На правах рукописи

Лийко Виктория Владимировна

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва - 2021

Работа выполнена в Математическом институте им. С.М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Российский университет дружбы народов".

Научный руководитель:

Скубачевский Александр Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор, директор Математического института им. С.М. Никольского Российского университета дружбы народов.

Официальные оппоненты:

Бурский Владимир Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики Московского физико-технического института.

Черепова Марина Федоровна, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования Национального исследовательского университета «МЭИ».

Чечкин Григорий Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Защита состоится 7 декабря 2021 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета ПДС 0200.003 при Российском университете дружбы народов (адрес: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6).

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте «Диссертационные советы РУДН» в сети интернет (http://dissovet.rudn.ru).

Автореферат разослан 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н.

Савин Антон Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Данная диссертация посвящена изучению эллиптических функционально-дифференциальных уравнений в частных производных. В таких уравнениях присутствуют не только дифференциальные операторы, а и операторы сдвига. Такие задачи относятся к нелокальным задачам.

Современная теория функционально-дифференциальных уравнений началась с работ А. Д. Мышкиса [1]. В дальнейшем ее развивали в своих работах многие математики: Л. Э. Эльсгольц [2], Н. Н. Красовский [3], Г. А. Каменский [4], Р. Беллман и К. Кук [5], Дж. Хейл [6], и др. Теории эллиптических функционально-дифференциальных уравнений посвящен целый ряд работ, среди которых широко известны работы Ф. Хартмана и Г. Стампакья [7], А. Б. Антоневича [8], В. С. Рабиновича [9] и др. Интерес к этим уравнениям связан прежде всего с многими важными приложениями: к теории упругости [10,11,12], к теории многомерных диффузионных процессов [13], к проблеме Като о квадратном корне из оператора [14], в современной нелинейной оптике при построении оптических систем с вращением поля в контуре обратной связи [15,16], а также в связи с нелокальными краевыми задачами [17].

Общая теория краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений построена в работах А. Л. Скубачевского. В его работах впервые изучались эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сдвигами по пространственным переменным в ограниченных областях [18,19,20,21,22,23,24]. В указанных работах были

[1]Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, *УМН*, 1949.— *4*, № 5 (33).— С. 99–141.

[2]Эльсгольц Л. Э. Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений, *УМН*, 1954.— *9*, № 4 (62).—С. 95–112.

[3]Красовский Н. Н. О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени, *Докл. АН СССР*, 1957.— *114*, № 2. — С. 252–255.

[4]Каменский Г. А., Мышкис А. Д. К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, *Дифференц. уравнения*, 1974. — *10*, №3. — С. 409–418.

[5]Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, М., 1967.

[6]Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984.

[7]Hartman F., Stampacchia G. On some nonlinear elliptic differential-functional equations, *Acta Math.*, 1966.— *115*.— P. 271–310.

[8]Антоневич А. Б. Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе, *Дифференц. уравн.*, 1972. — *8*, № 2. — С. 309–317.

[9]Рабинович В. С. О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве, *Докл. АН СССР*, 1978.— *243*, № 5.— С. 1134–1137.

[10]Onanov G. G., Tsvetkov E. L. On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory, *Russian J. Math. Phys.*, 1995.— *3*, № 4.— P. 491–500.

[11]Skubachevskii A. L. *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

[12]Onanov G. G., Skubachevskii A. L. Nonlocal Problems in the Mechanics of Three-Layer Shells, *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017.— *12*.— P. 192–207.

[13]Скубачевский А. Л. О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов, *Докл. АН СССР*, 1989. —*307*, № 2. — С. 287–292.

[14]Kato T. Fractional powers of dissipative operators, *J. Math. Soc. Japan*, 1961.— *13*, № 3.— P. 246–274.

[15]Варфоломеев Е. М. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2007. — *21*. — С. 5–36.

[16]Skubachevskii A. L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics, *Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications*, 1998.— *32*, № 2.— P. 261–278.

[17]Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач, *Докл. АН СССР*, 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.

[18]Скубачевский А. Л. О некоторых нелокальных эллиптических краевых задачах, *Дифференц. уравн.*, 1982.— *18*, № 9.— С. 1590–1599.

[19]Скубачевский А. Л. О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач, *Матем. сб.*, 1982.— *117*, № 4.— С. 548–558.

[20]Скубачевский А. Л. Нелокальные эллиптические краевые задачи с вырождением, *Дифференц. уравн.*, 1983.— *19*, № 1.— С. 457–470.

[21]Скубачевский А. Л. Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения, *Матем. заметки*, 1983.— *34*, № 1.— С. 105-112.

[22]Скубачевский А. Л. Нелокальные краевые задачи со сдвигом, *Матем. заметки*, 1985.— *38*, № 4.— С. 587-598.

[23]Скубачевский А. Л. Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы, *Матем. сб.*, 1986. —*129(171)*, № 2. — С. 279–302.

[24]Skubachevskii A. L. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations, *J. Differential*

получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга, исследованы вопросы однозначной и фредгольмовой разрешимости в пространствах Соболева и весовых пространствах, показано, что наличие сдвигов аргументов в старших производных, отображающих точки границы внутрь области, приводит к появлению решений, гладкость которых может нарушаться внутри области даже при бесконечно дифференцируемой правой части и сохраняется лишь в некоторых подобластях. Был обнаружен эффект появления степенных особенностей у производных решений в некоторых точках как на границе, так и внутри области. В дальнейшем исследование теории краевых задач для дифференциально-разностных уравнений продолжалось в работах его учеников, например, изучалась спектральная асимптотика, операторы с вырождением, вторая и третья краевые задачи, краевые задачи для уравнений с несоизмеримыми сдвигами, вопросы гладкости обобщенных решений [25,26, 27, 28,29,30].

Отметим, что смешанные краевые задачи для сильно эллиптических систем дифференциально-разностных уравнений возникают при исследовании упругих деформаций трехслойных пластин с гофрированным заполнителем в случае, когда две противоположные грани пластины жестко закреплены, а другие две – свободны [10], см. рис. 1.

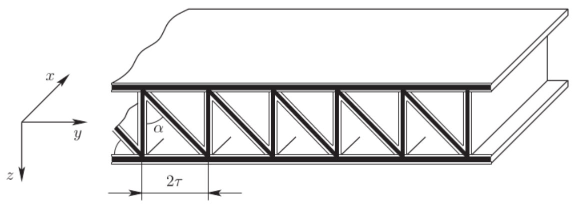

Рис. 1.

