на правах рукописи

КИСЕЛЕВА Ксения Михайловна

ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена на кафедре прикладной математики
Вологодского государственного университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Зейфман Александр Израилевич**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Беляев Константин Павлович,** ведущий научный сотрудник Института океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук (ИО РАН) кандидат физико-математических наук **Семенова Ольга Валерьевна,** старший научный сотрудник Института проблем управления им. В.А. Трапезникова (ИПУ РАН)
Ведущая организация:	**Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики**

Защита состоится 16 февраля 2018 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.203.28 при Российском университете дружбы народов по адресу: Москва, ул. Орджоникидзе, дом 3, аудитория 110.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке РУДН по адресу: 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, дом 6 и на официальном сайте диссоветов РУДН по адресу: www.dissovet.rudn.ru.

Автореферат разослан «   » декабря 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета С.А. Васильев

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Методы и модели массового обслуживания играют большую роль в исследовании телекоммуникационных систем.

Первые работы по данной тематике были проведены А. К. Эрлангом. Задачи, связанные с обслуживанием больших массивов однородных требований возникают в самых разнообразных направлениях исследований: в технике, экономике, организации производства. Теория массового обслуживания является активно развивающимся разделом прикладной теории вероятностей, цель исследований которого - рациональный выбор структуры системы обслуживания и процесса обслуживания.

Очень важными задачами являются изучение скорости сходимости к предельному режиму и устойчивости для нестационарных систем обслуживания. Первые исследования в этом направлении инициированы Б. В. Гнеденко.

Большой вклад в развитие данной области исследований внесли также следующие российские и зарубежные ученые В.В. Анисимов, Л.Г. Афанасьева, Г.П. Башарин, К.П. Беляев, А.А. Боровков, П.П. Бочаров, Р.Л. Добрушин, А.Н. Дудин, А.И. Зейфман, В.В. Калашников, Н.В. Карташов, В.Ю. Королев, Е.В. Морозов, А.В. Печинкин, В.В. Рыков, О.В. Семенова, В.Г. Ушаков, С.Г. Фосс, E. Van Doorn, M.Neuts, R.L.Tweedie, W.Whitt и другие.

Исследование свойств эргодичности и устойчивости для неоднородных марковских цепей с непрерывным временем, а также приложение этих результатов к моделям массового обслуживания, описываемым процессами рождения и гибели, начато в работах А.И. Зейфмана. [1]

Задачи устойчивости стохастических моделей изучались также В.В. Анисимовым, А.Ю. Митрофановым, В.В. Калашниковым, Н.В. Карташовым.

[1] Zeifman A. I. Stability for contionuous-time nonhomogeneous Markov chains // Lect. Notes Math.. - 1155. - 1985. - p. 401-414; Zeifman A. I. Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes // Stoch. Proc. Appl.. - 1995. - 59. - p. 157-173; Зейфман А. И., Бенинг В. Е., Соколов И. А. Марковские цепи и модели с непрерывным временем. М.: Элекс-КМ, 2008.

Кроме того, значительная часть исследований посвящена вопросам, связанным с аппроксимацией нестационарных марковских цепей. [2]

Интерес к исследованию нестационарных (неоднородных по времени) марковских цепей постоянно увеличивается, в связи с чем является актуальной задача получения оценок скорости сходимости, устойчивости и погрешности аппроксимации для новых классов моделей, а также применение полученных оценок для построения основных предельных характеристик конкретных систем массового обслуживания.

Цель диссертационной работы.

Целью работы является изучение некоторых новых классов нестационарных моделей массового обслуживания, получение оценок вероятностных характеристик: скорости сходимости к предельному режиму, устойчивости и аппроксимации, разработка алгоритмов и программ построения этих характеристик, решение с помощью численных методов задачи Коши на соответствующем отрезке для усеченного процесса.

Основные задачи.

