планарных волноводов в «ящике Дирихле»

Проведем теперь верификацию разработанного метода, сделав предварительное замечание. Одним из первых методов исследования

закрытых нерегулярных волноводов был разработан Б.З. Каценеленбаумом – метод поперечных сечений [140], который был обобщён на открытые волноводы В.В. Шевченко [49]. Попытки обосновать метод поперечных сечений для открытых волноводов привели к серьёзным теоретическим трудностям, связанным с наличием непрерывного спектра задачи, описывающего излучательные моды открытого волновода. Волноводная задача для закрытого нерегулярного волновода тем временем имеет корректную постановку.

В диссертации Дивакова Д.В. было показано, что расчёт открытого волновода можно проводить в рамках модели так называемого «ящика Дирихле» [54]. Предложенная модель содержит предположение о возможности поместить открытый волновод в объемлющий полый закрытый волновод, границы которого удалены от реальных границ волноводного слоя и поставить корректную математическую задачу. В этом случае поведение направляемых и излучательных мод открытого волновода будет адекватно описываться в рамках предложенной приближенной модели, что подтверждается численными экспериментами, приведёнными в настоящей работе.

Верификацию метода будем проводить путем сравнения с результатами Шевченко В.В, представленными в его работе [141]. В рамках модели «ящика Дирихле» будем проводить расчёт стыка открытых планарных волноводов, который подробно исследовался в работе А.А. Иванов, В.В. Шевченко [141]. Рассмотрим аналогичную структуру, помещённую в ящик, и применим для расчёта предложенный в настоящей работе метод.

В работе [141] рассматривается стык волноводов одинаковой толщины с различными диэлектрическими проницаемостями: из левого планарного волновода с $\varepsilon_0 = 2$, $\mu_0 = 1$ толщины d падает первая направляемая мода на правый планарный волновод $\varepsilon_1 = s \cdot \varepsilon_0$, $\mu_1 = 1$ такой же толщины, причём

длина волны связана с толщиной соотношением $d / \lambda = 0,4$. Покровная среда для обоих волноводов - воздух $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$. В рамках модели «ящика Дирихле» единичной ширины и высоты толщина волноводного слоя была принята $d = 0,01$, чтобы высота «ящика» была много больше толщины волноводного слоя. Ниже приведён график зависимости коэффициента прохождения направляемой моды в зависимости от безразмерного параметра $s = \varepsilon_1 / \varepsilon_0$ (на графиках приняты обозначения из работы Шевченко В.В., поэтому вместо ε_1 будет написано ε^1 и, соответственно, вместо ε_0 будет написано ε^0).

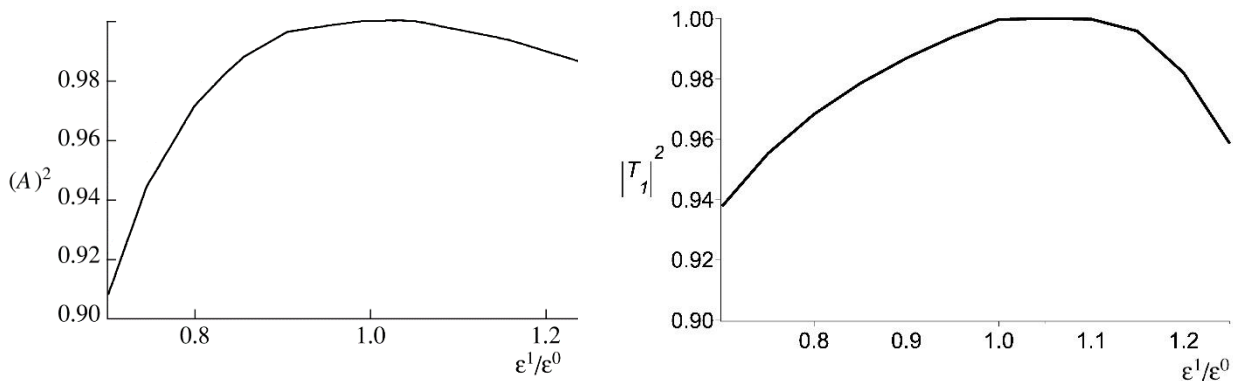


Рисунок 40. Расчет квадрата коэффициента прохождения первой направляемой моды через стык, полученный в рамках метода поперечных сечений Шевченко В.В. опубликованный в работе [141] (слева) и в рамках метода четырех потенциалов (справа)

Приведённая на графике зависимость демонстрирует качественную согласованность с результатами работы В. В. Шевченко. Численные значения также имеют одинаковый порядок, что говорит об адекватности предложенного метода, в том числе для исследования открытых волноводов, помещённых в «ящик Дирихле». Отличия численных результатов, полученных в рамках двух методов, как можно заметить, тем меньше, чем ближе рассматриваемая структура к трехслойному волноводу, которому соответствует точка $\varepsilon^1 / \varepsilon^0 = 1$. Вблизи этой точки коэффициенты

прохождения близки к единице и результаты, полученные обоими методами, согласуются хорошо. При удалении от точки отличия между результатами составляют 3-5%. Это, по всей видимости, связано с тем, что с увеличением параметра $\varepsilon^1 / \varepsilon^0$, характеризующего скачок, более проявляется отличие скалярной задачи и векторной.

4.5. Постановка задачи дифракции на линзе

Будем рассматривать волноводную линзу Люнеберга, спроектированную методом поперечных сечений в одномодовом приближении для фокусировки моды TE_0 .

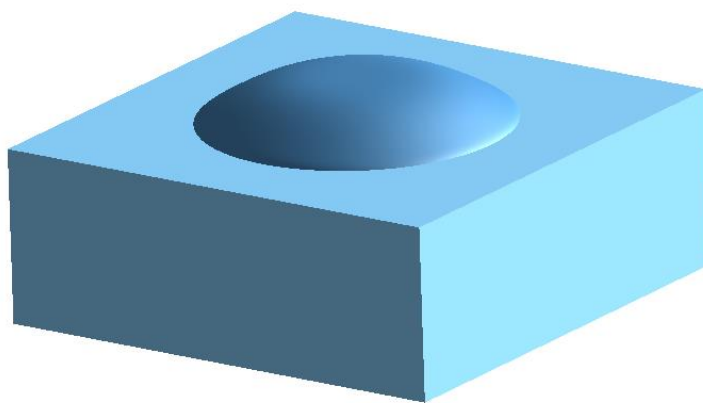


Рисунок 41. Схематическое изображение волноводной линзы Люнеберга, нанесенной на основной волноводный слой

В рамках метода четырех скалярных потенциалов рассматривается задача поиска нормальных мод волновода, структура которого не изменяется вдоль оси распространения электромагнитного излучения, в работе это ось z . Волноводная линза Люнеберга имеет трехмерную структуру, которая изменяется во всем трехмерном пространстве. Однако при значительном радиусе волноводной линзы это изменение может быть настолько медленным, что введя разбиение по z и рассмотрев геометрию линзы на каждом интервале, изменения геометрии могут быть малы на этом интервале. Предложенная конструкция позволяет рассмотреть линзу Люнеберга как серию стыков волноводов различной конфигурации. Введем для этого

разбиение $z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{M-1} < z_M$. На каждом отрезке $z \in [z_j; z_{j+1}]$, $j = \overline{0, M-1}$ будем заменять функцию, характеризующую показатель преломления $n(x, y, z)$ на функцию двух переменных $\tilde{n}_j(x, y) = n(x, y, (z_j + z_{j+1})/2)$, которая не зависит от z на указанном отрезке.

