

На правах рукописи

Щербань Владимир Николаевич

**СТРУКТУРА ПОСТРИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА
РИМАНА-КАРТАНА ТИПА ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ**

01.04.02 - теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2014

Работа выполнена на кафедре теоретической физики
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
"Московский педагогический государственный университет"

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Фролов Борис Николаевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Кречет В.Г.

кандидат физико-математических наук
Портнов Ю.А.

Ведущая организация:

НИИ ядерной физики им. Д.В. Скобельцына МГУ им. М.В. Ломоносова

Защита состоится "15" мая 2014 г. в "15" час. "30" мин. на заседании
диссертационного совета Д 212.203.34 при Российском университете дружбы
народов по адресу: 115419 г. Москва, ул. Орджоникидзе, 3, зал № 1.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского
университета дружбы народов по адресу:
117198 г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

Автореферат разослан "15" марта 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
доцент

Попова В.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. С самого начала создания ОТО не прекращались попытки объяснить новые явления в астрофизике и космологии путем усложнения структуры пространства-времени. Эйнштейн сделал предположение, что четырехмерное пространство-время является искривленным пространством Римана, и на этой основе создал современную теорию гравитации, названную общей теорией относительности (ОТО). Современные модели, объясняющие явления в астрофизике и космологии, основаны именно на ОТО – фундаментальной идеи о том, что геометрическая структура пространства-времени совместна со свойствами материи, заполняющей пространство-время, в том смысле, что динамика материи влияет на метрику и связность пространственно-временного многообразия, а также зависит от геометрических свойств пространства-времени. В рамках теории гравитации Эйнштейна в пространстве Римана созданы различные астрофизические и космологические модели, достаточно успешно описывающие основные структуры наблюдаемой части Вселенной.

Одну из весомых ролей в этом сыграл тот факт, что общая теория относительности достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными [1]. Но, несмотря на все вышесказанное, в ОТО существует множество нерешенных проблем [2], [3]. К ним относятся сингулярность, определение тензора энергии-импульса гравитационного поля, проблема определения начальных данных и другие. Данный факт привел к необходимости поиска путей обобщения и модификации общей теории относительности. Одним из таких обобщений является предположение о том, что пространство-время является по своей геометрической структуре более сложным, чем риманово пространство.

Значительный интерес представляет собой изучение точных решений уравнений поля в пространствах, наделенных более сложной структурой, чем риманово пространство ОТО. Особое место здесь занимает поиск волновых решений, что обладает как теоретическим, так и возможным практическим значением [4]–[9].

В настоящее время одним из обобщений ОТО является пуанкаре-калибровочная теория гравитации. Соответствие между гравитационными потенциалами и свойствами симметрии материи достигается наложением определенных ограничений на обобщенную аффинную связность. Этот подход к теории гравитации дает лучшее понимание связи между природой источников гравитационного поля и группой симметрий пространства-времени. На сегодняшний день существует достаточно боль-

шое количество работ о теории гравитации с кручением. Основным свойством данной теории является связь между кручением и его источником, спиновым моментом внешнего поля [13].

На следующем этапе развития науки многие исследователи считают, что в области высоких энергий группа Пуанкаре заменяется на более общую группу симметрий пространства-времени. На основании этого становится возможным существование связности, не согласованной с метрикой, что дает возможность исследовать пространство с новой геометрической структурой – неметричностью. Одна из наиболее общих канонических калибровочных теорий группы пространства-времени является аффинно-метрическая теория, построенная на базе аффинно-метрического пространства. С рассмотрением пространств, являющихся более сложными, чем пространство ОТО, стала актуальной проблема нахождения и исследования возможных источников гравитационного поля в различных теориях [16].

Разработка и исследование современной теории гравитации основаны на использовании нелинейных по кривизне и кручению лагранжианов [13]. Выбор лагранжиана теории является вопросом, открытым на сегодняшний день. Главная причина этого заключается в том, что прямое обобщение теории Эйнштейна–Картана приводит к теории, где часть уравнений является алгебраическими, что не является удовлетворительным фактом. Естественно, кручение может играть весомую роль только в том случае, когда нелинейные лагранжианы берутся за основу теории гравитации. В построении теории гравитации в пространстве Римана–Картана используются квадратичные лагранжианы [9]. Большая часть квадратичных теорий гравитации в пространстве Римана–Картана являются суммой линейного лагранжиана теории Эйнштейна–Картана и квадратов всех неприводимых частей тензоров кривизны и кручения.