Цели и задачи работы. Цель работы заключается в следующем: 1) исследовать эллиптические дифференциально-разностные операторы со смешанными краевыми условиями, рассматриваемые в цилиндрической и в произвольной ограниченной области; 2) описать изоморфизмы функциональных пространств, порожденных этими операторами; 3) показать связь смешанных краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений и нелокальных смешанных краевых задач для сильно эллиптических дифференциальных уравнений; 4) изучить разрешимость и гладкость обобщенных решений таких задач.

Научная новизна. В диссертации получены новые результаты об изоморфизме, порожденном разностным оператором с переменными коэффициентами. Этот результат позволяет связать краевую задачу для эллиптического дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами и нелокальную краевую задачу для эллиптического дифференциального уравнения, использовать результаты о разрешимости и гладкости обобщенных решений одной из этих задач для исследования другой.

Equations, 1986.— *63*, № 3.— P. 332–361.

[25]Подъяпольский В. В., Скубачевский А. Л. Спектральная асимптотика сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов, *Дифференц. уравн.*, 1999. — *35*, № 6.— С. 793–800.

[26]Попов В. А., Скубачевский А. Л. Гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2011.— *39*.— С. 130–140.

[27]Цветков Е. Л. Разрешимость и спектр третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения, *Матем. заметки*, 1992.— *51*, № 6.— С. 599–603.

[28]Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л. Общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений, *Тр. Санкт-Петербург. мат. об-ва.*, 1998. — *5*. — С. 223–288.

[29]Иванова Е. П. О коэрцитивности дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2016. — *62*.— С. 85–99.

[30]Неверова Д. А. Гладкость обобщенных решений задачи Неймана для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения на границе соседних подобластей, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2020.— *66*, № 2.— С. 272–291.

В диссертации рассмотрена смешанная краевая задача для эллиптического дифференциально-разностного уравнения со сдвигами по пространственным переменным в старших производных. Получены новые результаты о постановке смешанных краевых условий. Для таких задач доказана однозначная разрешимость и исследована гладкость обобщенных решений. При этом доказывается, что гладкость сохраняется в некоторых подобластях и может нарушаться на границах соседних подобластей.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертация имеет теоретический характер, а ее результаты могут быть использованы в общей теории нелокальных краевых задач и в теории многослойных пластин с гофрированным заполнителем, а также для анализа результатов численного моделирования решений подобных задач.

Методология и методы исследования. Изучение смешанных краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений основано на комбинации методов исследования эллиптических дифференциальных уравнений, свойствах разностных операторов и теории пространств Соболева.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказаны теоремы об изоморфизмах функциональных пространств, порожденных разностными операторами с переменными коэффициентами.
2. Сформулированы корректные постановки смешанных краевых условий для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений.
3. Доказаны теорема об однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения и теорема о гладкости ее обобщенных решений в подобластях. Получено необходимое и достаточное условие сохранения гладкости обобщенных решений на границе соседних подобластей.
4. Построена связь смешанной краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения и нелокальной смешанной краевой задачи для эллиптического дифференциального уравнения. Доказана теорема о гладкости обобщенных решений смешанной краевой задачи для эллииптического дифференциально-разностного уравнения, необязательно являющегося сильно эллиптическим.
5. Доказана теорема о сохранении гладкости обобщенных решений смешанной краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения в точках сопряжения в случае цилиндрической области и оператора Лапласа. Построен пример нарушения гладкости обобщенных решений в точках сопряжения в случае произвольной ограниченной области.

Степень достоверности результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью приведенных доказательств, многочисленными выступлениями на семинарах, конференциях и школах, а также имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются международными базами данных.

Апробация результатов. Результаты, представленные в диссертационной работе, излагались на семинарах механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова: под руководством В. В. Власова, под руководством Г. А. Чечкина; на семинаре факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством И. С. Ломова; на научном семинаре кафедры высшей математики МФТИ под руководством Е. С. Половинкина; в Российском университете дружбы народов на семинаре под руководством А. Л. Скубачевского; на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов-2018 (Москва, 2018); на Международной научной студенческой конференции МНСК-2018 (Новосибирск, 2018); на 29-й, 30-й и 31-й Крымской Осенней Математической Школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Севастополь, 2018, 2019, 2020); на 5-й Международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования» (Москва, 2018); на Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2019, 2021); на Воронежской весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 2020), на Международной конференции «Frontier in mathematics and computer science» (Ташкент, 2020).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 15 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–5], 10 — в тезисах докладов международных и всероссийских конференций [6-15]. Все результаты диссертации, содержащиеся в совместных работах, принадлежат лично автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 96 страниц с 8 рисунками. Список литературы содержит 79 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится краткий обзор наиболее важных публикаций, смежных с темой исследования, и анализ основных результатов диссертации.

Глава 1 состоит из четырех параграфов и посвящена изоморфизмам функциональных пространств, порожденным разностными операторами.

Параграф 1.1 носит вспомогательный характер. Приводятся результаты, посвященные разностным операторам в ограниченных областях. Строится разбиение области на классы подобластей Q_{sl} и множество $\mathscr{K}$ точек сопряжения, порожденные разностным оператором, а также рассматриваются некоторые геометрические вопросы. Приводятся свойства разностных операторов в пространстве $L_2(Q)$ и в пространствах Соболева.

Рассмотрим разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, определенный по формуле

$$Ru(x) = \sum_{h\in\mathscr{M}} a_h(x)u(x+h), \tag{1}$$

где $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n$ - конечное множество векторов с целочисленными координатами. Коэффициенты разностного оператора будем предполагать бесконечно гладкими функциями, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geqslant 2$.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с бесконечно гладкой границей $\partial Q \in C^\infty$ или $Q = (0, d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ - ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$, и $G = (a, b)$, если $n = 2$.

Введем также оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий по формуле

$$R_Q = P_Q R I_Q, \tag{2}$$

где $I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ – оператор продолжения функций из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$, $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ – оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q.

Через M обозначим аддитивную группу, порожденную множеством $\mathscr{M}$, а через Q_r – открытые связные компоненты множества $Q \setminus (\bigcup\limits_{h\in\mathsf{M}} (\partial Q + h))$.

Множества Q_r будем называть *подобластями*. Множество $\mathscr{R}$ всех подобластей Q_r ($r = 1, 2, \dots$) - *разбиением области* Q.

