
На правах рукописи

КОНОВАЛЬЦЕВА Людмила Владимировна

**МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ АКУСТИЧЕСКИХ МОД В ПЛАЗМЕ
ТОКАМАКА**

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования “Российский университет дружбы народов”

Научный руководитель:

Ильгисонис Виктор Игоревич
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Сковорода Александр Алексеевич
доктор физико-математических наук
главный научный сотрудник Национального исследовательского центра
“Курчатовский институт”

Красильников Анатолий Витальевич
доктор физико-математических наук
директор частного учреждения Государственной корпорации по атомной
энергии “Росатом” “Проектный центр ИТЭР”

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ””

Защита состоится "25" октября 2018 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д.212.203.34 при Российском университете дружбы народов по адресу: 117923, Москва, ул. Орджоникидзе, 3

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Российского университета дружбы народов

Автореферат разослан “ ___ ” _____ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



В. А. Попова

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы

В диссертационной работе разработана математическая модель для описания низкочастотных преимущественно электростатических колебаний плазмы во внешнем магнитном поле, характеризуемом набором осесимметричных тороидально вложенных магнитных поверхностей. Магнитные конфигурации с силовыми линиями, целиком лежащими на замкнутых поверхностях и покрывающими эти поверхности, могут быть реализованы и реализуются на практике суперпозицией токов определённой симметрии: аксиальной и/или винтовой – и используются в тороидальных магнитных ловушках для удержания высокотемпературной плазмы. Осесимметричная топология магнитных силовых линий характерна для систем типа “токамак”, рассматриваемых в настоящее время как наиболее перспективные для реализации программы управляемого термоядерного синтеза.

Низкочастотные волны альфвеновского типа играют весьма заметную роль в удержании плазмы в токамаке. Эти волны могут возбуждаться быстрыми ионами, а также быть связанными с различными магнитогидродинамическими (МГД) неустойчивостями плазмы – винтовыми, баллонными и др. Низкочастотные волны могут существенно влиять на рабочие режимы термоядерных установок. Они могут достигать больших амплитуд, раскачиваясь высокоэнергичными частицами, существующими в плазме токамака с дополнительным нагревом, и поэтому потенциально опасны для будущих термоядерных реакторов. С другой стороны, сопоставление экспериментально измеренных частот таких колебаний с имеющимися аналитическими скейлингами может дать ценную информацию о равновесии плазмы. Такое использование МГД-волн для диагностических целей получило название МГД-спектроскопии [1, 2]. Использование альфвеновских волн, в частности, может предоставить уникальную возможность для диагностики профиля тока в термоядерной плазме [3].

Особое место среди низкочастотных колебаний плазмы в токамаках занимают так называемые геодезические акустические моды (ГАМ) и их ещё более низкочастотная ветка – зональные течения, характеризуемые низкочастотными тороидально- и полоидально-симметричными колебаниями электростатического потенциала плазмы. Систематические исследования ГАМ проводятся или проводились в недавнее время практически на всех ведущих токамаках [4–12]. ГАМ надёжно регистрируются с помощью различных методов диагностики (пучки тяжёлых ионов, доплеровская рефлектометрия, ленгмюровские зонды и др.), а интерес к ним связан с концепцией о важной роли шировых течений в регулировании турбулентного переноса [13]. Несмотря на то, что ГАМ наблюдаются в экспериментах практически на всех крупных установках, их природа до конца не изучена.

Одним из наиболее важных вопросов в теории ГАМ сегодня является вопрос о существовании собственного решения для геодезической акустической моды. Результаты локальных экспериментальных измерений колебаний плазмы, идентифицируемых как ГАМ, указывают на постоянство частоты колебаний в объёме плазмы токамака. Эффект постоянства частоты рассматриваемых колебаний, обнаруженный вначале в приграничной области плазменного шнура [8, 11], был впоследствии установлен применительно ко всему объёму плазмы [12], причём для различных рабочих режимов. Это обстоятельство с очевидностью противоречит традиционному представлению о ГАМ как о локализованных (дельтаобразных) колебаниях с непрерывным спектром [14] и указывает на их глобальность. Весьма важной и актуальной представляется задача разработки математической модели ГАМ в плазме токамака, пригодной для объяснения экспериментально наблюдаемых характеристик этих колебаний, как то: глобальность, зависимость от формы плазмы и её параметров.

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы являются создание математической модели низкочастотных электростатических колебаний в неоднородной тороидально вращающейся плазме, и применение данной модели для объяснения феномена геодезических акустических мод, наблюдаемых в современных системах магнитного удержания плазмы типа токамак. Исследованы две проблемы, актуальные для интерпретации экспериментов по измерению низкочастотных колебаний, идентифицируемых как ГАМ, в токамаках. Первая – определение зависимости частоты ГАМ от характеристик формы поверхности плазмы и аспектного отношения установки. Вторая – объяснение глобальных характеристик ГАМ, а именно – определение условий формирования глобальной моды, нахождение собственной частоты моды и зависимости амплитуды колебаний потенциала и давления от радиуса плазмы, демонстрация возможности существования глобальных ГАМ в типичных условиях эксперимента.

Методы исследования

Задачи рассматриваются в рамках идеальной магнитной гидродинамики. Для отыскания спектра низкочастотных МГД-колебаний применяются стандартные аналитические методы теории возмущений в терминах смещения плазмы, адаптированные для рассматриваемого случая неоднородно движущейся среды. В численных расчётах используется оригинальный компьютерный код, основанный на матричной дискретизации исследуемой системы дифференциальных уравнений и последующем решении задачи на собственные значения.

Научная новизна

В работах, положенных в основу диссертации, получен ряд новых научных результатов. Среди них можно отметить следующие:

- Построена редуцированная МГД-модель для описания глобальных мод низкочастотных колебаний в токамаках с тороидальным вращением плазмы. Модель основана на системе двух линейных дифференциальных уравнений на потенциал и продольное смещение плазмы, значительно более простых, чем первоначальные МГД-уравнения Фримана-Ротенберга [15]. В модели учтены эффекты кривизны магнитного поля, обусловленные вращением плазмы центробежные эффекты и эффекты Кориолиса, эффекты, отвечающие за баллонную и желобковую неустойчивости, а также и эффекты, обусловленные равновесным продольным током, приводящие к винтовой неустойчивости; полученные уравнения могут быть использованы при описании различных возмущений альфвеновского типа в тороидально-вращающейся плазме.
- На основе разработанной модели получено выражение для частоты геодезических акустических мод в токамаке с некруглым сечением плазмы, учитывающее эффекты вытянутости, треугольности и конечного аспектного отношения установки. Влияние треугольности исследовано впервые.
- Получены асимптотические решения для глобальной геодезической акустической моды (ГГАМ) для равновесий с внеосевым максимумом локальной частоты ГАМ и выражение для собственной частоты моды. Показано, что собственная частота ГГАМ превышает частоту локального спектра ГАМ, рассчитанную с учётом электромагнитных эффектов, на величину порядка отношения давления плазмы к давлению магнитного поля.
- Получено и проанализировано интегральное условие существования ГГАМ в плазме

токамаков с монотонной зависимостью коэффициента запаса устойчивости от радиуса.

- Получены точные аналитические решения для ГГАМ в токамаке. Найдены собственные частоты и собственные функции колебаний, зависимости возмущённого давления и потенциала плазмы от радиуса. Идентифицированы два типа глобальных мод: моды, для которых возмущения давления и электрического поля локализованы вблизи определённой магнитной поверхности, реализующиеся в ситуациях, когда локальная частота ГАМ имеет внеосевой максимум в плазме токамака, и моды с плавным распределением давления и постоянным электрическим потенциалом вплоть до центральной части плазменного шнура, реализующиеся для монотонно спадающих профилей локальной частоты ГАМ. Возможность реализации глобальных ГАМ в типичных для современных экспериментов разрядах с монотонной зависимостью коэффициента запаса устойчивости от радиуса показана впервые.
- Получены интегральные условия существования ГГАМ в тороидально вращающейся плазме. Показано, что равновесное вращение плазмы может облегчить условия реализации глобальной моды.

Автор выносит на защиту:

1. Редуцированную МГД-модель низкочастотных колебаний в токамаке с тороидальным вращением плазмы.
2. Выражение для частоты локальных ГАМ в некруглой плазме, учитывающее эффекты вытянутости, треугольности и конечного аспектного отношения установки.
3. Асимптотическое решение для ГГАМ в плазме токамака с немонотонной зависимостью профиля частоты сплошного спектра ГАМ от радиуса. Выражение для собственной частоты глобальной моды.
4. Интегральное условие существования ГГАМ в токамаке с монотонным профилем коэффициента запаса устойчивости.
5. Точные аналитические решения для ГГАМ в токамаке с монотонным профилем коэффициента запаса устойчивости. Собственные функции глобальных колебаний.
6. Вывод о том, что глобальные геодезические моды могут реализовываться в типичных для токамаков равновесиях плазмы с монотонной зависимостью коэффициента запаса устойчивости от радиуса.
7. Интегральные условия существования ГГАМ в токамаке с тороидальным вращением плазмы.

Теоретическая и практическая значимость

Полученная математическая модель может быть использованы как для последующего аналитического рассмотрения низкочастотных МГД-явлений в тороидальных системах магнитного удержания плазмы, так и в численных кодах. Её применение к проблеме геодезических акустических колебаний и полученные при этом результаты имеют важное научное значение ввиду тесной связи ГАМ с широкими течениями и турбулентными переносами горячей плазмы в термоядерных магнитных ловушках, а также из-за необходимости интерпретации проводимых экспериментов по измерению колебаний электрического потенциала плазмы на токамаках. В частности,

- Полученное выражение для частоты сплошного спектра ГАМ в некруглой плазме следует использовать для расчёта частоты ГАМ в установках диверторного типа и сферических токамаках.

- Найденное интегральное условие существования ГГАМ позволяет предсказывать требования к параметрам разряда, необходимые для существования глобальной моды.
- Полученное выражение для собственной частоты ГГАМ открывает возможности для МГД-спектроскопии профиля тока в тороидальной плазме.
- Полученные точные аналитические решения предсказывают структуру собственных мод геодезических акустических колебаний и область их пространственной локализации, что может быть использовано при идентификации мод на эксперименте. Эти решения также могут быть использованы для верификации численных кодов расчёта спектра МГД колебаний.
- Продемонстрированная возможность существования ГГАМ в разрядах с положительным магнитным широм имеет важное значение для интерпретации глобальных электростатических колебаний, наблюдаемых экспериментально, как ГАМ.
- Отдельное методическое и практическое значение имеет разработанный автором код для расчёта спектра низкочастотных мод в токамаке.

Личный вклад автора

Автору принадлежит значительная доля полученных аналитических результатов и сделанных на их основе выводов. Кроме того, автором проделано большинство численных расчётов, внесён основной вклад в подготовку публикаций.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на семинарах в Российском университете дружбы народов и в Национальном исследовательском центре “Курчатовский институт”, а также на специализированных российских и международных конференциях, таких как ЛП Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники (Москва, 2016), 18th International Congress on Plasma Physics (Kaohsiung, Taiwan, 2016), XLV Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу (Звенигород, 2018); в качестве объекта интеллектуальной собственности зарегистрирована программа для ЭВМ.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 8 научных работ, в том числе 3 статьи в рецензируемых журналах.

