На правах рукописи
УДК 517.51

Бахтигареева Эльза Гизаровна

ОПТИМАЛЬНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ КОНУСОВ ФУНКЦИЙ СО СВОЙСТВАМИ МОНОТОННОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Специальность 01.01.01. -
"Вещественный, комплексный и функциональный анализ"

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико - математических наук

Москва 2017

Работа выполнена на кафедре нелинейного анализа и оптимизации факультета физико-математических и естественных наук ФГАОУ ВО "Российский университет дружбы народов".

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации

Гольдман Михаил Львович

Официальные оппоненты:

Осипенко Константин Юрьевич
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры общих проблем управления
механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Ильин Алексей Андреевич,
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник
ФГУ «Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН».

Ведущая организация:

ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет».

Защита состоится «10» октября 2017 года в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.203.27 при ФГАОУ ВО "Российский университет дружбы народов" по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 495^{a}.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо - Маклая, д. 6 и на сайте "Диссертационные советы РУДН" в сети интернет (http://dissovet.rudn.ru).

Автореферат разослан «____» июля 2017 года.

Ученый секретарь диссертационного совета:

доктор физико - математических наук Савин Антон Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования.

Диссертация посвящена построению оптимальных оболочек для заданного конуса неотрицательных измеримых функций со свойствами монотонности. Построение оптимальных оболочек для заданного конуса неотрицательных измеримых функций, оценки положительных операторов на них имеют важные приложения в различных областях анализа, таких как, например, теория функциональных пространств, теория приближения, теория вложений, теория интерполяции.

Проблема описания свойств монотонных операторов на конусах неотрицательных функций со свойствами монотонности и, в частности, задача о построении оптимальной банаховой или квазибанаховой оболочки для таких конусов весьма актуальна. Она является важной составляющей частью общей проблемы об оптимальных вложениях функциональных пространств, которая, в свою очередь, представляет собой важный раздел общей теории оптимизации. Современное развитие теории оптимизации и ее разнообразные приложения в теории экстремума, теории аппроксимации и теоремах вложения представлены в монографиях А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова; Алексеева В. М., Тихомирова В. М. и Фомина С. В.; В. М. Тихомирова и Г. Г. Магарил - Ильяева[1], А. В. Арутюнова и В. В. Обуховского[2], в работах К. Ю. Осипенко[3,4], А. А. Ильина [5,6].

Часть результатов главы 3 посвящена изучению вопросов об оптимальных оболочках для конусов на классе идеальных пространств[7,8], являющихся векторными решетками, при различных вариантах отношений порядка. Общая теория таких пространств, в которых (квази)норма согласована с введенным отношением порядка (нормированных решеток) создавалась в исследованиях ряда известных специалистов в нашей стране, связанных со школами Л. В. Канторовича, М. Г. Крейна, С. Г. Крейна, М. А. Красносельского, таких как Г. П. Акилов, А. В. Бухвалов, Б. З. Вулих, П. П. Забрейко, Г. Я. Лозановский , В. И. Овчинников, А. Г. Пинскер, Е. М. Семенов, А. И. Юдин и др., а также за рубежом, в работах таких авторов, как Амемия, Бирхгоф, Бохнер, Дьедоне, Заанен, Иосида, Люксембург, Л. Малигранда и др. Развитие теории операторов в нормированных решетках до середины 80-х годов представлено в монографии Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова[9]. Современные достижения и состояние этой теории

---

[1] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения, М., Едиториал, УРСС, 2003.

[2] *Arutyunov A., Obukhovskii V.* Convex and set-valued analysis, De Gruyter Berlin, Boston, 2017.

[3] *Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках // Матем. сб., 205:10 (2014), 77–106.

[4] *Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко.* Точность и оптимальность методов восстановления функций по их спектру // Тр. МИАН, 293 (2016), 201–216.

[5] *А. А. Ильин, А. А. Лаптев.* Неравенства Либа–Тирринга на торе // Матем. сб., 207:10 (2016), 56–79.

[6] *С. В. Зелик, А. А. Ильин.* Асимптотика функций Грина и точные интерполяционные неравенства // УМН, 69:2(416) (2014), 23–76.

[7] *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

[8] *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of Operators. New York: Academic Press, 1988.

[9] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. Москва "Наука"Физматлит, 1984.

отражены в работах А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе, М. Ф. Сухинина.

Цель и задачи работы.

Объектом исследования в диссертационной работе являются идеальные пространства и конусы неотрицательных функций со свойствами монотонности в них.

Предметом исследования является построение оптимальных идеальных (банаховых и квазибанаховых) оболочек для конусов неотрицательных функций с различными свойствами монотонности.

Целью исследования является получение описания оптимальных идеальных оболочек для заданных конусов в явном виде.

Для реализации поставленной цели в работе были сформулированы такие *задачи*:

1. Для конуса K функций со свойствами монотонности построить банахову идеальную оболочку методом ассоциированной двойственности.

2. Рассмотреть различные конкретизации общей схемы построения банаховой идеальной оболочки для разных конусов со свойствами монотонности и получить явные описания банаховой идеальной оболочки. В рассмотрение включены конусы убывающих неотрицательных функций в весовых пространствах Лебега и пространствах, заданных с помощью двухвесовых интегральных квазинорм.

3. Для конуса K функций со свойствами монотонности построить квазинормированную идеальную оболочку с помощью нестягивающих операторов.

4. Рассмотреть различные конкретизации общего метода нестягивающих операторов и построить в ряде случаев явные конструкции таких операторов и определяемых с их помощью оптимальных квазинорм. В рассмотрение включены различные конусы убывающих, обобщенно убывающих и двояко монотонных функций.

5. Реализовать метод построения идеальных оболочек для конусов в классах идеальных пространств с введенными в них отношениями порядка. Получить явные конструкции нестягивающих операторов и идеальных оболочек для различных вариантов конусов и отношений порядка.

Научная новизна полученных результатов.

Все результаты диссертационной работы, выносимые на защиту, являются новыми. В частности, получены новые применения принципа ассоциированной двойственности для построения идеальных банаховых оболочек. Разработан новый метод нестягивающих операторов для построения идеальных квазибанаховых оболочек для конусов функций со свойствами монотонности. Описанные методы применяются для построения идеальных оболочек для различных вариантов конусов и отношений порядка.

Теоретическая и практическая ценность. Все результаты диссертации относятся к области фундаментальных исследований по теории функциональных пространств. Они носят теоретический характер, дополняют многочисленные исследования ряда авторов, могут быть использованы для установления оптимальных вложений пространств обобщенной гладкости, пространств потенциалов, для получения точных оценок монотонных операторов на конусах.