Для достижения заявленной цели решены следующие задачи:
- получены условия слабой эргодичности, оценки скорости сходимости для процесса, описывающего число требований в системе массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием требований;
- проведена аппроксимация процессов, описывающих число требований в некоторых конечных моделях массового обслуживания;
- получены условия нуль-эргодичности, экспоненциальной эргодичности и оценки устойчивости, а также проведена аппроксимация для процесса, описывающего число требований в модели с повторными вызовами и одним сервером;
- исследован и использован метод двусторонних усечений для моделей, описываемых неоднородными процессами рождения и гибели и модели $M_t/M_t/S$.

[2] Mandelbaum A., Massey W. Strong approximations for time-dependent queues// Math. Oper. Res., 1995, No.20, p. 33-64; A. I. Zeifman, A. Korotysheva, Y. Satin, V. Korolev, V. Bening. Perturbation bounds and truncations for a class of Markovian queues, Queueing Systems, vol. – 2014. – 76, p. 205-221.

Кроме того, для каждой из задач с помощью разработанных алгоритмов и программ с применением численных методов построены вероятностные характеристики соответствующих процессов.

Положения, выносимые на защиту.

1. Построение предельных характеристик для процесса, описывающего число требований в модели массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием требований.
2. Построение предельных характеристик для процесса рождения и гибели с особенностями.
3. Применение метода двусторонних усечений для неоднородных процессов рождения и гибели и процесса, описывающего число требований в модели $M_t/M_t/S$ с использованием численных методов и оценок скорости сходимости.
4. Получение оценок скорости сходимости, устойчивости и аппроксимации для процесса, описывающего число требований в модели массового обслуживания с повторными вызовами и одним сервером.

Научная новизна.

- для процесса, описывающего число требований в системе с групповым поступлением и групповым обслуживанием требований, получено условие слабой эргодичности, новые оценки скорости сходимости к предельному режиму и предельному среднему, оценки устойчивости;
- для процессов рождения и гибели с различными интенсивностями катастроф получено условие слабой эргодичности и оценки скорости сходимости;
- для неоднородного процесса рождения и гибели и процесса, описывающего число требований в системе массового обслуживания $M_t/M_t/S$, получены новые оценки равномерной аппроксимации двусторонними усечениями;
- для процесса, описывающего число требований в системе массового обслуживания с повторными вызовами и одним сервером, получены условия эргодичности, оценки устойчивости и аппроксимации.

Личное участие автора заключается в исследовании рассматриваемых моделей, получении новых оценок для них, а также разработке алгоритмов и программ численного построения основных характеристик соответствующих процессов.

Алгоритм, на котором основано построение вероятностных характеристик процесса, подробнее описан в диссертационной работе.

Методы исследования.

Для решения вышеописанных задач используется оператор Коши дифференциального уравнения в банаховом пространстве и оценки его нормы. Вопросы, связанные с вычислением требуемых параметров сводятся к изучению бесконечных систем дифференциальных уравнений на множестве стохастических векторов. Основным инструментом исследования и получения соответствующих оценок является метод, базирующийся на двух моментах: оценках, основанных на применении логарифмической нормы линейной операторной функции и специальных преобразованиях редуцированной матрицы интенсивностей марковской цепи.

Достоверность и обоснованность полученных результатов.

Достоверность полученных результатов следует из строгих математических доказательств.

Теоретическая и практическая ценность.

Полученные результаты могут быть использованы в исследовании конкретных систем линейных дифференциальных уравнений, стохастических моделей в технике, химии, биологии, физике и других отраслях. Описанные подходы могут быть применены в моделировании потоков информации, связанных с высокопроизводительными вычислениями.

Апробация работы.

