На правах рукописи

УДК 517.98, 517.972

....

Акбари Фаллахи Арезу

ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРЕЖЕНИЕМ

01.01.02. – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена на кафедре прикладной математики факультета физико-математических и естественных наук ФГАОУ ВО "Российский университет дружбы народов".

Научный руководитель:	Доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики ФГАОУ ВПО "Московский физико-технический институт (государственный университет)" Сакбаев Всеволод Жанович.
Официальные оппоненты:	
	Костин Андрей Борисович доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”.
	Муравник Андрей Борисович доктор физико-математических наук, зам. начальника научно-технического управления АО "Концерн"Созвездие.
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский университет «МЭИ», 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14.

Защита состоится «20» июня 2017 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.203.27 при ФГАОУ ВО "Российский университет дружбы народов" по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. № 495^a.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6 и на сайте "Диссертационные советы РУДН"в сети интернет (http://dissovet.rudn.ru).

Автореферат разослан «_______» Мая 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета:

доктор физико-математических наук, ... Савин А.Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования.

Дифференциально-разностные и функционально-дифференциальные уравнения возникают в ряде задач математической физики и в задачах теории управления [1, 2, 3]. Весьма актуальным является вопрос о выборе функционального пространства для решения и вопрос о выборе совокупности условий на поведение решения на границе области определения, при которых решение ДРУ существует, единственно и непрерывно зависит от параметров задачи и параметров начально-краевых условий [4 ,5].

В первых систематических исследованиях линейных ДРУ с отклонящимся аргументом была предложена классификация ДРУ на заваздывающие, нейтральные и опрежающие. Важным вопросом, затрагиваемым в работах [6,7, 8,9], является изучение зависимости условий, накладываемых на искомую функцию, удовлетворяющую ДРУ, и позволяющих выделить среди таких функций единственную, от типа ДРУ и параметров задачи. Задачей с начальными условиями для ДРУ на полуоси называется задача определения такой функции на промежутке, содержащем рассматриваемую полуось, которая удовлетворяет ДРУ почти всюду на рассматриваемой полуоси и, помимо того, удовлетворяет некоторым дополнительным условиям – таким, как:

1) функция (и, быть может, некоторые ее производные) имеет заданное предельное значение в конечной граничной точке полуоси,

2) функция принимает заданные значения на промежутке, содержащем конечную граничную точку полуоси и зависящем от параметров отклонения аргументов,

3) асимптотическое поведение функции при приближении к бесконечности по полуоси имеет ограничение на рост типа принадлежности весовому пространству Соболева с экспоненциальным весом.

Эти условия, накладываемые на поведение неизвестной функции в окрестности конечной граничной точки полуоси, будем называть начальными. Условием на решение ДРУ, затрагивающим его поведение на правой границе полупрямой, состоит в принадлежности решения весовому пространству Соболева с экспоненциальным весом [10,11]. В зависимости от типа рассматриваемого ДРУ начальные условия для искомой функ-

[1] *А.Д. Мышкис, Л.Э. Эльсгольц.* Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. УМН. 1967. Т. 22. № 2(134). С. 21–57

[2] *Wheeler J.A., Feynman R.P.* Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action. Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. № 3. P. 425-433.

[3] *Г.А. Каменский, А.Л. Субачевский.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: Изд. МАИ. 1992.

[4] *В.В. Власов, К.И. Шматов.* Корректная разрешимость уравнений гиперболического типа с последействием в гильбертовом пространстов.труды математического института им. В.А.Стеклова, 2003. т.243, с. 127-137.

[5] *Г.А. Каменский, А.Л. Субачевский.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: Изд. МАИ. 1992.)

[6] *Д.А. Декерт, Д. Дюр, Н. Фона*, Уравнения с запаздывающим аргументом типа Уилера–Фейнмана, СМФН, 2013, том 47, 46–59.

[7] *Ж.Л. Лионс, Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения: Пер. с фр. М.мир, 1971.

[8] *Л. В. Бородулина, Л. Е. Россовский.* Разрешимость эллиптических функционально-дифференциальных уравнений со сжатием аргументов в весовых пространствах. Тр. сем. им. И. Г. Петровского, 26 (2007), 39–57.

[9] *Йаакбариех. А, Сакбаев В.Ж.* Корректность задачи с начальными условиями для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента. Известия вузов, 2015. № 4, С. 17-25.

[10] *В.В. Власов, В.Ж. Сакбаев.* О корректной разрешимости в шкале пространств Соболева некоторых дифференциально-разностных уравнений. Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 9. С. 1194-1202.

[11] *В.В. Власов, Д.А. Медведев.* Функционально-дифференциальные уравнения и связанные с ними вопросы спектральной теории. Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 30,С. 3-173.

ции могут быть выбраны выбраны различными способами [12, 13, 14] в виде условий 1) или 2).

Поиск условий на рост искомой функции, выделяющие единственое решение среди функций, удовлетворяющих дифференциальному или дифференциально-разностному уравнению, является, начиная с работ А.Н. Тихонова [15], одной из основных проблем современной теории краевых задач.

Поиск корректной постановки задачи для нелинейного ОДУ с условиями на асимптотику роста решения на границе области определения проведен в работах Л.Д. Кудрявцева.[16].

Применительно к линейным ДРУ запаздывающего и нейтрального типов эффективным средством описания таких условий является условие принадлежности решения к весовому пространству Соболева с экспоненциальным весом [17]. Корректная разрешимость начально-краевых задач для эволюционных уравнений с запаздыванием временного аргумента систематически исследована в работах [18, 19, 20].

В работах [21,22] исследованы корректная разрешимость и свойства решений задачи с начальными данными для параболического уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, а в статье [23] исследованы аналогичные вопросы для гиперболических уравнений с отклоняющимся временным аргументом.

В монографии А.Л. Скубачевского [24] исследовано нарушение гладкости решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений за счет влияния сдвигов пространственного аргумента, выводящих за пределы области или на ее границу (См. также обзор [25]). Подобный эффект нарушения гладкости решенияпараболического дифференциально-разностнаго уравнения исследован в работе [26]. В работе [27] изучаются свойства эллиптических дифференциально-разностных операторов со сдвигами пространственных аргументов в ограниченных областях.

[12] *А.М. Зверкин, Г.А. Каменский, С.Б. Норкин, Л.Э. Эльсгольц.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. 1962. Т. 17. УМН. № 2. С. 77-164.

[13] *Г.А. Каменский, А.Л. Субачевский.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: Изд. МАИ. 1992.

[14] *Йаакбариех. А, Сакбаев В.Ж.* Представление формулами Фейнмана полугрупп, порожденных параболическими дифференциально-разностными операторами.ТРУДЫ МФТИ, 2012. Т. 4, № 4, С. 113-119.

[15] *A. Tichonoff.* Theoremes d'unicite pour l'equation de la chaleur. Мат. Сборник. 1935. Т. 42, № 2. С. 199-216.

[16] *Л.Д. Кудрявцев.* О лагранжевой асимптотике решений неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений Матем. сб., 2006, том 197, № 9, С. 91–102.