Разбиение $\mathscr{R}$ естественным образом распадается на непересекающиеся классы: подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathscr{R}$ принадлежат одному и тому же классу, если существует вектор $h \in M$, для которого $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Обозначим подобласти Q_r через Q_{sl}, где s - номер класса ($s = 1, 2, \dots$), а l - порядковый номер данной подобласти в s-м классе. Очевидно, что каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl}. Будем предполагать, что множество различных классов конечно. Обозначим число различных классов через s_1.

Кроме разбиения области, рассмотрим свойства разбиения границы ∂Q. Введем множество

$$\mathscr{K} = \bigcup_{h_1,h_2\in M} \{\overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]}\}. \tag{3}$$

Будем предполагать, что множество $\mathscr{K} \cap \partial Q$ имеет нулевую $(n-1)$-мерную меру Лебега $\mu_{n-1}(\cdot)$.

Обозначим через Γ_p компоненты множества $\partial Q \setminus \mathscr{K}$, которые являются открытыми и связными в топологии ∂Q. Если $(\Gamma_p+h)\cap\overline{Q} \neq \varnothing$ при некотором $h \in M$, то либо $\Gamma_p+h \subset Q$, либо существует $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathscr{K}$ такое, что $\Gamma_p + h = \Gamma_r$.

Множество $\{\Gamma_p + h : \Gamma_p + h \subset \overline{Q}, p = 1, 2, \ldots; h \in M\}$ можно разбить на классы следующим образом: множества $\Gamma_{p_1} + h_1$ и $\Gamma_{p_2} + h_2$ принадлежат одному и тому же классу, если: 1) существует $h \in M$ такое, что $\Gamma_{p_1} + h_1 = \Gamma_{p_2} + h_2 + h$, и 2) в случае $\Gamma_{p_1} + h_1, \Gamma_{p_2} + h_2 \subset \partial Q$ направления внешних нормалей к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{p_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{p_2} + h_2$ совпадают. Будем предполагать, что число различных классов конечно и равно r_1.

Очевидно, что множество $\Gamma_p \subset \partial Q$ может принадлежать лишь одному классу, а множество $\Gamma_p+h \subset Q$ - не более, чем двум классам. Будем обозначать множества Γ_p+h через Γ_{rj}, где $r = 1, 2, \ldots, r_1$ - номер класса, j - номер элемента в данном классе $(1 \leqslant j \leqslant J = J(r))$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\Gamma_{r1}, \ldots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q$, $\Gamma_{r,J_0+1}, \ldots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q$ $(0 \leqslant J_0 = J_0(r) < J(r))$.

Пусть $W_2^k(Q)$, $k \in \mathbb{N}$, – пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(Q)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^k(Q)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_Q \mathscr{D}^\alpha u \cdot \overline{\mathscr{D}^\alpha v} dx,$$

где $\mathscr{D}^\alpha = \mathscr{D}_1^{\alpha_1} \cdots \mathscr{D}_n^{\alpha_n}$, $\mathscr{D}_j = -i\partial/\partial x_j$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Обозначим через $\mathring{W}_2^k(Q)$ замыкание в пространстве $W_2^k(Q)$ множества $C_0^\infty(Q)$ финитных, бесконечно дифференцируемых в Q функций с компактными носителями. Как известно, $\mathring{W}_2^k(Q)$ – подпространство функций из $W_2^k(Q)$, удовлетворяющих равенствам $\mathscr{D}_\nu^{\mu-1} u|_{\partial Q\setminus K} = 0$, $\mu = 1, \ldots, k$, где $\mathscr{D}_\nu = -i\frac{\partial}{\partial \nu}$, ν - единичный вектор внешней нормали к ∂Q в точке $x \in \partial Q \setminus K$; $K = \varnothing$, если $\partial Q \in C^\infty$, и $K = (\{0\} \times \partial G) \cup (\{d\} \times \partial G)$, если $Q = (0, d) \times G$.

Параграф 1.2 посвящен изучению разностного оператора с переменными коэффициентами в цилиндрической области. Доказаны **Теорема 1.1** и **Теорема 1.2** об изоморфизмах функциональных пространств, порожденных таким оператором.

Пусть $Q = (0, d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ - ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$, или $G = (a, b)$, если $n = 2$. Пусть $d = k + \theta$, где $k \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$. Рассмотрим разностный оператор вида

$$(Ru)(x) = \sum_{i=-k}^{k} a_i(x) u(x_1 + i, x_2, \ldots, x_n), \tag{4}$$

где $a_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ - комплекснозначные функции.

Введем матрицы $R_1(x)$ $(x \in \mathbb{R} \times \overline{G})$ порядка $(k + 1) \times (k + 1)$ с элементами

$$r_{ij}^1(x) = a_{j-i}(x_1 + i - 1, x') \quad (i, j = 1, \ldots, k + 1) \tag{5}$$

и $R_2(x)$ $(x \in \mathbb{R} \times \overline{G})$ порядка $k \times k$ с элементами

$$r_{ij}^2(x) = a_{j-i}(x_1 + i - 1, x') \quad (i, j = 1, \ldots, k), \tag{6}$$

где $x = (x_1, x')$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x' \in G$.

Разностный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ будем называть *регулярным*, если $det R_s(x) \neq 0$ $(x \in \overline{Q_{s1}};\ s = 1, 2)$ в случае $0 < \theta < 1$, и если $det R_1(x) \neq 0$ $(x \in \overline{Q_{11}})$, $det R_2(1, x') \neq 0$ $(x' \in \overline{G})$ в случае $\theta = 1$.

Введем $W^1_{2,\gamma}(Q)$ – подпространство функций в пространстве Соболева $W^1_2(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям

$$\begin{aligned} w(x)\big|_{x_1=0} &= \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^{+}(x') w(x_1 + i, x')\big|_{x_1=0}, \\ w(x)\big|_{x_1=d} &= \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^{-}(x') w(x_1 - i, x')\big|_{x_1=d}, \\ w\big|_{[0,d]\times\partial G} &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\gamma_i^{\pm} = \gamma_i^{\pm}(x') \in C^\infty(\overline{G})$ - комплекснозначные функции, $\gamma = \{\gamma_i^{\pm}\}$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Теорема 1.1. *Пусть оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ регулярный. Тогда оператор R_Q непрерывно и взаимно однозначно отображает $\mathring{W}^1_2(Q)$ на $W^1_{2,\gamma}(Q)$ для некоторого множества комплекснозначных функций $\gamma = \{\gamma_i^{\pm}\}$, $\gamma_i^{\pm} \in C^\infty(\overline{G})$.*

Этот результат используется, чтобы установить связь между задачей Дирихле для эллиптического дифференциально-разностного уравнения и эллиптическим дифференциальным уравнением с нелокальными краевыми условиями в цилиндрической области.