Результаты работы докладывались на:

- семинарах кафедры прикладной математики ВоГУ "Современные методы стохастического моделирования сложных систем"(2014-2017),
- второй молодежной научной конференции "Задачи современной информатики"(Москва, 2015),
- 29-й Европейской конференции по моделированию, ECMS (Варна, Болгария, 2015),

- 30-й Европейской конференции по моделированию, ECMS (Регенсбург, Германия, 2016),
- научном межвузовском семинаре "Современные телекоммуникации и математическая теория телетрафика"(РУДН, Москва, 2017),
- 7-й Всероссийской конференции (с международным участием) "Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем"(в рамках 53-й Всероссийской конференции проблем математики, информатики, физики и химии) (РУДН, Москва, 2017),
- 31-й Европейской конференции по моделированию, ECMS (Будапешт, Венгрия, 2017).

Публикации автора.

Основные результаты опубликованы в [1]-[12].

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, заключения, приложения, списка литературы, включающего 97 наименований, в том числе работы автора. Работа изложена на 97 листах машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обоснование актуальности темы диссертации, приводится краткий обзор работ по данной тематике, сформулированы результаты, полученные в работе.

В 1 главе приводится вспомогательный математический аппарат, необходимый для дальнейшего исследования. Вводятся определения основных понятий: предельного среднего, пространства l_1, логарифмической нормы оператора, а также некоторые понятия и методы, важные для дальнейшего исследования.

В §1 главы 2 рассматривается класс моделей, в которых допускаются групповое поступление и групповое обслуживание требований. Общая модель такого типа введена и исследована ранее. [3]

Транспонированная матрица интенсивностей для данной модели имеет следующий вид:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{00}(t) & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \mu_3(t) & \cdots & \mu_S(t) \\ \lambda_1(t) & a_{11}(t) & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \cdots & \mu_{S-1}(t) \\ \lambda_2(t) & \lambda_1(t) & a_{22}(t) & \mu_1(t) & \cdots & \mu_{S-2}(t) \\ \cdots & & & & & \\ \lambda_S(t) & \lambda_{S-1}(t) & \lambda_{S-2}(t) & \lambda_{S-3}(t) & \cdots & a_{SS}(t) \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

причем $a_{ii}(t) = -\sum_{k=1}^{i} \mu_k(t) - \sum_{k=1}^{S-i} \lambda_k(t)$, и $\lambda_k(t) = 0$ при $k > N$.

В данной работе подробнее изучается более конкретная ситуация.

Общее количество требований не превосходит S, максимальный размер группы поступающих требований равен $N \leq S$, интенсивность поступления группы $k \leq N$ требований есть $\lambda_k(t) = \frac{\lambda(t)}{k}$. Интенсивность обслуживания группы $k \leq S$ имеющихся в системе требований есть $\mu_k(t) = \frac{\mu(t)}{k}$.

[3] Сатин, Я. А., Зейфман, А. И., Коротышева, А. В., Шоргин, С. Я. Об одном классе марковских систем обслуживания. Информатика и ее применения.–2011– 5, вып. 4, 6–12;
Зейфман, А.И., Коротышева, А.В., Киселева, К.М., Королев, В.Ю., Шоргин, С.Я. Об оценках скорости сходимости и устойчивости для некоторых моделей массового обслуживания.// Информатика и её применения. – 2014. – 8, вып. 3, 19-27;
A. I. Zeifman, A. Korotysheva, Ya. Satin, G. Shilova, T. Panfilova. On a queueing model with group services, Lecture Notes in Communications in Computer and Information Science. – 2013. – 356, 198-205.

Здесь $X = X(t)$, $t \geq 0$, - число требований в системе обслуживания. Это неоднородная марковская цепь с непрерывным временем и пространством состояний $Z = \{0, 1, \ldots, S\}$. «Базовые» интенсивности поступления и обслуживания $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ предполагаются локально интегрируемыми на $[0, \infty)$ функциями времени t. Обозначим через $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \ldots)^T$, $t \geq 0$ - вектор-столбец вероятностей состояний, через $E(t,k) = E\{X(t)\,|X(0) = k\}$ математическое ожидание процесса (среднее число требований) в момент t при условии, что в нулевой момент времени он находится в состоянии k. Марковская цепь имеет предельное среднее $\phi(t)$, если $E(t,k) - \phi(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и любом k.