[17] *В.В. Власов, Д.А. Медведев.* Функционально-дифференциальные уравнения и связанные с ними вопросы спектральной теории. Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 30,С. 3-173

[18] *А.Д. Мышкис.* Смешанные функционально-дифференциальные уравнения. Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 4. С. 5-120.

[19] *А.Л. Скубачевский, Р.В. Шамин.* Смешанная задача для параболического дифференциально-разностноо уравнения. Математические заметки. 1999. Т. 66, № 1. С. 145-153.

[20] *В.В. Власов, Д.А. Медведев.* Функционально-дифференциальные уравнения и связанные с ними вопросы спектральной теории. Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 30,С. 3-173.

[21] *В.В. Власов, В.Ж. Сакбаев.* О корректной разрешимости векторных дифференциально-разностных уравнений в пространствах Соболева. Математические заметки. Т. 68, № 6. С. 939-942.

[22] *В.В. Власов, В.Ж. Сакбаев.* О корректной разрешимости в шкале пространств Соболева некоторых дифференциально-разностных уравнений. Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 9. С. 1194-1202.

[23] *В.В. Власов, К.И. Шматов.* Корректная разрешимость уравнений гиперболического типа с последействием в гильбертовом пространстов.труды математического института им. В.А.Стеклова, 2003. т.243, с. 127-137.

[24] *A.L. Skubachevskii, Elliptic functional differential equations and applications, Birkhauser, 1997.*

[25] Л. Е. Россовский, А. Л. Скубачевский. Разрешимость и регулярность решений некоторых классов эллиптических функционально-дифференциальных уравнений , Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 66 (1999), 114–192

[26] А. М. Селицкий, А. Л. Скубачевский, Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, 26, Изд-во Моск. ун-та, М., 2007, 324–347

[27] Л. В. Бородулина, Л. Е. Россовский. Разрешимость эллиптических функционально-дифференциальных уравнений со сжатием аргументов в весовых пространствах. Тр. сем. им. И. Г. Петровского, 26 (2007), 39–57

Объект исследования

Диссертационная работа посвящена исследованию задач с начальными условиями для дифференциально-разностных уравнений на полупрямой или на полупространстве для комплекснозначных функций и для векторнозначных функций со значениями в гильбертовом пространстве.

Рассматриваются линейные дифференциально-разностные уравнения на полупрямой для функции одной переменной, связывающие значения ее производной первого (или порядка k) в произвольной точке t полупрямой со значениями искомой функции (или ее млаадших производных) в конечной совокупности точек полупрямой, полученных из точки t с помощью операций сдвига на фиксированную вещественную величину отклонение аргумента.

$$\frac{d^k}{dt^k}u(t) = \mathbf{A}u(t) + \mathbf{B}u(t-h) + \mathbf{C}u(t+\tau) = f(t), \qquad t > 0. \tag{1}$$

Здесь τ, h – положительные числа, $u: \ [-h, +\infty) \to E$ – искомое отображение полуоси $[-h, +\infty)$ в некоторое гильбертово пространство E, $f: \ [0, +\infty) \to E$ – заданное отображение, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ – заданные линейные оператоы в пространстве E (возможно, неограниченные).

В зависимости от знака отклонения аргумента подразделяются, согласно предложенной в работах [[28],[29]] на запаздывания (значения отклонений аргумента отрицательны) и опережения (значения отклонений аргумента положительны).

Соответственно, дифференциально разностные уравнения для функции одной переменной на полуоси подразделяются на ДРУ порядка k и на уравнения запаздывающего, опережающего и *опережающе-запаздывающего* типов. ДРУ нейтрального типа называют такие уравнения, которые связывают значения старших производных неизвестной функции в различных точках рассматриваемой полуоси, но такие уравнения в диссертации исследоваться не будут.

Цель диссертационной работы

Ставится задача найти набор условий на отображение $u: \ [-h, \to E)$, при выполнении которых найдется единственное отображение $u: \ [-h, \to E)$, удовлетворяющии в определенном смысле ДРУ (1). Следуя подходу работ Власова [[30],[31],[32]]в диссертации рассматриваются отображения u из класса Соболева $W^k_{2,\gamma}([-h, +\infty), E)$ с экспоненциальным весом $e^{\gamma t}$ при некотором $\gamma \in R$. Принадлежность отображения к указанному классу Соболева накладывает условия на его гладкость и на его асимптотическое поведение при $t \to +\infty$, то есть накладывает условие на бесконечно удаленной границе области определения искомого отображения.

Для ДРУ (1) в правой δ-полуокрестности граничной точки $-h$ области определения

[28] *А.М. Зверкин, Г.А. Каменский, С.Б. Норкин, Л.Э. Эльсгольц.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. 1962. Т. 17. УМН. № 2ю С. 77-164.

[29] *А.Д. Мышкис.* Смешанные функционально-дифференциальные уравнения. Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 4. С. 5-120.

[30] *В.В. Власов, Д.А. Медведев.* Функционально-дифференциальные уравнения и связанные с ними вопросы спектральной теории. Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 30,С. 3-173.

[31] *В.В. Власов, К.И. Шматов.* Корректная разрешимость уравнений гиперболического типа с последействием в гильбертовом пространстов.труды математического института им. В.А.Стеклова, 2003. т.243, с. 127-137.

[32] *В.В. Власов, В.Ж. Сакбаев.* О корректной разрешимости в шкале пространств Соболева некоторых дифференциально-разностных уравнений. Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 9. С. 1194-1202.

искомого отображения при некотором $\delta > 0$ ставится граничное условие вида

$$u|_{[-h,-h+\delta]} = \varphi, \qquad (2),$$

где φ – заданное отображение промежутка $[-h, -h+\delta]$ в пространство E.

Степень разработанности исследования

Ранее в работах [33,34] рассматривалась постановка задачи (1),(2) при $\delta = h+\tau$ и было выявлено счетное множество условий согласования для разрешимости такой задачи, а в работах [35, 36] рассматривалась постановка задачи (1),(2) при $\delta = h$ и было определено условие на параметри γ веса пространства Соболева, при выполнении которого задача (1),(2) является корректной.

Основы теория функционально-дифференциальных уравнений были во многом сформированы в работах [37, 38] в которых была предложена классификация таких уравнений на уравнения запаздывающего, нейтрального и опережающего типов.

Теория функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов в дальнейшем получила развитие с привлечением методов спектральной теории операторов и функциональных пространств в работах [39,40].

Функционально-дифференциальные уравнения опережающего типа изучены в значительно меньшей мере, чем функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего и нейтрального типов [41].

Во многом это связано с некорректностью постановки задачи с начальным условием на промежутке отклонения аргумента в таких уравнениях, требующей от начального условия и правой части уравнения выполнения бесконечного множества условий согласования [42].

Как было показано в работе [43] , для корректности постановки задачи с начальными данными следует задать начальные условия лишь на части промежутка отклонения аргумена – на промежутке запаздывания аргумента $(-h, 0)$. Там же получены условия на коэффициенты уравнения (1.1) и параметры весового пространства Соболева, достаточные для корректной разрешимости задачи с начальными условиями в такой модифицированной постановке.