Появление новых теорий стимулирует огромный интерес к гравитационному эксперименту. Каждый год появляются все новые и новые работы, посвященные экспериментальному изучению различных гравитационных эффектов, различным методам их наблюдения. Особое значение занимают проблемы поиска исследования гравитационных волн. По мнению ряда авторов существенным становятся вопросы по экспериментальному обнаружению возможных постримановых свойств пространства-времени [17]–[19], в частности, возможному существованию волн кручения и неметричности. Пока окончательно нерешенным вопросом является и определение возможных источников таких волн.

Изучение волновых решений уравнения поля имеет достаточно давнюю историю. Из анализа задачи Коши для системы уравнений гравитационного и электромагнитного поля в пространстве-времени ОТО, пространстве Римана следует, что основные представления геометрической оптики являются общими для гравитационного и электромагнитного полей [20]. Различные типы гравитационных волн определяются различными типами фронта волны. Данный факт дал возможность создать общековариантную классификацию типов гравитационных волн в зависимости от свойств волнового фронта, определяемых заданием волнового вектора. Исследование волн кручения в большинстве работ проводится путем изначального введения ограничений на основные структуры пространства – кривизны и кручения. Поэтому актуальным для современного этапа развития теории гравитационного взаимодействия является физический смысл и структура подобных ограничений.

Цели и задачи исследования. Целью данной работы является исследование структуры непрерывных компонент кручения, зависящих от 4-х произвольных функций, при распространении в виде плоских волн в пространстве Римана–Картана.

Отметим, что в работе изначально не вводится никаких ограничений на форму кривизны и кручения. Наоборот, структура 2-формы кручения пространства волнового типа непосредственно вытекает из условий симметрий, которым должны удовлетворять такие волны.

Построение современной пуанкаре-калибровочной теории гравитации основано на существенном использовании нелинейных по кривизне и кручению лагранжианов [10]–[16]. Использование квадратичных лагранжианов в теории гравитационного поля стимулируется также построением перенормируемой теории гравитации в пространстве Римана–Картана. Большинство квадратичных теорий гравитации в пространстве Римана–Картана могут быть описаны как частные случаи общего 10-параметрического лагранжиана, введенного в [10], [11] в виде суммы линейного лагранжиана теории Эйнштейна–Картана и квадратов всех неприводимых частей тензоров кривизны и кручения.

На современном этапе теория гравитации описывается на языке внешних дифференциальных форм Картана. Мы будем использовать вариационный формализм на языке внешних форм, основываясь на лемме, сформулированной и доказанной в [8], о коммутации операторов варьирования и дуализации Ходжа.

В пространстве Римана–Картана получение уравнений гравитационного поля может быть осуществлено тремя возможными методами: как частный случай уравне-

ний поля в общем аффинно-метрическом пространстве при наложении условия метричности (согласованности метрики и связности) после варьирования и получения уравнений поля; получение этих уравнений при наложении условия метричности до вариационной процедуры с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа; с помощью явного разрешения условий метричности до вариационной процедуры. Одной из целей данной работы является обоснование эквивалентности последних двух методов варьирования и неэквивалентности этих методов первому методу.

Научная новизна и практическая значимость. Научная новизна результатов работы определяется тем, что в ней:

- Исследованы различные методы получения уравнений поля в аффинно-метрическом пространстве (L_4, g) , и доказана эквивалентность 2-х методов из 3-х возможных.
- Для квадратичных лагранжианов общего вида методом неопределенных множителей Лагранжа получены вариационные уравнения гравитационного поля в пространстве Римана–Картана в формализме внешних форм.
- Доказана теорема о структуре неприводимых компонент кручения при распространении в виде плоских волн в пространстве Римана–Картана. В результате доказана зависимость неприводимых компонент кручения от 4-х произвольных функций запаздывающего аргумента, что привело к расширению границ возможного существования данного типа волн.
- Доказана теорема о необходимом и достаточном условиях существования плоских волн кручения в пространстве Римана–Картана.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

- Май 15–18, 2012, XLVIII Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники, Российский университет дружбы народов, Россия, Москва.
- Сентябрь 3–7, 2012, III-я Российская летняя школа–семинар "Современные теоретические проблемы гравитации и космологии" (GRACOS–2012), Россия, Казань–Яльчик.
- Июнь 24–28, 2013, Third International Conference on Theoretical Physics "Theoretical Physics and its Applications" (MSOU, Russia, Moscow).