Теорема 1 . *Процесс $X(t)$, описывающий число требований в рассматриваемой системе, слабо эргодичен при любом N ($1 \leq N \leq S$) тогда и только тогда, когда выполнено условие:*

$$\int\limits_0^\infty (\lambda(t) + \mu(t))\, dt = +\infty. \tag{2}$$

Следствие 1 . *Если (2) справедливо, то процесс $X(t)$ слабо эргодичен, имеет предельное среднее $\phi(t)$ и справедливы оценки скорости сходимости:*

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 8Se^{-\int_0^t \mu(u)du}, \tag{3}$$

при любых начальных условиях $\mathbf{p}^*(s), \mathbf{p}^{**}(s)$ и любых $s, t, \quad 0 \leq s \leq t$,

$$|E(t,k) - \phi(t)| \leq 8S^2 e^{-\int_0^t \mu(u)du} \tag{4}$$

при любом k, если $\int_0^{+\infty} \mu(t)dt = +\infty$, а при $\int\limits_0^\infty \lambda(t)\, dt = +\infty$, соответственно:

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 8S\,(1 + \ln S)\, e^{-\frac{1}{S}\int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau}, \tag{5}$$

$$|E(t,k) - \phi(t)| \leq 8S^2\,(1 + \ln S)\, e^{-\frac{1}{S}\int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau}. \tag{6}$$

Пусть $\bar{X} = \bar{X}(t)$ – число требований для «возмущенной» системы обслуживания, соответствующие его характеристики обозначим теми же буквами с чертой сверху. Кроме того, полагаем, что при всех $t \geq 0$ выполнено условие малости $\|\mathbf{A}(t) - \bar{\mathbf{A}}(t)\| \leq \varepsilon$.

Следствие 2 . *Пусть* $\int_0^{+\infty} \mu(t)dt = +\infty$, *и вдобавок, при некоторых положительных* M, α *и всех* $0 \leq s \leq t$ *справедливо неравенство*

$$e^{-\int_s^t \mu(u)du} \leq Me^{-\alpha(t-s)}. \tag{7}$$

Тогда при любых начальных условиях $\mathbf{p}(0)$ *и* $\bar{\mathbf{p}}(0)$ *соответственно справедливы неравенства*

$$\limsup_{t\to\infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon(1 + \ln 4SM)}{\alpha}, \tag{8}$$

$$\limsup_{t\to\infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{\varepsilon S(1 + \ln 4SM)}{\alpha}. \tag{9}$$

Отметим, что условие (7) заведомо выполнено, если интенсивность обслуживания 1−периодична, при этом $\alpha = \int_0^1 \mu(t)\,dt$, а

$$M = e^{\max_{|t-s|\leq 1} \int_s^t \mu(u)du}.$$

В §2 главы 2 рассматривается модель массового обслуживания, описываемая процессом рождения и гибели с катастрофами в случае, когда интенсивности катастроф различные. Здесь продолжены исследования, начатые ранее.[4]

Для процесса, описывающего число требований в рассматриваемой системе получено условие слабой эргодичности, оценки скорости сходимости к предельному режиму и предельному среднему.

В §1 главы 3 исследуется модель массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием требований, частный случай которой рассмотрен в §1 главы 2. Получены оценки равномерной аппроксимации и приведены примеры.

В §2 главы 3 рассмотрены двусторонние усечения и приведены примеры для систем массового обслуживания, число требований в которых описывает-

[4] A. Zeifman, A. Korotysheva, Ya. Satin, V. Korolev, S. Shorgin, R. Razumchik. Ergodicity and perturbation bounds for inhomogeneous birth and death processes with additional transitions from and to origin. Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2015.

ся неоднородным процессом рождения и гибели. Соответствующие результаты подробно рассмотрены в [4].