Методы исследования. В диссертационной работе рассмотрены два общих подхода для построения оптимальных оболочек конусов функций. Один из них базируется на методе ассоциированной двойственности. При его применении строится ассоциированное пространство ограниченных интегральных функционалов для заданного конуса. Доказывается, что оно представляет собой банахово идеальное пространство (кратко: ИП). С помощью принципа двойственности устанавливается, что ассоциированное к нему банахово ИП является минимальным, в которое вложен данный конус. Этот метод позволил решить ряд важных конкретных задач такого типа. В то же время, его использование связано с наличием определенных трудностей и ограничений. По мере усложнения рассматриваемых задач существенно усложняются конструкции ассоциированных норм, которые в данном подходе необходимо строить на обоих этапах. Конечно, развиваются и совершенствуются методы таких построений. Для описания ассоциированных норм мы используем методы дискретизации и антидискретизации. На этом пути есть, однако, и принципиальное ограничение. Ассоциированное пространство для конуса является банаховым. Соответственно, таким же является и ассоциированное к нему оптимальное ИП, содержащее данный конус. Тем самым, метод позволяет строить банаховы оболочки. В то же время, в ряде случаев эти оболочки могут быть еще сужены за счет использования квазинорм, не являющихся нормами. Таким образом, актуальной является задача о построении оптимальных квазибанаховых оболочек. Для этого развивается другой общий метод построения оптимальных оболочек с помощью специально подобранных нестягивающих операторов. Рассматриваемая здесь аксиоматика ИП соответствует подходу, развитому С. Г. Крейном, Ю. И. Петуниным и Е. М. Семеновым. При этом мы включаем в рассмотрение квазинормированный случай. В отличие от С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семенова мы не постулируем полноту пространства, а доказываем ее с использованием свойства Фату. Отметим также, что эта аксиоматика обобщает систему аксиом банаховых функциональных пространств К. Беннетта и Р. Шарпли. Термин "оптимальная оболочка" понимается здесь как минимальное банахово (в общем случае, квазибанахово) ИП, принадлежащее данному классу и содержащее заданный конус.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Для конуса K функций со свойствами монотонности построено ассоциированное к нему обобщенное банахово функциональное пространство (ОБФП) K' и доказано, что ассоциированное к нему ОБФП $X_0 = K''$ является оптимальным ОБФП для вложения $K \mapsto X$.

2. Рассмотрены различные конкретизации общей схемы построения оптимального ОБФП для разных конусов со свойствами монотонности и получены явные описания оптимальных ОБФП. В рассмотрение включены конусы убывающих неотрицательных функций в весовых пространствах Лебега и пространствах, заданных с помощью двухвесовых интегральных квазинорм.

3. Развит метод построения квазинормированных идеальных оболочек для конусов

неотрицательных измеримых функций со свойствами монотонности с помощью нестягивающих операторов.

4. Рассмотрены различные конкретизации общего метода нестягивающих операторов и построены в ряде случаев явные конструкции таких операторов и определяемых с их помощью оптимальных квазинорм. В рассмотрение включены различные конусы убывающих, обобщенно убывающих и двояко монотонных функций.

5. Метод построения идеальных оболочек для конусов реализован также в классах идеальных пространств с введенными в них отношениями порядка. Получены явные конструкции нестягивающих операторов и идеальных оболочек для различных вариантов конусов и отношений порядка.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обусловлена строгостью доказательств, применением известных методов исследования. Полученные результаты опубликованы в ведущих рецензируемых журналах.

Основные результаты диссертации докладывались на кафедральном семинаре кафедры нелинейного анализа и оптимизации Российского университета дружбы народов; на семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (семинаре Никольского) в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва; на международных научных конференциях "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-IV", 2014 г., г. Ростов-на-Дону; " XXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам", г. Судак, 2014 г.; "Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы", 15-18 декабря 2014г., Российский университет дружбы народов, г. Москва; "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-V", 26 апреля - 1 мая 2015 г., г. Ростов-на-Дону; "Функциональные пространства и теория приближения функций", 25–29 мая 2015 г., МИАН, г. Москва; "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-VI", 24 - 29 апреля 2016 г., г. Ростов-на-Дону; "Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VII", г. Ростов-на-Дону, 23 - 28 апреля 2017.

Публикации и личный вклад автора. По теме диссертации опубликовано пятнадцать работ [1]-[15]:

5 научных статей ([1], [2], [3], [4], [5]) изданы в журналах, которые входят в международные наукометрические базы, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ: [4] и [5] индексированы в Scopus и WoS; [2] и [3] - в Scopus; [1] рекомендован ВАК Минобрнауки РФ.

10 тезисов докладов международных научных конференций [6]-[15].

Из совместных работ в диссертацию вошли результаты, полученные автором самостоятельно. Работа [1] опубликована в соавторстве с М. Л. Гольдманом и П П. Забрейко.

Работы [3] и [4] опубликованы в соавторстве с М. Л. Гольдманом. В этих работах автору принадлежат такие результаты: в [1] результаты разделов 3 и 4; в [3] Теоремы 1.2, 1.4, 1.6, результаты раздела 2.2; в [4] результаты разделов 3 и 4. М. Л. Гольдману принадлежит постановка задач, указание методов исследования, а также общее руководство.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на разделы, заключения и списка цитированной литературы. Объем работы составляет 101 страницу, библиография - 70 источников.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, представлена история вопроса, дается короткий обзор диссертации по главам и разделам.

В **первой главе** диссертации изучен вопрос о построении оптимальных банаховых оболочек для конусов неотрицательных функций методом ассоциированной двойственности. Получена теорема, в которой в явном виде описана оптимальная банахова оболочка для конуса. Также представлена модификация этой теоремы для конуса, заданного интегральным представлением.

Для формулировки результатов приведем некоторые необходимые обозначения и определения. Через (S, Σ, μ) (кратко: $(S; \mu)$) обозначим пространство с σ-алгеброй Σ подмножеств множества S и мерой, которую считаем неотрицательной и σ-конечной. Через $M = M(S; \mu)$ обозначим множество μ-измеримых функций, далее $M_0 = M_0(S; \mu)$ есть множество μ-измеримых конечных почти всюду функций,
$M^+(S; \mu) = \{f \in M(S; \mu), f \geq 0\}$; $M_0^+(S; \mu) = M_0(S; \mu) \cap M^+(S; \mu)$.

Определение 1.1.1 *Отображение $\rho : M^+ \to [0, \infty]$ есть идеальная квазинорма (кратко: ИКН), если для всех $f, g, f_n (n \in \mathbb{N})$ из M^+ выполнены следующие условия:*

$(P1)$ $\rho(f) = 0 \Rightarrow f = 0 \quad \mu -$ почти всюду (кратко: $\mu -$ п.в.)

$\rho(\alpha f) = \alpha \rho(f), \quad \alpha \geq 0,$

$\rho(f + g) \leq C[\rho(f) + \rho(g)], \quad f, g \in M^+; C \geq 1$

(свойства квазинормы);

$(P2)$ $f \leq g \quad \mu -$ п.в. $\Rightarrow \rho(f) \leq \rho(g)$ (монотонность);

$(P3)$ $f_n \in M^+, f_n \uparrow f \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$ (свойство Фату);

$(P4)$ $\rho(f) < \infty \Rightarrow f < \infty \quad \mu -$ п.в.

Здесь $f_n \uparrow f$ означает, что $f_n \leq f_{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \mu -$ п.в.