Объём и структура диссертации

Работа изложена на 91 странице, иллюстрирована 18 рисунками. Диссертация состоит из Введения, трёх глав, разбитых на 13 разделов и 7 параграфов, и Заключения. Каждая глава начинается с небольшой преамбулы, разъясняющей, чему посвящена данная глава, и заканчивается кратким резюме, в котором суммируются полученные в ней результаты. Список цитируемой литературы содержит 73 наименования.

Содержание работы

Во Введении очерчена проблематика диссертации, сформулированы задачи и метод проведённого исследования, обосновывается актуальность диссертационной темы. Введение начинается с краткого описания устройства и назначения магнитной системы токамак. Описывается роль низкочастотных колебаний, и в частности ГАМ, в работе термоядерных установок, приводятся данные по экспериментальному наблюдению низкочастотных аксиально-симметричных волн. Дается сводка имеющихся теоретических результатов по расчёту спектра локальных ГАМ в некруглой плазме. Обосновывается необходимость использования редуцированных МГД-моделей для описания низкочастотных волн в тороидальной плазме. Во Введении также кратко изложено содержание диссертации и перечислены положения, выносимые на защиту.

Первая глава диссертации посвящена построению редуцированной магнитогидродинамической модели для описания низкочастотных возмущений в тороидально вращающейся плазме осесимметричного токамака. На её основе получены уравнения, описывающие спектр ГАМ в произвольном статическом равновесии плазмы некруглой формы и в тороидально вращающейся плазме с круглыми магнитными поверхностями.

В разделе 1.1 дается вывод общих редуцированных уравнений низкочастотных колебаний в тороидально вращающейся плазме. Рассмотрение проводится в рамках идеальной магнитной гидродинамики с уравнением состояния в виде адиабаты. Кратко обсуждается проблема описания динамического равновесия плазмы со стационарным тороидальным течением. В дальнейшем предполагается, что скорость тороидального вращения плазмы порядка или меньше скорости звука $c_s = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$, $R\Omega \lesssim c_s$ (R – расстояние от геометрической оси тора, Ω – угловая частота вращения, γ – показатель адиабаты, p_0 , ρ_0 – равновесные давление и массовая плотность плазмы, соответственно). Для описания возмущений стандартным образом вводится смещение плазмы ξ [15]. Рассматриваются низкочастотные возмущения, частота которых такова, что

$$\omega \sim \epsilon \frac{v_A}{a},$$

где a – малый радиус токамака, $v_A = B_0 / \rho_0^{1/2}$ – альфвеновская скорость (B_0 – равновесное магнитное поле), а $\epsilon \ll 1$ – малый параметр. Такое предположение позволяет отделить характерные частоты альфвеновских возмущений от быстрых (высокочастотных) магнитозвуковых волн. В дополнение к этому предполагаются следующие оценки для градиентов возмущённых величин: $\nabla_{\perp} \sim 1/a$, $\nabla_{\parallel} = \mathbf{B}_0 \cdot \nabla / B_0 \sim \epsilon/a$; и равновесных характеристик плазмы:

$$\mathbf{K} \equiv \frac{1}{B_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \sim \frac{\epsilon}{a}, \quad \nabla_{\perp} B_0 \sim \epsilon \frac{B_0}{a}, \quad \nabla_{\parallel} B_0 \sim \epsilon^2 \frac{B_0}{a}, \quad \nabla \cdot \mathbf{K} \sim \frac{\epsilon^2}{a^2},$$

\mathbf{K} – кривизна магнитных силовых линий. Допускается, что поперечные градиенты остальных равновесных величин могут быть достаточно большими, $\nabla_{\perp} \sim 1/a$. Кроме того, считается, что по порядку величины поперечные и продольные равновесные плотности токов, $\mathbf{j}_0 \sim \text{rot} \mathbf{B}_0$, таковы, что $j_{0\perp} \sim j_{0\parallel} \sim \epsilon B_0 / a$.

В принятых предположениях смещение плазмы представляется в виде

$$\xi = \frac{1}{B_0^2} \mathbf{B}_0 \times \nabla \phi + \frac{\zeta}{B_0^2} \mathbf{B}_0, \quad (1)$$

где ζ / B_0 – продольное смещение плазмы, а ϕ – величина, пропорциональная потенциалу электрического поля, $\mathbf{E}_{\perp} = (i\tilde{\omega}/c)\nabla\phi$ ($\tilde{\omega} = \omega - n\Omega$ – частота возмущений в локальной

системе координат, связанной с плазмой, n – тороидальное волновое число; c – скорость света).

Подстановка (1) в продольную проекцию уравнения движения и в условие квазинейтральности возмущений $\text{div}\mathbf{j}' = 0$ ($\mathbf{j}' \sim \text{rot}\mathbf{B}'$ – возмущение плотности тока) приводит к искомой системе из двух связанных уравнений на потенциал и продольное смещение плазмы:

$$\begin{aligned} & \rho_0 \tilde{\omega}^2 \zeta + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \left(\rho_0 c_s^2 \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \left(\frac{\zeta}{B_0^2} \right) \right) + i \tilde{\omega} \frac{\rho_0 \Omega}{R B_0} (\mathbf{B}_0 \times \nabla \phi) \cdot \nabla R^2 + \\ & + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \left\{ (\mathbf{B}_0 \times \nabla \phi) \cdot \left(\rho_0 c_s^2 \nabla \left(\frac{1}{B_0^2} \right) + \frac{\rho_0 \Omega^2}{2 B_0^2} \nabla R^2 \right) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \left\{ \frac{1}{B_0^2} \text{div} \left[B_0^2 \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{B_0^2} \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \phi \right) \right] \right\} + \text{div} \left\{ \frac{\rho_0 \tilde{\omega}^2}{B_0^2} \nabla_{\perp} \phi + \right. \\ & + \frac{\mathbf{B}_0 \times \nabla R^2}{B_0^2} \left[\frac{i \rho_0 \tilde{\omega} \Omega}{R B_0} \zeta + \frac{\mathbf{B}_0 \times \nabla \phi}{B_0^2} \cdot \left(\nabla \left(\frac{\rho_0 \Omega^2}{2} \right) - 2 \mathbf{K} \frac{\rho_0 \Omega^2}{2} \right) + \right. \\ & + \left. \frac{\rho_0 \Omega^2}{2} \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \left(\frac{\zeta}{B_0^2} \right) \right] - \frac{2 \mathbf{B}_0 \times \mathbf{K}}{B_0^2} \left[\frac{\mathbf{B}_0 \times \nabla \phi}{B_0^2} \cdot (\nabla p_0 - 2 \rho_0 c_s^2 \mathbf{K}) + \right. \\ & + \left. \left. \rho_0 c_s^2 \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \left(\frac{\zeta}{B_0^2} \right) \right] + \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \text{rot} \mathbf{B}_0)}{B_0^2} \mathbf{B}_0 \times \nabla \left(\frac{\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \phi}{B_0^2} \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (2), (3) описывают низкочастотные возмущения в токамаке с тороидальным вращением плазмы и включают эффекты кривизны магнитного поля, обусловленные вращением плазмы центробежные эффекты и эффекты Кориолиса, эффекты, отвечающие за баллонную и желобковую неустойчивости, а также и эффекты, обусловленные равновесным продольным током, приводящие к винтовой неустойчивости. В отсутствие вращения система уравнений (2), (3) сводится к ранее полученным в работе [16] уравнениям. Далее данная система уравнений применяется к проблеме ГАМ и зональных течений в плазме токамака.

В разделе 1.2 полученная система уравнений упрощена для исследования электростатических тороидально-симметричных ($n = 0$) ГАМ в произвольном статическом ($\Omega = 0$) равновесии плазмы в токамаке с полем вида

$$\mathbf{B}_0 = F(\Psi) \nabla \varphi + [\nabla \varphi \times \nabla \Psi],$$

где функция Ψ соответствует полоидальному магнитному потоку и служит меткой магнитной поверхности, функция F характеризует полоидальный ток. В отсутствие вращения равновесное давление плазмы является функции магнитной поверхности $p_0 = p_0(\Psi)$, так же как и потенциал электростатических возмущений $\phi = \phi(\Psi)$. Уравнение (3) усредняется по магнитной поверхности согласно правилу

$$\langle f \rangle = \int_0^{2\pi} f J d\theta \Big/ \int_0^{2\pi} J d\theta,$$

где J – якобианом перехода к потоковой системе координат $\{\Psi, \theta, \varphi\}$ (θ – полоидальный угол, φ – тороидальный угол): $J^{-1} = |\nabla \varphi \times \nabla \Psi \cdot \nabla \theta|$. При этом для любой периодической функции полоидального угла, коими предполагаются все возмущённые величины,

$\langle \mathbf{B}_0 \cdot \nabla f \rangle = 0$. Итоговая система уравнений для описания электростатических осесимметричных колебаний статической плазмы в токамаке имеет вид:

$$\omega^2 \tilde{p} + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \left(\frac{c_s^2}{B_0^2} \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \tilde{p} \right) + \omega^2 \gamma p_0 F \phi' \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \left(\frac{1}{B_0^2} \right) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d}{d\Psi} \int_0^{2\pi} J \left\{ \tilde{p} F \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \left(\frac{1}{B_0^2} \right) + \frac{\rho_0 \omega^2 |\nabla \Psi|^2}{B_0^2} \phi' \right\} d\theta = 0. \quad (5)$$

При выводе (4), (5) учитывалась связь между продольным смещением и возмущением давления плазмы: $\tilde{p} = -\gamma p_0 (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla (\zeta/B_0^2) + F \phi' \mathbf{B}_0 \cdot \nabla (1/B_0^2))$, $\phi' = d\phi/d\Psi$. Уравнения (4), (5) используются в Главе 2 для анализа влияния формы поверхности плазмы и конечного аспектного отношения установки на сплошной спектр ГАМ в токамаке.