Обозначим через $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ подпространство функций в $W^1_2(Q)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$u\big|_{x_1=0} = u\big|_{x_1=d} = 0, \tag{8}$$

где $\Gamma = \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x' \in G\} \cup \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n : x_1 = d, x' \in G\}$.

Введем $W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ – подпространство функций в пространстве Соболева $W^1_2(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям

$$\begin{cases} w(x)\big|_{x_1=0} = \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i^{+}(x') w(x_1 + i, x')\big|_{x_1=0}, \\ w(x)\big|_{x_1=d} = \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i^{-}(x') w(x_1 - i, x')\big|_{x_1=d}, \end{cases} \tag{9}$$

где $\gamma = \{\gamma_i^{\pm}\}$, $\gamma_i^{\pm} = \gamma_i^{\pm}(x') \in C^\infty(\overline{G})$ – комплекснозначные функции.

Теорема 1.2. *Регулярный разностный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ на $W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ для некоторого множества комплекснозначных функций $\gamma = \{\gamma_i^{\pm}\}$, $\gamma_i^{\pm} \in C^\infty(\overline{G})$.*

Этот результат позволяет установить связь между смешанной краевой задачей для эллиптического дифференциально-разностного уравнения и нелокальной смешанной задачей для эллиптического дифференциального уравнения.

Параграф 1.3 посвящен изучению разностного оператора с переменными коэффициентами в произвольной ограниченной области. Доказаны **Теорема 1.3** и **Теорема 1.4** об изоморфизмах функциональных пространств, порожденных таким оператором.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ - ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$. Предположим, что выполнено

Условие 1.1. *Для каждой подобласти Q_{sl} $(s = 1, \ldots, s_1,\ l = 1, \ldots, N(s))$ и для любого $\epsilon > 0$ существует открытое множество $G_{sl} \subset Q_{sl}$ с границей $\partial G_{sl} \in C^1$ такое, что $\mu_n(Q_{sl} \setminus G_{sl}) < \epsilon$, $\mu_{n-1}(\partial G_{sl} \Delta \partial Q_{sl}) < \epsilon$.*

Для любого $r = 1, 2, \dots, r_1$ существует единственный класс $s = s(r)$ такой, что $N(s) = J(r)$ и можно перенумеровать подобласти s-го класса так, чтобы $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, .., N(s))$.

Введем матрицы $R_s = R_s(x)$ $(x \in \overline{Q}_{s1})$ порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами вида

$$r^s_{ij}(x) = \begin{cases} a_h(x + h_{si}) & (h = h_{sj} - h_{si} \in \mathscr{M}), \\ 0 & (h_{sj} - h_{si} \notin \mathscr{M}). \end{cases} \tag{10}$$

Введем матрицы $R^1_{s(r)} = R^1_{s(r)}(x)$, получаемые из матриц $R_{s(r)}(x)$ путем вычеркивания последних $N(s(r)) - J_0(r)$ столбцов $(r \in B)$, матрицы $R^0_{s(r)} = R^0_{s(r)}(x)$ порядка $J_0(r) \times J_0(r)$, получаемые из матрицы $R^1_{s(r)}(x)$ вычеркиванием последних $N(s(r)) - J_0(r)$ строк.

Разностный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ будем называть *регулярным*, если матрицы $R_s(x)$ невырождены для всех $x \in \overline{Q_{s1}}$ и $s = 1, \dots, s_1$, а матрицы $R^0_{s(r)}(x)$ невырождены для всех $x \in \overline{\Gamma_{r1}}$ и $r \in B$.

Введем $W^1_{2,\gamma}(Q)$ – подпространство функций в $W^1_2(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям

$$w(x + h_{sl})|_{\Gamma_{r1}} = \sum_{j=1}^{J_0} \gamma^r_{lj}\, w(x + h_{sj})|_{\Gamma_{r1}}\,, \quad (r \in B, l = J_0 + 1, \dots, J)$$

$$w|_{\Gamma_{rl}} = 0, \quad (r \notin B, l = 1, \dots, J) \tag{11}$$

где $J_0 = J_0(r)$, $\gamma^r_{ij} = \gamma^r_{ij}(x)$ $(x \in \overline{\Gamma_{r1}})$ - комплекснозначные функции, $B = \{r : J_0 > 0\}$.

Теорема 1.3. *Пусть оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ регулярный. Тогда оператор R_Q отображает $\mathring{W}^1_2(Q)$ на $W^1_{2,\gamma}(Q)$ непрерывно и взаимно однозначно для некоторого множества бесконечно гладких комплекснозначных функций $\gamma(x) = \{\gamma^r_{ij}(x)\}$.*

Этот результат используется, чтобы установить связь между задачей Дирихле для эллиптического дифференциально-разностного уравнения и эллиптическим дифференциальным уравнением с нелокальными краевыми условиями в произвольной ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial Q \in C^\infty$.

Обозначим через $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ подпространство функций в $W^1_2(Q)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$u|_{\Gamma_{rl}} = 0 \quad (r \in B, l = J_0 + 1, \dots, J), \tag{12}$$

где $J_0 = J_0(r)$, $J = J(r)$, $B = \{r : J_0(r) > 0\}$; $\Gamma = \{\Gamma_{rl}\}$, $r \in B$, $l = J_0 + 1, \dots, J$.

Введем $W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ – подпространство функций в пространстве Соболева $W^1_2(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям

$$w(x + h_{sl})|_{\Gamma_{r1}} = \sum_{j=1}^{J_0} \gamma^r_{lj} w(x + h_{sj})\big|_{\Gamma_{r1}} \quad (r \in B, l = J_0 + 1, \dots, J), \tag{13}$$

где $\gamma = \{\gamma^r_{ij}\}$.

Теорема 1.4. *Регулярный разностный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ на $W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ для некоторого множества бесконечно гладких комплекснозначных функций $\gamma(x) = \{\gamma^r_{ij}(x)\}$.*

Этот результат позволяет установить связь между смешанной задачей для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения и эллиптическим дифференциальным уравнением с нелокальными смешанными краевыми условиями в произвольной ограниченной области с бесконечно глакдой границей.

Основные результаты первой главы опубликованы в работах [1,2] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В **Главе 2** исследуется смешанная краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения в цилиндре. В **параграфе 2.1** доказывается основная **Теорема 2.1** о корректности смешанных краевых условий для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения в цилиндре с точки зрения сохранения минимальной гладкости функций.