---

[33] *А.М. Зверкин, Г.А. Каменский, С.Б. Норкин, Л.Э. Эльсгольц.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. 1962. Т. 17. УМН. № 2. С. 77-164.

[34] *Г.А. Каменский, А.Л. Субачевский.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: Изд. МАИ. 1992.

[35] *В.В. Власов, В.Ж. Сакбаев.* О корректной разрешимости в шкале пространств Соболева некоторых дифференциально-разностных уравнений. Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 9. С. 1194-1202.

[36] *Йаакбариех. А, Сакбаев В.Ж.* Представление формулами Фейнмана полугрупп, порожденных параболическими дифференциально-разностными операторами.ТРУДЫ МФТИ, 2012. Т. 4, № 4, С. 113-119.

[37] *А.М. Зверкин, Г.А. Каменский, С.Б. Норкин, Л.Э. Эльсгольц.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. 1962. Т. 17. УМН. № 2ю С. 77-164.

[38] *А.Д. Мышкис, Л.Э. Эльсгольц.* Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. УМН. 1967. Т. 22. № 2(134). С. 21–57

[39] *В.В. Власов, Д.А. Медведев.* Функционально-дифференциальные уравнения и связанные с ними вопросы спектральной теории. Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 30,С. 3-173.

[40] *В.С. Рабинович.* О задаче Коши для параболических дифференциально-разностных операторов с переменными коэффициентами. Дифф. ур-я. 1983. Т. 19. № 6. С. 1032–1038.

[41] *А.Д. Мышкис.* Смешанные функционально-дифференциальные уравнения. Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 4. С. 5-120.

[42] *Г.А. Каменский, А.Л. Субачевский.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: Изд. МАИ. 1992.

[43] *Йаакбариех. А, Сакбаев В.Ж.* Корректность задачи с начальными условиями для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента. Известия вузов, 2015. № 4, С. 17-25.

В работе [44] было установлено, что ДРУ опережающего типа допускают корректную постановку задачи с началными уловиями. В настоящей диссертационной работе, являющейся продолжением исследований [45,46] и [47], получены достаточные условия корректной разрешимости задачи (1),(2) – указаны условия на весовую функцию шкалы весовых пространств Соболева, при которых задача (1),(2) имеет единственное решение в весовом пространстве, причем норма решения допускает оценку через норму неоднородного слагаемого f уравнения (1) и норму начального условия φ из (2). В работе показано, к каким нарушениям корректности задачи (1),(2) приводит нарушение условия на вес.

В терминах спектра оператора задачи показано, что в случае весовых пространств Соболева со слишком быстро убывающим весом задача (1),(2) имеет в пространстве Соболева более одного решения. Наоборот, если весовая функция убывает слишком медленно, то в соответствующем пространстве Соболева может не найтись решения задачи (1),(2). В этом полученный результат аналогичен результату работы А.Н. Тихонова[48], в которой для шкалы функциональных пространств найдена граница корректной разрешимости задачи Коши для уравнения теплопроводности и установлено нарушение единственности решения задачи Коши в более широких пространствах шкалы.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Определить условия на коэффициенты дифференциально-разностного оператора и функциональное пространство Соболева с экспоненциальным весом, достаточные для корректной разрешимости задачи с начальными условиями для ДРУ первого и второго порядков опережающего типа.

2. В терминах корней характеристического многочлена, соответствующего дифференциально-разностному оператору, определить условия на показатель экспоненциального веса пространства Соболева, необходимые для корректной разрешимости задачи с начальными условиями для ДРУ опережающего типа.

3. Определить зависимость пространства начальных данных задачи с начальными условиями для ДРУ опережающего типа без запаздывания, допускающей корректную разрешимость в пространстве Соболева с экспоненциальным весом, от расположения корней характеристического многочлена.

4. Доказать сходимость решений корректных задач с начальными условиями для ДРУ с переменными отклонениями аргумента на величины h (запаздывание) и τ (опережение) к решению задачи Коши для ОДУ при стремлении к нулю параметров отклонения аргумента.

Научная новизна

Все полученные в диссертации результаты являются новыми. Наиболее значимые из них:

1. Получены условия на коэффициенты дифференциально-разностного оператора и

[44] *Йаакбариех. А, Сакбаев В.Ж.* Представление формулами Фейнмана полугрупп, порожденных параболическими дифференциально-разностными операторами.ТРУДЫ МФТИ, 2012. Т. 4, № 4, С. 113-119.

[45] *В.В. Власов, В.Ж. Сакбаев.* О корректной разрешимости в шкале пространств Соболева некоторых дифференциально-разностных уравнений. Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 9. С. 1194-1202.

[46] *В.В. Власов, В.Ж. Сакбаев.* О разрешимости одного класса функционально-дифференциальных уравнений с опережающим аргументом в гильбертовом пространстве. Некоторые проблемы фундаметнальной и прикладной математики. М.: МФТИ. 1997. С. 72-823.

[47] *Йаакбариех. А, Сакбаев В.Ж.* Представление формулами Фейнмана полугрупп, порожденных параболическими дифференциально-разностными операторами.ТРУДЫ МФТИ, 2012. Т. 4, № 4, С. 113-119.

[48] *A. Tichonoff.* Theoremes d'unicite pour l'equation de la chaleur. Мат. Сборник. 1935. Т. 42, № 2. С. 199-216.

функциональное пространство Соболева с экспоненциальным весом, достаточные для корректной разрешимости задачи с начальными условиями для ДРУ первого и второго порядков опережающего типа относительно числовой или векторной неизвестной функции.

2. Определены условия на показатель экспоненциального веса пространства Соболева, выраженные в терминах корней характеристического многочлена, соответствующего дифференциально-разностному оператору, необходимые для корректной разрешимости задачи с начальными условиями для ДРУ опережающего типа.

3. Для некоторых специальных постановок задачи с начальными условиями для ДРУ второго порядка опережающего типа без запаздывания установлена зависимость размерности пространства начальных данных, при которых задача имеет единственное решение в пространстве Соболева с экспоненциальным весом, от величины коэффициентов при слагаемом с опережающим аргументом.

4. Доказана сходимость решений корректных задач с начальными условиями для ДРУ с фиксированной начальной функцией и переменными отклонениями аргумента на величины h (запаздывание) и τ (опережение) к решению задачи Коши для ОДУ при стремлении к нулю параметров отклонения аргумента.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты диссертации развивают теорию линейных дифференциально-разностных уравнений и могут быть применены в исследованиях задач оптимального управления.

Методы диссертационного исследования.

В диссертации используются методы теории линейных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений, методы спектрального анализа линейных операторов, методы теории однопараметрических полугрупп линейных операторов.

На защиту выносятся следующие положения диссертации:

1. Получены условия на коэффициенты дифференциально-разностного оператора и функциональное пространство Соболева с экспоненциальным весом, достаточные для корректной разрешимости задачи с начальными условиями для ДРУ первого и второго порядков опережающего типа относительно числовой или векторной неизвестной функции.

2. Определены условия на показатель экспоненциального веса пространства Соболева, выраженные в терминах корней характеристического многочлена, соответствующего дифференциально-разностному оператору, необходимые для корректной разрешимости задачи с начальными условиями для ДРУ опережающего типа.