Обозначим через $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)^T$, $t \geq 0$ вектор-столбец вероятностей состояний процесса, $\lambda_k(t)$ и $\mu_k(t)$ интенсивности рождения и гибели соответственно, через $A(t)$ - транспонированную матрицу интенсивностей.

Полагаем

$$\lambda_n(t) \leq \Lambda_n \leq L < \infty, \quad \mu_n(t) \leq \Delta_n \leq L < \infty, \tag{10}$$

при почти всех $t \geq 0$.

Обозначим

$$g_k = \sum_{j=k}^{i-1} d_j, \quad G_k = \sum_{j=i+1}^{k} d_j,$$

где d_j - положительные числа.

Теорема 2 . *Рассмотрим процесс рождения и гибели $X(t)$ с интенсивностями $\lambda_k(t)$ и $\mu_k(t)$. Пусть существует положительное M и α такие, что*

$$e^{-\int_s^t \alpha(\tau)\, d\tau} \leq M e^{-\alpha(t-s)}, \tag{11}$$

для любого $0 \leq s \leq t$. Тогда процесс $X(t)$ слабо экспоненциально эргодичен по норме $1D$.

Пусть существует последовательность $\{d_k\}$ такая, что (11) выполняется. Тогда $X(t)$ слабо экспоненциально эргодичен по норме $1D$, и справедливы следующие оценки

$$p_k(t) \leq \begin{cases} \frac{M(d_{i-1}\Delta_i + d_{i+1}\Lambda_i)}{\alpha\, g_k}, & k < i \\ \frac{M(d_{i-1}\Delta_i + d_{i+1}\Lambda_i)}{\alpha\, G_k}, & k > i \end{cases}, \tag{12}$$

для любого k.

Рассмотрим усеченный процесс рождения и гибели $X^*(t)$ с пространством состояний $N_1, N_1+1, \dots, N_2$ и интенсивностями $\lambda_k^*(t) = \lambda_k(t)$ при $N_1 \leq k < N_2$, и $\mu_k^*(t) = \mu_k(t)$ при $N_1 < k \leq N_2$. Положим остальные интенсивности рождения и гибели равными нулю. Соответствующие характеристики данного процесса обозначим теми же буквами со "звездочкой".

Пусть $\{d_k^*\}$ - последовательность положительных чисел такая, что

$$e^{-\int\limits_s^t \alpha^*(\tau)\,d\tau} \leq M^* e^{-\alpha^*(t-s)}, \tag{13}$$

для положительных M^*, α^* и любого $0 \leq s \leq t$.

Положим $g_k^* = \sum\limits_{j=k}^{i-1} d_j^*$ и $G_k^* = \sum\limits_{j=i+1}^{k} d_j^*$.

Пусть также

$$d = \min\left(d_{i-1}, d_{i+1}\right), \quad W = \inf_k \left(\frac{g_k}{k}, \frac{d}{i}, \frac{G_k}{k}\right). \tag{14}$$

Теорема 3 . *Рассмотрим процессы рождения и гибели* $X(t)$, $X^*(t)$ *такие, что выполняются (11) и (13). Пусть* $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}^*(0) = e_i$ *(то есть* $X(0) = X^*(0) = i$*). Тогда:*

$$\begin{gathered}\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t)\| \leq \\ \frac{4M\,M^*\left(\Delta_i\, d_{i-1}^* + \Lambda_i\, d_{i+1}^*\right)}{d\alpha\,\alpha^*} \\ \cdot\left(\frac{g_{N_1-1}\Delta_{N_1}}{g_{N_1}^*} + \frac{G_{N_2+1}\Lambda_{N_2}}{G_{N_2}^*}\right),\end{gathered} \tag{15}$$

и

$$\begin{gathered}\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t)\|_{1E} \leq \\ \frac{4M\,M^*\left(\Delta_i\, d_{i-1}^* + \Lambda_i\, d_{i+1}^*\right)}{W\alpha\,\alpha^*} \\ \cdot\left(\frac{g_{N_1-1}\Delta_{N_1}}{g_{N_1}^*} + \frac{G_{N_2+1}\Lambda_{N_2}}{G_{N_2}^*}\right).\end{gathered} \tag{16}$$

