

На правах рукописи



Чирков Дмитрий Михайлович

**Точные космологические решения в гравитации
Лавлока**

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова"

- Научный руководитель:** доктор физико-математических наук,
профессор Постнов Константин Александрович
- Научный консультант:** кандидат физико-математических наук,
Топоренский Алексей Владимирович
старший научный сотрудник ГАИШ МГУ
- Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук,
профессор Иващук Владимир Дмитриевич,
ведущий научный сотрудник ФГУП Всероссийский
научно-исследовательский институт метрологической службы

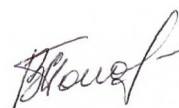
доктор физико-математических наук
профессор Макаренко Андрей Николаевич,
проректор по научной работе ФГБОУ ВПО
"Томский государственный педагогический университет"
- Ведущая организация:** ФГАОУ ВПО "Казанский (Приволжский)
федеральный университет"

Защита состоится 11 февраля 2016 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.203.34 при Российском университете дружбы народов по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, зал № 1.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского университета дружбы народов по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Автореферат разослан декабря 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.203.34
кандидат физико-математических наук



В. А. Попова

Общая характеристика работы

В ноябре 1915 года А. Эйнштейн опубликовал систему уравнений, описывающих гравитацию как результат искривления пространства-времени под влиянием материи:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi k}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = \overline{0,3}, \quad (1)$$

где $G_{\mu\nu}$ – тензор Эйнштейна, $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса материи, k – ньютоновская гравитационная постоянная, c – скорость света. Уравнения (1) легли в основу Общей Теории Относительности (ОТО), которая вскоре после своего появления стала одним из краеугольных камней современной физики. Несмотря на очевидный успех ОТО, уже в 1920-х гг. стали предприниматься попытки обобщить ее (с целью объединения гравитации и электромагнетизма – здесь в первую очередь следует отметить работы Г. Вейля, Т. Калуцы и О. Клейна) и даже предложить альтернативные варианты (аффинная теория А. Эддингтона). Так было положено начало целому направлению в физике, которое сегодня принято называть *модифицированной гравитацией* (modified gravity). С годами число модифицированных теорий росло; сегодня существуют десятки различных моделей, которые, в основном, укладываются в три категории.

1. *Модели с дополнительными пространственными измерениями* включают в себя два подкласса:

- модели с компактными дополнительными измерениями (примеры: теория Нордстрема, теория Калуцы-Клейна, а также теория (супер)струн – претендент на объединение всех известных видов физических взаимодействий, включая гравитацию);
- модели с некомпактными дополнительными измерениями ("мир на бране" (braneworld paradigm); примерами могут служить: модель Аркани-Димопулоса-Двали, модели Рэндалл-Сандрума с одной и двумя бранами, модель Двали-Габададзе-Поратти).

2. *Модели с дополнительными полями*, к числу которых относятся:

- скалярно-тензорные модели гравитации (пример: теория Бранса-Дикке);
- векторно-тензорные модели гравитации (примеры: теория Яковсона, теория Нордтведта-Уилла);
- тензорно-тензорные модели (биметрическая гравитация); примеры: теория Розена, теория Драммонда, массивная гравитация.

Отдельной строкой следует упомянуть теорию Эйнштейна-Картана-Скиама-Киббла, представляющую собой, фактически, ОТО с кручением.

3. *Модели с уравнениями движения, содержащими производные выше второго порядка.*

Один из возможных путей расширения Общей Теории Относительности состоит в том, чтобы позволить динамическим уравнениям содержать производные компонент метрического тензора выше второго порядка. Такое допущение обеспечивает, например, более быстрое убывание гравитонного пропагатора, улучшая свойство перенормируемости теории при ее квантовании. В то же время этот подход имеет и свои недостатки, один из наиболее существенных среди которых – появление "духов" (полей, допускающих физические состояния с отрицательной энергией). Примерами моделей с производными высшего порядка могут служить: $f(R)$ теория, модель Хоравы-Лифшица.

Еще одна разновидность модифицированной гравитации, которую мы не упомянули выше, – гравитация Лавлока. Известно, что уравнения Эйнштейна могут быть заданы аксиоматически: для того, чтобы уравнения вида $A_{\mu\nu} = \frac{8\pi k}{c^4} T_{\mu\nu}$ описывали гравитационное поле необходимо, чтобы тензор A удовлетворял следующим четырем требованиям:

1. симметричность: $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$;
2. ковариантное постоянство: $A_{\mu\nu;\nu} = 0$ (по ν идет суммирование, символ ';' означает ковариантную производную);
3. зависимость только от компонент метрического тензора и их производных до второго порядка включительно;
4. линейная зависимость от вторых производных метрического тензора.