Определение 1.1.2. *Пусть ρ есть ИКН. Множество $X = X(\rho)$ всех функций из M, для которых $\rho(|f|) < \infty$, называется идеальным пространством (кратко: ИП), порожденным ИКН ρ; при этом для f полагаем*

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

В терминологии книги Крейна-Петунина-Семенова это есть идеальное квазибанахово пространство со свойством Фату. В Теореме 1.1.1 мы доказываем, что пространство X, порожденное ИКН ρ, удовлетворяющей аксиомам $(P1) - (P4)$, обладает свойством полноты. Понятие ИП шире понятия банахова функционального пространства (кратко: БФП), введенного Беннеттом и Шарпли, а также его обобщения (ОБФП), введенного в нашей работе [1]. Обобщенная функциональная норма, порождающая ОБФП, является частным случаем ИКН (с $C = 1$ в неравенстве треугольника). Поэтому из Теоремы 1.1.1 следует полнота ОБФП X.

Теорема 1.1.1 *Пусть X есть ИП, порожденное ИКН ρ, и $C \geq 1$- постоянная из условия $(P1)$. Пусть $p \in (0, 1]$ таково, что $(2C)^p = 2$.*
1. Тогда, из сходимости ряда

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

для $f_n \in X, n \in \mathbb{N}$, следует сходимость в X ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ к функции $f \in X$, причем

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_X \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(аналог свойства Рисса-Фишера)
2. X есть полное пространство.

Замечание 1.1.1. При $C = 1$ в $(P1)$, т.е. при $p = 1$ последняя оценка справедлива с постоянной 1 вместо $2^{\frac{1}{p}}$. Это же верно при $p \in (0, 1)$, если функционал $\|\cdot\|_X$ обладает свойством p-нормы, т.е. $\|f + g\|_X \leq (\|f\|_X^p + \|g\|_X^p)^{\frac{1}{p}}$. Например, это неравенство справедливо при $X = L_p(S, \mu), \quad 0 < p < 1$.

В разделе 1.2. представлена аксиоматика обобщенных банаховых функциональных пространств и приведены их общие свойства. Введем необходимые определения.

Определение 1.2.3. *Отображение $\rho : M^+ \to [0, \infty]$ есть обобщенная функциональная норма (кратко: ОФН), если сли для всех $f, g, f_n (n \in \mathbb{N})$ из M^+, всех констант $a \geq 0$ и всех μ-измеримых подмножеств $E \subset S$ выполнены следующие условия:*

$(\tilde{P}1) \quad \rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \mu$ -п.в.; $\rho(\alpha f) = \alpha \rho(f); \rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$;

$$(P2) \quad 0 \leq g \leq f \quad \mu\text{-п.в.} \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$$

(монотонность);

$$(P3) \quad 0 \le f_n \uparrow f \quad \mu\text{-п.в.} \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$$

(свойство Фату);

$$(P4)' \quad \mu(E) < \infty \Rightarrow \exists h_E \in M^+, h_E > 0 \quad \mu\text{-п.в. на} \quad E, \text{такая что}$$

$$\int_E f h_E d\mu \le \rho(f).$$

Здесь функция h_E зависит от E и ρ, но не от $f \in M^+$.

$$(P5)' \quad \mu(E) < \infty \Rightarrow \exists f_E \in M^+, f_E > 0 \quad \mu\text{-п.в. на} \quad E; \rho(f_E) < \infty.$$

Определение 1.2.4. *Пусть ρ есть ОФН. Множество $X = X(\rho)$ всех функций из M, для которых $\rho(|f|) < \infty$, называется обобщенным банаховым функциональным пространством (кратко: ОБФП), порожденным ОФН ρ; при этом для f полагаем*

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

Определение 1.2.5 *Для ОФН ρ введем ρ'* на *M^+ формулой: для $g \in M^+$*

$$\rho'(g) = \sup \left\{ \int_S f g d\mu : f \in M^+, \rho(f) \le 1 \right\}.$$

Теорема 1.2.1 *Пусть ρ есть ОФН. Тогда ассоциированная норма ρ' также есть ОФН; порожденное ею пространство $X' = X(\rho')$ есть ОБФП.*

Замечание 1.2.4. ОБФП представляют собой идеальные структуры со свойством Фату (в терминологии книги С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семенова). Для них справедлив принцип двойственности: $(X')' = X$.

В разделе 1.3. описан метод ассоциированных норм и приведен его основной результат (Теорема 1.3.1), позволяющий строить оптимальные банаховы оболочки для заданного конуса неотрицательных функций. Здесь мы пользуемся принципом двойственности. Мы рассматриваем конус K в ОБФП X, поэтому дважды ассоциированное к нему пространство не совпадет с K, а будет его оптимальной банаховой оболочкой.

Пусть $(S;\mu)$ - пространство с мерой, которую считаем неотрицательной и σ-конечной. Через $\Im(S;\mu) = \{K = K(S;\mu)\}$ обозначим множество конусов, $K = K(S;\mu) \subset M_0^+(S;\mu)$, снабженных положительно однородными функционалами $\rho_K : K \to [0,\infty)$ со свойствами:

i) $h \in K, \quad \alpha \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha h \in K, \quad \rho_K(\alpha h) = \alpha \rho_K(h);$

ii) $\rho_K(h) = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 0$ почти всюду на S.

Рассмотрим проблему построения оптимального (т.е. минимального) ОБФП $X_0 \equiv X_0(S;\mu)$ для вложения конуса $K \in \Im(S;\mu)$ в ОБФП $X \equiv X(S;\mu)$:

$$K \mapsto X.$$

Определение 1.3.1. *Вложение* $K \mapsto X$ *означает, что* $K \subset X$ *и существует постоянная* $c_K \in R_+$, *такая что*

$$\|h\|_X \leqslant c_K \rho_K(h), \quad h \in K.$$

Определение 1.3.2. ОБФП $X_0 = X_0(S;\mu)$ *называется оптимальным (минимальным) для вложения* $K \mapsto X$, *если*

1) $K \mapsto X_0$;

2) *если для некоторого ОБФП* $X = X(S;\mu)$ *справедливо вложение* $K \mapsto X$, *то* $X_0 \subset X$.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $K \in \Im(S;\mu)$, *причем выполнены условия: для любого подмножества* $B \subset S$ с $\mu(B) < \infty$, *существуют функции* $f_B \in M^+(S;\mu), h_B \in K$, *такие что*

$$f_B, h_B > 0 \quad \mu - \text{п.в. на} \quad B; K \mapsto L_1(B, f_B), \text{т.е.}$$

$$\exists c_B \in R_+ : \int_B h f_B d\mu \leq c_B \rho_K(h), \forall h \in K.$$

Тогда, пространство

$$K' \equiv K'(S;\mu) = \{g \in M(S;\mu) : \quad \|g\|_{K'} < \infty\},$$

с нормой

$$\|g\|_{K'} = \sup\left\{\int_S |g| h d\mu : \quad h \in K, \quad \rho_K(h) \leqslant 1\right\}$$

есть ОБФП, а ассоциированное с ним ОБФП $X_0 = X_0(S;\mu) = [K'(S;\mu)]'$ *является оптимальным для вложения* $K \mapsto X$.