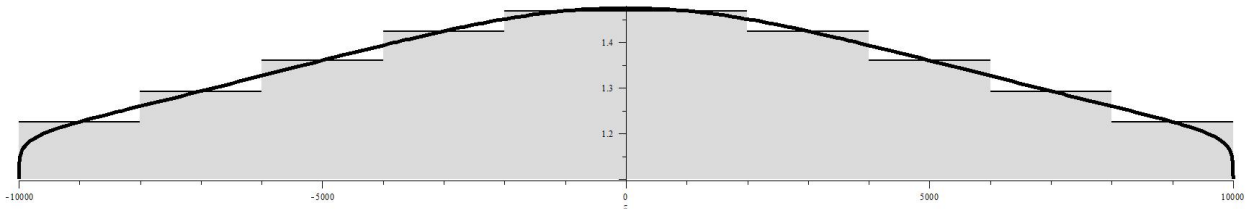


Рисунок 42. Аппроксимация формы линзы кусочно-постоянной функцией при $M = 10$

В рамках метода четырех скалярных потенциалов сформулируем постановку задачи дифракции волноводных мод при распространении через нерегулярный волновод, нерегулярность которого представляет собой дополнительный волноводный слой в форме линзы Лüneберга. Рассмотрим задачу дифракции в случае распространения одной волноводной моды из $-\infty$ в положительном направлении оси z . В таком случае поле при $z < z_0$ будет состоять из падающей моды с номером s и счетного числа отраженных мод:

$$\vec{W}^0(x, y, z) = A\vec{w}_s^0(x, y)e^{ik_0\beta_s^0(z-z_0)} + \sum_{l=1}^{2N^2-1} R_l\vec{w}_l^0(x, y)e^{ik_0\beta_l^0(z-z_0)}, \quad (233)$$

где β_s^0 - коэффициент фазового замедления распространяющейся в положительном направлении оси z моды с номером s (s -е собственное значение матрицы K_0), причем $\text{Re}\beta_s > 0$; A - заданный амплитудный коэффициент этой моды, а R_l - неизвестные амплитудные коэффициенты отражения; функции $\vec{w}_l^0(x, y)$ определены следующим образом:

$$\bar{w}_l^0(x, y) = \sum_{m=1}^{4N^2-2} w_{lm}^0 \bar{\varphi}_m(x, y) \quad (234)$$

где w_{lm}^0 - m -я компонента собственного вектора, отвечающего собственному значению β_l^0 матрицы K_0 .

На каждом отрезке $z \in [z_j; z_{j+1}]$, $j = \overline{0, M-1}$ вектор-функция $\bar{W}^j(x, y, z)$, определяющая потенциалы, представляется в следующем виде:

$$\bar{W}^j(x, y, z) = \sum_{l=1}^{4N^2-2} A_l^j \bar{w}_l^j(x, y) e^{ik_0 \beta_l^j(z-z_j)}, \quad (235)$$

где $\bar{w}_l^j(x, y)$ соответствует l -й собственной функции, определяющей l -ю нормальную моду в j -м отрезке:

$$\bar{w}_l^j(x, y) = \sum_{m=1}^{4N^2-2} w_{lm} \varphi_m(x, y), \quad (236)$$

а w_{lm} - m -я компонента l -го собственного вектора матрицы K_j , β_l^j - l -е собственное значение матрицы K_j .

Замечание. Следует заметить, что из множества собственных значений β_l^j $l = \overline{1, 4N^2-2}$ матрицы K_j половина отвечает за моды, распространяющиеся в положительном направлении оси z , а вторая половина – за моды, распространяющиеся в отрицательном направлении оси z . Поэтому сумму в разложении (235) можно разбить на две, первой из которых будет соответствовать $(\beta_l^j)^+$, $l = \overline{1, 2N^2-1}$, а второй – $(\beta_l^j)^-$, $l = \overline{1, 2N^2-1}$, причем $\text{Re}(\beta_l^j)^+ = -\text{Re}(\beta_l^j)^-$, $\text{Re}(\beta_l^j)^+ > 0$.

Поле при $z > z_M$ будет состоять из счетного числа прошедших мод:

$$\vec{W}^{M+1}(x, y, z) = \sum_{l=1}^{2N^2-1} T_l \vec{w}_l^{M+1}(x, y) e^{ik_0 \beta_l^{M+1}(z-z_M)}, \quad (237)$$

характеризуемых неизвестными амплитудными коэффициентами прохождения T_l .

На границах введенных отрезков $z = z_j$, $j = \overline{0, M}$ должны выполняться условия непрерывности тангенциальных компонент электромагнитного поля, то есть при $z = z_j$ должны быть непрерывны E_x, E_y, H_x и H_y . Условия непрерывности тангенциальных компонент будут выполняться, если непрерывны введенные потенциалы:

$$\begin{cases} \vec{W}^0 \Big|_{z=z_0} = \vec{W}^1 \Big|_{z=z_0}, \\ \vec{W}^1 \Big|_{z=z_1} = \vec{W}^2 \Big|_{z=z_1}, \\ \vdots \\ \vec{W}^M \Big|_{z=z_M} = \vec{W}^{M+1} \Big|_{z=z_M}. \end{cases} \quad (238)$$

Граничные уравнения (238) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно искомым амплитудных коэффициентов $R_l, A_l^0, A_l^1, \dots, A_l^M, T_l$. Число уравнений и число неизвестных в системе в точности равно $(4N^2 - 2) \times (M + 1)$.

Из уравнений системы (238) можно сформулировать итерационную формулу, выражающую вектор искомым величин для j -го слоя

$\vec{A}_j = (A_1^j, A_2^j, \dots, A_{4N^2-2}^j)^T$ через величины \vec{A}_{j-1} . В действительности, из первого уравнения в (238) следует выражение вектора \vec{A}_1 через вектор $\vec{W}^0 \Big|_{z=z_0}$

$$\vec{A}_1 = D_1^{-1} W_1^{-1} \vec{W}^0 \Big|_{z=z_0}, \quad (239)$$

где $D_1 = \text{diag} \left\{ ik_0 \beta_l^1 (z_1 - z_0) \right\}_{l=1}^{4N^2-2}$ - диагональная матрица собственных значений матрицы K_1 , W_1 - матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы K_1 .

Рассмотрев поочередно последующие уравнения (238) получим итерационную формулу для вычисления \vec{A}_j через \vec{A}_{j-1} :

$$\vec{A}_j = D_j^{-1} W_j^{-1} W_{j-1} \vec{A}_{j-1}, \quad (240)$$

где $D_j = \text{diag} \left\{ ik_0 \beta_l^j (z_j - z_{j-1}) \right\}_{l=1}^{4N^2-2}$ и W_j - диагональная матрица собственных значений и матрица собственных векторов матрицы K_j соответственно. Записав для всех слоев выражение (240) можно сформулировать систему линейных алгебраических уравнений аналогично задаче на стыке. Аналогичным же образом формулируется задача в приближении S мод, где $S < 2N^2 - 1$. Получаемая таким образом упрощенная система обладает, аналогично системе для задачи со стыком, хорошей обусловленностью матрицы коэффициентов системы с диагональным преобладанием.

Символьно-численная реализация

Реализацию алгоритма (239), (240) предваряют введение разбиения $z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{M-1} < z_M$ и формирование на каждом отрезке $z \in [z_j; z_{j+1}]$ матрицы K_j , расчет которой производится символьно-численным методом. Матрица K_j определяется как $K_j = B^{-1} (A_j - k_0^{-2} C_j)$, причем элементы матрицы B не зависят от диэлектрической проницаемости

$\varepsilon_j(x, y)$, а зависят лишь от элементов базиса, поэтому матрица B вычисляется один раз. Элементы матриц A_j и C_j зависят от диэлектрической проницаемости $\varepsilon_j(x, y)$ текущего регулярного по z волновода при $z \in [z_j; z_{j+1}]$, поэтому элементы этих матриц необходимо рассчитывать для каждого отрезка $z \in [z_j; z_{j+1}]$. Схематически геометрия рассматриваемой линзы на произвольном отрезке представлена на рисунке ниже.