В разделе 1.3 система (2), (3) упрощена для исследования ГАМ в тороидально вращающейся плазме с круглыми магнитными поверхностями. Рассматривается плазма с низким давлением, $\beta = 2p_0/B_0^2 \sim \epsilon^2$. Аспектное отношение токамака считается большим $\sim 1/\epsilon$ ($a/R_0 \sim \epsilon$, R_0 – большой радиус токамака), а магнитные поверхности токамака круглыми с радиусом r , так что $R = R_0 + r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$ и $\Psi = \Psi(r)$. При этом величина равновесного магнитного поля $B_0 \approx B_a R_0/R$, где $B_a = B_0|_{r=0}$ – поле на магнитной оси токамака. Аналогично работе [17] рассматриваются такие равновесия, для которых давление связано с плотностью посредством поверхностной энтропийной функцией $\Pi(\Psi)$:

$$p_0 = \rho_0^\alpha \Pi(\Psi). \quad (6)$$

Для такого класса равновесий из уравнения баланса сил вдоль магнитного поля следует (при $\alpha \neq 1$)

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{\Omega^2 R^2}{2} + H(\Psi), \quad (7)$$

где введённая поверхностная функция $H(\Psi)$ имеет смысл удельной энтальпии в отсутствие вращения плазмы. В случае же равновесия с изотермическими магнитными поверхностями, $\alpha = 1$,

$$\rho_0 = \bar{\rho}_0(\Psi) \exp \left(\frac{\Omega^2 R^2}{2\Pi} \right),$$

где $\bar{\rho}_0(\Psi)$ – функция магнитной поверхности. Тогда из уравнений (6), (7) в приближении большого аспектного отношения токамака следует

$$p_0 = \bar{p}_0(r) \left(1 + \gamma M^2 \frac{r}{R_0} \cos \theta \right),$$

$$\rho_0 = \bar{\rho}_0(r) \left(1 + \frac{\gamma M^2}{\alpha} \frac{r}{R_0} \cos \theta \right),$$

где $\bar{p}_0(r)$, $\bar{\rho}_0(r)$ – давление и массовая плотность плазмы в отсутствие вращения, а M – звуковое число Маха: $M^2 = \bar{\rho}_0 \Omega^2 R_0^2 / \gamma \bar{p}_0$. Вращение приводит к полоидальной стратификации плазмы на магнитных поверхностях, которая мала как r/R_0 по сравнению с полным давлением и массовой плотностью плазмы.

В указанных предположениях из уравнений (2), (3) следует

$$\left(\omega^2 + \frac{\omega_s^2}{q^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \zeta = \quad (8)$$

$$= 2 \left(iM\omega\omega_s + \frac{\omega_s^2}{q} \left(1 + \frac{M^2}{2}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left[\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right],$$

$$\frac{1}{qR_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \nabla_{\perp}^2 \left(\frac{\phi}{q} \right) + \operatorname{div} \left\{ \frac{\bar{\rho}_0}{B_0^2} \left(\omega^2 \nabla_{\perp} \phi + 2(\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_{\theta}) \cdot \right. \right. \quad (9)$$

$$\cdot \left[\left(iM\omega\omega_s + \frac{\omega_s^2}{q} \left(1 + \frac{M^2}{2}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \zeta + \frac{\mathbf{B} \times \nabla \phi}{R_0 B_0} \cdot \right. \right.$$

$$\left. \left. \cdot \left(\omega_s^2 \left(1 + \frac{M^2}{2}\right) \nabla_{\perp} R^2 + \frac{1}{\bar{\rho}_0} \nabla_{\perp} \left((p_0 - \bar{p}_0) \left(1 + \frac{\gamma M^2}{2\alpha}\right) \right) \right) \right] \right\} = 0.$$

Здесь $\omega_s = c_s/R_0$, $q = q(r)$ – коэффициент запаса устойчивости токамака, а

$$\nabla_{\perp} = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

При выводе (8), (9) в уравнениях (2) и (3) учитывались лишь ответственные за возникновение ГАМ эффекты, обусловленные кривизной магнитных силовых линий и стратификацией плазмы на магнитных поверхностях. Система уравнений (8), (9) позволяет рассчитать спектр ГАМ в тороидально вращающейся плазме токамака с учётом электромагнитных возмущений. Она используется в Главе 3 для исследования возможности существования глобальных ГАМ в токамаке и получения соответствующих аналитических решений.

Краткое резюме Главы 1 представлено в разделе 1.4.

Во Второй главе исследовано влияние формы поверхности плазмы на сплошной спектр ГАМ в токамаке. Получено выражение для частоты локальной геодезической акустической моды в модельном равновесии плазмы некруглой формы. Рассчитаны поправки к частоте колебаний, связанные с вытянутостью и треугольностью плазмы и конечным аспектным отношением токамака.

В разделе 2.1 представлен вывод закона дисперсии ГАМ с учётом эффектов формы поверхности плазмы. К общим уравнениям (4), (5) применена аналитическая модель локального равновесия Миллера [18], использование которой оправдано для мод сплошного спектра, радиальная длина волны которых мала по сравнению с характерным пространственным масштабом макроскопических равновесных профилей. Магнитная конфигурация в выбранной модели описывается заданием аспектного отношения $\varepsilon = r/R_0$ (r – радиус магнитной поверхности), вытянутости κ , треугольности δ и коэффициента запаса устойчивости, а форма магнитных поверхностей определяется параметрической формулой:

$$R(r, \theta) = R_0 + r \cos(\theta + \delta(r) \sin \theta),$$

$$z(r, \theta) = \kappa(r)r \sin \theta.$$

Далее треугольность δ и обратное аспектное отношение ε считаются малыми параметрами, при этом в итоговом выражении для частоты ГАМ удерживаются члены $\sim \delta^2$, ε^2 и $\varepsilon\delta$. Также предполагается, что κ и δ на радиусе шнура меняются плавно, поэтому их производными можно пренебречь, подставляя в итоговое выражение для частоты ГАМ локальные значения. Величина вытянутости считается произвольной. Для исследования

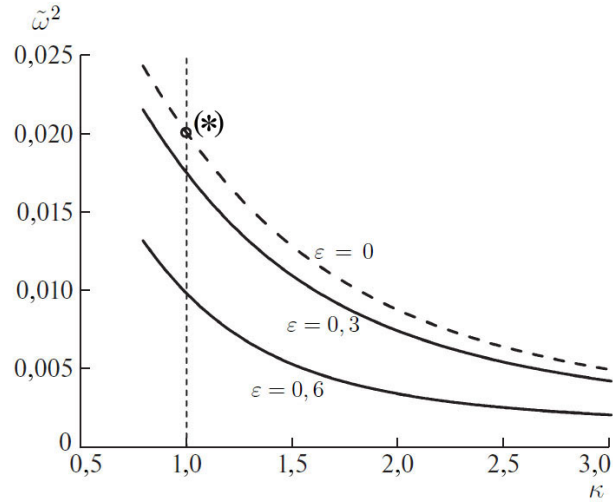


Рис. 1: Зависимость частоты локальной ГАМ (11) от вытянутости плазмы κ на радиусе $r = 0,95a$. Параметр $\delta = 0$. Три кривые соответствуют разным значениям ε

сплошного спектра колебаний, определяемого нулём при старшей производной в общем дисперсионном соотношении, в уравнении (5) использовано условие равенства нулю интеграла, стоящего под производной $d/d\Psi$. В результате получено дисперсионное соотношение, модифицирующее выражение для частоты локальной ГАМ на случай некруглой плазмы:

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa^2 + 1}{2} + \frac{3}{8}\varepsilon^2(3\kappa^2 + 1) + \frac{3}{16}\varepsilon\delta(1 - 3\kappa^2) + \frac{1}{128}\delta^2(3\kappa^2 + 37) - \\ & - \frac{2\omega_s^2}{\omega^2 - \omega_s^2/q^2} \left(1 - \frac{\varepsilon\delta}{4} - \frac{11}{64}\delta^2 \right) - \frac{3\omega_s^2}{2(\omega^2 - 4\omega_s^2/q^2)} \left(\delta^2 + \frac{\varepsilon\delta}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В разделе 2.2 действие каждого из эффектов формы поверхности плазмы рассмотрено в отдельности.

В параграфе 2.2.1 исследована зависимость от вытянутости плазмы. При нулевой треугольности выражение для частоты ГАМ в плазме эллиптической формы имеет вид

$$\omega^2 = \frac{2\omega_s^2}{\kappa^2 + 1} \left(2 + \frac{\kappa^2 + 1}{2} \frac{1}{q^2} - \frac{3\varepsilon^2}{2} \frac{3\kappa^2 + 1}{\kappa^2 + 1} \right). \quad (11)$$

Полученная зависимость демонстрирует значительное снижение частоты ГАМ $\sim \sqrt{2}/(\kappa^2 + 1)$ с увеличением вытянутости плазмы – см. рис. 1. Здесь и далее для иллюстрации выбраны равновесные профили $q = 1 + 2(r/a)^2$, $c_s^2/c_s^2|_{r=0} = (1 - (r/a)^2)^2$, а частота нормирована на звуковую частоту в центре плазмы: $\tilde{\omega}^2 = \omega^2/\omega_s^2|_{r=0}$. Символом * отмечено значение квадрата частоты, рассчитанное по стандартной формуле для частоты сплошного спектра ГАМ

$$\omega_{\text{geo}}^2 = \omega_s^2 \left(2 + \frac{1}{q^2} \right), \quad (12)$$

полученной в [14] в квазицилиндрическом приближении для круглой плазмы. Спад частоты с ростом κ согласуется с результатами экспериментальных измерений на токамаках DIII-D [5] и ASDEX [6], а также с результатами численного моделирования [19, 20]. Полученное выражение (11) справедливо для произвольного значения вытянутости, а не только при $\kappa \sim 1$, как в [21], и, в отличие от [19], повторяет зависимости от κ и ε , следующие из кинетической теории [22].

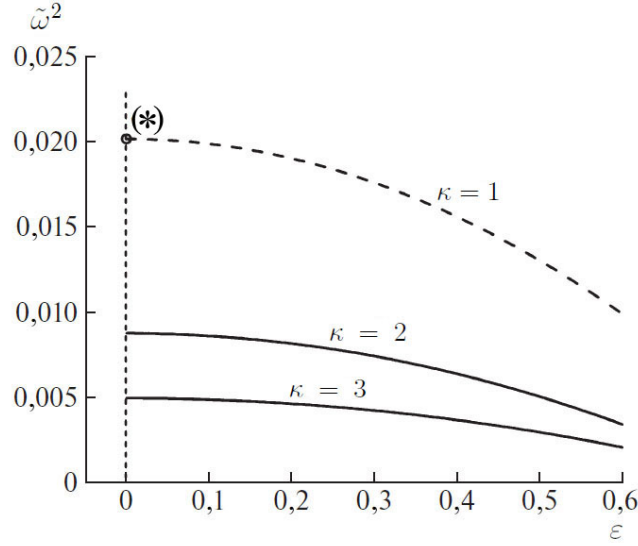


Рис. 2: Зависимость частоты локальной ГАМ (11) от ε на радиусе $r = 0,95a$. Параметр $\delta = 0$. Три кривые соответствуют разным значениям κ

В параграфе 2.2.2 исследована зависимость частоты ГАМ от обратного аспектного отношения установки. Как следует из выражения (11), частота ГАМ падает при учёте конечного аспектного отношения токамака, причём пропорционально второй степени ε – см. рис. 2. Коэффициент пропорциональности зависит от вытянутости плазмы. В приближении круглых магнитных поверхностей ($\kappa = 1$)

$$\omega^2 = \omega_s^2 \left(2 + \frac{1}{q^2} - 3\varepsilon^2 \right). \quad (13)$$

Зависимость частоты ГАМ от треугольности плазмы исследована в параграфе 2.2.3. При ненулевой треугольности уравнение (10) уже не является линейным уравнением относительно ω^2 ; его решение получено разложением по малым параметрам ε^2 , $\varepsilon\delta$ и δ^2 :

$$\omega^2 = \frac{2\omega_s^2}{(\kappa^2 + 1)} \cdot \left(2 + \frac{\kappa^2 + 1}{2q^2} - \frac{3}{2} \frac{3\kappa^2 + 1}{\kappa^2 + 1} \varepsilon^2 + \frac{5\kappa^2 - 1}{2(\kappa^2 + 1)} \varepsilon\delta + \frac{17\kappa^2}{16(\kappa^2 + 1)} \delta^2 \right). \quad (14)$$

Анализ (14) показывает, что частота ГАМ растёт с увеличением треугольности плазмы, но не слишком значительно – см. рис. 3.