В разделе 1.4. рассмотрена конкретизация теоремы 1.3.1, когда конус K описывается действием интегрального оператора с неотрицательным ядром на функции из некоторого конуса E_0 неотрицательных функций.
Пусть заданы два пространства с мерами $(S;\mu)$, $(D;\nu)$. Меры мы считаем неотрицательными и σ — конечными. Пусть $E = E(D;\nu)$ — ОБФП, $E_0 = E_0(D;\nu)$— некоторый конус неотрицательных функций из $E = E(D;\nu)$.

Далее, пусть ядро $\Omega(t,\tau)$ неотрицательно и измеримо на пространстве $(S;\mu) \times (D;\nu)$. Рассмотрим интегральные операторы

$$\Re(\lambda;t) = \int_D \Omega(t,\tau)\lambda(\tau)\,d\nu(\tau), \quad t \in S, \quad \lambda \in E_0(D;\nu)$$

$$\Re'(g;\tau) = \int_S \Omega(t,\tau) g(t)\,d\mu(t), \quad \tau \in D, \quad g \in M^+(S;\mu).$$

Введем конус функций, имеющих интегральное представление:

$$K = \{h(t) = \Re(\lambda;t) : \quad t \in S, \quad \lambda \in E_0(D;\nu)\},$$

снабженный функционалом

$$\rho_K(h) = \inf\left\{\|\lambda\|_E : \quad \lambda \in E_0; \quad \Re(\lambda) = h\right\}.$$

Над этим конусом определим ОФН как в теореме 1.3.1:

$$\rho(g) = \sup\left\{\int\limits_S ghd\mu : \quad h \in K, \quad \rho_K(h) \leqslant 1\right\}, \quad g \in M^+(S;\mu),$$

Введем также другой вариант нормы

$$\rho_0(g) = \sup\left\{\int\limits_D \Re'(g)\,\lambda d\nu : \quad \lambda \in E_0, \quad \|\lambda\|_E \leq 1\right\}, \quad g \in M^+(S;\mu).$$

В приведенных обозначениях имеем следующий результат.

Теорема 1.4.1. *Пусть $E_0 = E_0(D;\nu)$ — некоторый конус неотрицательных функций из ОБФП $E = E(D;\nu)$; пусть ядро $\Omega(t,\tau)$, описанное выше, таково, что для любого множества $B \subset S, \mu(B) < \infty$ существуют функции $f_B \in M^+(S;\mu), \lambda_B \in E_0(D;\nu)$, такие что*

$$1) \quad f_B > 0 \quad \mu - \text{п.в на} \quad B; c_B := \left\|\int\limits_B \Omega(t,\cdot)\, f_B(t) d\mu(t)\right\|_{E'} < \infty;$$

$$2) \qquad \Re(\lambda_B;t) > 0, \text{ для } \mu \text{ — почти всех } t \in B.$$

Тогда, ρ_0 есть ОФН, совпадающая с ρ, а порожденное ею ОБФП

$$K_0' = K_0'(S;\mu) = \{g \in M(S;\mu) : \quad \rho_0(|g|) < \infty\}$$

совпадает с ассоциированным ОБФП к оптимальному ОБФП $X_0 = X_0(S;\mu)$ для вложения $K_0 \mapsto X$.

Результаты первой главы опубликованы в [1], [6]-[10].

Вторая глава диссертационной работы посвящена изучению ассоциированных норм и оптимальных вложений для одного класса двухвесовых интегральных квазинорм. Приведена конкретизация этой теоремы в случае конуса монотонных функций из весового пространства Лебега. Здесь мы используем основные понятия и факты теории БФП и ОБФП, изложенные в Главе 1. В разделе 2.1 сформулированы основные результаты. Выделены два варианта двухвесовых интегральных квазинорм. Для первого из них описания ассоциированных обобщенных функциональных норм (кратко: ОФН) приведены в Теоремах 2.1.1 и 2.1.2 (в зависимости от условий на весовые функции).

Пусть $0 < p \leq \infty, \quad \frac{1}{p'} = (1-\frac{1}{p})_+ = \begin{cases} 1-\frac{1}{p}, & 1 < p \leq \infty, \\ 0, & 0 < p \leq 1. \end{cases}$

$1 \leq q \leq \infty, \quad \frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q}$, $0 \leq t_0 < T_0 \leq \infty$; $\varphi, \quad \psi$-непрерывные функции на (t_0, T_0); $\varphi > 0, \quad \psi \geq 0$. При $t \in (t_0, T_0)$ обозначим

$$\Psi_p(t) = (\int_{t_0}^{t} \psi^p d\tau)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty;$$

$$\Psi_\infty(t) = \sup_{\tau \in (t_0, t]} \psi(\tau), \quad p = \infty;$$

$$\Psi_p(t_0) = \lim_{t \to t_0 + 0} \Psi_p(t); \quad \Psi_p(T_0) = \lim_{t \to T_0 - 0} \Psi_p(t);$$

и для $f, g \in M^+(t_0, T_0)$ введем

$$\rho_{pq}(f) = \left\{ \int_{t_0}^{T_0} \|f\varphi\|^p_{L_q(\tau, T_0)} \psi^p(\tau) d\tau \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty;$$

$$\rho_{\infty q}(f) = \left\| \|f\varphi\|_{L_q(\cdot, T_0)} \psi(\cdot) \right\|_{L_\infty(t_0, T_0)}, \quad p = \infty;$$

$$\dot{\rho}'_{pq}(g) = \left\{ \int_{t_0}^{T_0} \left[\left\| \frac{g}{\varphi} \right\|_{L_{q'}(t_0, t)} \Psi_p(t)^{-1} \right]^{p'} \frac{d\Psi_p(t)}{\Psi_p(t)} \right\}^{\frac{1}{p'}}, \quad 1 < p \le \infty;$$

$$\dot{\rho}'_{pq}(g) = \left\| \left\| \frac{g}{\varphi} \right\|_{L_{q'}(t_0, \cdot)} \Psi_p(\cdot)^{-1} \right\|_{L_\infty(t_0, T_0)}, \quad 0 < p \le 1.$$

Теорема 2.1.1.

В приведенных обозначениях пусть $0 < \Psi_p(t) < \infty, \quad t \in (t_0, T_0); \quad \Psi_p(T_0) = \infty$. *Тогда,* ρ_{pq} *есть идеальная квазинорма (ИКН в терминологии Гл. 1) при* $0 < p < 1$, *или обобщенная функциональная норма (ОФН) при* $1 \le p \le \infty$, *а для ассоциированной ОФН*

$$\rho'_{pq}(g) := \sup \left\{ \int_{t_0}^{T_0} gf dt : f \in M^+(t_0, T_0), \quad \rho_{pq}(f) \le 1 \right\}$$

справедлива двусторонняя оценка

$$\rho'_{pq}(g) \cong \dot{\rho}'_{pq}(g).$$

Постоянные в последней двусторонней оценке положительные, конечные, зависят только от p.