- Июнь 24–28, 2013, Международная научная конференция «Фридмановские чтения», ПГНИУ, Россия, Пермь.
- Июль 1–4, 2013, International Conference "Physical Interpretations of Relativity Theory (PIRT–2013)" , Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия, Москва.
- Август 26–30, 2013, Colloquium on Differential Geometry and its Applications and IX-th International Conference on Finsler Extensions of Relativity Theory, Hungary, Debrecen.

Личный вклад автора. Результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах, 3 из которых опубликованы в научных журналах, входящих в Перечень ВАК РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 79 наименования. Объем диссертации – 107 страниц текста, набранного в издательской системе LaTeX.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** дается общая характеристика работы, указывается ее цель, обосновывается актуальность решаемых проблем, дается описание постримановых пространств современной теории гравитации и используемых вариационных методов, а также кратко излагается содержание глав диссертации.

Первая глава диссертации состоит из трех параграфов. В первом параграфе рассматриваются основные понятия теории гравитации в пространстве Римана–Картана RC_4 в формализме внешних форм. Сделан вывод, что в данном формализме 10-параметрический квадратичный лагранжиан представляется в виде суммы линейного лагранжиана теории Эйнштейна–Картана и квадратов всех неприводимых частей 2-форм кривизны и кручения в пространстве RC_4 . Приводится исследование связи этого лагранжиана с другими квадратичными лагранжианами, имеющими место в теории гравитации. Во втором параграфе первой главы рассматривается вариационная процедура в формализме внешних дифференциальных форм. Излагается лемма о коммутационном соотношении между операцией дуализма Ходжа и операциями получения вариационной производной. Лемма необходима для проведения новым методом вариационной процедуры в рамках внешних дифференциальных форм. В третьем параграфе первой главы выводятся уравнения поля квадратичной теории гравитации в пространстве Римана–Картана на языке внешних дифференциальных форм.

Вторая глава состоит из двух параграфов и посвящена вариационному подходу к описанию теории гравитации с квадратичным лагранжианом на языке внешних дифференциальных форм в общем аффинно-метрическом пространстве. В первом параграфе рассмотрены основные понятия теории гравитации в общем аффинно-метрическом пространстве в формализме внешних форм. Второй параграф посвящен анализу различных подходов к методу получения уравнений поля в пространстве Римана–Картана.

Как уже отмечалось, в пространстве Римана–Картана получение уравнений гравитационного поля может быть осуществлено несколькими методами. Данные уравнения могут быть получены как частный случай уравнений поля в общем аффинно-метрическом пространстве при наложении условия метричности (согласованности метрики и связности) после варьирования и получения уравнений поля. Другой метод состоит в получении этих уравнений при наложении условия метричности до вариационной процедуры с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа.

Наконец, третий метод состоит в явном разрешении условий метричности и построении лагранжиана гравитационного поля непосредственно в пространстве Римана–Картана. В данном параграфе проводится обоснование эквивалентности последних двух методов варьирования и неэквивалентности этих методов первому методу.

Главные результаты диссертации изложены в **третьей главе**, в которой проводится исследование плоских волн кручения в пуанкаре-калибровочной в теории гравитации. Здесь изучается проблема существования плоских волн кручения в пуанкаре калибровочной теории гравитации в пространстве Римана–Картана U_4 с кривизной и кручением и рассматривается роль отдельных неприводимых частей кручения при распространении в виде плоских волн.

Плоская волна метрики имеет вид:

$$g = 2H(x, y, u)du^2 + 2dudv - dx^2 - dy^2, \quad (1)$$

и представляет собой частный случай метрики плоскофронтных гравитационных волн с параллельными лучами (pp-волн) [4], [8], где координата u имеет смысл запаздывающего времени и интерпретируется как фаза волны.

Риманово пространство V_4 с метрикой плоской волны допускает группу симметрий G_5 , порождаемую векторными полям X со структурой [4]

$$X = (a + b'x + c'y)\partial_v + b\partial_x + c\partial_y, \quad (2)$$

где $a = \text{const}$, а $b(u)$, $c(u)$ – произвольные функции и b' , c' – их производные.