3. Для некоторых специальных постановок задачи с начальными условиями для ДРУ второго порядка опережающего типа без запаздывания установлена зависимость размерности пространства начальных данных, при которых задача имеет единственное решение в пространстве Соболева с экспоненциальным весом, от величины коэффициентов при слагаемом с опережающим аргументом.

4. Доказана сходимость решений корректных задач с начальными условиями для ДРУ с фиксированной начальной функцией и переменными отклонениями аргумента на величины h (запаздывание) и τ (опережение) к решению задачи Коши для ОДУ при стремлении к нулю параметров отклонения аргумента.

Достоверность.

Полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами. Результаты находятся в русле современных исследований, проводимых другими авторами.

Апробация диссертационной работы.

Основные результаты диссертации и отдельные ее части докладывались на научных семинарах:

• На семинаре по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством профессора А.Л. Скубачевского, 17 мая 2016 года. И 14 апреля 2017 года (РУДН).

• На семинаре по спектральной теории дифференциальных операторов под руководством академика РАН, профессора В. А. Садовничего, 16 ноября 2016 года (МГУ).

• На научном семинаре кафедры математического моделирования НИУ "МЭИ"под руководством профессора А.А. Амосова и профессора Ю. А. Дубинского, 7 декабря 2016 года.

• На семинаре кафедры математического анализаим. М.В. Ломоносов (МГУ) под руководством профессора Прилепко Алексей Иванович, 23 марта 2017 года.

• На семинаре кафедры прикладной математики под руководством профессора Б.Ю. Стренина и доц. А.Ю. Савина, 6 апреля 2017 года (РУДН).

Структура диссертации.

Диссертация "Задача с начальными условиями для дифференциально-разностных уравнений с опережением. " состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 36 наименований. Объем диссертации составляет 129 страниц.

Содержание работы

Первая глава "Задача с начальными условиями для дифференциально-разностного уравнения(ДРУ) первого порядка".

В первом разделе первой главы изучаются Дифференциально-разностного уравнения с опережением и запаздывания вида

$$u_t(t) = au(t) + bu(t-h) + cu(t+\tau) + f(t), \qquad t > 0, \tag{1.1}$$

в котором a, b, c – вещественные постоянные, положительные постоянные τ, h являются отклонениями аргумента (опережением и запаздыванием соответственно), а f – заданная на полуоси $R_+ = (0, +\infty)$ непрерывная числовая функция. Требуется определить неизвестную числовую функцию $u : (-h, +\infty) \to R$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и удовлетворяющих начальному условию

$$u(t) = \phi(t), \qquad t \in (-h, 0) \tag{1.2}$$

с заданной начальной функцией ϕ.

Для каждого числа $\gamma \geq 0$ через $L_{2,\gamma}(R_+)$ обозначим пространство классов эквивалентности измеримых отображений $u: \ R_+ \to \mathbf{C}$, для которых выполняется условие $e^{-\gamma t}u \in L_2(R_+)$, наделенное нормой

$$\|u\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} = \|e^{-\gamma t}u\|_{L_2(R)}.$$

Через $W^l_{2,\gamma}(a,b)$ при каждом $l \in \mathbf{N}$ обозначим пространство числовых функций на интервале (a,b) со значениями в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ таких, что

$$u^{jl}(t) \in L_{2,\gamma}(a,b), \ j = 0,1, \quad l = 1,2,...;$$

с нормой

$$\| \ u \ \|_{W^l_{2,\gamma}(a,b)} = (\| \ u^{(l)} \ \|^2_{L_{2,\gamma}(a,b)} + \| \ u \ \|^2_{L_{2,\gamma}(a,b)})^{1/2}, \qquad \gamma \geq 0.$$

Определение. Решением задачи Коши (1.1) – (1.2) будем называть функцию $u \in W^1_2(-h,+\infty)$, которая удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду на интервале $(0,+\infty)$ и начальному условию (1.2) тождественно на интервале $(-h,0)$.

В диссертации получены достаточные и необходимые условия корректной разрешимости задачи (1.1)–(1.2). Исследовано влияние нарушения необходимых условий на нарушение существования и нарушение единственности решения. Исследовано предельное поведение при $(h,\tau) \to (0,0)$ решений задачи (1.1)–(1.2)

Поэтому всюду далее если $b = 0$, то в условии (1.2) полагается $h = 0$. В диссертации продолжено исследование статей [49, 50], получены достаточные условия корректной разрешимости задачи (1.1)–(1.2)– указаны условия на весовую функцию шкалы весовых пространств Соболева, при которых задача (1.1) – (1.2) имеет единственное решение в весовом пространстве, причем норма решения допускает оценку через норму неоднородного слагаемого уравнения (1.1) и норму начального условия (1.2). Исследовано, к каким нарушениям корректности задачи (1.1)-(1.2) приводит нарушение условия на вес.

Положим

$$\omega(\gamma) = e^{-\gamma h}\frac{b}{\gamma + a} + e^{\gamma\tau}\frac{c}{\gamma + a}, \qquad \gamma > 0.$$

Теорема 1.1. *Пусть $\omega(\gamma) < 1$ на интервале $(\alpha,\beta) \subset R$. Тогда если $\varphi \in W^1_2([-\tau,0])$ и $f \in L_{2,\gamma}(R_+)$ при некотором $\gamma \in (\alpha,\beta)$, то задача с начальным условием (1.1) – (1.2) имеет единственное решение u в пространстве $W^1_{2,\gamma}((-\tau,+\infty))$, причем норма решения допускает оценку*

$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}((-\tau,+\infty))} \leq C[\|f\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} + \|\varphi\|_{W^1_2([-\tau,0])}], \tag{1.3}$$

с постоянной C, не зависящей от выбора $f \in L_{2,\gamma}(R_+)$ и $\varphi \in W^1_2([-\tau,0])$.

Пусть Ξ – множество решений характеристического уравнения $\lambda = a + be^{-h\lambda} + ce^{\tau\lambda}$, которое является счетным [51].

[49] *В.В. Власов, В.Ж. Сакбаев.* О разрешимости одного класса функционально-дифференциальных уравнений с опережающим аргументом в гильбертовом пространстве. Некоторые проблемы фундаметнальной и прикладной математики. М.: МФТИ. 1997. С. 72-823.

[50] *Йаакбариех. А, Сакбаев В.Ж.* Корректность задачи с начальными условиями для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента. Известия вузов, 2015. № 4, С. 17-25.

[51] *В. В. Власов, Дж. Ву, Г. Р. Кабирова*, Корректная разрешимость и спектральные свойства абстрактных гиперболических уравнений с последействием, СМФН, 2010, том 35, 44–59.