Пусть $Q = (0,d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ - ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$, и $G = (a,b)$, если $n = 2$), разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ задается формулой (4), оператор R_Q задается формулой (2). Всюду в этой главе мы предполагаем, что коэффициенты разностного оператора постоянны. В таком случае, матрицы R_1 и R_2, введенные по формулам (5), (6) содержат постоянные коэффициенты. Также всюду в этой главе предполагаем, что коэффициенты $\gamma_i^\pm$ из нелокальных краевых условий, и в теоремах 1.1, 1.2 постоянные.

Введем $c^1 = (a_k \dots a_1)^T$ и $c^2 = (a_{-1} \dots a_{-k})^T$ – k-мерные векторы, составленные из коэффициентов оператора R.

Теорема 2.1. *Пусть оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ регулярный, и пусть*

$$\begin{cases} c^1 \neq 0,\ c^2 \neq 0, \ \text{если } \theta < 1, \\ \text{векторы } c^1 \text{ и } c^2 \text{ линейно независимы, если } \theta = 1. \end{cases} \tag{14}$$

Предположим также, что $R_Q^{-1}(H_1) \subset W_2^1(Q)$, где H_1 - линейное подпространство в $W_2^1(Q)$. Тогда $R_Q^{-1}(H_1) \subset \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ и $H_1 \subset W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$.

Теорема 2.1 показывает, что для регулярного разностного оператора R_Q, при дополнительном условии (14) на коэффициенты, наличие "минимальной гладкости"функций из некоторого подпространства H_1 и его прообраза $R_Q^{-1}(H_1)$ означает, что функции из прообраза $R_Q^{-1}(H_1)$ имеют нулевые следы на основаниях цилиндра, а функции из самого пространства H_1 удовлетворяют нелокальным краевым условиям. Поэтому при рассмотрении смешанных краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений вида (18) естественно задавать однородные условия Дирихле на основаниях цилиндра и краевые условия второго рода на боковой поверхности цилиндра. Такие задачи эквивалентны смешанным нелокальным краевым задачам для сильно эллиптических дифференциальных уравнений. Рассмотрение эллиптических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями второго рода на сдвигах множеств $\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$, $\Gamma_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = d\}$, порожденных разностным оператором, приводит к переопределенным задачам.

Таким образом, смешанную краевую задачу естественно задавать следующим образом. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{15}$$

Будем предполагать, что он сильно эллиптический в $\overline{Q}$, то есть выполняется условие

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0 \quad (x \in \overline{Q}; 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{16}$$

Здесь $a_{ij} = a_{ji} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ - 1-периодические по x_1 вещественнозначные функции.

Рассмотрим также разностный оператор R, заданный формулой (4), и соответствующий ему $R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$. Предположим, что выполняется дополнительное условие на коэффициенты матрицы R_1, соответствующей оператору R_Q:

$$R_1 + R_1^* > 0. \tag{17}$$

Будем рассматривать дифференциально-разностное уравнение

$$AR_Qu(x) = f_0(x) \quad (x \in Q) \tag{18}$$

со смешанными краевыми условиями

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_1=d} = 0, \tag{19}$$

$$(\sum_{i,j} a_{ij} R_Q u_{x_j} cos(\nu, x_i\ ))|_{\partial Q_{sl} \cap ((0,d)\times\partial G)} = 0 \tag{20}$$

$$(s = 1, 2, l = 1, \ldots, N(s),\ \textit{если}\ \theta < 1; s = 1, l = 1, \ldots, N(1),\ \textit{если}\ \theta = 1;$$
$$N(1) = k + 1, N(2) = k),$$

где $f_0 \in L_2(Q)$, ν - единичный вектор внешней нормали к цилиндрической поверхности $(0, d) \times \partial G$.

Будем называть уравнение (18) *сильно эллиптическим*, если выполняются условия (16), (17).

В **параграфе 2.2** доказана теорема об однозначной разрешимости задачи (18)-(20).

Функцию $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ назовем *обобщенным решением* задачи (18)-(20), если для любой $v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} R_Q u_{x_j} \overline{v}_{x_i} dx = \int\limits_Q f_0 \overline{v} dx. \tag{21}$$

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия* (16), (17). *Тогда для любой правой части* $f_0 \in L_2(Q)$ *у задачи* (18)-(20) *существует единственное обобщенное решение* $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$, *при этом*

$$\|u\|_{W^1_2(Q)} \leqslant c_0 \|f_0\|_{L_2(Q)}, \tag{22}$$

где $c_0 > 0$ *- постоянная, не зависящая от* f_0.

В **параграфе 2.3** доказана теорема о гладкости обобщенных решений задачи (18)-(20) в цилиндрических подобластях.

В случае цилиндрической области Q, множество $\mathscr{K}$, определенное по формуле (3), можно представить в виде

$$\mathscr{K} = \begin{cases} (\bigcup\limits_{l=1}^{k+1} \{l-1\} \times \partial G) \cup (\bigcup\limits_{l=1}^{k+1} \{l-1+\theta\} \times \partial G), \textit{если}\ \theta < 1; \\ \bigcup\limits_{l=1}^{k+2} \{l-1\} \times \partial G, \textit{если}\ \theta = 1. \end{cases} \tag{23}$$

Обозначим $\mathscr{K}^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : dist(x, \mathscr{K}) < \epsilon\}$.

Теорема 2.3. *Пусть уравнение* (18) *сильно эллиптическое, и пусть* $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ *- обобщенное решение задачи* (18)-(20). *Тогда* $u \in W^2_2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\epsilon)$ *для каждого* $\epsilon > 0$ *и всех* s, l $(s = 1, 2, l = 1, \ldots, N(s)$, *если* $\theta < 1$; $s = 1, l = 1, \ldots, N(1)$, *если* $\theta = 1$; $N(1) = k + 1$, $N(2) = k)$.

Параграф 2.4 посвящен теории нелокальных краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в цилиндре. В **Теореме 2.4** доказано существование и единственность обобщенного решения нелокальной смешанной краевой задачи для сильно эллиптического дифференциального уравнения в цилиндре. Доказана **Теорема 2.5** о гладкости обобщенных решений нелокальной краевой задачи для эллиптического дифференциального уравнения. На основании этого результата, в силу Теоремы 1.2 об изоморфизме, получен результат о гладкости обобщенных решений смешанной краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения в предположении регулярности разностного оператора (**Теорема 2.6**).