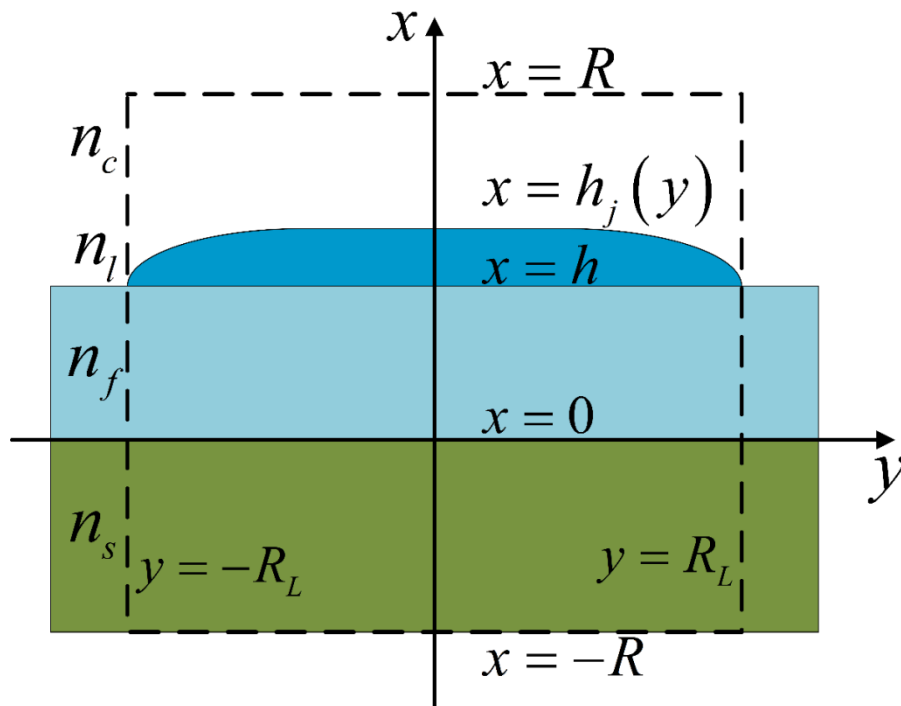


Рисунок 43. Схематическое изображение геометрии сечения волноводной линзы на отрезке $z \in [z_j; z_{j+1}]$ (ось z направлена от читателя)

Как видно из рисунка на каждом отрезке $z \in [z_j; z_{j+1}]$ геометрия рассматриваемой структуры представляет собой трехслойную структуру, поверх основного волноводного слоя которой нанесен дополнительный волноводный слой с показателем преломления n_l и переменной толщиной $x = h_j(y)$ форма которого различна для разных отрезков $z \in [z_j; z_{j+1}]$. Элементы матриц A_j и C_j вычисляются как двойные интегралы по

поперечному сечению S_j рассматриваемого волновода, которое состоит (см. рисунок выше) из четырех областей, каждая из которых отвечает за один из слоев волновода. Вычисление элементов a_{nm}^j и c_{nm}^j производится по формулам:

$$a_{nm}^j = \iint_{S_j} \varepsilon_j(x, y) \cdot (\nabla' \varphi_{m2} + \nabla \varphi_{m3}) \cdot (\nabla' \varphi_{n1} - \nabla \varphi_{n4}) dx dy + \iint_{S_j} \mu \cdot (\nabla' \varphi_{m4} + \nabla \varphi_{m1}) \cdot (\nabla' \varphi_{n2} - \nabla \varphi_{n3}) dx dy, \quad (241)$$

$$c_{nm}^j = \iint_{S_j} \left(\frac{\Delta \varphi_{m2} \Delta \varphi_{n1}}{\mu} - \frac{\Delta \varphi_{m2} \Delta \varphi_{n3}}{\varepsilon_j(x, y)} \right) dx dy. \quad (242)$$

Упростить и ускорить вычисление двойного интеграла для расчета a_{nm}^j возможно посредством использования следующего свойства:

$$\iint_{S_j} \varepsilon_j(x, y) \cdot F(x, y) dx dy = \varepsilon_s \iint_{\substack{x \in [-R, 0] \\ y \in [-R_L, R_L]}} F dx dy + \varepsilon_f \iint_{\substack{x \in [0, h] \\ y \in [-R_L, R_L]}} F dx dy + \varepsilon_c \iint_{\substack{x \in [h, R] \\ y \in [-R_L, R_L]}} F dx dy + (\varepsilon_l - \varepsilon_c) \iint_{\substack{x \in [h, h_j(y)] \\ y \in [-R_L, R_L]}} F dx dy, \quad (243)$$

Из выражения (243) видно, что каждый двойной интеграл, взятый по поперечному сечению волновода, состоит из трех интегралов, берущихся в символьном виде (и, кроме того, сводящихся к повторным интегралам) и одного интеграла, расчет которого необходимо проводить в каждом поперечном сечении. Поэтому, расчет матриц A_j , $j = \overline{0, M}$ производится следующим образом: сначала в символьном виде вычисляется матрица

$P = [p_{nm}]_{n, m=1}^{4N^2-2}$ с элементами p_{nm} определенными по формуле:

$$p_{nm} = \varepsilon_s \iint_{\substack{x \in [-R, 0] \\ y \in [-R_L, R_L]}} F_{nm} dx dy + \varepsilon_f \iint_{\substack{x \in [0, h] \\ y \in [-R_L, R_L]}} F_{nm} dx dy + \varepsilon_c \iint_{\substack{x \in [h, R] \\ y \in [-R_L, R_L]}} F_{nm} dx dy, \quad (244)$$

где $F_{nm}(x, y) = (\nabla' \varphi_{m2} + \nabla \varphi_{m3}) \cdot (\nabla' \varphi_{n1} - \nabla \varphi_{n4})$.

Итоговые матрицы A_j , $j = \overline{0, M}$ вычисляются как $A_j = P + A'_j$, причем для вычисления элементов $a'_{nm}{}^j$ матрицы A'_j требуется вычислить только один интеграл:

$$a'_{nm}{}^j = (\varepsilon_l - \varepsilon_c) \iint_{\substack{x \in [h, h_j(y)] \\ y \in [-R_L, R_L]}} F_{nm} dx dy. \quad (245)$$

Аналогичным образом упрощается вычисление матриц C_j . После вычисления матриц A_j и C_j производится вычисление матрицы K_j и ее собственных векторов и собственных значений и дальнейшая реализация итерационного процесса по формулам (239), (240). Описанный алгоритм реализован в символьно-численном виде и представлен на рисунке ниже.

```

> df := (r) → -2.38675112542721 + 1.44130319759826 * r^2
    - .380331123813407 * r^4 + 2.10773571555738 / (r^2 + 1.0)
    + .543817145102447 / (r^4 + 1.0) - 1.39583945955896 * (-1. * r^2 + 1.)
    ^0.1e-1 + 1.50604595577051 * (-1. * r^4 + 1.) ^0.2e-1;
> G := h + (expand(df(sqrt(y^2 + z^2) / RL)));
> dr := 2 * RL / M;
> Z := seq(-RL + (m - 1) * dr, m = 1 .. M + 1);
> RY := seq(sqrt(RL^2 - Z[m]^2), m = 1 .. M + 1);
> GZ := seq(evalf(h + (expand(df(sqrt(y^2 + Z[m]^2) / RL))))) , m = 1 .. M + 1);

> for m from 1 by 1 to M + 1 do
    Aa[m] := Matrix((4 * N^2 - 2), (4 * N^2 - 2), (i, j) → ma2(phi[i], phi[j], RY[m],
        GZ[m]));
    Cc[m] := Matrix((4 * N^2 - 2), (4 * N^2 - 2), (i, j) → mc2(phi[i], phi[j], RY[m],
        GZ[m]));
    A := A0 + Aa[m];
    C := C0 - Cc[m];
    K[m] := B_inv(A - evalf(1.0 / k0^2) * C);
    e[m], mv[m] := Eigenvectors(K[m]);
    Dd[m] := DiagonalMatrix(exp~(I * evalf(k0) * e[m] * dr));
end do;
> w0 := Column(mv0, 2);
> a[1] := MatrixInverse(Dd[1]) * MatrixInverse(mv[1]) * w0;
> for i from 2 by 1 to M do
    a[i] := MatrixInverse(Dd[i]) * MatrixInverse(mv[i]) * mv[i - 1] * a[i - 1];
end do;

```

Рисунок 44. Символьно-численная реализация алгоритма расчета матрицы для задачи дифракции на волноводной линзе

4.6. Верификация метода решения задачи дифракции на волноводной линзе

Сравним результаты, полученные в рамках предложенного метода с результатами, полученными в работе [142]. Рассмотрим для этого аналогичную структуру с параметрами с $\varepsilon_f = (1.565)^2$, $\varepsilon_c = (1.00)^2$,

$\varepsilon_s = (1.47)^2$, толщиной волноводного слоя $h = 2\lambda$, высотой «ящика Дирихле» $R = 8\lambda$ и полушириной ящика $R_L = 20\lambda$ (радиус волноводной линзы).