В Теореме 2.1.2 получены описания ассоциированных ОФН при условии на вес: $\Psi_p(T_0) < \infty$. Для второго варианта задания двухвесовых интегральных квазинорм соответствующие описания даны в Теоремах 2.1.3 и 2.1.4. Наконец, Теоремы 2.1.5 и 2.1.6 дают решения задач об оптимальных ОБФП, содержащих заданные квазинормированные пространства, описываемые с помощью интегральных двухвесовых квазинорм.

Пусть $0 < p < 1, \quad 1 \le q < \infty; \quad 0 \le t_0 < T_0 \le \infty, \varphi, \psi > 0$ - непрерывные функции на (t_0, T_0). Через $K_{pq} = K_{pq}(t_0, T_0)$ обозначим векторное квазинормированное пространство:

$$K_{pq} = \{ f \in M(t_0, T_0) : \quad \rho_{pq}(|f|) < \infty \},$$

где ρ_{pq} - ИКН, определенная выше.
Задача: найти оптимальное (наименьшее) ОБФП $\check{K}_{pq} = \check{K}_{pq}(t_0, T_0)$, такое что $K_{pq} \subset \check{K}_{pq}$.

Теорема 2.1.5.
В приведенных обозначениях ОБФП $\check{K}_{pq}$ имеет ОФН:

$$\check{\rho}_{pq}(f) = \int_{t_0}^{T_0} \|f\varphi\|_{L_q(\tau,T_0)} \check{\psi}_p(\tau) d\tau,$$

$$\text{где} \quad \check{\psi}_p(\tau) = \frac{1}{p}\left(\int_{t_0}^{\tau} \psi^p(\xi) d\xi\right)^{\frac{1}{p}-1} \psi^p(\tau), \quad \tau \in (t_0, T_0).$$

Результаты Теоремы 2.1.5 получаются двукратным применением Теоремы 2.1.1 (сначала для описания ρ'_{pq}, а затем для описания ρ''_{pq}) так же, как и Теорема 2.1.6 - двукратным применением Теоремы 2.1.3.

Раздел 2.2 содержит доказательства основных результатов. Для их получения мы развиваем методы дискретизации интегральных весовых квазинорм и строим их эквивалентные дискретные аналоги в терминах весовых последовательностей (леммы 2.2.1, 2.2.1′, 2.2.1″). Описание ассоциированных дискретных весовых норм получено в леммах 2.2.2, 2.2.2′, 2.2.2″. Наконец, переход от дискретных аналогов ассоциированных норм к интегральным нормам с помощью процедуры ”антидискретизации” проведен в леммах 2.2.3, 2.2.3′, 2.2.3″. Синтез описанных результатов дает доказательство Теорем 2.1.1 и 2.1.2. Теоремы 2.1.3 и 2.1.4 доказываются сведением к Теоремам 2.1.1 и 2.1.2. (соответственно) с помощью замен переменных.

В Разделе 2.3 рассмотрена задача построения оптимальной банаховой оболочки для конуса неотрицательных убывающих функций из весового пространства $L_{p,u}(0,T)$, $0 < p < \infty$. Основной результат представлен в Теореме 2.3.1.
Пусть $T \in R_+$, u-положительная, измеримая функция:

$$K_0 = \{h \in L_{p,u}(0,T) : \ 0 \le h \downarrow, \ t \in (0,T)\}, \tag{1}$$

снабженный естественным функционалом

$$\rho_{K_0}(h) = \|h\|_{L_{p,u}}(0,T) = \left(\int\limits_0^T h^p u \, dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Теорема 2.3.1
Пусть дан конус K_0 (1), снабженный функционалом ρ_{K_0} (2). Обозначим $U(t) = \int_0^t u d\tau, 0 < U(t) < \infty, t \in (0,T)$. Тогда оптимальное ОБФП X_0, содержащее конус K_0 (1), имеет норму

$$\|f\|_{X_0(0,T)} = \left(\int_0^T \|f\|^p_{L_\infty(t,T)} u(t) dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty;$$

$$\|f\|_{X_0(0,T)} = \int_0^T \|f\|_{L_\infty(t,T)} \tilde{u}(t) dt, \quad 0 < p < 1,$$

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{p} U(t)^{\frac{1}{p}-1} u(t).$$

В случае $U(T) = \infty$ X_0 является ОБФП, но не БФП. В случае $U(T-0) < \infty$ X_0 является БФП при выполнении условия: $u^{-\frac{p'}{p}} \in L_1^{loc}(0,T)$.

Результаты второй главы опубликованы в [2], [3].

В **третьей главе** диссертационной работы установлены результаты для построения оптимальной квазибанаховой оболочки для заданного конуса неотрицательных измеримых функций методом нестягивающих операторов. Установлены общие результаты, описывающие конструкцию минимальных идеальных пространств, и разобраны некоторые конкретные реализации подобных конструкций. Следует отметить, что в зависимости от конкретных конусов и классов ИП, в которых строится оптимальная оболочка, конструкции нестягивающих операторов могут быть весьма разнообразны. В Разделе 3.1 приведены основные определения и формулировки результатов. Раздел содержит две основные теоремы, описывающие конструкцию минимального ИП, которое содержит заданный конус неотрицательных функций, изначально принадлежащих некоторому идеальному квазинормированному пространству. В Теореме 3.1.1 решена общая задача о построении минимального ИП, содержащего данный конус, в котором квазинорма согласована с нестягивающим оператором.

Теорема 3.1.1.
1. Пусть $Y = Y(S,\mu)$ есть ИП, порожденное ИКН ρ; $A_0 : M(S,\mu) \to M^+(S,\mu)$- оператор со следующими свойствами:

$$\begin{gathered} A_0(|f|) = A_0 f; \quad A_0(\alpha f) = \alpha A_0 f \quad f \in M, \alpha \geq 0; \\ \exists c_0 \in R_+ : \rho(f) \leq c_0 \rho(A_0 f), f \in M; \\ \exists c_1 \in [1,\infty] : \quad \rho(A_0(f+g)) \leq c_1[\rho(A_0 f) + \rho(A_0 g)]; \\ |f| \leq |g| \quad \mu\text{-п.в.} \Rightarrow \rho(A_0 f) \leq \rho(A_0 g), f, g \in M; \\ 0 \leq f_n \uparrow f \quad \mu\text{-п.в.} \Rightarrow A_0 f_n \uparrow A_0 f \quad \mu\text{-п.в.} \end{gathered} \tag{3}$$

Тогда, отображение

$$\rho_0(f) := \rho(A_0 f), f \in M_+,$$

есть ИКН, а порожденное этой квазинормой пространство

$$X_0 = X_0(S,\mu) = \left\{ f \in M : \|f\|_{X_0} = \rho_0(|f|) < \infty \right\} \subset Y$$

есть ИП, причем

$$\|f\|_{X_0} \leq c_0 \|A_0 f\|_{X_0}, f \in M.$$

2. Пусть, дополнительно, K_0- некоторый конус из $Y_+ = \{g \in Y : g \geq 0\}$, снабженный функционалом $\rho_{K_0} := \rho$, и выполнены условия согласования конуса K_0 с оператором A_0:

$$\exists c_2 \in R_+ : \rho(A_0 h) \leq c_2 \rho(h), h \in K_0;$$

$$A_0(X_0) \subset K_0.$$

Тогда $X_0 = X_0(S, \mu)$ *есть минимальное ИП для вложения* $K_0 \longmapsto X$ *среди всех ИП* X, *в которых квазинормы связаны с* A_0 *соотношением:*

$$\exists c_X \in R_+ : \|f\|_X \le c_X \|A_0 f\|_X, f \in M, \tag{4}$$

аналогичным (3).