Группа движений G_5 оставляет неизменной изотропную гиперповерхность в V_4 , описывающую фронт волны с постоянной амплитудой [4]. Как pp-волны, плоские волны метрики обладают нулевыми сдвигом, вращением и растяжением.

Определение[8]. Назовем пространство Римана–Картана U_4 пространством U_4 типа плоской волны, а его метрику и кручение – плоскими волнами метрики и кручения, если метрика g_{ab} и 2-форма кручения T^a этого пространства допускают группу симметрий G_5 , что означает выполнение условий: $L_X g_{ab} = 0$, $L_X T^a = 0$, где L_X – производная Ли вдоль векторного поля X , порождающего группу симметрий G_5 .

Известно, что 2-форма кручения $T^a = 1/2 T^a_{bc} \theta^b \wedge \theta^c$ (θ^b – ортогональный базис 1-форм пространства U_4 , $\wedge$ – оператор внешнего умножения) может быть разложена на три неприводимые части (бесследовую часть, след и псевдослед, соответственно): $T^a = T^{(1)a} + T^{(2)a} + T^{(3)a}$. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. 2-форма кручения пространства U_4 типа плоской волны имеет следующую структуру: бесследовая часть зависит от двух произвольных функций $t_1(u)$

и $t_2(u)$ запаздывающего аргумента u , а след и псевдослед зависят каждый от одной произвольной функции u , соответственно, $t_3(u)$ и $t_4(u)$:

$$\overset{(1)}{T^0} = t_1(u)\theta^1 \wedge \theta^2 + t_2(u)\theta^1 \wedge \theta^3, \quad (3)$$

$$\overset{(2)}{T^0} = t_3(u)\theta^0 \wedge \theta^1, \quad \overset{(2)}{T^2} = -t_3(u)\theta^1 \wedge \theta^2, \quad \overset{(2)}{T^3} = -t_3(u)\theta^1 \wedge \theta^3, \quad (4)$$

$$\overset{(3)}{T^0} = t_4(u)\theta^2 \wedge \theta^3, \quad \overset{(3)}{T^2} = t_4(u)\theta^1 \wedge \theta^3, \quad \overset{(3)}{T^3} = -t_4(u)\theta^1 \wedge \theta^2. \quad (5)$$

Для доказательства подставим векторное поле (2) в уравнение $L_X T^a = 0$. В результате приходим к системе уравнений, следствием которой ввиду произвольности функций b, c, b' и c' будет равенство нулю всех компонент кручения за исключением тех, которые выражены формулами (3)–(5) через четыре произвольных функций от u .

Данная теорема обобщает результат работы [8], в которой плоские волны кручения зависели только от двух произвольных функций, определяющих его бесследовую часть.

Для получения условий существования плоских волн кручения рассматривается квадратичный лагранжиан пуанкаре калибровочной теории гравитации, содержащий сумму линейного члена, пропорционального скаляру кривизны и квадратов неприводимых частей 2-форм кривизны R_b^a и кручения в пространстве U_4 :

$$L_g = f_0 R_b^a \wedge \eta_a^b + \sum_{i=1}^6 \tau_i R_b^a \wedge *R_a^b + \sum_{i=1}^3 \chi_i T^a \wedge *T_a, \quad (6)$$

где f_0, τ_i, χ_i – константы связи, $*$ – оператор дуального сопряжения Ходжа, $\eta_{ab} = *(\theta_a \wedge \theta_b)$.

Уравнения поля получаются варьированием (6) по базису θ^a и 1-форме связности Γ_b^a . Связность в U_4 может быть разложена на риманову часть и конторсию, линейно зависящую от тензора кручения. Для скаляра кривизны имеем разложение:

$$R_b^a \wedge \eta_a^b = \overset{(R)}{R_b^a} \wedge \eta_a^b - \overset{(R)}{D}(*\overset{(2)}{T^a} \wedge \theta_a) + \overset{(1)}{T^a} \wedge *\overset{(1)}{T}_a - 2\overset{(2)}{T^a} \wedge *\overset{(2)}{T}_a - (1/2)\overset{(3)}{T^a} \wedge *\overset{(3)}{T}_a. \quad (7)$$

В результате соответствующего разложения уравнений поля ввиду произвольности функций $t_1(u), t_2(u), t_3(u), dt_3(u)/du, t_3(u)$ и $t_4(u)$ приходим к уравнениям:

$$f_0(H_{xx} + H_{yy}) = 0, \quad f_0 + \chi_1 = 0, \quad 2f_0 - \chi_2 = 0, \quad f_0 - 2\chi_3 = 0. \quad (8)$$