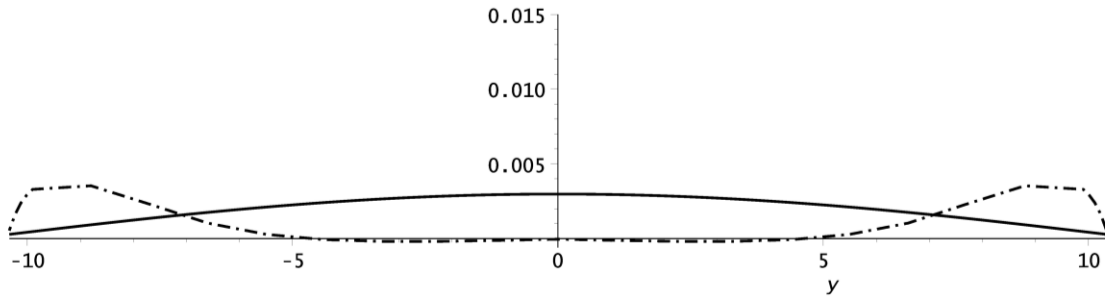


Рисунок 45. Интенсивность компоненты E_x прошедшего поля, вычисленная 1) методом четырех потенциалов – сплошная линия и 2) в работе [142].

Как видно из графиков, качественное поведение решения различно для двух методов, что может являться следствием отличия векторной модели от скалярной. При этом численные результаты согласуются, отличия видны ближе к краям линзы.

Будем проводить расчет для этой же структуры, она рассматривалась в диссертационной работе (см. [10]), в рамках скалярной модели. Вычислим коэффициент фазового замедления первой волноводной ТЕ-моды при распространении вдоль волноводной линзы при $z = z_j$, $j = \overline{1, M+1}$ при $M = 20$ для $N = 10$, чему соответствует 398 базисных функций в разложении неполного метода Галеркина.

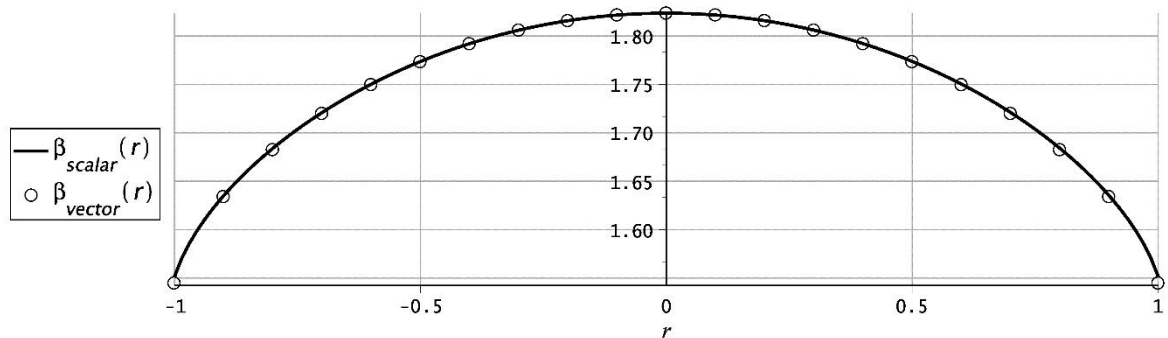


Рисунок 46. Коэффициент фазового замедления моды ТЕ₀, полученный методом четырех потенциалов $\beta_{vector}(r)$ и в рамках скалярной модели

$$\beta_{scalar}(r), \text{ где } r = z / R_L$$

Из графиков фактически не видна разница между вычисленными значениями коэффициента фазового замедления моды TE_0 методом четырех потенциалов и в рамках скалярной модели. Вычислим, как и ранее относительную погрешность, определенную как

$$\delta(r) = \left| \frac{\beta_{vector}(r) - \beta_{scalar}(r)}{\beta_{scalar}(r)} \right| \quad (246)$$

на введенной сетке. В результате для относительной погрешности справедлива следующая оценка:

$$\delta(r) < 5 \cdot 10^{-3}. \quad (247)$$

4.7. Анализ результатов

Как в случае скалярной модели сама математическая формулировка задачи о волноводной дифракции использует нормальные моды волновода, поскольку без них невозможно сформулировать парциальные условия излучения. Ключевым моментом в численном решении задачи о волноводной дифракции является вычисление нормальных мод. В третьей главе был предложен и апробирован новый метод решения этой задачи, основанный на введении четырех потенциалов, то есть была решена самая трудная часть задачи волноводной дифракции, в которой проявляются все особенности векторной модели волновода. Целью настоящей четвертой главы было показать на примерах, как использовать алгоритм вычисления нормальных мод при решении задачи дифракции.

В этой главе было рассмотрено две задачи. Первой была рассмотрена задача дифракции на стыке двух регулярных волноводов. Эта задача решается в два шага. На первом шаге находятся нормальные моды обоих водоводов в рамках конечномодовой векторной модели, описанной в третьей главе, на втором — формируется СЛАУ для отыскания коэффициентов прохождения и отражения. Оба шага были реализованы в программе, написанной в системе

компьютерной алгебры Maple, решение СЛАУ выполняется стандартными функциями системы. Следует заметить, что подход, основанный на четырех потенциалах, позволяет выразить условия сопряжения полей на стыке волноводов проще, чем стандартный подход, предлагающий сшивать непосредственно компоненты электромагнитного поля.

В целях верификации рассматривалась задача дифракции на стыке двух планарных волноводов в серии численных экспериментов. В рамках скалярной модели эта задача была предметом исследования в работе [141], с результатами которой было проведено сравнение. Эта задача, является плоской и поэтому ее решение предложенным в нашей работе способом представляет интерес именно с точки зрения верификации метода. Результаты численных экспериментов свидетельствуют о состоятельности предложенного метода решения задачи дифракции. Следует заметить, что чем значительнее скачет диэлектрической проницаемости на стыке, тем сильнее разнятся наши результаты и результаты, полученные в рамках скалярной модели. Это, по всей видимости, связано с тем, что с увеличением скачка все более проявляется отличие плоской задачи и трехмерной.

Вторая задача, рассмотренная в этой главе, — задача о дифракции на протяженном диэлектрическом теле. Заметим, что эта задача принципиально трехмерная, поэтому рассмотрение ее в рамках скалярной модели является лишь грубым упрощением. В данной работе эта задача решается в полной векторной постановке путем кусочно-постоянной аппроксимации диэлектрической проницаемости и поэтому сводится к большому числу задач дифракции на стыках регулярных волноводов. Поскольку алгоритм решения задачи дифракции на стыке был отлажен в начале главы, решение этой задачи свелось к вычислению нормальных мод этих волноводов и формированию СЛАУ для коэффициентов прохождения и отражения. Следует отметить, что в третьей главе был разработан численно-аналитический способ вычисления нормальных мод, который особенно эффективен в тех задачах, в которых

требуется найти нормальные моды волноводов с однотипными, но численно различными характеристиками.

В целях верификации мы исследовали дифракцию на волноводной линзе в серии численных экспериментов. Такие линзы были предметом многочисленных исследований, выполненных в рамках сотрудничества кафедры радиофизики и кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН [7-48], что дает хороший материал для сравнения. В этих работах методом адиабатических мод поле было представлено в виде суперпозиции адиабатических мод и было описано изменение коэффициента фазового замедления по мере распространения излучения в толще линзы. Было проведено сравнение этих результатов с коэффициентами нормальных мод, вычисленных в рамках проведенных в данной работе численных экспериментов. В результате было получено хорошее совпадение. Это служит не только оправдание состоятельности предложенного метода решения задачи дифракции, но и говорит о большой перспективности метода адиабатических мод как очень экономичного метода. Вопрос о поведении поля в фокусе линзы требует, по всей видимости, учета большого числа эванесцентных мод и поэтому был вынесен за рамки настоящей диссертационной работы.