Определим числа

$$\hat{a} = sup\{Re\lambda : \lambda \in \Xi, Re\lambda < \alpha\},$$
$$\hat{b} = inf\{Re\lambda : \lambda \in \Xi, Re\lambda > \beta\}.$$

Теорема 1.2. *Пусть $\omega(\gamma) < 1$ на интервале $(\alpha, \beta) \subset R$. Тогда если $\gamma > \hat{b}$, то однородная задача (1.1)–(1.2) имеет нетривиальное решение $u \in W^1_{2,\gamma}(-\tau, +\infty)$. Если $\gamma < \hat{a}$, то не при всех начальных данных $\phi \in W^1_2([-h, 0])$, однородное уравнение $u_t = au(t) + bu(t-h) + cu(t+\tau)$, $t > 0$ имеет решение из пространства $W^1_{2,\gamma}(-h, +\infty)$.*

Во втором разделе первой главы мы исследуем дифференциально-разностные уравнения вида (1.1) с опережением без запаздывания – при условии $b = 0$.

В этом случае начальные условия задаются в точке $t_0 = 0$. В работе [52] были исследованы, в частности, вопросы постановки и корректной разрешимости задачи с начальными условиями для дифференциально-разностного уравнения вида

$$u_t(t) = au(t) + cu(t+\tau) + f(t), \qquad t > 0 \tag{1.4}$$

, где

$$u(+0) = u_0. \tag{1.5}$$

Здесь $\tau > 0$, f – заданная непрерывная числовая функция на области $(0, +\infty)$, а u – неизвестная числовая функция, областью определения которой является множество $(0, +\infty)$.

Определение. Решением задачи Коши (1.4) – (1.5) будем называть функцию $u \in W^1_2(0, +\infty)$, которая удовлетворяет уравнению (1.4) на интервале $(0, +\infty)$ и начальному условию (1.5).

Теорема 1.3. *Пусть существует $\gamma > a$ такое, что выполнено условие $|c|e^{\tau\gamma} < \gamma - a$. Тогда задача (1.4) – (1.5) в пространстве Соболева $W^1_{2,\gamma}(0, +\infty)$ эквивалентна задаче Коши с начальным условием (1.5) для ОДУ*

$$u_t(t) = x_1 u(t) + f(t), \qquad t > 0, \tag{1.6}$$

где x_1 – корень характеристического уравнения $\lambda = a + ce^{\lambda\tau}$ с наименьшей вещественной частью.

Здесь эквивалентность двух задач означает, что если начальные данные и неоднородные слагаемые этих задач совпадают, то совпадают и их решения. Установлен следующий результат о предельном переходе для семейства решений ДРУ (1.4) к решению обыкновенного дифференциального уравнения при стремлении к нулю параметров отклонения аргумента.

Через u_o обозначим решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$u_t(t) = (a + b + c)u(t), \qquad t > 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям Коши

$$u(+0) = \varphi(-0).$$

[52] *Йаакбариех. А, Сакбаев В.Ж.* Корректность задачи с начальными условиями для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента. Известия вузов, 2015. № 4, С. 17-25.

Теорема 1.4. *Пусть существует такое* $\gamma_0 > a$, *что* $\frac{|b|+|c|}{\gamma_0 - a} < 1$. *Тогда существует такое* $\epsilon > 0$, *что*

$$\omega(\gamma) = \frac{|b|e^{-h\gamma} + |c|e^{\tau\gamma}}{\gamma - a} \leq \delta < 1$$

для любых $(h, \tau) \in O_\epsilon(0,0)$ *и* $\gamma \in O_\epsilon(\gamma_0)$.

При этом для любого $\gamma \in O_\epsilon(\gamma_0)$ *выполняется равенство:*

$$\lim_{(h,\tau)\to(0,0)} \sup_{t\in[0,T]} \|u_{h,\tau}(t)|_{R_+} - u_o(t)\|_{W^1_{2,\gamma}(0,+\infty)} = 0.$$

Вторая глава "Задача с начальными условиями для дифференциально-разностного уравнения (ДРУ) второго порядка."

Во второй главе исследуются вопросы постановки и корректной разрешимости задачи с начальными условиями для модельного дифференциально-разностного уравнения второго порядка вида

$$u_{tt}(t) = \mathcal{L}u(t) + f(t), \qquad t > 0, \tag{2.1}$$

где $\mathcal{L}$ – разностный оператор, сопоставляющий функции $u: \ R_+ \equiv [0, +\infty) \to \mathbf{C}$ функцию $\mathcal{L}u: \ R_+ \to \mathbf{C}$, определяемую равенством

$$\mathcal{L}u(t) = -a^2u(t) + bu(t-h) + cu(t+\tau), \qquad t \in (0, +\infty). \tag{2.2}$$

В равенстве (2.2) коэффициенты b, c - вещественные числа, a, h, τ – положительные постоянные, f – заданная числовая функция на интервале $(0, +\infty)$, а u – неизвестная числовая функция, областью определения которой является промежуток $(-h, +\infty)$. Областью определения оператора $\mathcal{L}$, действующего в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(-h, +\infty)$, является гильбертово пространство $D(\mathcal{L}) = W_2^2(-h, +\infty)$ [[53], [54]], на котором оператор $\mathcal{L}$ определен согласно формуле (2.2). Ставится задача определить функцию $u: \ (-h, +\infty) \to R$, которая в области $(0, +\infty)$ удовлетворяет уравнению (2.1) почти всюду, а на отрезке $[-h, 0]$ удовлетворяет начальному условию

$$u \mid_{[-h,0]} = \varphi, \tag{2.3}$$

где $\varphi(t)$ – начальное значение функции u, заданное на множестве $[-h, 0]$. При этом предполагается, что функция φ удовлетворяет условию $\varphi \in W_2^2(-h, 0)$.

Определение. Функцию $u \in W^2_{2,\gamma}(-h, +\infty)$ назовем решением задачи (2.1)–(2.3) в весовом пространстве Соболева, если она удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.1) в пространстве $L_{2,\gamma}(0, +\infty)$ и начальному условию (2.3) тождественно на интервале $[-h, 0]$.

Положим

$$\omega(\gamma) = \frac{1}{\gamma^2 + a^2}(|b|e^{-\gamma h} + |c|e^{\gamma\tau}), \qquad \gamma \in (0, +\infty). \tag{2.4}$$

[53] *В.В. Власов, В.Ж. Сакбаев.* О корректной разрешимости в шкале пространств Соболева некоторых дифференциально-разностных уравнений. Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 9. С. 1194-1202.

[54] *В.В. Власов, К.И. Шматов.* Корректная разрешимость уравнений гиперболического типа с последействием в гильбертовом пространстов.труды математического института им. В.А.Стеклова, 2003. т.243, с. 127-137.

Теорема 2.2. *Пусть $\omega(\gamma) < 1$ на интервале $(\alpha, \beta) \subset (0, +\infty)$. Пусть функции $\varphi \in W_2^2([-h, 0])$. Тогда если $f \in L_{2,\gamma}(R_+)$ при некотором $\gamma \in (\alpha, \beta)$, то задача с начальным условием (2.1)–(2.3) имеет единственное решение u в пространстве $W_{2,\gamma}^2((h, +\infty))$, причем норма решения допускает оценку*

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2((h,+\infty))} \leq c[\|f\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} + \|\varphi\|_{W_2^2([-h,0])}], \tag{2.5}$$

с постоянной c не зависящей от выбора $f \in L_{2,\gamma}(R_+)$, $\varphi \in W_2^2([-h, 0])$

Определим числа

$$\hat{a} = sup\{Re\lambda : \lambda \in \Xi, Re\lambda < \alpha\},$$
$$\hat{b} = inf\{Re\lambda : \lambda \in \Xi, Re\lambda > \beta\},$$

где $\Xi \subset \mathbf{C}$ – множество корней характеристического уравнения $\lambda^2 + a^2 = be^{-\lambda h} + ce^{\lambda\tau}$, а числа α, β определены условием $\omega(\gamma) < 1$ на интервале $(\alpha, \beta) \subset R$.