Отметим, что если в Теореме 3.1.1 заменить условие (3) нестягивания для оператора A_0 на более жесткое требование накрывания

$$\exists c_0 \in R_+ : \quad |f| \le c_0 A_0 f \quad \mu - \text{п.в.}, \quad \forall f \in M,$$

то свойство (4) будет выполнено для всех ИП X с постоянной $c_X = c_0$. Тогда, в условиях части 2 Теоремы 3.1.1 X_0 будет оптимальным ИП для вложения $K_0 \longmapsto X$ среди всех ИП.

Раздел 3.2 содержит конкретизации этих общих конструкций. В Секции 3.2.1 проведено построение оптимального ИП для конуса неотрицательных убывающих функций. Получена Теорема 3.2.1, описывающая оптимальную квазинорму в этом случае. Соответствующий нестягивающий оператор строится с помощью убывающей оболочки для существенно ограниченных измеримых функций. Секция 3.2.2 посвящена построению оптимального ИП для конуса положительных двояко монотонных функций. В нем построен нестягивающий оператор, согласованный с этим конусом, и доказана Теорема 3.2.2, описывающая максимальную квазинорму. В Секции 3.2.3 строится оптимальная оболочка для конуса обобщенно двояко монотонных функций, в котором обычное условие монотонности заменено условием монотонности интегральных средних. Оболочки заданных конусов могут строиться на базе тех или иных классов нормированных (в общем случае, квазинормированных) идеальных пространств.

Приведем конкретный вариант такого построения. Пусть $T_0 \in (0, \infty]$, $\quad Y = Y(0, T_0)$ есть ИП, порожденное ИКН ρ; K_1 - конус двоякомонотонных функций из Y, т.е.

$$K_1 = \left\{ h \in Y : 0 \le h(t), \frac{h(t)}{\varphi(t)} \downarrow, \frac{h(t)}{\psi(t)} \uparrow \right\}; \rho_{K_1}(h) := \rho(h), \forall h \in K_1. \tag{5}$$

Здесь $\varphi, \psi \in C(0, 2T_0)$- заданные функции,

$$\lambda(t) := \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \uparrow; \quad \lambda \in (\Delta_2). \tag{6}$$

Здесь $\lambda \in (\Delta_2) \Leftrightarrow \sup_{t \in (0, T_0)} \left[\frac{\lambda(2t)}{\lambda(t)} \right] < \infty$. Отметим, что

$$h \in K_1, \quad h \ne 0 \Rightarrow h(t) > 0, \forall t \in (0, T_0).$$

Далее фиксируем $t_0 \in (0, T_0)$ и рассмотрим функцию

$$h_0(t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t_0)}, \quad t \in (0, t_0]; \quad h_0(t) = \frac{\psi(t)}{\psi(t_0)}, \quad t \in (t_0, T_0).$$

Имеем $0 < \frac{h_0(t)}{\varphi(t)} \downarrow, \quad 0 < \frac{h_0(t)}{\psi(t)} \uparrow$. Потребуем еще, чтобы выполнялось условие

$$\rho(h_0) < \infty. \tag{7}$$

Тогда $h_0 \in K_1$. При нарушении условия (7) $K_1 = \{0\}$.
Рассмотрим оператор $A_0 : \quad M(0,T_0) \to M^+(0,T_0)$ (норма по τ):

$$(A_0 f)(t) = \varphi(t) \left\| \frac{f(\tau)}{\lambda(t+\tau)\psi(\tau)} \right\|_{L_\infty(0,T_0)}. \tag{8}$$

Теорема 3.2.2.

Пусть $Y = Y(0,T_0)$ есть ИП, порожденное ИКН ρ; пусть выполнены условия (6), (7), а также : при любом $\tau \in (0,T_0)$

$$\frac{\lambda(t)}{\lambda(t+\tau)} \uparrow \quad \textit{на} \quad (0,T_0) \quad (\textit{по} \quad t).$$

Пусть K_1 есть конус двоякомонотонных функций (5). *Введем функционал*

$$\rho_0(f) = \rho(A_0 f), \textit{где} \quad A_0 - \textit{оператор (8)}.$$

Тогда, ρ_0 есть ИКН, а порожденное ею пространство

$$X_0 = X_0(0,T_0) = \left\{ f \in Y : \|f\|_{X_0} = \rho(A_0 f) < \infty \right\}$$

есть ИП, причем $X_0 \subset Y$; более того X_0- минимальное среди всех ИП $X = X(0,T_0)$ для вложения $K_1 \longmapsto X$.

Замечание 3.2.3. В частности, при $\varphi(t) = 1, \quad \psi(t) = t^{-1}$, мы получим конус K_1 квазивогнутых функций.

$$K_1 = \{h \in Y : 0 \le h(t) \downarrow, th(t) \uparrow\}, \quad \rho_{K_1}(h) = \rho(h), \quad h \in K_1,$$

и в формуле (8)

$$(A_0 f)(t) = \left\| \frac{\tau f(\tau)}{t+\tau} \right\|_{L_\infty(0,T_0)}.$$

Замечание 3.2.4. При $\varphi(t) = 1, \quad \psi(t) = t^{\beta-1}, \quad 0 < \beta < 1$, получим конус

$$K_1 = \left\{ h \in Y : 0 \le h(t) \downarrow, t^{1-\beta} h(t) \uparrow \right\}, \quad \rho_{K_1}(h) = \rho(h), \quad h \in K_1,$$

и в формуле (8)

$$(A_0 f)(t) = \left\| \frac{\tau^{1-\beta} f(\tau)}{(t+\tau)^{1-\beta}} \right\|_{L_\infty(0,T_0)}.$$

Часть результатов главы 3 посвящена изучению вопросов об оптимальных оболочках для конусов на классе ИП, являющихся векторными решетками, при различных вариантах отношений порядка. В силу аксиомы $(P2)$, любая ИКН согласована со следующим отношением порядка для измеримых функций:

$$f \prec g \Leftrightarrow |f| \le |g| \Rightarrow \rho(f) \le \rho(g).$$

Во многих случаях ИКН оказываются согласованными с менее жесткими отношениями порядка, например, такими как неравенства для убывающих перестановок или для максимальных функций Харди-Литтлвуда

$$f \prec g \Leftrightarrow f^* \leq g^*; \quad f \prec g \Leftrightarrow f^{**} \leq g^{**}; \quad f \prec g \Leftrightarrow Mf \leq Mg.$$

Общая теория таких пространств, в которых (квази)норма согласована с введенным отношением порядка (нормированных решеток) создавалась в исследованиях ряда известных специалистов в нашей стране, связанных со школами Л. В. Канторовича, М. Г. Крейна, С. Г. Крейна, М. А. Красносельского, таких как Г. П. Акилов, А. В. Бухвалов, Б. З. Вулих, П. П. Забрейко, Г. Я. Лозановский , В. И. Овчинников, А. Г. Пинскер, Е. М. Семенов, А. И. Юдин и др., а также за рубежом, в работах авторов, таких как Амемия, Бирхгоф, Бохнер, Дьедоне, Заанен, Иосида, Люксембург, Л. Малигранда и др. Развитие теории операторов в нормированных решетках до середины 80-х годов представлено в монографии Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова. Современные достижения и состояние этой теории отражены в работах А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе, М. Ф. Сухинина.