Теорема 2.6. *Пусть выполнено условие* (16)*, и пусть оператор* R_Q *регулярный. Предположим, что* $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ *- обобщенное решение задачи* (18)-(20)*. Тогда для любого* $\epsilon > 0$ *и всех* s, l $(s = 1, 2, l = 1, \dots, N(s)$*, если* $\theta < 1$*;* $s = 1, l = 1, \dots, N(1)$*, если* $\theta = 1$*;* $N(1) = k+1$*,* $N(2) = k)$ *имеем* $u \in W^2_2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\epsilon)$*.*

Далее в работе обобщаются результаты о гладкости обобщенных решений смешанных краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре: в **параграфе 2.5** получены необходимые и достаточные условия сохранения гладкости таких решений на границе соседних цилиндрических подобластей (**Теорема 2.7** для случая целой длины основания цилиндра, **Теорема 2.8** для случая нецелой длины основания цилиндра), в **параграфе 2.6** доказана теорема **Теорема 2.10** о сохранении гладкости обобщенных решений в цилиндрических подобластях вплоть до точек сопряжения в случае, когда дифференциальный оператор есть оператор Лапласа.

В случае $\theta = 1$ разбиение $\mathscr{R}$ состоит из одного класса подобластей $Q_{1l} = (l-1; l) \times G$, $l = 1, \dots, k+1$. Будем исследовать гладкость обобщенных решений задачи (18)-(20) на границе соседних подобластей Q_{1l} и $Q_{1,l+1}$ $(1 \leqslant l \leqslant k)$. Рассмотрим точку $y^l \in Q \cap (\partial Q_{1l} \setminus \mathscr{K}) \cap (\partial Q_{1,l+1} \setminus \mathscr{K})$. В таком случае $y^l = (l, y')$, где $y' \in G$. Введем матрицы R_{2l} порядка $k \times (k-1)$, получаемые из матрицы R_2 вычеркиванием l-го столбца. Установлены необходимые и достаточные условия сохранения гладкости обобщенного решения в окрестности точки y^l, то есть когда для данного l $(1 \leqslant l \leqslant k)$ существует такое положительное число a, что $\overline{B_a(y^l)} \subset Q \setminus \mathscr{K}$ и $u \in W^2_2(B_a(y^l))$ для всех $f_0 \in L_2(Q)$.

Теорема 2.7. *Пусть разностный оператор* R_Q *регулярный. Для фиксированного* l $(1 \leqslant l \leqslant k)$*, обобщенное решение задачи* (18)-(20) $u(x)$ *принадлежит пространству* $W^2_2(B_a(y^l))$ *при любой правой части* $f_0 \in L_2(Q)$ *тогда и только тогда, когда оба вектора* c^1 *и* c^2 *выражаются как линейные комбинации столбцов матрицы* R_{2l}*.*

В случае $\theta < 1$ разбиение $\mathscr{R}$ состоит из двух классов подобластей: $Q_{1l} = (l-1; l-1+\theta) \times G$, $l = 1, \dots, k+1$; $Q_{2l} = (l-1+\theta; l) \times G$, $l = 1, \dots, k$. Будем исследовать гладкость обобщенных решений задачи (18)-(20) на границе соседних подобластей Q_{1l} и Q_{2l} $(1 \leqslant l \leqslant k)$. Для этого будем рассматривать точки $y^{l,\theta} \in Q \cap (\partial Q_{1l} \setminus \mathscr{K}) \cap (\partial Q_{2l} \setminus \mathscr{K})$ $(1 \leqslant l \leqslant k)$. А также исследуем гладкость обобщенных решений на границе соседних подобластей Q_{2l} и $Q_{1,l+1}$ $(1 \leqslant l \leqslant k)$. Для этого будем рассматривать точки $y^l \in Q \cap (\partial Q_{2l} \setminus \mathscr{K}) \cap (\partial Q_{1,l+1} \setminus \mathscr{K})$ $(1 \leqslant l \leqslant k)$. Установлены необходимые и достаточные условия сохранения гладкости обобщенного решения в окрестности точки y^l $(y^{l,\theta})$, то есть когда для данного l $(1 \leqslant l \leqslant k)$ существует такое положительное число a, что $\overline{B_a(y^l)} \subset Q \setminus \mathscr{K}$ $(\overline{B_a(y^{l,\theta})} \subset Q \setminus \mathscr{K})$ и $u \in W^2_2(B_a(y^l))$ $(u \in W^2_2(B_a(y^{l,\theta})))$ для всех $f_0 \in L_2(Q)$, то есть решения обладают соответствующей гладкостью в окрестности точки y^l $(y^{l,\theta})$.

Теорема 2.8. *Пусть разностный оператор* R_Q *регулярный. Для фиксированного* l $(1 \leqslant l \leqslant k)$*, обобщенное решение задачи* (18)-(20) $u(x)$ *принадлежит пространству* $W^2_2(B_a(y^l))$ *(или пространству* $W^2_2(B_a(y^{l,\theta}))$*) при любой правой части* $f_0 \in L_2(Q)$ *тогда и только тогда, когда вектор* c^2 *(соответственно,* c^1*) выражается как линейная комбинация столбцов матрицы* R_{2l}*.*

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [3,4] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В **Главе 3** исследуется смешанная краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения в произвольной ограниченной области. В **параграфе**

3.1 доказывается основная **Теорема 3.1** о корректности смешанных краевых условий для такого уравнения с точки зрения сохранения минимальной гладкости функций.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ задается формулой (1), оператор R_Q задается формулой (2). Всюду в этой главе будем предполагать, что коэффициенты разностного оператора постоянны. В таком случае, матрицы R_s, $s = 1, \dots, s_1$, заданные формулой (10) содержат постоянные коэффициенты. Также всюду в этой главе будем предполагать, что коэффициенты γ_{ij}^r из нелокальных краевых условий, и в теоремах 1.3, 1.4 постоянные.

Рассмотрим некоторое $r \in B$ и соответствующие $J = J(r)$ и $J_0 = J_0(r)$. Существует единственный класс $s = s(r)$ такой, что $N(s) = J(r)$ и элементы Γ_{rl} лежат в ∂Q_{sl} для всех $l = 1, \dots, N(s)$ после некоторой перенумерации подобластей s-го класса. Существуют такие $p = p(r)$ и $m = m(r)$, что $\Gamma_{r1} \subset \partial Q_{pm}$, $Q_{pm} \neq Q_{s1}$. Перенумеруем подобласти p-го класса таким образом, чтобы $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{pl}$ $(l = 1, \dots, J_0)$, $J_0 \leqslant N(p)$.