Теорема 2.3 *Пусть $\omega(\gamma) < 1$ на интервале $(\alpha, \beta) \subset R$. Тогда если $\gamma > \hat{b}$, то однородная задача (2.1)–(2.3) имеет нетривиальное решение $u \in W_{2,\gamma}^2(0, +\infty)$. Если $\gamma < \hat{a}$, то не при всех начальных данных $(\phi, \psi) \in \mathbf{C}^2$, однородное уравнение $u_{tt} = \mathcal{M}u(t), t > 0$, имеет решение из пространство $W_{2,\gamma}^2(0, +\infty)$.*

Фиксировав некоторое $h_0 > 0$ предположим, что на отрезке $[-h_0, 0]$ задана некоторая функция $\phi_0 \in W_2^2([-h_0, 0])$. Тогда при произвольных $(h, \tau) \in R_+ \times R_+$ таких, что $h \in (h_0, 0)$, рассматривается задача (2.1)–(2.3) с начальным условием $\phi_h = \phi_0|_{[-h,0]}$.

Через u_o обозначим решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$u_{tt}(t) = (-a^2 + b + c)u(t), \quad t > 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям Коши

$$u(+0) = \varphi(-0), \quad u_t(+0) = \varphi'(-0).$$

Теорема 2.4. *Пусть существует такое $\gamma_0 > a$, что $\omega(\gamma_0) < 1$. Тогда существует такое $\epsilon > 0$, что $\omega(\gamma) \leq \delta < 1$ для любых $(h, \tau) \in O_\epsilon(0, 0)$ и $\gamma \in O_\epsilon(\gamma_0)$. При этом для любого $\gamma \in O_\epsilon(\gamma_0)$ выполняется равенство:*

$$\lim_{(h,\tau)\to(0,0)} \|u_{h,\tau}(t)|_{R_+} - u_o(t)\|_{W_{2,\gamma}^2(0,+\infty)} = 0.$$

Во втором разделе второй главы рассматривается модифицированное упрощенное ДРУ (2.1), в котором дифференциально-разностный оператор (2.2) является оператором опережиющего типа и не содержит запаздываний. Исследуются вопросы постановки и корректной разрешимости задачи с начальными условиями для модельного дифференциально-разностного уравнения второго порядка с опережением без запаздывания, т.е. для ДРУ вида

$$u_{tt}(t) = \mathcal{L}u(t) + f(t), \quad t > 0, \tag{2.6}$$

где $\mathcal{L}$ – разностный оператор, сопоставляющий функции $u: \ R_+ \equiv [0, +\infty) \to \mathbf{C}$ функцию $\mathcal{L}u: \ R_+ \to \mathbf{C}$, определяемую равенством

$$\mathcal{L}u(t) = -a^2u(t) + cu(t+\tau), \qquad t \in [0, +\infty). \tag{2.7}$$

Здесь коэффициенты $a, c \in R$ – вещественные числа, $\tau > 0$, f – заданная числовая функция на области $(0, +\infty)$, а u – неизвестная числовая функция, областью определения которой является полуось $(0, +\infty)$.

Областью определения оператора $\mathcal{L}$, действующего в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(0, +\infty)$, является гильбертово пространство

$$D(\mathcal{L}) = W^2_{2,\gamma}(0, +\infty)$$

Ставится задача определить функцию $u: \ (0, +\infty) \to R$, которая в области $(0, +\infty)$ удовлетворяет уравнению (2.6), и удовлетворяет начальным условиям (2.8), которые задаются для ДРУ с опережением без запаздывания. При $t \to +0$ функция u удовлетворяет начальному условию:

$$u(+0) = \varphi, \quad u_t(+0) = \psi, \tag{2.8}$$

где $(\varphi, \psi) \in C^2$ – начальное значение функции и ее первой производной.

Определение. Функцию $u \in W^2_{2,\gamma}(0, +\infty)$ назовем решением задачи (2.6)–(2.8) в весовом пространстве Соболева, если она удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.6) в пространстве $L_{2,\gamma}(0, +\infty)$ и начальному условию (2.8).

Положим

$$\omega(\gamma) = \frac{e^{\gamma\tau}|c|}{a^2 + \gamma^2}, \qquad \gamma \in R. \tag{2.9}$$

Теорема 2.5. *Пусть $\omega(\gamma) < 1$ на некотором промежутке $(\alpha, \beta) \subset R$ и пусть $f \in L_{2,\gamma_0}(0, +\infty)$ при некоторых $\gamma_0 \in (\alpha, \beta)$. Тогда при любом $\gamma \in [\gamma_0, \beta)$ задача Коши (2.6)–(2.8) имеет единственное решение u в пространсве $W^2_{2,\gamma}(0, +\infty)$, причем справедлива оценка*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(0,+\infty)} \leq C[|\varphi| + |\psi| + \|f\|_{L_{2,\gamma}(0,+\infty)}]$$

с константой, не зависящей от φ, ψ, f.

Установлено, что в зависимости от коэффициентов уравнения, точнее, в зависимости от расположения корней характеристического квазимногочлена дифференциально-разностного оператора (2.7), реализуются различные возможности корректной постановки задачи (2.6)–(2.8), а также возможность однозначной разрешимости задачи с одним начальным условием (2.8) для однородного уравнения (2.6). Ключевую роль в выборе корректной постановки задачи для дифференциально-разностного уравнения (2.6)–(2.7) играет множество корней характеристического уравнения (2.10) оператора (2.7),

$$\lambda^2 = -a^2 + be^{\lambda h}. \tag{2.10}$$

Множество Ξ комплексных корней уравнения (2.10), является счетным множеством в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ [[55], [56]], которое симметрично относительно вещественной оси при условии $a, b, h \in R$. Спецификой опережающего типа дифференциально-

[55] *В.В. Власов, Д.А. Медведев.* Функционально-дифференциальные уравнения и связанные с ними вопросы спектральной теории. Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 30,С. 3-173.

[56] *А.М. Зверкин, Г.А. Каменский, С.Б. Норкин, Л.Э. Эльсгольц.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. 1962. Т. 17. УМН. № 2ю С. 77-164.

разностного оператора (2.7) является то, что в любой полуплоскости $\mathrm{Re}(\lambda) < \gamma$ плоскости $\mathbf{C}$ находится не более чем конечное множество точек Ξ. Поэтому существует конечное подмножество точек множества Ξ, на которых достигается величина $\gamma_* = \inf(\mathrm{Re}\Xi)$.