Заключение

Настоящая диссертационная работа была посвящена исследованию векторной модели волноводного распространения поляризованного излучения в волноводе, диэлектрическая проницаемость которого описывается произвольной кусочно-постоянной функцией, в многомодовом режиме.

Во второй главе были введены четыре потенциала, относительно которых можно переписать уравнения Максвелла как уравнения в частных производных, а краевые условия идеальной проводимости стенок волновода — как условия принадлежности этих потенциалов стандартным пространствам Соболева.

В третьей главе сформулирована задача об отыскании нормальных мод регулярного волновода как спектральная задача относительно потенциалов, для ее конечномерной аппроксимации был использован неполный метод Галеркина, для решения задачи на собственные значения — стандартные функции библиотеки LinearAlgebra системы Maple. Тем самым был предложен новый метод вычисления нормальных мод закрытых волноводов в векторной постановке, пригодный для широкого класса волноводов, заполненных неоднородным веществом. В целях апробации и исследования состоятельности предложенного метода, этот метод был применен к волноводу прямоугольного сечения, внутрь которого помещена прямоугольная диэлектрическая вставка. С этой целью был описан и реализован в среде Maple алгоритм вычисления нормальных мод для волновода прямоугольного сечения, проведена серия численных экспериментов.

Первые эксперименты показали, что самым затратным по времени и ресурсам оказывается вычисление элементов матриц, а не вычисление их собственных значений, как можно было бы ожидать из общих соображений. Поэтому ключевым моментом оптимизации предложенного алгоритма вычисления нормальных мод оказалась замена многократного численного интегрирования при вычислении матричных элементов отысканием интегралов в символьном виде. При этом оказалось, что в рамках метода

Гелеркина получаются разреженные матрицы, большая часть элементов которых при чисто численном подходе оказывалась заполненной очень маленькими числами, обращение этих чисел в нуль в рамках символьно-численного подхода существенно ускорило манипуляции с матрицами. Это обстоятельство заставило разработать алгоритм, позволяющий заменить многократные численные расчеты однократными символьными вычислениями на этапе вычисления нормальных мод.

В целях верификации были проведены сравнения результатов численных экспериментов с известными аналитическими результатами для полых волноводов и с численными расчетами для планарных волноводов, выполненных в кандидатской диссертации Д.В. Дивакова. Выбор планарного волновода как объекта исследования обусловлен в первую очередь надежностью и доступностью результатов по таким системам.

В четвертой главе поставлены две задачи о волноводной дифракции. Для задачи дифракции на стыке планарных интегрально-оптических волноводов описан и реализован в среде Maple алгоритм вычисления коэффициентов прохождения и отражения. Этот алгоритм использует процедуру вычисления нормальных мод, описанную в предыдущей главе, и методы решения линейных систем библиотеки LinearAlgebra в Maple. В целях верификации проведено сравнение с результатами В.В. Шевченко.

Для задачи дифракции на протяженной нерегулярности описан и реализован в среде Maple алгоритм вычисления коэффициентов прохождения и отражения. Этот алгоритм основан на кусочно-постоянной аппроксимации диэлектрической проницаемости и многократно использует разработанный ранее алгоритм решения задачи дифракции на стыке. В целях верификации проведено исследование дифракции на волноводной линзе Люнеберга, проведено сравнение с результатами Д.В. Дивакова.

Таким образом цель настоящей диссертационной работы — разработка метода исследования векторной модели волновода, диэлектрическая проницаемость которого описывается произвольной кусочно-постоянной

функцией, в многомодовом режиме — была в целом достигнута. Метод четырех потенциалов был представлен как универсальный метод исследования векторной модели волновода, на его основе описаны и реализованы в среде Maple алгоритмы решения основных задач теории волноводов для волноводов с прямоугольным сечением, теоретические исследования М.Д. Малых и Л.А. Севастьянова были дополнены численными экспериментами, позволившими подтвердить состоятельность предложенного метода, достоверность получаемых на его основе результатов, а также его большой оптимизационный потенциал.

Литература

1. Самарский А.А., Тихонов А.Н. О возбуждении радиоволноводов. I // Журнал технической физики. – 1947. – Т. 17, вып. 11. – С. 1283-1296.
2. Самарский А.А., Тихонов А.Н. О возбуждении радиоволноводов. II // Журнал технической физики. – 1947. – Т. 17, вып. 12. – С. 1431-1440.
3. Самарский А.А., Тихонов А.Н. О возбуждении радиоволноводов. III // Журнал технической физики. – 1948. – Т. 18, вып. 7. – С. 971-983.
4. Самарский А.А., Тихонов А.Н. О представлении поля в волноводе в виде суммы полей TE и TM // Журнал технической физики. – 1948. – Т. 18, вып. 7. – С. 959-970.
5. Свешников А.Г. Неполный метод Галеркина // ДАН СССР. 1977. -Т.236, №5. - С. 1076-1079
6. Боголюбов А. Н., Петухов А. А., Трубецков М. К. Гибридные методы моделирования волноводов, содержащих локальные неоднородные вставки с многослойным строением // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. – 2016. – Т. 17, 3. – С. 268–279.
7. Сиро Ф. Васкес С. де Ф., Егоров А.А., Черемискин И.В. К вопросу об определении статистических характеристик нерегулярностей тонкопленочных волноводов // Автометрия. – 1991. - № 2. - С. 51-55.
8. Егоров А.А. Исследование рассеяния света и определение статистических характеристик нерегулярностей планарных оптических волноводов: Автореф. дис. ... кан. физико-математических наук. УДН, Москва, 1992.
9. Егоров А.А. Теория и математическое моделирование рассеяния лазерного излучения в нерегулярном интегрально-оптическом волноводе при наличии шума / Автор. дис. ... д-ра физико-математических наук. РУДН, Москва, 2005.
10. Егоров А.А., Ставцев А.В. Разработка методов и алгоритмов расчета основных характеристик трехмерных нерегулярных интегрально-

- оптических волноводов // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. – 2010. - № 2. - С. 139-151.
11. Егоров А.А., Ставцев А.В. Особенности разработки алгоритмов и программ для расчета основных характеристик нерегулярных интегрально-оптических волноводов // Вычислительные методы и программирование. – 2010. - Т. 11, № 2. - С. 31-39.
12. Чехлова Т.К., Тимакин А.Г., Попов К.А. Волноводные датчики концентраций веществ в газовых смесях и жидкостях // Приборы и техника эксперимента. – 2002. - Т. 45, № 2. - С. 145-148.
13. Егоров А.А., Егоров М.А., Чехлова Т.К., Тимакин А.Г. Исследование компьютеризированного интегрально-оптического датчика концентрации газообразных веществ // Квантовая электроника. – 2008. - Т. 38, № 8. - С. 787-790.
14. Егоров А.А., Егоров М.А., Чехлова Т.К., Тимакин А.Г. Применение интегрально-оптических датчиков для контроля опасных газообразных веществ // Датчики и Системы. 2008. - № 1. - С. 25-28.
15. Egorov A.A., Egorov M.A., Stavtsev A.V., Timakin A.G., Chekhlova T.K. A fast integrated optical sensor of gaseous substances // Journal of Russian Laser Research. – 2010. - V. 31, No. 1. - P. 12-21.
16. Егоров А.А. Теория абсорбционного интегрально-оптического датчика газообразных веществ // Оптика и спектроскопия. – 2010. - Т. 109, № 4. - С. 672-682.
17. Севастьянов Л.А., Егоров А.А. Теоретический анализ волноводного распространения электромагнитных волн в диэлектрических плавно-нерегулярных интегральных структурах // Оптика и спектроскопия. – 2008. – Т. 105. – № 4. – С. 650-658.
18. Егоров А.А., Севастьянов Л.А., Севастьянов А.Л. Исследование электродинамических свойств планарной тонкопленочной линзы Люнеберга // Журнал радиоэлектроники. – 2008. – № 6. – С. 1-20