Следствие 3 . *Пусть выполняются условия Теоремы 3 и, кроме того,* $N_2 = \infty$. *Тогда справедливы следующие неравенства:*

$$\begin{gathered}\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t)\| \leq \\ \frac{4M\,M^*\left(\Delta_i\, d_{i-1}^* + \Lambda_i\, d_{i+1}^*\right) g_{N_1-1}\Delta_{N_1}}{d\alpha\,\alpha^* g_{N_1}^*},\end{gathered} \tag{17}$$

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t)\|_{1E} \leq \frac{4M\,M^*\left(\Delta_i\, d^*_{i-1} + \Lambda_i\, d^*_{i+1}\right) g_{N_1-1}\Delta_{N_1}}{W\alpha\,\alpha^* g^*_{N_1}}, \tag{18}$$

для любого $i > N_1$.

Следствие 4 . *Пусть в условиях Теоремы 3* $N_1 = 0$. *Тогда справедливы следующие оценки:*

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t)\| \leq \frac{4M\,M^*\left(\Delta_i\, d^*_{i-1} + \Lambda_i\, d^*_{i+1}\right) G_{N_2+1}\Lambda_{N_2}}{d\alpha\,\alpha^* G^*_{N_2}}, \tag{19}$$

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t)\|_{1E} \leq \frac{4M\,M^*\left(\Delta_i\, d^*_{i-1} + \Lambda_i\, d^*_{i+1}\right) G_{N_2+1}\Lambda_{N_2}}{W\alpha\,\alpha^* G^*_{N_2}}, \tag{20}$$

для любого $i < N_2$.

В §3 главы 3 рассматривается модель массового обслуживания $M_t/M_t/S$ (в случае средней интенсивности траффика).

Для рассматриваемой модели получены оценки равномерной аппроксимации двусторонними усечениями (см. [4]).

В 4 главе исследуется некоторый класс моделей с повторными вызовами, а именно неоднородная модель массового обслуживания с повторными вызовами и одним сервером, введенная и в однородном случае рассмотренная ранее.[5] В указанной работе также приведено подробное содержательное описание модели, для которой построен двумерный процесс, описывающий число требований в системе, с интенсивностями поступления $\lambda(t)$, обслуживания $\mu(t)$ и перехода клиента с орбиты на сервер $\mu_0(t)$.

Процесс сведен к одномерному, в результате чего получается матрица интенсивностей $Q = (q_{ij})$ следующего вида:

[5] Zeifman A., Satin Ya., Morozov E., Nekrasova R., Gorhsenin A. On the ergodicity bounds for a constant retrial rate queueing model // Proceedings of the 8th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops. – 2016.

$$Q(t) = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_0 & -(\lambda+\mu_0) & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \mu_0 & -(\lambda+\mu_0) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & 0 & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Для данного процесса получены условия эргодичности, оценки устойчивости, проведена аппроксимация.

Пусть процесс близок к однородному, и его интенсивности близки к постоянным. Тогда, применяя общий подход[6] , можно получить следующее утверждение.

Теорема 4 . *Положим, что интенсивности имеют вид*

$$\lambda(t) = \lambda^* + l(t),\ \mu(t) = \mu^* + m(t),\ \mu_0(t) = \mu_0^* + m_0(t),$$

причем выполняются условия:

$$\mu^*\mu_0^* > \lambda^*(\lambda^* + \mu_0^*),$$

$$\epsilon_B < \alpha^*,$$

где $\alpha^* = \min(\lambda^*+\mu_0^*-\mu^* b^{-1},\ \lambda^*+\mu^*-\lambda^*(b+ab)-\mu_0^* a^{-1})$, $\epsilon_B \geq l(t)+m(t)+l(t)(b+ab)+m_0(t)$. *Тогда для любых начальных условий* $\mathbf{p}^*(0),\ \mathbf{p}^{**}(0)$ *процесс* $X(t)$ *слабо экспоненциально эргодичен и справедлива следующая оценка скорости сходимости:*

$$\| \mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t) \| \leq 2e^{-(\alpha^*-\epsilon_B)t} \| \mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0) \|_{1D} .$$