Пусть Ξ – множество комплексных корней характермстического уравнения $\lambda^2 + a^2 = be^{\lambda h}$. Установлено, что если $\frac{|b|}{a^2+\gamma^2} e^{\gamma h} < 1$, то существует пара точек $\lambda_1, \lambda_2 \in \Xi$ таких, что $\mathrm{Re}\lambda_1 \leq \mathrm{Re}\lambda_2 < \inf \mathrm{Re}(\Xi \backslash \{\lambda_1, \lambda_2\})$.

Теорема 2.8. *Пусть $c = 0$ и $\frac{|b|}{a^2+\gamma^2} e^{\gamma h} < 1$. Тогда задача с начальными условиями (2.6)–(2.8) в пространстве $W^2_{2,\gamma}(0, +\infty)$ эквивалентна задаче Коши для ОДУ*

$$u''(t) - (\lambda_1 + \lambda_2) u'(t) + \lambda_1 \lambda_2 u(t) = f(t), \qquad t > 0,$$

с начальными данными (2.8).

Теорема 2.9. *Пусть выполнено неравенство $b > a^2$ и величина $h > 0$ мала настолько, что величина $\gamma_* = \inf(\mathrm{Re}\Xi)$ достигается в единственной точке $\lambda_1 = x_1 \in R$ множества Ξ. Тогда если выполнены условия $0 < \gamma' < \sqrt{b - a^2}$, то существует такое $h_1 > 0$, что при всех $h \in (0, h_1)$ и при любом начальном условии*

$$u(+0) = \varphi,$$

однородное уравнение (2.6) имеет в пространстве $W^2_{2,\gamma'}(R_+)$ единственное решение

$$u(t) = \varphi e^{x_1 t}, \qquad t \geq 0.$$

Третья глава изучаются гиперболические ДРУ с отклонением временного аргумента.

В этой части исследуются вопросы постановки и корректной разрешимости задачи с начальными условиями для модельного гиперболического дифференциально-разностного уравнения вида

$$u_{tt}(t, x) = \mathcal{L} u(t, x) + f(t, x), \qquad t > 0, x \in R^d \tag{3.1}$$

где

$$\mathcal{L} u(t, x) = -\mathbf{A}^2 u(t, x) + \sum_{k=1}^{N} \{[a_k(u(t + h_k, x))] +$$

$$[c_k(\mathbf{A} u(t + h_k, x))]\} - \gamma_0 u(t, x), \qquad (t, x) \in (0, +\infty) \times R^d. \tag{3.2}$$

Здесь коэффициенты $a_k, c_k, h_k, k = \overline{1, N}$ - вещественные числа, $-h = h_1 < h_2 < ... < h_N$, причем $-h < 0$, f – заданная числовая функция на области $(0, +\infty) \times R^d$, а u – неизвестная числовая функция, заданная на множестве $(-h, +\infty) \times R^d$.

В равенстве (3.2), $\mathbf{A}$ – самосопряженный положительный оператор в пространстве $\mathcal{H} = L_2(R^d)$, действующий из области определения $D(\mathbf{A}) = W^2_2(R^d) \subset \mathcal{H}$ в пространство $\mathcal{H}$.

Пусть α_0 – точная нижняя грань оператора $\mathbf{A}$ и пусть $\alpha_0 \geq 0$. Областью определения оператора $\mathcal{L}$, действующего в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}((-h, +\infty), \mathcal{H})$, является гильбертово пространство

$$D(\mathcal{L}) = L_{2,\gamma}((-h,+\infty), D(\mathbf{A}^2)) \bigcap W_2^2((-h,+\infty),\mathcal{H})$$

[57,58], на котором оператор $\mathcal{L}$ определен согласно формуле (3.2). Ставится задача определить функцию $u: \ (-h,+\infty)\times R^d \to R$, которая в области $(0,+\infty)\times R^d$ удовлетворяет уравнению (3.3) , а на множестве $(-h,0]\times R^d$ удовлетворяет начальному условию

$$u \mid_{(-h,0]\times R^d} = \varphi, \tag{3.3}$$

где $\varphi(t,x)$ – начальное значение функции u, заданное на множестве $(-h,0]\times R^d$. При этом предполагается, что функция φ удовлетворяет условию $\varphi \in W_2^2((-h,0),\mathbf{A^2})$. Для исследования модельной задачи с начальными условиями (3.1),(3.3) предположим, что $\mathbf{A^2} = -\Delta$.

Положим

$$\omega(\gamma) = \sum_{k=1}^{N} e^{\gamma h_k}\{a_k \frac{1}{\gamma^2+\alpha_0^2} + c_k\frac{1}{\gamma}\} + \gamma_0\frac{1}{\gamma^2+\alpha_0^2}, \qquad \gamma \in R+ = (0,+\infty).$$

Теорема 3.2. *Пусть $\omega(\gamma) < 1$ на интервале $(\alpha,\beta) \subset R$. Пусть функции $\varphi \in W_2^3([-h,0],\mathbf{A}^3)$. Тогда если $f \in L_{2,\gamma}(R_+,\mathcal{H}^1)$ при некотором $\gamma \in (\alpha,\beta)$, то задача с начальным условием (3.1),(3.3) имеет единственное решение u в пространстве $W_{2,\gamma}^2((-h,+\infty),\mathbf{A^2})$, причем норма решения допускает оценку*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}((-h,+\infty),\mathbf{A^2})} \le c[\|f\|_{L_{2,\gamma}(R_+,\mathcal{H})} + \|\varphi\|_{W_2^3([-h,0],A^3)}], \tag{3.4}$$

с постоянной c, не зависящей от выбора $f \in L_{2,\gamma}(R_+,\mathcal{H})$, $\varphi \in W_2^3([-h,0],A^3)$.

Наряду с задачей (3.1),(3.3) рассмотрим задачу с начальными условиями для модельного гиперболического дифференциально-разностного уравнения вида

$$u_{tt}(t) = \mathcal{Z}u(t) + f(t), \qquad t>0, \tag{3.5}$$

$$\mathcal{Z}u(t) = -\mathbf{A^2}u(t) + \sum_{k=1}^{N}\{[a_k(u(t+h_k))] + [c_k\mathbf{A^2}u(t+h_k)]\} - \gamma_0 u(t), \qquad t\in(0,+\infty). \tag{3.6}$$

В равенстве (3.6) $\mathbf{A}$ – линейный самосопряженный положительный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с плотной областью определения $D \subset \mathcal{H}$, имеющий дискретный спектр

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{s_n,\, n \in \mathbf{N})\}$$

с точной нижней гранью $\alpha_0 > 0$, причем каждому собственному значению s_n соответствует единственная собственная функция v_n оператора $\mathbf{A}$.

[57] *В.В. Власов, В.Ж. Сакбаев.* О корректной разрешимости в шкале пространств Соболева некоторых дифференциально-разностных уравнений. Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 9. С. 1194-1202.

[58] *В.В. Власов, К.И. Шматов.* Корректная разрешимость уравнений гиперболического типа с последействием в гильбертовом пространстов.труды математического института им. В.А.Стеклова, 2003. т.243, с. 127-137.

В равенстве (3.5) f – заданная функция из пространства $L_2((0,+\infty),\mathcal{H}^1)$, а u – неизвестная числовая функция, заданная на множестве $(h,+\infty)\times R^d$ из пространства $W_2^2((h,+\infty),\mathbf{A}^2)$.