В параграфе 2.2.4 представлена зависимость частоты локальных ГАМ от радиуса плазменного шнура, рассчитанная для параметров токамака COMPASS [23]. Демонстрируется существенная разница между результатами, рассчитанными с помощью стандартного уравнения (12), и полученного закона дисперсии, учитывающего эффекты формы поверхности плазмы.

Краткое резюме Главы 2 представлено в разделе 2.3.

В Третьей главе диссертации построены аналитические решения для глобальных геодезических акустических мод (ГГАМ) в плазме токамака с круглыми концентрическими магнитными поверхностями. В конечномоновом приближении выведено интегральное уравнение на собственное значение, учитывающее тороидальное зацепление электростатических возмущений с электромагнитными возмущениями с полоидальным волновым числом $|m| = 2$; в отсутствие такого зацепления дисперсионное уравнение приводит лишь к стандартному сплошному спектру. Проведён анализ существования глобальной геодезической акустической моды для равновесий плазмы с максимумом локальной

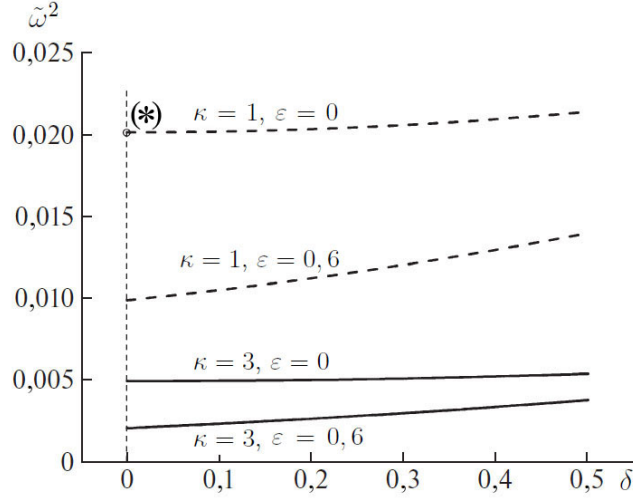


Рис. 3: Зависимость частоты локальной ГАМ (14) от δ на радиусе $r = 0,95a$. Четыре кривые соответствуют разным значениям κ и ε

геодезической акустической частоты, лежащим как на оси, так и внутри плазменного шнура. Аналитические результаты сопоставлены с результатами численных расчётов.

В разделе 3.1 сформулирована задача на отыскание собственной моды геодезических акустических колебаний. Решение уравнений (8), (9) ищется в конечномоновом приближении:

$$\phi = \phi_0(r) + \phi_{2c} \cos 2\theta + i\phi_{2s} \sin 2\theta, \quad \zeta = \zeta_c \cos \theta + \zeta_s \sin \theta. \quad (15)$$

Такой подход оправдан, если $q^2 c_s^2 / v_A^2 \ll 1$ и $M^2 \leq 1$, что, в частности, обеспечивает $|\phi_0| \gg |\phi_{2c}|, |\phi_{2s}|$. Итоговая система уравнений для ϕ_0, ϕ_{2c} и ϕ_{2s} имеет вид

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{\bar{\rho}_0 r}{B_0^2 (\omega^2 - \omega_s^2 / q^2)} \left[D \frac{d\phi_0}{dr} + \frac{G_c}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \phi_{2c}) + \frac{1}{\bar{\rho}_0 f} \left(\omega^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} \right) \phi_{2c} \frac{df^2}{dr} + \frac{G_s}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \phi_{2s}) \right] \right\} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{1}{q} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \phi_{2c}}{q} \right) \right] - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2\omega_A^2 r} \frac{G_c}{(\omega^2 - \omega_s^2 / q^2)} \frac{d\phi_0}{dr} \right) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{1}{q} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \phi_{2s}}{q} \right) \right] - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2\omega_A^2 r} \frac{G_s}{(\omega^2 - \omega_s^2 / q^2)} \frac{d\phi_0}{dr} \right) = 0, \quad (18)$$

где

$$D = \omega^4 - \omega_s^2 \omega^2 \left(2 + \frac{1}{q^2} + 4M^2 + \frac{\gamma M^4}{2\alpha} \right) + \omega_s^4 \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} \frac{M^4}{2q^2},$$

$$G_c = \frac{1}{2} \left(\omega^2 \left(\omega^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} \right) - D \right), \quad G_s = \frac{2M\omega\omega_s^3}{q} \left(1 + \frac{M^2}{2} \right),$$

$$f = \rho_0 \omega_s^2 \frac{M^2}{2} \left(1 + \frac{\gamma M^2}{2\alpha} \right), \quad \omega_A = \frac{v_A}{R_0}.$$

В пренебрежении гармониками потенциала ϕ с $m = 2$, т.е. при $(\phi_{2c}, \phi_{2s}) = 0$, уравнение (16) описывает непрерывный спектр ГАМ, который определяется уравнением $D = 0$ и был

ранее получен в таком виде в работе [17]:

$$\omega^2 = \frac{\omega_s^2}{2} \left\{ 2 + \frac{1}{q^2} + 4M^2 + \frac{\gamma M^4}{2\alpha} \pm \left[\left(2 + \frac{1}{q^2} + 4M^2 + \frac{\gamma M^4}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} \frac{2M^4}{q^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (19)$$

Высокочастотная ветка (19) соответствует геодезическим акустическим модам и в отсутствие вращения переходит в стандартное дисперсионное соотношение ГАМ (12); низкочастотная ветка отвечает зональным течениям, частота которых в статическом равновесии равна нулю. Низкочастотная ветвь спектра неустойчива при $\alpha > \gamma$. Механизм этой неустойчивости связан с полоидальной стратификацией плазмы на магнитных поверхностях [24].

Тороидальное зацепление электростатического потенциала ГАМ с электромагнитными возмущениями с $m = 2$ делает возможным существование собственной моды в виде глобальной ГАМ. Связь между нулевой и вторыми гармониками потенциала определяется путём прямого интегрирования уравнения (16):

$$D \frac{d\phi_0}{dr} = -\frac{1}{r^2} \left(G_c \frac{d\Phi_{2c}}{dr} + \frac{1}{\rho_0 f} \left(\omega^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} \right) \Phi_{2c} \frac{df^2}{dr} + G_s \frac{d\Phi_{2s}}{dr} \right), \quad (20)$$

где для удобства введены функции $\Phi_{2c} = r^2 \phi_{2c}$, $\Phi_{2s} = r^2 \phi_{2s}$. Константа интегрирования уравнения (16) выбрана равной нулю во избежание расходимости решения при $r \rightarrow 0$. Подстановка $d\phi_0/dr$ из (20) в (17), (18) приводит к уравнениям глобальных ГАМ в токамаке, решение которых следует искать вблизи $D = 0$.

В статическом случае ($M = 0$, $\Phi_{2s} = 0$) уравнение (18) выполняется тождественно, а уравнение на Φ_{2c} имеет вид

$$\frac{1}{q(\hat{r})} \frac{d}{d\hat{r}} \left[\frac{1}{\hat{r}^3} \frac{d}{d\hat{r}} \left(\frac{\Phi_{2c}}{q(\hat{r})} \right) \right] + \hat{\omega}^2 \frac{d}{d\hat{r}} \left\{ \frac{\epsilon(\hat{r})}{\hat{r}^3 q^2(\hat{r})} \left(\frac{1}{\hat{\omega}^2 - \hat{\omega}_{\text{geo}}^2(\hat{r})} - \frac{1}{T(\hat{r})} \right) \frac{d\Phi_{2c}}{d\hat{r}} \right\} = 0. \quad (21)$$

Здесь введены нормированный радиус $\hat{r} = r/a$ и нормированные частоты: $\hat{\omega}^2 = \omega^2/\omega_s^2|_{\hat{r}=0}$, $\hat{\omega}_{\text{geo}}^2 = \omega_{\text{geo}}^2/\omega_s^2|_{\hat{r}=0} = T(2 + 1/q^2)$; $T(\hat{r})$ – нормированная температура, равная единице при $\hat{r} = 0$, а также малый параметр $\epsilon(\hat{r}) = \beta T(\hat{r})q^2(\hat{r})/4$, связанный с $\beta = c_s^2|_{\hat{r}=0}/v_A^2$, соответствующего отношению давления плазмы к давлению магнитного поля на магнитной оси токамака, $v_A = B_a/\sqrt{\bar{\rho}_0}$ – альфвеновская скорость на оси системы; здесь и далее $\bar{\rho}_0$ считаем постоянной.

Уравнение (21) для собственной моды геодезических акустических колебаний дополняется двумя нулевыми граничными условиями для Φ_{2c} :

$$\Phi_{2c}|_{\hat{r}=0} = 0, \quad \Phi_{2c}|_{\hat{r}=1} = 0. \quad (22)$$

Первое условие обеспечивает регулярность решения на магнитной оси токамака ($|\phi_{2c}|_{\hat{r}=0} < \infty$), второе – нулевую радиальную скорость на границе плазмы ($v_r|_{\hat{r}=1} = 0$). Всюду далее шляпки над \hat{r} , $\hat{\omega}$ и $\hat{\omega}_{\text{geo}}$ опущены.

В разделе 3.2 представлен алгоритм численного решения поставленной задачи. Численно продемонстрировано существование глобальной моды в зазоре между спектром локальных ГАМ и альфвеновским спектром.

В разделе 3.3 найдено асимптотическое решение задачи (21), (22) для равновесия с внеосевым максимумом частоты сплошного спектра ГАМ ω_{geo} (12). Собственное значение ω представляется в виде

$$\omega^2 = \omega_{\text{geo}}^2(r_M) [1 + \mathcal{O}(\epsilon_M)],$$

где $\epsilon_M = \epsilon(r_M)$, r_M – точка максимума функции $\omega_{\text{geo}}(r)$. Ввиду того, что $\epsilon(r) \ll 1$, второй член в (21) оказывается важен только вблизи точки, где $(\omega^2 - \omega_{\text{geo}}^2(r)) \rightarrow 0$, что позволяет искать решение задачи отдельно в трёх выделенных областях – в окрестности поверхности $r = r_M$, на левом краю расчётной области $0 \leq r < r_M$, на правом краю расчётной области $r_M < r \leq 1$. Сшивка полученных решений приводит к дисперсионному уравнению для собственной частоты ГАМ

$$\frac{\pi\nu\Delta}{r_M\mu^2} = 1, \quad (23)$$

где

$$\Delta = 4 \left(1 + \frac{s}{4}\right) \left[r_M^4 + \frac{s}{4}(r_M^4 - 1)\right].$$

$$\nu^2 = \frac{1}{\alpha^2} (\epsilon_M\omega^2 + \omega^2 - \omega_{\text{geo}}^2(r_M)), \quad \mu^2 = 1 + \frac{(\omega^2 - \omega_{\text{geo}}^2(r_M))}{\epsilon_M\omega^2}, \quad \alpha^2 \equiv \left| \frac{d^2\omega_{\text{geo}}^2(r_M)}{dr^2} \right| / 2,$$

$s = r_M dq/dr(r_M)/q(r_M)$ – локальный шир магнитного поля в точке $r = r_M$.