Кроме того, для любых начальных условий $\mathbf{p}(0)$ *и* $\bar{\mathbf{p}}(0)$ *неоднородного и однородного процессов соответственно справедлива следующая оценка устойчиво-*

[6] Zeifman A., Korolev V. On perturbation bounds for continuous-time Markov chains// Statistics & Probability Letters. – V. 88. – 2014. – P. 66-72.

сти:

$$\limsup_{t\to\infty} \parallel \mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t) \parallel_{1D} \leq \frac{\mathfrak{f}\epsilon_B + \alpha^*\epsilon_f}{\alpha^*(\alpha^* - \epsilon_B)}.$$

Справедливо также следующее утверждение.

Теорема 5 . *Предположим, что $\mu(t) = \mu_0(t)$ и существует такое $a \in (1; b)$, что*

$$\int_0^\infty \beta(t)dt = +\infty,$$

где $\beta(t) = \big(\lambda(t)(1 - b - ab) + \mu(t)(\frac{a-1}{a}\big)$. Тогда $X(t)$ - слабо эргодичный для любых начальных условий $\mathbf{p}^*(0)$, $\mathbf{p}^{**}(0)$ и

$$\parallel \mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t) \parallel \leq 2e^{-\int_0^t \beta(\tau)d\tau} \parallel \mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0) \parallel_{1D}$$

Кроме того, для рассматриваемой модели исследуется усеченный процесс, а также получены оценки погрешности аппроксимации.

В заключении описаны и сформулированы основные результаты, полученные в ходе диссертационного исследования.

В приложении приведено описание программы, с помощью которой выполняются построения основных характеристик марковского процесса.

Основные выводы и результаты диссертации.

В работе получены следующие результаты:

1) получены условия слабой эргодичности и оценки скорости сходимости для системы массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием требований;

2) получены условия слабой эргодичности и соответствующие оценки скорости сходимости для процесса рождения и гибели с особенностями;

3) исследован и использован метод двусторонних усечений для моделей, описываемых неоднородными процессами рождения и гибели и модели $M_t/M_t/S$;

4) получены условия эргодичности, оценки устойчивости и проведена аппроксимация для процесса, описывающего число требований в системе массового обслуживания с повторными вызовами и одним сервером.

Публикации автора по теме диссертации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Зейфман, А., Коротышева, А., Киселева, К., Королев, В., Шоргин, С. Об оценках скорости сходимости и устойчивости для некоторых моделей массового обслуживания.// Информатика и её применения. – 2014. – 8, вып. 3, 19-27.

2. Зейфман, А., Коротышева, А., Сатин, Я., Киселева, К., Разумчик, Р., Королев, В., Шоргин, С. Оценки погрешности аппроксимации для марковских систем обслуживания, описываемых процессами рождения и гибели с дополнительными переходами.// Системы и средства информатики. – 2017. – 27.

3. Satin, Ya., Zeifman, A., Korotysheva, A., Kiseleva, K., Korolev, V. On Truncations For A Class Of Finite Markovian Queuing Models. – 2015. – Proceedings 29th European Conference on Modeling and Simulation, ECMS, Varna, Bulgaria. – p. 626-630.

4. Satin, Ya., Korotysheva, A., Kiseleva, K., Shilova, G., Fokicheva, E., Zeifman, A., Korolev, V. Two-sided truncations of inhomogeneous birth-death processes. – 2016. – Proceedings 30th European Conference on Modeling and Simulation, ECMS, Regensburg, Germany, p. 663-668.