Первое из этих уравнений согласно [4], [8] означает, что волны метрики являются плоскими. Второе уравнение было получено в [8] и означает, что плоские волны

бесследовой части являются безмассовыми. Для выяснения физического смысла второго и третьего уравнений подставим уравнения (8) в лагранжиан (6) и уравнения поля. В результате получим, что плоские волны следа и псевдоследа кручения также являются безмассовыми. Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Пространство Римана–Картана U_4 типа плоской волны с четырьмя произвольными функциями является решением уравнений поля пуанкаре калибровочной теории гравитации тогда и только тогда, когда выполняются условия (8) на константы связи лагранжиана (6). Выполнение этих условий означает, что плоские волны кручения в пространстве U_4 являются безмассовыми.

Наличие в волновом решении произвольных функций является важным обстоятельством, так как согласно [13] это позволяет кодировать сигнал и тем самым передавать информацию. Поэтому при выполнении условий (8) с помощью плоских волн кручения в принципе можно передавать информацию, распространяющуюся со скоростью света, так как кванты этих волн обладают нулевой массой покоя.

Результаты проведенных исследований можно сформулировать в виде следующих положений, **выносимых на защиту**:

1. Доказана эквивалентность 2-х (из 3-х возможных) вариационных методов получения уравнений гравитационного поля в аффинно-метрическом пространстве (L_4, g) .
2. Для квадратичных лагранжианов общего вида методом неопределенных множителей Лагранжа получены вариационные уравнения гравитационного поля в пространстве Римана–Картана в формализме внешних форм.
3. Определена структура неприводимых компонент кручения при распространении в виде плоских волн в пространстве Римана–Картана. Доказана зависимость неприводимых компонент кручения от 4-х произвольных функций запаздывающего аргумента.
4. Определены и доказаны необходимые и достаточные условия существования плоских волн кручения.

Список работ по теме диссертации

- 1) Бабурова О. В., Фролов Б. Н., Щербань В. Н. Плоские волны кручения в пуанкаре калибровочной теории гравитации // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2012. – Т. 55. – № 6. – С. 114–116. (авторский вклад – 50%)
- 2) Бабурова О. В., Липкин К. Н., Фролов Б. Н., Щербань В. Н. Вариационный принцип в постромановых теориях гравитации // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2013. – Т. 56. – № 6. – С. 103–104. (авторский вклад – 30%)
- 3) Babourova O. V., Frolov B. N., Shcherban V. N. Investigation of plane torsion waves in the Poincare gauge theory of gravitation // Gravitation Cosmology (Гравитация и космология). – 2013. – V. 19. – No 3. – P. 144–150. (авторский вклад – 50%)
- 4) Бабурова О.В., Фролов Б.Н., Щербань В.Н. Плоские волны кручения в пространстве Римана–Картана // XLVIII Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники [Текст]: тезисы докладов. – М.: РУДН, 2012. – С. 203–204. (авторский вклад – 50%)
- 5) Бабурова О. В., Фролов Б. Н., Щербань В. Н. Исследование свойств плоских свойств кручения в Пуанкаре калибровочной теории гравитации // В сб. III-я Российская летняя школа-семинар "Современные теоретические проблемы гравитации и космологии" – GRACOS-2013, 3–7 сентября 2013 г., Казань–Яльчик. Труды семинара. – Казань: Типография Казанского Университета, 2013. – С. 69. (авторский вклад – 50%)
- 6) Бабурова О. В., Фролов Б. Н., Щербань В. Н. Структура плоских волн кручения в пространстве Римана–Картана // Фридмановские чтения: тез. докл. международ. науч. конф. (Пермь, 24 июня – 28 июня 2013 г.) / гл. ред. В.Ф. Панов; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2013. – С. 66. (авторский вклад – 50%)

Щербань Владимир Николаевич
"Структура постриманова пространства Римана-Картана типа плоской волны"

Проанализированы различные методы получения уравнений поля в аффинно-метрическом пространстве (L_4, g) , и доказана эквивалентность 2-х методов из 3-х возможных.

Для квадратичных лагранжианов общего вида получены вариационные уравнения гравитационного поля в пространстве Римана-Картана в формализме внешних форм Картана методом неопределенных множителей Лагранжа.