Решение (23) относительно ω^2 путём разложения по малому параметру ϵ_M приводит к выражению для собственной частоты глобальной моды

$$\omega^2 = \omega_{\text{GAM}}^2(r_M) + 2\epsilon_M^2\omega_{\text{geo}}^2(r_M) \left(\frac{\pi\Delta}{r_M}\right)^2 \frac{\omega_{\text{geo}}^2(r_M)}{|d^2\omega_{\text{geo}}^2(r_M)/dr^2|}. \quad (24)$$

Здесь

$$\omega_{\text{GAM}}^2(r_M) = \omega_{\text{geo}}^2(r_M) \left[1 - \epsilon_M - \epsilon_M^2 \left(1 + \frac{1}{q^2(r_M)}\right)\right].$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (24) есть частота сплошного спектра ГАМ в точке $r = r_M$, учитывающая эффекты тороидального зацепления с полоидальными гармониками $m = \pm 2$ возмущённого электромагнитного поля. С точностью до членов $\sim \epsilon_M^2$ частота, удовлетворяющая условию $\omega^2 = \omega_{\text{GAM}}^2(r_M)$, зануляет коэффициент перед $d^2\Phi_2/dr^2$ в (21) в точке $r = r_M$. Таким образом, учёт высших полоидальных гармоник снижает частоту сплошного спектра ГАМ на величину $\sim \epsilon_M$. При этом частота собственной моды, как следует из (24), лежит чуть выше ($\sim \epsilon_M^2$) максимума сплошного спектра $\omega_{\text{GAM}}(r_M)$ (см. рис. 4), что исключает возникновение локального резонанса для глобальной моды.

На рис. 5 представлена пространственная структура равновесных характеристик плазмы и собственных функций глобальных геодезических акустических колебаний (штриховые линии), рассчитанных с помощью метода асимптотической сшивки для модельного равновесия с максимумом локальной частоты ГАМ. Сплошными линиями показаны результаты численного расчёта. Амплитуды всех функций нормированы на амплитуду $d\phi_0/dr$ в точке её максимума. Для параболического профиля температуры $T = 1 - r^2$ максимум ω_{geo} реализован за счёт немонотонности коэффициента запаса устойчивости $q = C_0 + C_1r + C_2r^2 + C_3r^3$, где постоянные C_0, C_1, C_2, C_3 выбраны таким образом, чтобы обеспечить максимум ω_{geo} в точке $r_M = 0,27$. Профили T и q представлены на рис. 5а; $\epsilon_M = 0,0006$. На рис. 5б изображена зависимость $d\phi_0/dr$ от радиуса. Полоидально- и тороидально-симметричное радиальное электрическое поле собственной моды $E_r \sim -d\phi_0/dr$ строго локализовано вблизи точки максимума ω_{geo}^2 . Ширина его локализации может быть оценена как $\nu \sim \epsilon_M\omega_{\text{geo}}^2(r_M)/r_M|d^2\omega_{\text{geo}}^2(r_M)/dr^2|$. В то же время электромагнитные колебания собственной моды Φ_{2c} с полоидальным числом $m = 2$ не локализованы в окрестности r_M , а присутствуют вплоть до границы плазмы токамака – см.

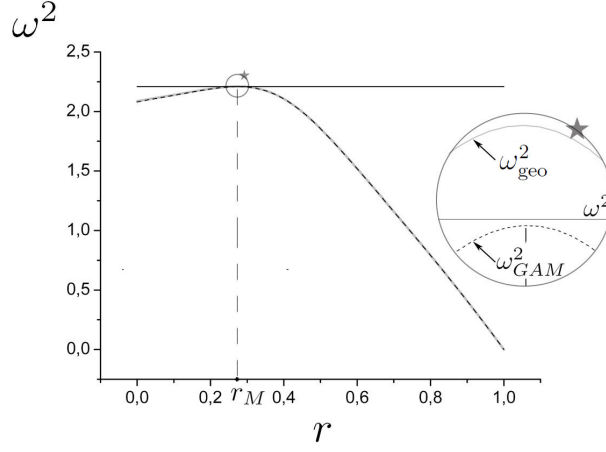


Рис. 4: Зависимости собственной частоты ГГАМ ω^2 (сплошная линия), частоты сплошного спектра электростатических ГАМ ω_{geo}^2 (сплошная серая линия) и частоты сплошного спектра электромагнитных ГАМ ω_{GAM}^2 (штриховая линия) от r

рис. 5в. Амплитуда электромагнитных колебаний мала по сравнению с амплитудой нулевой гармоники, тем не менее их наличие необходимо для реализации глобального решения. На рис. 5г построена зависимость электростатического потенциала ϕ_0 от r , рассчитанная путём численного интегрирования величины $d\phi_0/dr$. Такая зависимость наиболее интересна с точки зрения сравнения с экспериментальными данными, полученными с помощью диагностики пучком тяжелых ионов НІВР (от англ. “heavy ion beam probe”), посредством которой измеряется именно электростатический потенциал. Видно, что амплитуда ϕ_0 практически не меняется с r вплоть до точки r_M , где она терпит скачок. Независимость амплитуды электростатического потенциала от радиуса ясно наблюдается в эксперименте [11]. Пространственная структура собственных функций, найденная асимптотически, находится в хорошем согласии с результатами численного решения уравнения (21).

В разделе 3.4 построены точные аналитические решения для равновесий с положительным магнитным широм. Для этого вводится профиль коэффициента запаса устойчивости вида

$$q(r) = \frac{q_0 q_1}{q_1 - (q_1 - q_0) r^4}, \quad (25)$$

где $q_0 = q|_{r=0}$, $q_1 = q|_{r=1}$ – значения коэффициента запаса устойчивости в центре плазмы и на её границе соответственно. При $q_1 > q_0$ профиль (25) описывает монотонный рост q с малым градиентом вблизи магнитной оси, что соответствует типичным разрядам с плоским радиальным распределением плазменного тока, планируемым для будущих термоядерных экспериментов на токамаке ИТЭР (см., например, [25]). Профиль (25) зануляет коэффициент при Φ_{2c} в уравнении (21), что позволяет проинтегрировать это уравнение элементарным образом:

$$\frac{d\Phi_{2c}}{dr} = \frac{K r^3 q^2(r) (\omega^2 - \omega_{\text{geo}}^2(r))}{\omega^2 (1 + \epsilon(r)) - \omega_{\text{geo}}^2(r)}, \quad (26)$$

где K – константа интегрирования, определяющая амплитуду рассматриваемых мод. Нуль знаменателя в уравнении (26) определяет частоту сплошного спектра ГАМ с учётом второй полоидальной гармоники возмущений

$$\omega_{\text{GAM}}^2(r) = \frac{\omega_{\text{geo}}^2(r)}{1 + \epsilon(r)}. \quad (27)$$

Видно, что ω_{GAM} всегда меньше локальной частоты ГАМ ω_{geo} , полученной в чисто электростатическом приближении, что было продемонстрировано ранее.

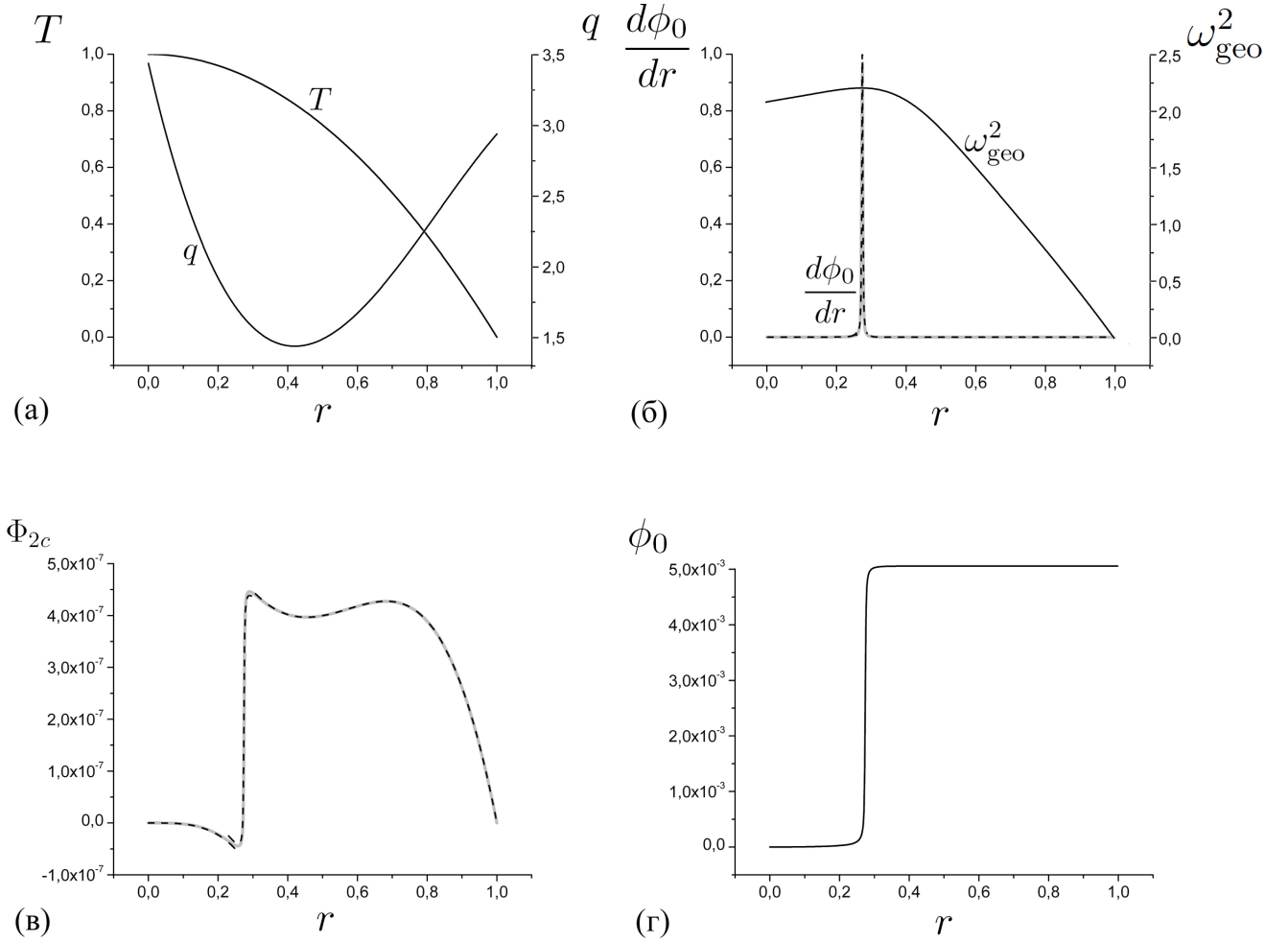


Рис. 5: Радиальные профили T и q (а), $d\phi_0/dr$ и ω_{geo}^2 (б), Φ_{2c} (в), ϕ_0 (г) для равновесия с максимумом локальной частоты ГАМ, достигнутого за счёт отрицательного магнитного шира. На рисунках (б), (в): штриховые линии — аналитическая асимптотика, серые сплошные линии — результаты численного расчёта