19. Егоров А.А., Севастьянов Л.А. Структура мод плавно-нерегулярного интегрально-оптического четырехслойного трехмерного волновода // Квантовая Электроника. – 2009. – Т. 39. – № 6. – С. 566-574.
20. Егоров А.А., Севастьянов А.Л., Айрян Э.А., Ловецкий К.П., Севастьянов Л.А. Адиабатические моды плавно-нерегулярного оптического волновода: нулевое приближение векторной теории // Математическое моделирование. – 2010. - Т. 22, № 8. - С. 42-54.
21. Севастьянов А.Л. Компьютерное моделирование полей направляемых мод тонкопленочной волноводной линзы Люнеберга: Автореф. дис. ... канд. физико-математических наук. РУДН, Москва, 2010.
22. Егоров А.А., Ловецкий К.П., Севастьянов А.Л., Севастьянов Л.А. Модель многослойного плавно-нерегулярного интегрально-оптического волновода в нулевом векторном приближении [Электронный ресурс] // Электронный журнал "Исследовано в России". – 2011. – Т. 010. - С. 96-122. – Режим доступа: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2011/010.pdf>
23. Ахременков Д. А., Ловецкий К. П. Численное решение систем ОДУ с постоянными коэффициентами // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. – 2011. - № 2. - С. 98-103.
24. Ловецкий К. П., Петров В. В. Интегрирование быстро осциллирующих функций // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. – 2011. - № 2. - С. 92-97.
25. Севастьянов А.Л. Численная реализация модели интегрально-оптической линзы Люнеберга в нулевом приближении // Письма в ЭЧАЯ. - 2011. -Т.8, №5 (168). - С. 804-811.
26. Ayrjan E.A., Egorov A.A., Michuk E.N., Sevastyanov A.L., Sevastianov L.A., Stavtsev A.V. Representations of guided modes of integrated-optical multilayer thin-film waveguides. Preprint - E11-2011-31. Dubna: JINR, 2011. - 52 P.
27. А.А. Егоров, А.Л. Севастьянов, Э.А. Айрян, К.П. Ловецкий, Л.А. Севастьянов. Расчет и проектирование тонкопленочной обобщенной

- волноводной линзы Люнеберга методом адиабатических мод // Вестник ТвГУ. - 2012. – Вып. 24. – С. 42-54.
28. Севастьянов А. Л., Черноиванов А. И. Моделирование волновода типа «рупор» // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. – 2012. - № 2. - С. 55-64.
29. Auryan E.A., Egorov A.A., Sevastianov L.A., Lovetskiy K.P., Sevastyanov A.L. Mathematical modeling of irregular integrated optical waveguides // Lecture Notes in Computer Science. – 2012. - V.7125. - P. 136-147.
30. Севастьянов А.Л., Кулябов Д.С., Севастьянов Л.А. Моделирование методом адиабатических волноводных мод амплитудно-фазового преобразования электромагнитного поля тонкоплёночной обобщённой волноводной линзой Люнеберга // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. - 2013. - № 4. – С. 132-142.
31. Севастьянов Л.А., Егоров А.А., Севастьянов А.Л. Метод адиабатических мод в задачах плавно-нерегулярных открытых волноведущих структур // Ядерная физика. – 2013. - Т. 76, № 2. - С. 252-268.
32. Егоров А.А., Севастьянов Л.А., Севастьянов А.Л. Исследование плавно-нерегулярных интегрально-оптических волноводов методом адиабатических мод: нулевое приближение // Квантовая электроника. – 2014. – Т. 44 (2). – С. 167-173.
33. Егоров А.А., Севастьянов А.Л., Айрян Э.А., Севастьянов Л.А. Устойчивое компьютерное моделирование тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы Люнеберга // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26, № 11. – С. 37-44.
34. Кулябов Д.С., Королькова А.В., Севастьянов Л.А. Простейшая геометризация уравнений Максвелла // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. – 2014. – № 2. – С. 115-125.
35. Севастьянов Л.А., Кулябов Д.С., Севастьянов А.Л. Вычисление поля фазового замедления плавно-нерегулярного интегрально-оптического волновода (на примере тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы

- Люнеберга) // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. – 2014. - №2. – С. 133-141.
- 36.Егоров А.А., Севастьянов Л.А., Севастьянов А.Л. Исследование плавно-нерегулярных интегрально-оптических волноводов методом адиабатических мод: нулевое приближение // Квантовая Электроника. – 2014. – Т. 44, № 2. С. – 167-173.
- 37.Sevastyanov L.A., Sevastyanov A.L., Tyutyunnik A.A. Analytical calculations in Maple to implement the method of adiabatic modes for modeling smoothly irregular integrated optical waveguide structures // Lecture Notes in Computer Science. - 2014. – V. 8660. – С. 419-431.
- 38.Диваков Д.В. Моделирование распространения собственных мод закрытого волновода неполным методом Галеркина // Современные проблемы прикладной математики и информатики (МРАМCS'2014): Тезисы докладов международной конференции (Дубна, 25 – 29 августа 2014 г.). – Дубна: ОИЯИ, 2014. – С.61 – 65.
- 39.Диваков Д.В., Севастьянов Л.А. Применение неполного метода Галеркина в задачах моделирования волноведущих систем с локальной неоднородностью // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2014. Аннотации докладов. В 3 томах. – 2014. – Т. 2. – С. 234.
- 40.Кулябов Д.С., Королькова А.В., Севастьянов Л.А. Расчёт оптических систем и геометризация уравнений Максвелла // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2014. Аннотации докладов. В 3 томах. – 20014. – Т. 2. - С. 235.
- 41.Севастьянов А.Л., Тютюнник А.А., Севастьянов Л.А. Вывод системы уравнений в частных производных для коэффициентных функций Канторовича по базису адиабатических мод // Современные проблемы прикладной математики и информатики (МРАМCS'2014): Тезисы докладов международной конференции (Дубна, 25 – 29 августа 2014 г.). – Дубна: ОИЯИ, 2014. – С.151 – 153.
- 42.Севастьянов А.Л., Тютюнник А.А. Редукция уравнений Максвелла к системе обыкновенных дифференциальных уравнений на основе метода

- адиабатических волноводных мод // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2014. Аннотации докладов. В 3 томах. – 2014. - Т. - С. 236.
43. Севастьянов А.Л., Севастьянов Л.А., Тютюнник А.А. Аналитические вычисления вывода системы дифференциальных уравнений в частных производных для коэффициентных функций Канторовича // Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27, № 7. – С. 103 – 110.
44. Sevastianov L., Sevastianov A., Tutunnik A., Nikolaev N. Scalar Product in the Space of Waveguide Modes of an Open Planar Waveguide // EPJ Web of Conferences. – 2016. – Vol. 108. – Pp. 02041-p.1 – 02041-p.6.
45. Divakov D., Malykh M., Sevastianov L., Sevastianov A., Tiutiunnik A. The numerical-analytical implementation of the cross-sections method to the open waveguide transition of the "horn" type // Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering. – 2017. – Vol. 10337. – Pp. 103370G.
46. Севастьянов А.Л., Тютюнник А.А. Применение систем компьютерной алгебры при расчете распространения волноводных мод в плавно-нерегулярных интегрально-оптических многослойных структурах // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием. – М.: РУДН, 2014. – С. 278 – 280.
47. Sevastyanov A.L., Tyutyunnik A.A. Analytical calculations for the method of adiabatic waveguiding modes // 18th Workshop on Computer Algebra DUBNA-2015: материалы международной конференции. – Dubna: JINR, 2015. – P. 1.
48. Тютюнник А.А. Расчетная модель коэффициентных функций метода волноводов сравнения для открытых плавно-нерегулярных волноводов // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской

- конференции (с международным участием). – М.: РУДН, 2016. – С. 321 – 323.
49. Шевченко В.В. Плавные переходы в открытых волноводах: введение в теорию. – М.: Наука, 1969. – 192 с.
50. Шевченко В.В. О спектральном разложении по собственным и присоединенным функциям одной несамосопряженной задачи типа Штурма-Лиувилля на всей оси // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, № 11. – С. 2004-2020.
51. А. Г. Свешников. К расчету согласования плоских волноводов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1962. – Т.2, 1. – С. 175–179.
52. Свешников А.Г. К обоснованию методов расчета распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1963. – Т. 3, № 2. – С. 314-326.
53. Свешников А.Г. К обоснованию метода расчета нерегулярных волноводов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1963. – Т. 3, № 1. – С. 170-179.
54. Диваков Д.В. Численное решение задач волноводного распространения поляризованного света в интегрально-оптическом волноводе: Авторефер. ... дис. канд. физико-математических наук. – РУДН, Москва, 2017.
55. Могилевский И. Е., Свешников А. Г. Математические задачи теории дифракции. – Москва: Физический факультет МГУ, 2010. – 197 с.
56. А. Зоммерфельд. Оптика: Перевод с немецкого / Под редакцией М.А. Ельяшевича. – М.: Издательство Иностранной литературы, 1953. – 486 с.
57. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 408 с.
58. Титчмарш Е. К. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Том 2: Пер. с англ. /