Исследована структура неприводимых компонент кручения при распространении в виде плоских волн в пространстве Римана-Картана. В результате чего была доказана зависимость неприводимых компонент кручения от 4-х произвольных функций запаздывающего аргумента.

Дано определение пространств с кручением типа плоской волны в теориях с квадратичным лагранжианом общего вида в пространстве Римана-Картана. Доказана теорема о структуре кручения в пространствах плоско-фронтного типа.

Доказана теорема о необходимом и достаточном условиях существования плоских волн кручения.

Shcherban' V.N.
"Structure of Riemann-Cartan post-Riemann space of plane-wave-type"

Different methods of obtaining the field equations in an affine-metric space (L_4, g) are analyzed, and an equivalence of 2 methods from the 3 possible is proved.

For the general form of quadratic Lagrangians, variational equations of the gravitational field in the Riemann-Cartan space are derived in an exterior forms formalism by method of uncertain Lagrange multipliers.

The structure of the irreducible components of torsion propagating in the Riemann-Cartan space in the form of plane waves is investigated. As a result, dependence of the irreducible components of the torsion from 4 arbitrary functions from delayed argument is proved.

On the base of definition of the spaces with the type of plane torsion waves in theories quadratic Lagrangians of general form in the Riemann-Cartan space, the theorem on the structure of the torsion in the Riemann-Cartan space of flat-front type is proved.

The theorem about the necessary and sufficient conditions for the existence of plane waves of torsion is proved.

Список литературы

- [1] Вебер Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.—162.—271 с.
- [2] Trautman A. Foundations and current problems of General Relativity. //Lectures on General Relativity / ed. S. Deser, K.W. Ford.—Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1965.
- [3] Иваненко Д.Д., Пронин П.И., Сарданашвили Г.А. Калибровочная теория гравитации.—М.: Изд-во МГУ, 1985.—141 с.
- [4] Adamovich W. Plane waves in gauge theories of gravitation. //Gen. Rel. Grav.—1980.—V. 12.—P. 677–691.
- [5] Sipper R, Goenner H. //Gen. Relat. Grav.—1986.—V. 18.—P. 1229–1243.
- [6] Jogia S., Griffiths J. B. //Gen. Rel. Grav. — 1980. - V.12 — P.597–617.
- [7] Zhytnikov V. V. //J. Math. Phys.—1994.—V. 35.—P. 6001–6017.
- [8] Babourova O. V., Frolov B. N., Klimova E. A. //Class. Quantum Grav.—1999.—V. 16.—P. 1149–1162.
- [9] Бабурова О. В., Фролов Б. Н., Щербань В. Н. //Известия вузов. Физика.—2012.—Т. 55.—№ 6.—С. 114–116.
- [10] Frolov B. N. //Вестник Моск. ун-та, сер. физ., астроф.—1963.—№6.—С. 48–58.
- [11] Hayashi K. //Prog. Theor. Phys.—1968.—V. 39.—P. 494–515.
- [12] Frolov B. N. //Acta Phys. Polon.—1978.—V. B9.—P. 823–829.
- [13] Hehl F. W., McCrea J. D., Mielke E. W., Neeman Y. Metric affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors and breaking of dilaton invariance. //Phys. Rep.—1995.—V. 258.—P. 1–171.
- [14] Фролов Б. Н. Пуанкаре калибровочная теория гравитации.—М.: МПГУ, Прометей, 2003.—160 с.
- [15] Frolov B. N. //Grav. Cosmol. (Гравитация и космология).—2004.—V. 6.—N. 4(24).—P. 116–120.
- [16] Obukhov Yu. N. //Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.—2006.—V. 3.—P. 95–138 (gr-qc/0601090v1).
- [17] Бабурова О. В., Косткин Р. С., Фролов Б. Н. //Известия вузов. Физика.—2011.—Т. 54.—№1.—С. 111–112.
- [18] Babourova O. V., Frolov B. N., Lipkin K. N. //Grav. Cosm.—2012.—V. 18.—No 4.—P. 225–231.
- [19] Пронин П.И. Как измерить кручение? //Сб. Экспериментальные тесты теории гравитации/ ред. В.Б. Брагинский и В.Д. Денисов.—М.: Изд-во МГУ.—1988.—С. 146–152.
- [20] Захаров В.Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна.—М.: Наука, 1972.—200 с.