В теореме 3.1.2 приведена модификация общей теоремы 3.1.1 в случае, когда исходная квазинорма согласована с некоторым отношением порядка. Она дает конструкцию оптимальной оболочки в классе всех ИП, у которых их квазинормы согласованы с этим отношением порядка. Рассмотрены различные отношения порядка и различные конусы функций со свойствами монотонности. Приведем конкретную реализацию этой теоремы.

Пусть $T_0 \in (0, \infty]$, $\quad Y = Y(0, T_0)$ есть ИП, порожденное ИКН ρ, причем считаем, что ρ согласована со следующим отношением порядка:
для $f, g \in M^+(0, T_0)$

$$f \prec g \Leftrightarrow \int\limits_0^t f d\tau \leq \int\limits_0^t g d\tau, \quad t \in (0, T_0). \tag{9}$$

Зафиксируем $\beta \in (0, 1)$ и рассмотрим конус

$$K_0 = \left\{ h \in Y : h \geq 0; \quad t^{-1} \int\limits_0^t h d\tau \downarrow, \quad t^{-\beta} \int\limits_0^t h d\tau \uparrow \right\}, \tag{10}$$

снабженный функционалом ρ :

$$\rho_{K_0}(h) = \rho(h), h \in K_0. \tag{11}$$

Наша цель - найти оптимальное ИП X_0, порожденное ИКН, которая согласована с отношением порядка (9), для конуса K_0.
Рассмотрим оператор $A_0 : M(0, T_0) \to M^+(0, T_0)$

$$(A_0 f)(t) = \left\| \tau^{-\beta} (t + \tau)^{\beta - 1} \int\limits_0^\tau |f| d\xi \right\|_{L_\infty(0, T_0)}, \quad t \in (0, T_0) \tag{12}$$

(норма в $L_\infty(0,T_0)$ берется по τ). Функция под знаком нормы является непрерывной по переменной $\tau \in (0,T_0)$, если $f \in L_1^{loc}(0,T_0)$ (иначе, норма бесконечна), так что

$$(A_0 f)(t) = \sup_{\tau\in(0,T_0)} \left[\tau^{-\beta}(t+\tau)^{\beta-1}\int\limits_0^\tau |f|d\xi\right], \quad t \in (0,T_0).$$

В этом случае выполняются все условия Теоремы 3.1.2 и основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 3.2.3.
Пусть $Y = Y(0,T_0)$ есть ИП, порожденное ИКН ρ, которая согласована с отношением порядка (9). Пусть K_0 есть конус (10). Для $f \in M^+(0,T_0)$ введем функционал $\rho_0(f) = \rho(A_0 f)$, где $A_0 f$-оператор (12).
Тогда, ρ_0 есть ИКН, согласованная с отношением порядка (9), а порожденное ею пространство

$$X_0 = X_0(0,T_0) = \{f \in M(0,T_0): \quad \rho_0(|f|) < \infty\}$$

есть ИП, *причем $X_0 \subset Y$ и X_0 является оптимальным ИП с нормой, согласованной с отношением порядка (9), для вложения $K_0 \longmapsto X$ среди всех ИП X с ИКН, которая согласована с отношением порядка (9).*

Результаты третьей главы опубликованы в [4],[5],[11]-[15].

В **заключении** диссертационной работы приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Для конуса K функций со свойствами монотонности построено ассоциированное к нему обобщенное банахово функциональное пространство (ОБФП) K' и доказано, что ассоциированное к нему ОБФП $X_0 = K''$ является оптимальным ОБФП для вложения $K \mapsto X$.

2. Рассмотрены различные конкретизации общей схемы построения оптимального ОБФП для разных конусов со свойствами монотонности и получены явные описания оптимальных ОБФП. В рассмотрение включены конусы убывающих неотрицательных функций в весовых пространствах Лебега и пространствах, заданных с помощью двухвесовых интегральных квазинорм.

3. Развит метод построения квазинормированных идеальных оболочек для конусов неотрицательных измеримых функций со свойствами монотонности с помощью нестягивающих операторов.

4. Рассмотрены различные конкретизации общего метода нестягивающих операторов и построены в ряде случаев явные конструкции таких операторов и определяемых с их помощью оптимальных квазинорм. В рассмотрение включены различные конусы убывающих, обобщенно убывающих и двояко монотонных функций.

5. Метод построения идеальных оболочек для конусов реализован также в классах идеальных пространств с введенными в них отношениями порядка. Получены явные конструкции нестягивающих операторов и идеальных оболочек для различных вариантов конусов и отношений порядка.

Автор выражает признательность научному руководителю д. ф.–м. н., проф. М. Л. Гольдману за постановку задач, руководство в подготовке и постоянное внимание к работе.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Бахтигареева Э. Г., Гольдман М. Л., Забрейко П. П.* Оптимальное восстановление обобщенного банахова функционального пространства по конусу неотрицательных функций // Вестник ТГУ. 2014. Т. 19, №2. С. 316-330.

[2] *Bakhtigareeva E.* Optimal Banach function space for a cone of decreasing functions in a weighted Lp - space // Eurasian mathematical journal, Vol.6, Num. 1 (2015), 6 - 25.

[3] *Bakhtigareeva E.G., Goldman M. L.* Associate Norms and Optimal Embeddings for a Class of Two-Weight Integral Quasi-Norms// Journal of Mathematical Sciences. 2016, Volume 218, Issue 5, pp 549-571).

[4] *Гольдман М.Л., Бахтигареева Э.Г.* Построение оптимальной оболочки для конуса неотрицательных функций со свойствами монотонности // Труды Математического института им. В.А. Стеклова, т. 293, 2016, с. 43 - 61 (англ. версия: *E.G. Bakhtigareeva, M. L. Goldman.* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2016, Vol. 293, pp. 37-55. Pleiades Publishing Ltd., 2016).