Для вывода дисперсионного соотношения для собственной частоты ГГАМ граничные условия (22) записываются в виде одного интегрального уравнения

$$\int_0^1 \frac{d\Phi_{2c}}{dr} dr = 0. \quad (28)$$

Переход от интегрирования по r к интегрированию по q в (28) приводит к интегральному условию существования ГГАМ в плазме токамака с положительным магнитным широм:

$$(q_1 - q_0) - \frac{\beta}{4} \int_{q_0}^{q_1} \frac{\omega^2 T q^2 dq}{\omega^2 (1 + \beta T q^2 / 4) - T (2 + 1/q^2)} = 0. \quad (29)$$

Для выполнения условия (29) первое слагаемое, содержащее разность между значениями коэффициента запаса устойчивости на границе плазмы и в её центре, должно быть компенсировано слагаемым с коэффициентом $\sim \beta$. Поскольку значение β предполагается малым, для заметных величин $(q_1 - q_0)$ собственная частота ω , удовлетворяющая уравнению (29), обязана находиться вблизи нуля знаменателя подинтегрального выражения, т. е. вблизи частоты ω_{GAM} , а именно, чуть выше её максимального значения. В противном случае на радиусе плазмы неизбежны локальные резонансы, портящие гладкую структуру глобальной моды.

В параграфе 3.4.1 получены собственные моды геодезических акустических колебаний. Рассматривается модельный, но вполне представительный класс профилей нормированной температуры как функции q в форме

$$T = q^2 / (D_0 + D_2 q^2 + D_4 q^4). \quad (30)$$

Коэффициенты D_0 , D_2 и $D_4 \neq 0$ выбираются так, чтобы определить значения температуры в центре плазмы ($T|_{r=0} = 1$) и на её границе ($T|_{r=1} = T_1$), а также чтобы задать положение r_m формального максимума функции (30). Для выбранного класса профилей температуры условие (29) сводится к простой комбинации двух интегралов

$$q_1 - q_0 + \frac{\beta}{4D_4} (cI_0 + bI_2) = 0, \quad (31)$$

где

$$I_0 = \int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{q^4 + bq^2 + c}, \quad I_2 = \int_{q_0}^{q_1} \frac{q^2 dq}{q^4 + bq^2 + c},$$

$b = (D_2 - 2/\omega^2)/(D_4 + \beta/4)$, $c = (D_0 - 1/\omega^2)/(D_4 + \beta/4)$. Значения интегралов I_0 и I_2 определяются знаком параметра $\chi = b^2 - 4c$, который, в свою очередь, зависит от ω^2 . Показано, что собственные решения для ГГАМ при равновесиях с максимумом $\omega_{\text{geo}}(r)$ могут существовать только при $\chi < 0$. Для монотонных профилей $\omega_{\text{geo}}(r)$ решения, напротив, могут быть найдены при положительных χ .

В параграфе 3.4.2 рассмотрен случае $\chi < 0$. Уравнение (31) сводится к

$$\begin{aligned} q_1 - q_0 - \frac{\beta}{8D_4\sqrt{-\chi}} \left\{ \frac{(b - \sqrt{c})c_+}{2} \ln \left| \frac{q^2 + qc_- + \sqrt{c}}{q^2 - qc_- + \sqrt{c}} \right| \Big|_{q_0}^{q_1} - \right. \\ \left. - c_- \left[b \left(\arctg \left(\frac{2q + c_-}{c_+} \right) \Big|_{q_0}^{q_1} + \arctg \left(\frac{2q - c_-}{c_+} \right) \Big|_{q_0}^{q_1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{c} \arctg \left(\frac{q^2 - \sqrt{c}}{qc_+} \right) \Big|_{q_0}^{q_1} \right] \right\} = 0, \quad (32) \end{aligned}$$

где использованы обозначения $c_- = \sqrt{2\sqrt{c} - b}$, $c_+ = \sqrt{2\sqrt{c} + b}$. Это трансцендентное уравнение относительно ω^2 , которое легко может быть удовлетворено вблизи $\chi = 0$.

Радиальная структура собственных функций ГГАМ при $\chi < 0$ даётся следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_0}{dr} &= \frac{-Krq^4}{\omega^2(D_0 + D_2q^2 + D_4q^4 + \beta q^4/4) - q^2(2 + 1/q^2)}; \\ \Phi_{2c} &= \frac{Kq_0q_1}{4(q_1 - q_0)(1 + \beta/4D_4)} \times \\ &\times \left(q - \frac{\beta}{8D_4\sqrt{-\chi}} \left\{ \frac{(b - \sqrt{c})c_+}{2} \ln \left| \frac{q^2 + qc_- + \sqrt{c}}{q^2 - qc_- + \sqrt{c}} \right| - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - c_- \left[b \left(\arctg \left(\frac{2q + c_-}{c_+} \right) + \arctg \left(\frac{2q - c_-}{c_+} \right) \right) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \sqrt{c} \arctg \left(\frac{q^2 - \sqrt{c}}{qc_+} \right) \right] \right\} + G \right). \end{aligned}$$

Здесь G – константа интегрирования, которая должна быть выбрана таким образом, чтобы обеспечить $\Phi_{2c}|_{r=1} = 0$.

На рис. 6 представлен пример глобальной геодезической акустической моды, реализующейся при наличии максимума ω_{geo} , достигнутого за счёт локального роста температуры внутри объёма плазмы. Такой рост, к примеру, может быть обеспечен мощным неосевым дополнительным нагревом плазмы. Рассмотрены профиль коэффициента запаса устойчивости вида (25) с $q_0 = 1$ и $q_1 = 3$ и профиль температуры вида (30) с максимумом в точке $r = 0,4$, $T_1 = 0,005$ (см. рис. 6а). Локальная частота ГАМ при этом достигает своего максимального значения в точке $r_M = 0,38$ (см. рис. 6б). При $\beta = 0,04$ решение уравнения (32) найдено на частоте $\omega^2 = 3,042899$; при этом $\chi = -3,3 \times 10^{-7}$. Радиальная структура собственных функций, представленная на рисунках 6б, в, г, весьма схожа со структурой мод, найденных ранее для равновесия с отрицательным магнитным широм. В точке максимума локальной частоты ГАМ профиль электрического поля ГГАМ сильно пикирован. Частота, полученная из уравнения (32), с хорошей точностью совпадает с частотой, рассчитанной численно.

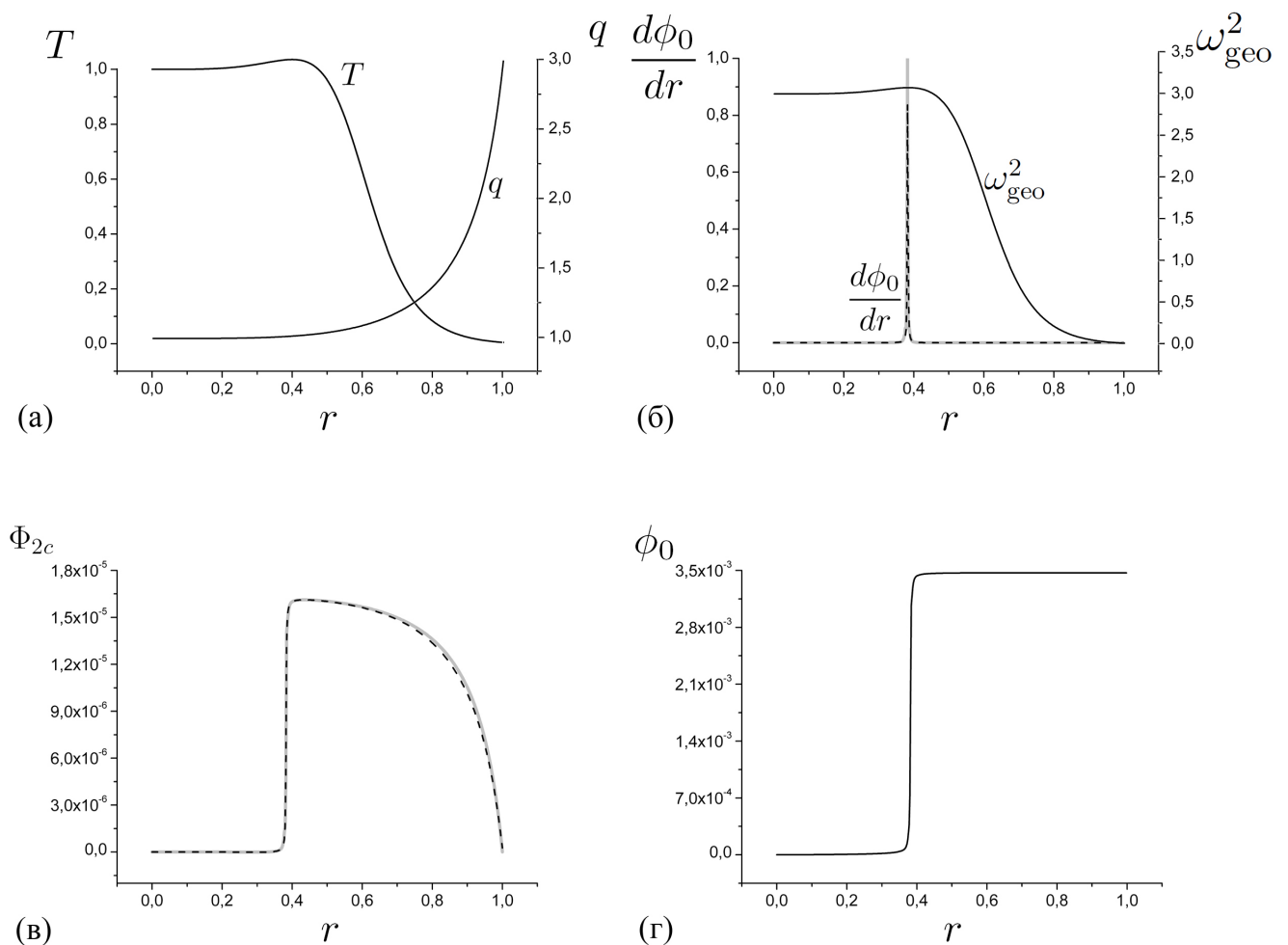


Рис. 6: Радиальные профили T и q (а), $d\phi_0/dr$ (б) и ω_{geo}^2 , Φ_{2c} (в), ϕ_0 (г) для равновесия с максимумом локальной частоты ГАМ, достигнутого за счёт локального роста температуры. На рисунках (б), (в): штриховые линии – точные аналитические решения, серые сплошные линии – результаты численного расчёта. Здесь $\beta = 0,04$

В параграфе 3.4.3 рассмотрен случай $\chi > 0$. Дисперсионное уравнение для частоты ГГАМ имеет вид

$$q_1 - q_0 - \frac{\beta}{8D_4\sqrt{\chi}} \left\{ b_-^2 I(b_-) - b_+^2 I(b_+) \right\} = 0, \quad (33)$$

где $b_- = (b - \sqrt{\chi})/2$, $b_+ = (b + \sqrt{\chi})/2$, а функция $I(y)$ определена как

$$I(y) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{y}} \operatorname{arctg}\left(\frac{q}{\sqrt{y}}\right) \Big|_{q_0}^{q_1}, & y > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-y}} \ln \left| \frac{\sqrt{-y-q}}{\sqrt{-y+q}} \right| \Big|_{q_0}^{q_1}, & y < 0 \end{cases}.$$

Показано, что в рассматриваемом случае малость величины χ сама по себе не гарантирует существования собственной моды. Решение уравнения (33) тем не менее существует, и оно находится вблизи особенности логарифмической функции, а именно, при $|\sqrt{-b_-} - q_0| \ll 1$. Только в этом случае слагаемое в фигурных скобках в уравнении (33) становится достаточно большим, чтобы скомпенсировать заметную разность $(q_1 - q_0)$. Условие $\sqrt{-b_-} - q_0 = 0$ соответствует значению частоты, равному ω_{GAM} при $r = 0$.