Введем матрицу R_s', полученную из матрицы R_s вычеркиванием последних $N(s) - J_0$ строк и первых J_0 столбцов, и матрицу R_p', полученную из матрицы R_p вычеркиванием последних $N(p) - J_0$ строк и первых J_0 столбцов. Обозначим через c_s^l $(l = 1, \dots, N(s) - J_0)$ l-ый столбец матрицы R_s', через c_p^l $(l = 1, \dots, N(p) - J_0)$ l-ый столбец матрицы R_p'.

Введем матрицу $T_r = (R_s'|R_p')$ порядка $J_0 \times (N(s) + N(p) - 2J_0)$, полученную объединением столбцов матриц R_s' и R_p'. Напомним, что для случая произвольной ограниченной области Q пространства $\mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ и $W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$ определены в парагарфе 1.3.

Теорема 3.1. *Пусть оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ регулярный, и пусть*

$$\begin{cases} \text{для всех } r \in B \text{ таких, что } N(p) > J_0, \text{ столбцы матрицы } T_r \\ \text{линейно независимы, и для всех } r \in B \text{ таких, что } N(p) = J_0, \\ \text{столбцы матрицы } R_s' \text{ линейно независимы.} \end{cases} \tag{24}$$

Предположим также, что $R_Q^{-1}(H_1) \subset W_2^1(Q)$, где H_1 – линейное подпространство в $W_2^1(Q)$. Тогда $R_Q^{-1}(H_1) \subset \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ и $H_1 \subset W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$.

Теорема 3.1 показывает, что для регулярного разностного оператора R_Q, при дополнительном условии (24) на коэффициенты, наличие "минимальной гладкости"функций из некоторого подпространства H_1 и его прообраза $R_Q^{-1}(H_1)$ означает, что функции из прообраза $R_Q^{-1}(H_1)$ имеют нулевые следы на многообразиях Γ_{rl} $(r \in B,\ l = J_0+1, \dots, J)$, а функции из самого пространства H_1 удовлетворяют нелокальным краевым условиям. Поэтому при рассмотрении смешанных краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений вида (25) естественно задавать однородные условия Дирихле на многообразиях Γ_{rl} $(r \in B,\ l = J_0 + 1, \dots, J)$ и краевые условия второго рода на многообразиях Γ_{rl} $(r \notin B,\ l = 1, \dots, J)$. Такие задачи эквивалентны смешанным нелокальным краевым задачам для сильно эллиптических дифференциальных уравнений. Рассмотрение эллиптических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями второго рода на сдвигах многообразий Γ_{rl} $(r \notin B,\ l = 1, \dots, J)$ приводит к переопределенным задачам.

Таким образом, для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения смешанные краевые условия естественно задавать следующим образом.

Рассмотрим дифференциальный оператор A, заданный формулой (15). Будем предполагать, что он сильно эллиптический, то есть выполняется условие (16). Здесь $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$AR_Qu(x) = f_0(x) \quad (x \in Q) \tag{25}$$

со смешанными краевыми условиями

$$u|_{\Gamma_{rl}} = 0 \quad (r \in B, l = J_0+1, \dots, J(r)), \tag{26}$$

$$(\sum_{i,j} a_{ij} R_Q u_{x_j} cos(\nu, x_i\ ))|_{\Gamma_{rl}} = 0 \quad (r \notin B, l = 1, \dots, J(r)), \tag{27}$$

где ν - единичный вектор внешней нормали к ∂Q.

Будем предполагать, что матрицы R_s, соответсвующие разностному оператору R_Q удовлетворяют условию

$$R_s + R_s^* > 0 \quad (s = 1, \dots, s_1). \tag{28}$$

Будем называть уравнение (25) *сильно эллиптическим*, если выполняются условия (16), (28).

В **параграфе 3.2** доказана теорема об однозначной разрешимости задачи (25)-(27).

Функцию $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ назовем *обобщенным решением* задачи (25)-(27), если для любой $v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} R_Q u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} = (f_0, v)_{L_2(Q)}. \tag{29}$$

Теорема 3.2. *Пусть уравнение* (25) *сильно эллиптическое. Тогда для любой правой части $f_0 \in L_2(Q)$ у задачи* (25)-(27) *существует единственное обобщенное решение $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$, при этом*

$$\|u\|_{W^1_2(Q)} \leqslant c_0 \|f_0\|_{L_2(Q)}, \tag{30}$$

где $c_0 > 0$ - постоянная, не зависящая от f_0.

В **параграфе 3.3** доказана теорема о гладкости обобщенных решений задачи (25)-(27) в подобластях.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* (16), (28), *$u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ - обобщенное решение задачи* (25)-(27). *Тогда $u \in W^2_2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\epsilon)$ для любого $\epsilon > 0$ и всех s, l $(s = 1, \dots, s_1; l = 1, \dots, N(s))$, где $\mathscr{K}^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : dist(x, \mathscr{K}) < \epsilon\}$.*

Параграф 3.4 посвящен теории нелокальных краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений. В **Теореме 3.4** доказано существование и единственность обобщенного решения нелокальной смешанной краевой задачи для сильно эллиптического дифференциального уравнения. Доказана **Теорема 3.5** о гладкости обобщенных решений нелокальной краевой задачи для эллиптического дифференциального уравнения. На основании этого результата, в силу Теоремы 1.4 об изоморфизме, получен результат о гладкости обобщенных решений смешанной краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения в предположении регулярности разностного оператора (**Теорема 3.6**).

Теорема 3.6. *Пусть разностный оператор R_Q регулярный, и пусть $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ - обобщенное решение задачи* (25)-(27). *Тогда для любого $\epsilon > 0$ и всех s, l, $s = 1, \dots, s_1$, $l = 1, \dots, N(s)$, имеем $u \in W^2_2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\epsilon)$.*

Далее в работе обобщаются результаты о гладкости обобщенных решений смешанных краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений: в **параграфе 3.5** получены необходимые и достаточные условия сохранения гладкости таких решений на границе соседних подобластей (**Теорема 3.7**). В **параграфе 3.6** показано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться вблизи точек сопряжения.