5. Zeifman, A., Satin Ya., Korotysheva, A., Shilova, G., Kiseleva, K., Korolev, V., Bening, V., Shorgin, S. Ergodicity bounds for birth-death processes with particularities. – 2016. – AIP Conference Proceedings, 1738, 220006; doi: 10.1063/1.4952005.

6. Kiseleva, K., Satin, Ya., Korotysheva, A., Zeifman A., Korolev, V., Shorgin, S. On the Null Ergodicity Bounds for a Retrial Queueing Model. AIP Conference Proceedings: Proc. of the 12th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM-2016. – USA, AIP Publishing. – 2017.

7. Zeifman, A., Korolev, V., Korotysheva, A., Satin, Ya., Kiseleva, K., Shorgin, S. Bounds for Markovian queues with possible catastrophes. – 2017. – Proceedings 31st European Conference on Modeling and Simulation, ECMS, Budapest, Hungary, p.628-634.

8. Satin, Ya., Korotysheva, A., Shilova, G., Sipin, A., Fokicheva, E., Kiseleva, K., Zeifman, A., Korolev, V., Shorgin, S. Two-sided truncations for the $M_t|M_t|S$

queueing model. – 2017. – Proceedings 31st European Conference on Modeling and Simulation, ECMS, Budapest, Hungary, p. 635-641.
9. Satin, Ya., Zeifman, A., Korotysheva, A., Kiseleva, K. Two-Sided Truncations for a Class of Continuous-Time Markov Chains. Proceedings 16th International Conference, ITMM 2017. Springer International Publishing AG. – 2017. – Pp. 312–323.

Прочие публикации автора по теме диссертации

10. Киселева, К.М. Об оценках эргодичности и устойчивости для нестационарной модели массового обслуживания с повторными вызовами и одним сервером // Статистические методы оценивания и проверки гипотез, Пермь. – 2016. – вып. 27. – с. 64-68.
11. Коротышева, А.В., Киселева, К.М., Сатин, Я.А. Эргодичность и устойчивость системы обслуживания с одним сервером. - 2015. – Задачи современной информатики. Труды Второй молодежной научной конференции. – с. 297-302.
12. Киселева К. М. Исследование некоторых нестационарных моделей массового обслуживания, описываемых неоднородными марковскими цепями с непрерывным временем. Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием, Москва. — 2017. – с. 33-34.

Киселева Ксения Михайловна (Россия)

Оценки вероятностных характеристик некоторых нестационарных систем массового обслуживания

В диссертации исследуются различные классы нестационарных марковских моделей массового обслуживания, в том числе с групповым поступлением и групповым обслуживанием требований и с повторными вызовами. Интенсивности поступления и обслуживания требований предполагаются локально интегрируемыми детерминированными функциями, зависящими от времени и текущего состояния системы. Для изучения процесса, описывающего число требований в системе, применяется общий подход, основанный на использовании логарифмической нормы оператора прямой системы Колмогорова и специальных преобразованиях редуцированной системы. Получены оценки скорости сходимости к предельным характеристикам, устойчивости, погрешности аппроксимации процессами с меньшей размерностью. Для каждой из задач с помощью разработанных алгоритмов и программ с применением численных методов построены предельные характеристики соответствующих процессов. Рассмотрены конкретные системы обслуживания.

Kiseleva Kseniia Mikhailovna (Russia)

Bounds of probability characteristics for some nonstationary queueing systems

Some classes of nonstationary queueing models are considered in this work, including model with batch arrivals and batch services and retrial queuing system. Intensities of arrivals and services are assumed to be locally integrable functions depend on t and on the current state of the system. We deal with the queue-length process and employ the general approach for the study of forward Kolmogorov system via logarithmic norm of a operator function and related estimates. We obtain bounds on the rate of convergence, truncations and perturbations for the considered queue-length processes. The limiting characteristics of the corresponding processes are constructed using numerical methods, developed algorithms and programs. Specific queuing systems are studied.