Собственные функции ГГАМ при $\chi > 0$ определяются выражениями

$$\frac{d\phi_0}{dr} = \frac{-Krq^4}{\omega^2(D_0 + D_2q^2 + D_4q^4 + \beta q^4/4) - q^2(2 + 1/q^2)};$$

$$\Phi_{2c} = \frac{Kq_0q_1}{4(q_1 - q_0)(1 + \beta/4D_4)} \times \left(q - \frac{\beta}{8D_4\sqrt{\chi}} \left\{ b_-^2 I(b_-, q) - b_+^2 I(b_+, q) \right\} + G \right),$$

$$\text{где } I(y, q) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{y}} \operatorname{arctg}\left(\frac{q}{\sqrt{y}}\right), & y > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-y}} \ln \left| \frac{\sqrt{-y-q}}{\sqrt{-y+q}} \right|, & y < 0 \end{cases}.$$

Пример решения, полученного для монотонного профиля температуры с $q_0 = q_m = 1,5$, $q_1 = 2$, $T_1 = 0,005$ и $\beta = 0,04$ показан на рис. 7. Собственная частота решения $-\omega^2 = 2,390655$; при этом $\chi = 6,4 \times 10^{-7}$. Радиальная структура собственных функций ГГАМ при монотонном профиле ω_{geo} заметно отличается от структуры ГГАМ, возникающей вблизи максимума локальной геодезической акустической частоты (ср. с рис. 6). Возмущение радиального электрического поля (см. рис. 7б) не локализовано в окрестности выделенной магнитной поверхности, а имеет заметную амплитуду в широкой области малых градиентов q и T . Вторая гармоника электростатического потенциала также гладкая и не испытывает скачков (см. рис. 7в). Электростатический потенциал ϕ_0 постоянен практически во всём объёме плазмы (см. рис. 7г). С уменьшением β и ростом $q_1 - q_0$ область локализации моды сужается, а сама мода смещается к центру плазменного шнура.

В разделе 3.5 получены интегральные условия существования ГГАМ в тороидально вращающейся плазме и соответствующее дисперсионное уравнение; проведён его качественный анализ. Рассматривается профиль коэффициента запаса устойчивости вида (25). Для этого профиля уравнения (17), (18) для вторых гармоник электрического потенциала могут быть проинтегрированы элементарным образом, после чего система (17), (18), (20),

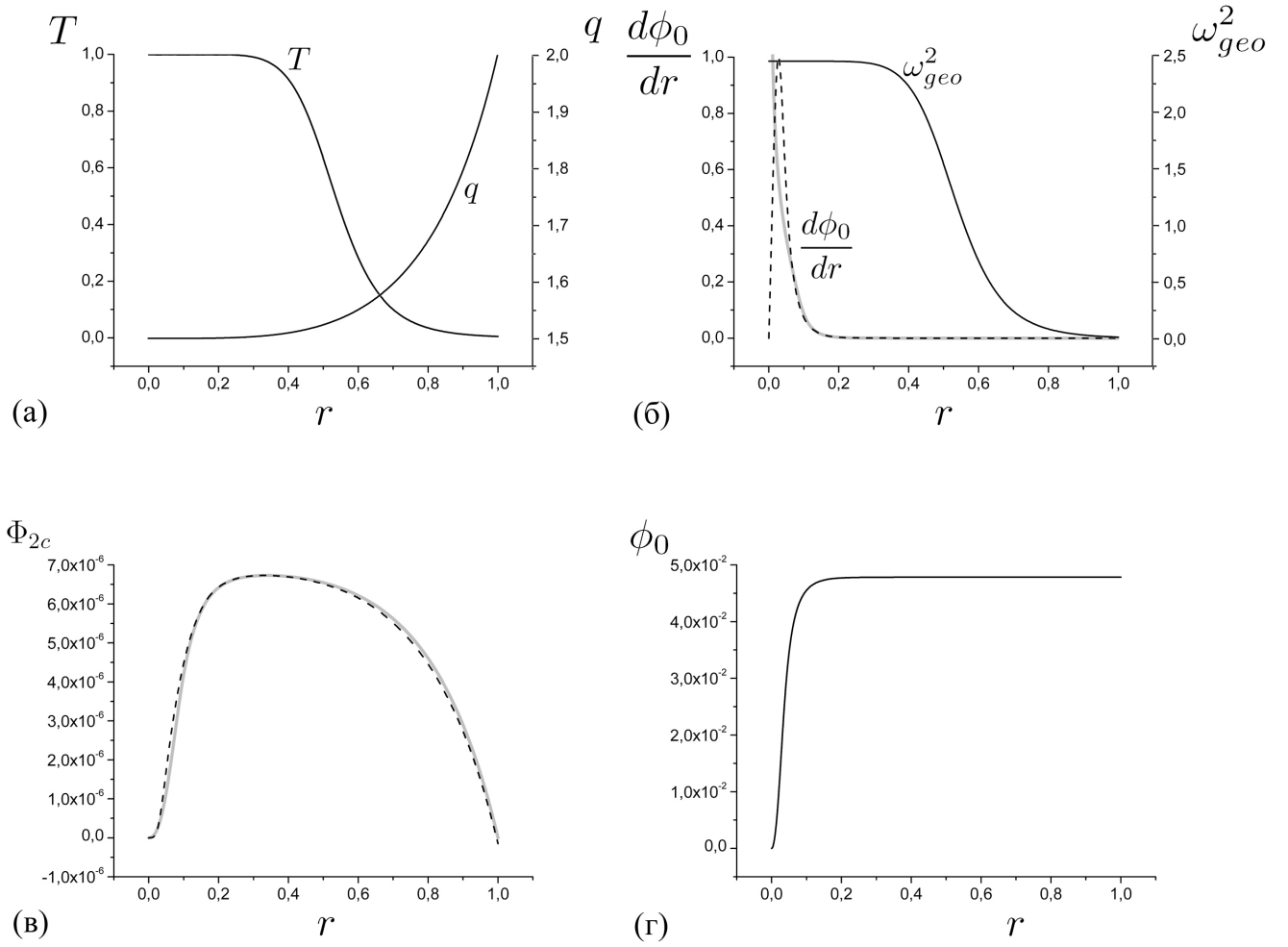


Рис. 7: Радиальные профили T и q (а), $d\phi_0/dr$ (б) и ω_{geo}^2 , Φ_{2c} (в), ϕ_0 (г) для равновесия с монотонным профилем локальной частоты ГАМ. На рисунках (б), (в): штриховые линии – точные аналитические решения, серые сплошные линии – результаты численного расчёта. Здесь $\beta = 0,04$

описывающая спектр геодезических акустических мод, записывается в виде:

$$\frac{d\phi_0}{dr} = -\frac{1}{r^2 D} \left\{ G_c \frac{d\Phi_{2c}}{dr} + \frac{2}{\bar{\rho}_0} \frac{df}{dr} \left(\omega^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} \right) \Phi_{2c} + G_s \frac{d\Phi_{2s}}{dr} \right\},$$

$$\frac{d\Phi_{2c}}{dr} - \frac{2G_c}{(\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} \frac{r^2 \epsilon(r)}{\omega_s^2} \frac{d\phi_0}{dr} = K_c r^3 q^2, \quad (34)$$

$$\frac{d\Phi_{2s}}{dr} - \frac{2G_s}{(\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} \frac{r^2 \epsilon(r)}{\omega_s^2} \frac{d\phi_0}{dr} = K_s r^3 q^2. \quad (35)$$

Здесь K_c , K_s – константы интегрирования.

Связь между производными вторых гармоник потенциала даётся уравнением

$$G_s \frac{d\Phi_{2c}}{dr} - G_c \frac{d\Phi_{2s}}{dr} = r^3 q^2 (K_c G_s - K_s G_c),$$

а $d\phi_0/dr$ выражается через Φ_{2c} :

$$\frac{d\phi_0}{dr} = -\frac{2df/dr (\omega^2 - \omega_s^2/q^2) \Phi_{2c}/(\bar{\rho}_0 r^2) + r q^2 \{K_c G_c + K_s G_s\}}{D^*}, \quad (36)$$

где

$$D^* = D + \frac{2\epsilon(G_c^2 + G_s^2)}{\omega_s^2(\omega^2 - \omega_s^2/q^2)}.$$

Условие $D^* = 0$ определяет сплошной спектр ГАМ с учётом вторых полоидальных гармоник электрического потенциала.

Подстановка (36) в (34), (35) приводит к уравнениям для собственных функций ГГАМ:

$$D^* \frac{d\Phi_{2c}}{dr} + G_c k \Phi_{2c} = g_c, \quad (37)$$

$$D^* \frac{d\Phi_{2s}}{dr} + G_s k \Phi_{2c} = g_s, \quad (38)$$

где

$$k(r) = \frac{4\epsilon}{\bar{\rho}_0 \omega_s^2} \frac{df}{dr},$$

$$g_c(r) = r^3 q^2 \left\{ K_c D^* - \frac{2\epsilon G_c}{\omega_s^2 (\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} (K_c G_c + K_s G_s) \right\},$$

$$g_s(r) = r^3 q^2 \left\{ K_s D^* - \frac{2\epsilon G_s}{\omega_s^2 (\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} (K_c G_c + K_s G_s) \right\}.$$

Уравнения (37), (38) являются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка и поэтому всегда могут быть проинтегрированы в квадратурах.