Зафиксируем некоторое s и рассмотрим точку $y^1 \in Q \cap (\partial Q_{s1} \setminus \mathscr{K})$. Пусть $y^l = y^1 + h_{sl} \in Q \cap (\partial Q_{sl} \setminus \mathscr{K}$ $(l = 1, \dots, N(s))$. Будем предполагать, что $y^l \in Q$ $(l = 1, \dots, J_0)$, $y^l \in \partial Q$ $(l = J_0 + 1, \dots, N(s))$. Рассмотрим матрицы B_{sl} $(l = 1, \dots, J_0)$ размера $J_0 \times (J_0 - 1)$, получаемые вычеркиванием l-го столбца из матрицы R_s^0. Установим необходимые и достаточные условия сохранения гладкости обобщенного решения в окрестности точки y^l, то есть когда для данного l $(l = 1, \dots, J_0)$ существует такое положительное $a > 0$, что $\overline{B_a(y^l)} \subset Q \setminus \mathscr{K}$ и $u \in W_2^2(B_a(y^l))$ для всех $f_0 \in L_2(Q)$.

Теорема 3.7. *Пусть разностный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ регулярный. Для фиксированного l $(1 \leqslant l \leqslant J_0)$, обобщенное решение задачи* (25)-(27) *$u(x)$ принадлежит пространству $W_2^2(B_a(y^l))$ для любой правой части $f_0 \in L_2(Q)$ тогда и только тогда, когда каждый столбец матрицы T_r выражается как линейная комбинация столбцов матрицы B_{sl}, если $N(p) > J_0$, и каждый столбец матрицы R_s' выражается как линейная комбинация столбцов матрицы B_{sl}, если $N(p) = J_0$.*

Основные результаты третьей главы опубликованы в работе [5] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В **Заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Исследованы эллиптические дифференциально-разностные операторы со смешанными краевыми условиями, рассматриваемые в цилиндрической и в произвольной ограниченной области.
2. Описаны изоморфизмы функциональных пространств, порожденные этими операторами.
3. Показана связь смешанных краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений и нелокальных смешанных краевых задач для сильно эллиптических дифференциальных уравнений;
4. Изучена разрешимость и гладкость обобщенных решений таких задач.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Skubachevskii A. L., Liiko V. V. On a certain property of a regular difference operator with variable coefficients, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2019. — *64*, № 5.— P. 852–865.

[2] Лийко В. В., Скубачевский А. Л. Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения со смешанными краевыми условиями в цилиндрической области, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2019. — *65*, № 4. — С. 635–654.

[3] Лийко В. В., Скубачевский А. Л. Смешанные задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре, *Матем. заметки*, 2020. — *107*, № 5. — С. 693–716.

[4] Liiko V. V., Skubachevskii A. L. Smoothness of solutions to the mixed problem for elliptic differential-difference equation in cylinder, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2020. Published online. DOI: 10.1080/17476933.2020.1833871.

[5] Liiko V. V. Mixed boundary value problem for strongly elliptic differential difference equations in a bounded domain, *Russian J. Math. Phys.*, 2021.— *28*, № 2.— P. 270–274.

[6] Лийко В.В. Об изоморфизме, порожденном разностным оператором с переменными коэффициентами. Математика: Материалы 56-й Международной научной студенческой конференции (22 — 27 апреля 2018 года), Новосибирск: Издательско-полиграфический центр НГУ, стр. 69.

[7] Лийко В.В. Об одном свойстве невырожденного разностного оператора с переменными коэффициентами в цилиндре. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2018 «XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». Симферополь, издательство и типография ООО «Полипринт», стр. 19-20.

[8] Лийко В.В. Об изоморфизме, порождённом дифференциально-разностным оператором с переменными коэффициентами в цилиндре. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования : тезисы докладов Пятой Международной конференции, посвящённой 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева. Москва, РУДН, 26–29 ноября 2018 г. — М.: РУДН, 2018, стр. 137.

[9] Лийко В.В. Об одном свойстве разностного оператора с переменными коэффициентами. Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (28 января – 2 февраля 2019 г.) Воронежский государственный университет; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019, стр. 182.

[10] Скубачевский А.Л., Лийко В.В. Об одном свойстве регулярного разностного оператора в цилиндре. Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: Международная конференция, Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 18-20 июня 2019 г.: Тезисы докладов. – М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, 2019, стр. 60-61.

[11] Лийко В.В. Смешанные краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019 «XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». Симферополь, издательство и типография ООО «Полипринт», стр. 179-181.

[12] Лийко В.В. Смешанные краевые задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений. Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения — XXXI» (3–9 мая 2020 г.) Воронежский государственный университет; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Математический институт имени В. А. Стеклова РАН. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2020, стр. 133.

[13] Лийко В.В. Гладкость обобщенных решений смешанной краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения в цилиндре. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020 «XXXI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». Симферополь, издательство и типография ООО «Полипринт», стр. 162-163.

[14] Liiko V. Smoothness of Generalized Solutions of Mixed Problem for Elliptic Equations Near Boundaries of Subdomains. FRONTIER IN MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE Abstracts of the International Online Conference (October 12–15, 2020, Tashkent), pp. 62-63.

[15] Лийко В.В. О гладкости обобщенных решений смешанных краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений. Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (28 января – 2 февраля 2021 г.) Воронежский государственный университет; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021, стр. 184-185.

В. В. Лийко

Смешанные краевые задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений второго порядка и их приложения

Аннотация

В диссертации рассматривается смешанная краевая задача для эллиптического дифференциально-разностного уравнения второго порядка. Установлена взаимосвязь такой задачи с нелокальной краевой задачей для эллиптического дифференциального уравнения, что позволяет использовать результаты о разрешимости и гладкости обобщенных решений одной из этих задач для исследования другой. Получены результаты о корректной постановке смешанных краевых условий. Для рассматриваемых задач доказана однозначная разрешимость и исследована гладкость обобщенных решений. При этом доказывается, что гладкость сохраняется в некоторых подобластях и может нарушаться на границах соседних подобластей. Получены результаты о гладкости обобщенных решений в точках сопряжения.

V. V. Liiko

Mixed boundary value problems for strongly elliptic differential-difference equations of second order and their applications

Abstract

We consider mixed boundary value problem for an elliptic differential-difference equation of second order. We establish the connection between this problem and nonlocal boundary value problem for an elliptic differential equation, that makes it possible to use the results on the solvability and smoothness of generalized solutions of one of these problems to study another. Results on the correct statement of mixed boundary conditions are obtained. We prove the unique solvability of these problems and investigate the smoothness of their generalized solutions. It is proved that smoothness is preserved in some subdomains and can be violated at the boundaries of neighboring subdomains. We obtain the results on the smoothness of generalized solutions at the conjugation points.