[5] *Бахтигареева Э.Г.* Построение оптимальных идеальных пространств для конусов неотрицательных функций // Математические заметки, т. 99, вып. 6, 2016, 820 - 831 (англ. версия: *E.G. Bakhtigareeva.* Construction of Optimal Ideal Spaces for Cones of Nonnegative Functions // Mathematical Notes, 2016, Vol. 99, No. 6, pp. 810-820).

[6] *Бахтигареева Э. Г., Гольдман М. Л.* Ассоциированная норма для ОБФП // Тезисы докладов международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-IV", г. Ростов-на-Дону, 2014 г., стр. 12.

[7] *Бахтигареева Э. Г.* Оптимальное ОБФП для конуса убывающих функций // Тезисы докладов международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-IV", г. Ростов-на-Дону, 2014 г., стр. 11.

[8] *Бахтигареева Э. Г., Гольдман М. Л.* Optimal GBFS containing a given quasi-Banach space // Тезисы докладов международной конференции " XXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам", г. Судак, 2014 г., стр. 12-13.

[9] *Бахтигареева Э. Г.* Optimal GBFS for the cone constructed on characteristic functions of finite measure sets // Тезисы докладов международной конференции "

XXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам", г. Судак, 2014 г., стр. 11-12.

[10] *Бахтигареева Э. Г.* Оптимальное ОБФП, содержащее заданный конус двоякомонотонных функций // Тезисы докладов международной конференции "Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы", г. Москва, 2014г., стр.116.

[11] *Бахтигареева Э. Г.* Минимальное перестановочно-инвариантное пространство, содержащее конус двояко-монотонных функций // Тезисы докладов международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-V", г. Ростов-на-Дону, 2015 г., стр. 19 - 20.

[12] *Бахтигареева Э. Г., Гольдман М. Л.* Оптимальное идеальное пространство, содержащее заданный конус , согласованный с отношением порядка // Тезисы докладов международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-V", г. Ростов-на-Дону, 2015 г., стр. 20 - 21.

[13] *Бахтигареева Э. Г.* Минимальное идеальное пространство для конуса обобщенно двояко монотонных функций // Тезисы докладов международной конференции "Функциональные пространства и теория приближения функций", МИАН, г. Москва, 2015 г. стр. 89.

[14] *Бахтигареева Э. Г., Гольдман М. Л.* Минимальное идеальное пространство, содержащее конус неотрицательных измеримых функций // Тезисы докладов международной конференции "Функциональные пространства и теория приближения функций", МИАН, г. Москва, 2015 г. стр. 90.

[15] *Бахтигареева Э. Г.* An optimal ideal space for a cone of generalized doubly monotonic functions. Тезисы докладов международной конференции "Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VI ", Rostov-on-Don, 2016, pp. 17-18.

Бахтигареева Э. Г.
Оптимальные вложения конусов функций со свойствами монотонности и их приложения

Аннотация

Работа посвящена построению оптимальных оболочек для заданного конуса неотрицательных измеримых функций со свойствами монотонности. Построение оптимальных оболочек для заданного конуса неотрицательных измеримых функций, оценки положительных операторов на них имеют важные приложения в различных областях анализа, таких как, например, теория функциональных пространств, теория приближения, теория вложений, теория интерполяции.

Рассмотрены два общих подхода для построения оптимальных оболочек конусов функций. Один из них базируется на методе ассоциированной двойственности. При его применении строится ассоциированное пространство ограниченных интегральных функционалов для заданного конуса. Доказывается, что оно представляет собой банахово идеальное пространство. С помощью принципа двойственности устанавливается, что ассоциированное к нему банахово идеальное пространство является минимальным, в которое вложен данный конус. Этот метод позволил решить ряд важных конкретных задач такого типа. В том числе рассмотрены пространства измеримых функций, заданных с помощью двухвесовых интегральных (квази)норм. Для них установлены точные описания ассоциированных норм и в случае исходных квазинорм решена задача об описании оптимальных (то есть минимальных) обобщенных банаховых функциональных пространств, в которые вложены исходные пространства. В то же время, его использование связано с наличием определенных трудностей и ограничений. По мере усложнения рассматриваемых задач существенно усложняются конструкции ассоциированных норм, которые в данном подходе необходимо строить на обоих этапах. Для описания ассоциированных норм мы используем методы дискретизации и антидискретизации. На этом пути есть и принципиальное ограничение. Ассоциированное пространство для конуса является банаховым. Соответственно, таким же является и ассоциированное к нему оптимальное идеальное пространство, содержащее данный конус. Тем самым, метод позволяет строить банаховы оболочки. В то же время, в ряде случаев эти оболочки могут быть еще сужены за счет использования квазинорм, не являющихся нормами. Таким образом, актуальной является задача о построении оптимальных квазибанаховых оболочек. Для этого развивается другой общий метод построения оптимальных оболочек с помощью включения в квазинорму специально подобранных нестягивающих операторов.Конструкции операторовс такими свойствами зависят от конкретных вариантов квазинорм и условий монотонности.Этот метод позволил построить идеальные квазинормированные оболочки для конусов с различными вариантами условий монотонности и при различных отношениях порядка, с которыми согласованы квазинормы идеальных пространств.

Bakhtigareeva E. G.

Optimal embeddings for cones of functions with monotonicity properties

Abstract

The work is devoted to construction of optimal embeddings for a given cone of non-negative measurable functions with monotonicity properties. Construction of optimal embeddings for a given cone of non-negative measurable functions, estimates of positive operators on them have important applications in various areas of analysis, such as, for example, theory of function spaces, approximation theory, theory of embeddings, interpolation theory.

Two general approaches to construction of optimal embeddings for cones of functions are considered. One of them is based on a method of the associated duality. At its application the associated space of bounded integral functionals for a given cone is constructed. It is proved that it is a Banach ideal space. By means of the duality principle it is established that the ideal space, associated to it, is a minimal Banach ideal space which this cone is embedded in. This method has allowed solving a number of important specific objectives of this kind. Namely, spaces of measurable functions, defined by means of two-weighted integral (quasi) norms, are considered. Exact descriptions of the associated norms are established for them, and in case of initial quasi-norms the task about description of optimal (that is minimal) generalized Banach function spaces in which initial spaces are embedded is solved. At the same time, its use is connected with existence of certain difficulties and restrictions. The more complicated the considered tasks are, the more complicated structures of the associated norms, which in this approach is needed to be built at both stages, become. For the description of the associated norms we use methods of discretization and anti-discretization. On this way there is also a principle restriction. The associated space for a cone is a Banach space. Respectively, the optimal ideal space, associated to it and containing this cone, is also a Banach space. Thereby, the method allows to build Banach envelopes. At the same time, in some cases these envelopes can be still narrowed due to use of the quasi-norms which aren't norms. Thus, the task about construction of optimal quasi-Banach envelopes is urgent. For this purpose another general method of construction of optimal envelopes by means of including into quasi-norm specially picked up non-compressing operators is developed.The constructions ofoperators with such properties depend essentially on concrete variants of quasi-norms and on different monotonicity conditions. This methodallows to construct ideal quasi-Banach envelopes for the cones with different variants of monotonicity conditions and by different order relations coordinated with the ideal quasi-norms.