Для нахождения собственных решений уравнения (37), (38) дополняются нулевыми граничными условиями, обеспечивающими регулярность решений на магнитной оси токамака и нулевую радиальную скорость на границе плазмы:

$$\Phi_{2c}(r=0; r=a) = 0, \quad \Phi_{2s}(r=0; r=a) = 0. \quad (39)$$

Интегральные условия существования глобальных мод имеют вид:

$$\int_0^a \frac{(g_c - G_c k \Phi_{2c})}{D^*} dr = 0, \quad (40)$$

$$\int_0^a \frac{(g_s - G_s k \Phi_{2c})}{D^*} dr = 0, \quad (41)$$

где Φ_{2c} – решение уравнения (37). В отличие от случая статического равновесия, когда граничные условия на функцию Φ_{2c} приводили к единственному интегральному уравнению на собственную частоту (28), в плазме с вращением существование глобальной моды требует выполнения двух интегральных условий (40), (41). Совместное решение (40), (41) позволяет найти собственную частоту ГГАМ, а их совместность может быть достигнута за счёт надлежащего подбора отношения констант K_s/K_c в синусной и косинусной гармониках потенциала. Совместность уравнений (40), (41), вообще говоря, не очевидна. В плазме без течений условие (41) выполняется тождественно, поэтому все собственные решения, найденные ранее для задачи статического равновесия, реализуются при выполнении условия (40).

Приведён пример, демонстрирующий существование нетривиальных решений системы (40), (41) при $M \neq 0$. Рассматривается частный случай твердотельного ($\Omega(r) = \text{const}$) вращения плазмы с постоянной плотностью – функцией магнитной поверхности ($\alpha \rightarrow \infty$). В этом случае $f = \text{const}$, $k = 0$, что позволяет по аналогии с выводом (29) получить уравнение на частоту собственной моды во вращающейся плазме:

$$q_1 - q_0 - 2 \int_{q_0}^{q_1} \frac{\epsilon G_c^2}{D^* \omega_s^2 (\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} dq -$$

$$- 4 \frac{\left(\int_{q_0}^{q_1} \frac{\epsilon G_c G_s}{D^* \omega_s^2 (\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} dq \right)^2}{\left(q_1 - q_0 - 2 \int_{q_0}^{q_1} \frac{\epsilon G_s^2}{D^* \omega_s^2 (\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} dq \right)} = 0. \quad (42)$$

Ввиду малости ϵ дисперсионное уравнение (42) может быть удовлетворено только за счёт малости D^* , то есть когда частота собственной моды близка к частоте сплошного спектра, но не совпадает с ней ни на каком радиусе. Как видно из (42), вращение плазмы облегчает выполнение условия существования глобальной моды (по крайней мере в рассматриваемом частном случае): в дисперсионном уравнении появляется дополнительный отрицательный член, способствующий компенсации главного слагаемого $(q_1 - q_0)$. Кроме того, вращение плазмы модифицирует знаменатель в подынтегральных выражениях в уравнении (42), который должен быть знакоопределённым всюду в рассматриваемой области. За счёт этого возникает важное отличие между ГГАМ во вращающейся и неподвижной плазме. Для случая статического равновесия этот знаменатель должен быть всюду строго положительным, поскольку $(\omega^2 > 0, \text{ а } \omega_{\text{geo}}^2|_{r=a} \rightarrow 0)$. В динамическом равновесии, т. е. в случае вращающейся плазмы, допускается, вообще говоря, его отрицательность (величина локальной частоты ГГАМ на границе плазмы за счёт вращения может быть отлична от нуля). Это означает потенциальную возможность существования глобальной моды не только вблизи максимума, но и вблизи (причём ниже) минимума локальной частоты сплошного спектра.

Кратко сформулированные выводы Главы 3 представлены в разделе 3.6.

В Заключении сформулированы выводы и основные результаты диссертации.

Публикации по теме диссертации

1. Ильгисонис В.И., Коновальцева Л.В., Лахин В.П., Сорокина Е.А. Аналитические решения для глобальных геодезических акустических мод в плазме токамака // Физика плазмы. – 2014. – Т. 40. – С. 955-966.
2. Лахин В.П., Сорокина Е.А., Ильгисонис В.И., Коновальцева Л.В. МГД-модель низкочастотных волн в токамаке с тороидальным вращением плазмы и проблема существования глобальных геодезических акустических мод // Физика плазмы. – 2015. – Т. 41. – С. 1054-1061.
3. Сорокина Е.А., Лахин В.П., Ильгисонис В.И., Коновальцева Л.В. Геодезические акустические моды в токамаке некруглого сечения // Физика плазмы. – 2017. – Т. 43. – С. 51-60.
4. Ilgisonis V.I., Konovaltseva L.V., Lakhin V.P., Sorokina E.A. Analytical solutions for geodesic acoustic eigenmodes in tokamak plasmas // International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering – 2014. – V. 8. – P. 1023-1026.
5. Сорокина Е.А., Лахин В.П., Коновальцева Л.В. МГД-уравнения глобальных геодезических акустических мод в тороидально вращающейся плазме токамака // Тезисы ЛП Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, Москва, 17-19 мая 2016, С. 180-185.
6. Sorokina E.A., Lakhin V.P., Ilgisonis V.I., Konovaltseva L.V. Reduced MHD-model for low-frequency modes in a tokamak with toroidal plasma flow // Proc. 18th International Congress on Plasma Physics, Kaohsiung, Taiwan, 27 June - 1 July 2016, PPM1-12.
7. Сорокина Е.А., Ильгисонис В.И., Лахин В.П., Коновальцева Л.В., Марусов Н.А., Смоляков А.И. Геодезические акустические моды в тороидально вращающейся плазме токамака // Тезисы XLV Международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС, Звенигород, 2-6 апреля 2018, С. 110.
8. Сорокина Е.А., Подтурова О.И., Коновалов С.В., Коновальцева Л.В. MagIsland_Tr // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018613881. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 26 марта 2018.

Цитируемая литература

- [1] Goedbloed J. P., Holties H. A., Poedts S. et al. MHD spectroscopy: free boundary modes (ELMs) and external excitation of TAE modes // Plasma Phys. Control. Fusion. – 1993. – V. 35. – P. B277-B292.
- [2] Huysmans G. T. A., Kerner W., Borba D. et al. Modeling the excitation of global Alfvén modes by an external antenna in the Joint European Torus (JET) // Phys. Plasmas. – 1995. – V. 2. – P. 1605-1613.
- [3] Fasoli A., Testa D., Sharapov S. et al. MHD spectroscopy // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2002. – V. 44. – P. B159-B172.
- [4] Silva C., Arnoux G., Groth M. et al. Observation of geodesic acoustic modes in the JET edge plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2013. – V. 55. P. 025001.
- [5] McKee G. R., Gupta D. K., Fonck R. J. et al. Structure and scaling properties of the geodesic acoustic mode // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2006. – V. 48. – P. S123-S136.
- [6] Conway G. D., Tröster C., Scott B. et al. Frequency scaling and localization of geodesic acoustic modes in ASDEX Upgrade // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2008. – V. 50. – P. 055009.
- [7] de Meijere C. A., Coda S., Huang Z. et al. Complete multi-field characterization of the geodesic acoustic mode in the TCV tokamak // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2014. – V. 56. – P. 072001.
- [8] Ido T., Miura Y., Kamiya K. et al. Geodesic-acoustic-mode in JFT-2M tokamak plasmas // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2006. – V. 48. – P. S41-S50.
- [9] Krämer-Flecken A., Soldatov S., Reiser D. et al. Investigation of geodesic acoustic modes and related zonal flows at TEXTOR // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2009. – V. 51. – P. 015001.
- [10] Yashin A. Yu., Bulanin V. V., Gusev V. K. et al. Geodesic acoustic mode observations in the Globus-M spherical tokamak // Nucl. Fusion. – 2014. – V. 54. – P. 114015.
- [11] Мельников А. В., Елисеев Л. Г., Лысенко С. Е., и др. Радиальная однородность геодезических акустических мод в омических разрядах с низким В на токамаке Т-10 // Письма в ЖЭТФ – 2014. – Т. 100. – С. 633-638.
- [12] Melnikov A. V., Eliseev L. G., Perfilov S. V. et al. The features of the global GAM in OH and ECRH plasmas in the T-10 tokamak // Nucl. Fusion. – 2015. – V. 55. – P. 063001.
- [13] Diamond P. H., Itoh S.-I., Itoh K., Hahm T. S. Zonal flows in plasma - a review // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2005. – V. 47. – P. R35-R161.
- [14] Winsor N., Johnson J. L., Dawson J. M. Geodesic acoustic waves in hydromagnetic systems // Phys. Fluids. – 1968. – V. 11. – P. 2448-2450.
- [15] Frieman E., Rotenberg M. On hydromagnetic stability of stationary equilibria // Rev. Mod. Phys. – 1960. – V. 32. – P. 898-902.

- [16] Fesenyuk O. P., Kolesnichenko Ya. I., Wobig H., Yakovenko Yu. V. Ideal magnetohydrodynamic equations for low-frequency waves in toroidal plasmas // *Phys. Plasmas*. – 2002. – V. 9. – P. 1589-1595.
- [17] Haverkort J. W., de Blank H. J., Koren B. The Brunt-Väisälä frequency of rotating tokamak plasmas // *J. Comp. Phys.* – 2012. – V. 231. – P. 981-1001.
- [18] Miller R. L., Chu M. S., Greene J. M. et al. Noncircular, finite aspect ratio, local equilibrium model // *Phys. Plasmas*. – 1998. – V. 5. – P. 973-978.
- [19] Angelino P., Garbet X., Villard L. et al. The role of plasma elongation on the linear damping of zonal flows // *Phys. Plasmas*. – 2008. – V. 15. – P. 062306.
- [20] Villard L., Angelino P., Bottino A. et al. Plasma Shape Effects on Geodesic Acoustic Oscillations // *AIP Conf. Proc.* – 2006. – V. 871. – P. 424-429.
- [21] Wahlberg C., Graves J. P. Magnetohydrodynamic theory of the global structure and magnetic components of the geodesic acoustic continuum modes in tokamaks // *Plasma Phys. Control. Fusion*. – 2016. – V. 58. – P. 075014.
- [22] Gao Z., Wang P., Sanuki H. Plasma shaping effects on the geodesic acoustic mode in toroidally axisymmetric plasmas // *Phys. Plasmas*. – 2008. – V. 15. – P. 074502.
- [23] Seidl J., Hron M., Krbec J. et al. Electromagnetic characteristics of geodesic acoustic mode in the COMPASS tokamak // *Proc. 43rd EPS Conf. on Plasma Physics*, Leuven, Belgium, 4-8 July 2016, P5.004.
- [24] Lakhin V. P., Ilgisonis V. I., Smolyakov A. I. Geodesic acoustic modes and zonal flows in toroidally rotating tokamak plasmas // *Phys. Letters A*. – 2010. – V. 374. – P. 4872-4875.
- [25] Polevoi A. R., Medvedev S. Yu., Mukhovatov V. S. et al. ITER confinement and stability modelling // *J. Plasma Fusion Res. SER.* – 2002. – V. 5. – P. 82-87.