- Под ред. Б.М. Левитана. — М.: Издательство иностранной литературы, 1961. — 554 с.
59. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. — Москва-Ленинград: ГТТИ, 1933. — 525 с.
60. Деклу Ж. Метод конечных элементов. М.: Мир, 1976. — 96 с.
61. Васильев С. А., Малых М. Д., Севастьянов Л. А. Компьютерные методы в задачах математической физики. — Москва: РУДН, 2018.
62. Saad Y. Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems: Revised Edition. Series: Classics in Applied Mathematics. — SIAM, 2011. — 271 pp.
63. Боголюбов А. Н., Малых М. Д. Замечание об условиях излучения для нерегулярного волновода // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2003. — Т. 43, No 4. — С. 585–588.
64. Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Мухартова Ю. В. Об удовлетворяющем условию излучения решении краевой задачи для произвольного эллиптического оператора // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, No 12. — С. 2230–2236.
65. Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Мухартова Ю. В. Об условиях излучения для импедансного волновода // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2006. — No 1. — С. 3–6.
66. Мухартова Ю. В. Применение методики обобщенного преобразования Фурье при решении задач математической теории волноводов // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2008. — No 3. — С. 37–40.
67. Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Мухартова Ю. В. Существование обобщенного преобразования Фурье решения как условие излучения для класса задач, обобщающих задачи возбуждения колебаний в регулярных волноводах // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2009. — Т. 49, No 2. — С. 1–8.
68. Dimova M. G., Kaschiev M. S., Vinitzky S. I. The Kantorovich method for high-accuracy calculations of a hydrogen atom in a strong magnetic field: lowlying

- excited states // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* – 2005. – Vol. 38. – P. 2337–2352.
69. Chuluunbaatar O., Gusev A.A., Abrashkevich A.G., Amaya-Tapia A., Kaschiev M.S., Larsen S.Y., Vinitzky S.I. . KANTBP: A program for computing energy levels, reaction matrix and radial wave functions in the coupled-channel hyperspherical adiabatic approach // *Computer Physics Communications*. – 2007. – Vol. 177. – P. 649–675.
70. Chuluunbaatar O., Gusev A.A., Vinitzky S.I., Abrashkevich A.G. KANTBP 2.0: New version of a program for computing energy levels, reaction matrix and radial wave functions in the coupled-channel hyperspherical adiabatic approach // *Computer Physics Communications*. – 2008. – Vol. 179. – P. 685–693.
71. Диваков Д. В., Тютюнник А. А. Применение метода Канторовича к задаче моделирования открытых волноводов // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием. – М.: РУДН, 2015. – С. 263 – 264.
72. Тютюнник А.А., Севастьянов Л.А., Севастьянов А.Л. Метод аналитических вычислений вывода СУЧП для коэффициентных функций Канторовича по базису адиабатических волноводных мод // Научной сессии НИЯУ МИФИ-2015. Аннотации докладов: в 3 томах. – М.: НИЯУ МИФИ, 2015. – Т.2. – С. 260.
73. Севастьянов А.Л., Севастьянов Л.А., Тютюнник А.А. Вывод системы уравнений для коэффициентных функций метода поперечных сечений для интегрально-оптического волновода с помощью пакета символьных вычислений Maple // Компьютерная алгебра: материалы международной научной конференции. – Москва: ФИЦ ИУ РАН, 2016. – С. 95 – 97.
74. Gusev A. A. Algorithm for computing wave functions, reflection and transmission matrices of the multichannel scattering problem in the adiabatic representation using the finite element method // *Вестник Российского*

- университета дружбы народов. Серия Математика. Информатика. Физика.
– 2014. – No. 2. – P. 93–114.
75. Халилов В. Р. Теоретическая механика: динамика классических систем: учебное пособие для вузов, 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 355 с.
76. Краснушкин П. Е., Моисеев Е. И. О возбуждении вынужденных колебаний в слоистом радиоволноводе // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 264, No 5. – С. 1123–1127.
77. Долгополов Д. В. Методы нахождения собственных значений и собственных векторов матриц: Методические указания. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2005. – 39 с.
78. Peter Arbenz. Lecture Notes on Solving Large Scale Eigenvalue Problems. - Zürich: D-MATH ETH, 2012. – 247 p.
79. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с.
80. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу: Перевод с французского / под редакцией С.В. Фомина. 2-е издание, переработанное и дополненное. – Москва: Мир, 1979. – 587 с.
81. Самарский А. А., Тихонов А. Н. К теории возбуждения радиоволноводов. // Избранные труды А. А. Самарского. Глава 1. – Москва: Макс Пресс, 2003. – С. 28–57.
82. Смирнов Ю. Г. О полноте системы собственных и присоединенных волн частично заполненного волновода с нерегулярной границей // Доклады АН СССР. – 1987. – Т. 297, No 4. – С. 829–832.
83. Смирнов Ю. Г. Применения метода операторных пучков в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода с нерегулярной границей // Доклады АН СССР. – 1990. – Т. 312, No 3. – С. 597–599.
84. Смирнов Ю. Г. Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, No 1. – С. 140–147.

85. Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Свешников А. Г. О полноте системы собственных и присоединенных функций волновода // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1999. – Т. 38, No 11. – С. 1891–1899.
86. Делицын А. Л. Об одном подходе к вопросу о полноте нормальных волн волновода с магнитоэлектрическим заполнением // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, No 5. – С. 629–633.
87. Делицын А. Л. О полноте системы собственных векторов электромагнитных волноводов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, No 10. – С. 1883–1888.
88. А. Н. Боголюбов, Делицын А. Л., Малых М. Д., Свешников А. Г. О базисности системы корневых векторов радиоволновода // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. – 2000. – No 6. – С. 17–20.
89. Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Малых М. Д. О корневых векторах цилиндрического волновода // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2001. – Т. 41, No 1. – С. 126–129.
90. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – Москва: Наука, 1965. – 448 с.
91. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. 2-е изд. перераб. и доп. — М.: Наука, 1969. — 526 с.
92. Шестопапов В. П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур. АН УССР, Институт радиофизики и электроники. – Киев: Наук. думка, 1987. – 287 с.
93. Sanz-Serna J.M. Symplectic Runge–Kutta Schemes for Adjoint Equations, Automatic Differentiation, Optimal Control, and More // SIAM Review. – 2016. – Vol. 58, No. 1 – P. 3–33.

94. Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Свешников, А. Г. О задаче возбуждения волновода с неоднородным заполнением // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1999. – Т.39, 11. – С. 1869-1888.
95. Делицын А. Л. О задаче рассеяния на неоднородности в волноводе // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – 40:4. – С. 606-610.
96. Делицын А. Л. Задача дифракции в волноводе // Дифференциальные уравнения. – 2005. – 41:3. – С. 375-381.
97. Делицын А. Л. О постановке краевых задач для системы уравнений Максвелла в цилиндре и их разрешимости // Известия РАН. Серия. математика. – 2007. – 71:3. – С. 61-112.
98. Малых М. Д. О способе повышения нижней границы непрерывного спектра в задачах спектральной теории волноведущих систем // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. – 2006. – No 4. – С. 3–5.
99. Bulla W., Gesztesy F., Renger W., Simon B. Weakly coupled bound states in quantum waveguides // Proc. Amer. Math. Soc. – 1997. – V. 127. – P. 1487-1495.
100. Krejciric D., Kriz J. On the spectrum of curved planar waveguide // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto University. – 2005. – V. 41. – P. 757-791.
101. Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Малых М. Д. О вещественных резонансах в волноводе с неоднородным заполнением // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. – 2001. – No 5. – С. 23–25.
102. Боголюбов А. Н., Малых М. Д. О ловушечных модах электромагнитного волновода с неоднородным заполнением // Радиотехника и электроника. – 2005. – Т. 50, No 2. – С. 218–222.
103. Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шредингера. – М.: Изд-во МГУ, 1983. — 392 с.

104. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике: Учебное пособие. — М.: Изд-во МГУ, 1993. — 352 с.
105. Абрамов С. А., Бронштейн М. Решение линейных дифференциальных и разностных систем по отношению к части неизвестных // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — 46:2. — С. 229–241.
106. Abramov S. A., Bronstein M., Khmelnov D. E. On regular and logarithmic solutions of ordinary linear differential systems // Lecture Notes in Computer Science. — 2005. — V. 3718. — P. 1–12.
107. Abramov S. A., Bronstein M. On solutions of linear functional systems // Proceedings of the 2001 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. — 2001. — P. 1–6.
108. Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Свешников А. Г. О неустойчивости вложенных в непрерывный спектр собственных значений волновода по отношению к возмущениям его заполнения // Доклады Академии наук. — 2002. — Т. 385, № 3. — С. 744–746.
109. Боголюбов А. Н., Малых М. Д. К теории возмущений спектральных характеристик волноведущих // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2003. — Т. 43, № 7. — С. 1049–1061.
110. Делицын А. Л. О методе конечных элементов для задачи дифракции в волноводе // Журнал вычислительной математики и математической физики — 2010. — Т. 50, № 11. — С. 1926–1930.
111. Боголюбов А. Н., Петухов А. А., Шапкина Н. Е. Математическое моделирование волноводов, содержащих локальные вставки с фрактальной структурой // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2011. — № 2. — С. 20–23.
112. Петухов А. А. Совместное применение неполного метода Галеркина и метода матриц рассеяния для моделирования многослойных

- дифракционных решеток // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, No 6. – С. 41–53.
113. Боголюбов А. Н., Петухов А. А., Трубецков М. К. Математическое моделирование многослойных дифракционных решеток // Физические основы приборостроения. – 2014. – Т. 3, No 4. – С. 20–27.
114. Боголюбов А. Н., Петухов А. А., Трубецков М. К. Гибридные методы моделирования волноводов, содержащих локальные неоднородные вставки с многослойным строением // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. — 2018. – Т. 17. – С. 268–279.
115. Боголюбов А. Н., Едакина, Т. В. Применение вариационно-разностных методов для расчета диэлектрических волноводов // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. – 1991. – Т.32, №2. – С. 6-14.
116. Malykh M.D., Sevastianov L.A., Tiutiunnik A.A., Nikolaev N.E. On the representation of electromagnetic fields in closed waveguides using four scalar potentials // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. – 2018. – V.32,7. – P. 886-898.
117. Малых М. Д., Севастьянов А. Л., Севастьянов Л. А., Тютюнник А. А. О сведениях уравнений Максвелла в волноводах к системе связанных уравнений Гельмгольца // Вестник РУДН, серия: Математика. Информатика. Физика. – 2018. – Т. 26, № 1.– С. 39-48.
118. Тютюнник А. А. О вычислении электромагнитных полей в закрытых волноводах с неоднородным заполнением // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. – 2018. – Т. 26, № 2. – С. 129–139.
119. Hellwig G. Differential Operators of Mathematical Physics. – Reading, MA: Addison-Wesley, 1967. – 304 pp.
120. Боголюбов А.Н., Ерохин А.И., Могилевский И.Е. Векторная модель волновода с входящими ребрами [Электронный ресурс] // Журнал радиоэлектроники. — 2012. — № 2. – Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/koi/feb12/index.html>.

121. Боголюбов А.Н., Пикунов В.М., Ерохин А.И., Могилевский И.Е., Светкин М.И. Проекционные соотношения непрерывности для волноведущих структур лестничного типа с учетом особенностей на ребрах // Физические основы приборостроения. – 2017. – Т.6, №4. – С. 90-96.
122. Боголюбов А.Н., Могилевский И.Е. Математическое исследование особенности электромагнитного поля волновода в окрестности угловой точки линии разрыва диэлектрической проницаемости // Физические основы приборостроения. – 2016. – Т.5, №2. – С. 72-79.
123. Боголюбов А.Н., Могилевский И.Е., Свешников А.Г. Асимптотическое представление электромагнитного поля диэлектрического волновода в окрестности угловой точки линии разрыва диэлектрической проницаемости // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т.55, №3. – С. 446-459.
124. Bronstein Manuel. Symbolic Integration I. – Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997. – 303 pp.
125. К.П. Ловецкий, В.В. Петров. Интегрирование быстро осциллирующих функций // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. – 2011. – № 2. – С. 92–97
126. Malykh M.D., Sevastianov L.A., Tyutyunnik A., Nikolaev N.E. On the representation of Maxwell's equations in closed waveguides by the help of Helmholtz equations // Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling: book of abstracts 6th International conference. - М.: МИФИ, 2017. – С. 145 – 146.
127. Divakov D.V., Lovetskiy K.P., Malykh M.D., Tiutiunnik A.A. The application of Helmholtz decomposition method to investigation of multicore fibers and their application in next-generation communications systems // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – Vol. 919. – Pp. 469–480.

128. Malykh M.D., Sevastianov L.A., Tiutiunnik A.A. Calculation of normal modes of the closed waveguides in general vector case // Progress in Biomedical Optics and Imaging - Proceedings of SPIE. – 2018. – Vol. 10717. – Pp. 107170Z.
129. Divakov D., Tiutiunnik A., Sevastianov A. Symbolic-Numeric Computation of the Eigenvalues and Eigenfunctions of the Leaky Modes in a Regular Homogeneous Open Waveguide // MATEC Web of Conferences. – 2018. – Vol. 186. – P. 01009.
130. Mathematics-based software and services for education, engineering, and research. Maple online help [electronic resource]. – Режим доступа: <https://www.maplesoft.com/support/help>
131. Anderson E., Bai Z., Bischof C., Blackford S., Demmel J., Dongarra J. J., Du Croz J. J., Greenbaum A., Hammarling S., McKenney A. and Sorensen D. LAPACK Users' Guide (3rd Edition) [electronic resource]. – Philadelphia: SIAM, 1999. – Режим доступа: <http://www.netlib.org/lapack/lug>
132. Golub G. H. and Van Loan C. F. Matrix Computations (3rd Edition). – Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996. – 723 pp.
133. Van Loan C. On Estimating the Condition of Eigenvalues and Eigenvectors // Linear Algebra and its Applications. – 1987 – Vol. 88–89. – P. 715-732.
134. LAPACK Users' Guide Release [electronic resource]. – Режим доступа: <http://www.netlib.org/lapack/lug/node93.html>
135. Daniel Kressner. Numerical Methods for General and Structured Eigenvalue Problems. – Berlin Heidelberg: Springer, 2006. – 273 pp.
136. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970. – 565 с.
137. Диваков Д.В., Малых М.Д., Севастьянов А.Л., Севастьянов Л.А. Моделирование распространения поляризованного света в тонкопленочной волноводной линзе // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. – 2017. – Т. 25, № 1. – С. 56–68.

138. Malykh M., Sevastianov L., Tyutyunnik A., Nikolaev N. Diffraction of Electromagnetic Waves on a Waveguide Joint // EPJ Web of Conferences. – 2018. – Vol. 173. – Pp. 02014.
139. Divakov D., Tiutiunnik A., Sevastianov A. Algorithm for Numerical Solution of Diffraction Problem on the Joint of Two Open Three-Layer Waveguides // MATEC Web of Conferences. – 2018. Vol. 186. – Pp. 01010.
140. Каценеленбаум, Б.З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. – Москва: АН СССР, 1961. – 216 с.
141. А.А. Иванов, В.В. Шевченко. Плоскопоперечный стык двух планарных волноводов // Радиотехника и электроника. – 20.. – Т..54, №1. – С.68-77
142. D. Divakov, M. Malykh, L. Sevastianov, A. Sevastianov and E. Ayryan. Quasi-Vector Model of Propagation of Polarized Light in a Thin-Film Waveguide Lens // EPJ Web of Conferences. – 2018. – V. 173. – P. 02007.