Ставится задача определить функцию $u:\ (h,+\infty)\times\mathcal{H}$, которая в области $(0,+\infty)\times R^d$ удовлетворяет уравнению (3.1) , а на множестве $(h,0]\times R^d$ удовлетворяет начальным условиям

$$u\mid_{(h,0]}=\varphi, \tag{3.7}$$

где $\varphi(t):\ (h,0]\to H$ - заданная начальная функция из пространства $W_2^3((h,0),\mathbf{A}^3)$.

Рассмотрим связанные с корнем s_n оператора $\mathcal{Z}$ характеристическое уравнение

$$\xi^2=-s_n^2+\sum_{k=1}^{N}e^{\xi h}[a_k+c_ks_n]-\gamma_0 \tag{3.8}$$

Определим числа

$$\hat{a}=sup\{Re\lambda:\lambda\in\Xi,Re\lambda<\alpha\},$$

$$\hat{b}=inf\{Re\lambda:\lambda\in\Xi,Re\lambda>\beta\},$$

где $\Xi\subset\mathbf{C}$ – множество, являющееся обединением множеств Ξ_n корней характеристического уравнения (3.8) по всем $s_n\in\sigma(\mathbf{A})$, а числа α,β определены условием $\omega(\gamma)<1$ на интервале $(\alpha,\beta)\subset[0,+\infty)$.

Теорема 3.3. *Пусть функции $\varphi\in W_2^2([h,0],A^2)$. Пусть $\omega(\gamma)<1$ на интервале $(\alpha,\beta)\subset R$. Тогда если $\gamma>\hat{b}$, то однородная (с нулевыми начальным условием и правой частью) задача (3.1),(3.3) имеет нетривиальное решение $u\in W_{2,\gamma}^2((h,+\infty),\mathbf{A^2})$.*

А если $\gamma<a$, то не при всех начальных данных $\phi\in W_2^3([h,0],\mathbf{A^3})$ однородное уравнение (3.3) $u_{tt}(t)=\mathcal{Z}u(t),\ t>0$, имеет решение из пространства $W_{2,\gamma}^2((-h,+\infty),\mathbf{A^2})$.

Теорема 3.4. *Пусть существует такое $\gamma_*>a$, что $\omega(\gamma_*)<1$. Тогда существует такое $\epsilon>0$, что $\omega(\gamma)\le\delta<1$ для любых $\mathbf{h}\in O_\epsilon(\mathbf{0})$ в R^N и $\gamma\in O_\epsilon(\gamma_0)$. При этом для любого $\gamma\in O_\epsilon(\gamma_0)$ выполняется равенство*:

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\|u_{\mathbf{h}}(t)|_{R_+}-u_o(t)\|_{W_{2,\gamma}^2((0,+\infty),\mathbf{A}^2)}=0.$$

где u_o – решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$u_{tt}(t)=(-\mathbf{A}^2-\gamma_0\mathbf{I}+\sum_{k=1}^{N}(a_k\mathbf{I}+c_k\mathbf{A})u(t)+f(t),\qquad t>0,$$

с начальными условиями

$$u(+0)=\phi_0(-0),\quad u_t(+0)=\phi_0'(-0).$$

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. *Акбари Фаллахи. А, Йаакбариех. А, Сакбаев В.Ж.* Корректность задачи с начальными условиями для гиперболических дифференциально- разностных уравнений со сдвигами временного аргумента. Дифференциальные уравнения, 2016. Т. 52, № 3, С. 352-365.

2. *Акбари Фаллахи. А.* О стремлении к нулю величины отклонения аргумента в дифференциально-разностных уравнениях с опережением.ТРУДЫ МФТИ, 2016. Т. 8, № 1, С. 109-114.

3. *Акбари Фаллахи. А.* Дифференциально-разностных уравнений второго порядка с опережением в весовых пространствах Соболева. ТРУДЫ МФТИ, 2016. Т. 1, № 1, С. 109-120.

• Основные результаты по теме диссертации изложены в семи печатных работах, из которых три [А1-А3] в журналах, рекомендованных ВАК.

Личный вклад.

Работа [А1] опубликована в соавторстве. Результаты этой работы, вошедшие в диссертацию, получены лично автором. Также автором опубликованы статьи [А2-А3].

Тезисы научных и международных конференций

4. *Акбари Фаллахи. А.* Корректность задачи с начальными условиями для гиперболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента.// Труды 57-й научной конференции МФТИ с международным участием, посвященной 120-летию со дня рождения П. Л. Капицы. Москва 24–29 ноября 2014 года МФТИ.

5. *Акбари Фаллахи. А.* Корректность задачи с начальными условиями для гиперболического дифференциально-разностного уравнения с опережением и запаздыванием.// XII Международной Казанской летней школы-конференции «Теория функций ее, приложения и смеженые вопросы» КАЗАНЬ,27 Июня – 4 Июля 2015.

6. *Акбари Фаллахи. А.* Корректность задачи с начальными условиями для гиперболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента.// The eighth International Conference of Iranian Students in the Russian Federation. St. Petersburg, Russia, April 24–26, 2015. Saint Petersburg State University.

7. *A. Akbari Fallahi* Cauchy problem for hyperbolic functional differential equations Cauchy problem for hyperbolic functional differential equations with deviation of time argument.// 12^{th} "Seminar on Differential Equations and Dynamical System Tabriz, Iran. 27-29 May 2015, University of Tabriz.

Акбари Фаллахи А.

Задачи с начальными условиями для дифференциально-разностных уравнений с опережением

Аннотация

Дифференциально-разностные уравнения возникают в ряде задач математической физики и оптимального управления. При этом дифференциально-разностные уравнения опережающего типа являются наименее исследованным направлением по сравнению с уравнениями запаздывающего и нейтрального типов. Цель настоящей диссертации – исследование корректных постановок задачи с начальными условиями для уравнений опережающего типа. В диссертации получены новые достаточные и необходимые условия корректной разрешимости задачи с начальными условиями для таких дифференциально-разностного уравнений в весовых пространствах Соболева, установлена сходимость решений задачи с начальным условием для дифференциально-разностного уравнения к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения при стремлении к нулю величины отклонения аргумента. Полученные результаты являются распространением теории функционально-дифференциальных уравнений с класса уравнений запаздывающего и нейтрального типов на уравнения опережающего типа.

Akbari Fallahi A.

The problem with initial data for difference-differential equations with advance

Abstract

Difference-differential equations arise in many problems of mathematical physics and optimal control. Difference-differential equations of advanced type are more unknown object with respect to the difference-differential equations of retarded and neutral type. The aim of dissertation is the investigation of well-posedness of the problem with initial data for difference-differential equation of advanced type. The new sufficient and necessary condition of correct solvability of the problem with initial data for considered difference-differential equations in the weighted Sobolev space are obtained. The convergence of the solutions of the problem with initial data for difference-differential equations to the solution of the Cauchy problem for ordinary differential equation as the value of argument deviation tends to zero is proved. The obtained results are the propagation of the theory of functional differential equations for class of reterded and neutral types onto equations of advanced type.