Можно показать, что единственным тензором, подчиняющимся всем четырем условиям является комбинация $A_{\mu\nu} = c_1 G_{\mu\nu} + c_2 g_{\mu\nu}$, где $G_{\mu\nu}$ – тензор Эйнштейна, $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор, c_1, c_2 – постоянные. Д. Лавлок предложил отказаться от последнего условия и нашел наиболее общее выражение для тензора, подчиняющегося условиям (1)-(3), а также лагранжиан, варьирование которого по метрике приводит к этому тензору. Лавлоковский лагранжиан представляет собой сумму всех возможных для рассматриваемого числа измерений эйлеровых плотностей:

$$\mathcal{L}_{\text{Lovelock}} = \sum_{n=0}^d c_n \mathcal{R}_n, \quad d = \left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor, \quad \mathcal{R}_n = \frac{1}{2^n} \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{2n}}^{\beta_1 \dots \beta_{2n}} \prod_{s=1}^n R_{\beta_{2s-1} \beta_{2s}}^{\alpha_{2s-1} \alpha_{2s}}, \quad \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{2n}}^{\beta_1 \dots \beta_{2n}} = \frac{1}{n!} \delta_{[\alpha_1}^{\beta_1} \dots \delta_{\alpha_{2n}] }^{\beta_{2n}} \quad (2)$$

где D – размерность пространства, $\left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor$ – целая часть $\frac{D}{2}$, $R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ – компоненты тензора Римана, $\delta_{\alpha_1}^{\beta_1}, \dots, \delta_{\alpha_{2n}}^{\beta_{2n}}$ – символы Кронекера, квадратные скобки подразумевают антисимметризацию по индексам $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$. В обычном четырехмерном пространстве-времени ($D = 3$) лагранжиан (2) содержит только скалярную кривизну, и гравитация Лавлока совпадает с ОТО. В пяти- и шестимерных многообразиях ($D = 4, 5$) к скалярной кривизне добавляется еще одно слагаемое, известное как член Гаусса-Бонне:

$$\mathcal{L}_{\text{Gauss-Bonnet}} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - 4 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R^2, \quad (3)$$

и так далее. В конце 1980-х Б. Цвейбах и Б. Зумино показали, что в низкоэнергетическом пределе теории гетеротических струн в лагранжиане возникают поправки по кривизне, причем квадратичная в точности совпадает с (3) – этот факт нередко служит весомым аргументом в пользу исследований гравитации Лавлока. Однако, совпадение лавлоковских поправок со струнными ограничивается лишь вторым порядком – уже кубические струнные поправки по кривизне не совпадают с кубическими лавлоковскими.

Интерес к модели Лавлока во многом связан с тем, что она представляет собой наиболее общую метрическую теорию гравитации с динамическими уравнениями не выше второго порядка. Это, в частности, позволяет говорить о том, что лавлоковский лагранжиан является естественным обобщением лагранжиана Гильберта-Эйнштейна, а тензор Лавлока – обобщением тензора Эйнштейна.

Актуальность темы.

Попытки объединить различные силы природы, начавшиеся практически одновременно с появлением Общей Теории Относительности, привели к возникновению парадигмы многомерной Вселенной. За последние десятилетия достигнут значительный прогресс в построении единой теории фундаментальных взаимодействий, одним из наиболее перспективных кандидатов на роль которой является теория струн. Исследование многомерных космологических моделей позволяет рассмотреть космологический аспект этой теории и оценить (независимо от физики частиц), насколько та или иная модель, существующая в ее рамках, соотносится с реальностью.

В конце 1990-х годов было открыто ускоренное расширение Вселенной. Одно из возможных объяснений этого явления состоит в том, что законы, которым подчиняется гравитация, на космологических масштабах длин и времен отличаются от Общей Теории Относительности. Получение и исследование (в контексте существующих наблюдательных данных) космологических решений в рамках лавлоковской модели гравитации дает возможность понять, насколько данная модель является жизнеспособной, и может ли она выступать в роли более фундаментальной, чем ОТО, теории гравитации.

Чрезвычайная нелинейность как ОТО, так и гравитации Лавлока, делает крайне затруднительным предсказание каких-либо свойств и возможного физического смысла решений на основе лишь качественного анализа уравнений, лежащих в основе теории. В этой связи особенно важное значение приобретают поиск точных решений и разработка новых методов их получения.

Цель работы.

Были поставлены следующие цели:

- Исследование устойчивости степенных решений в рамках плоской анизотропной модели гравитации Гаусса-Бонне с магнитным полем.
- Получение точных космологических решений с экспоненциальной зависимостью масштабного фактора от времени, а также необходимых условий их существования, в рамках плоской анизотропной модели гравитации Лавлока.

Научная новизна работы.

Все результаты, представленные в диссертации новые.

В рамках исследования плоских анизотропных космологических моделей гравитации Гаусса-Бонне с магнитным полем:

1. получены условия устойчивости степенных решений вблизи начальной космологической сингулярности для произвольного числа пространственных измерений;
2. в рамках $(5+1)$ -, $(6+1)$ -, $(7+1)$ -, $(8+1)$ -мерных моделей численно найдены решения, демонстрирующие колебательный характер приближения к точке начальной космологической сингулярности, отличный от известного колебательного режима, обнаруженного Белинским, Лифшицем и Халатниковым в рамках общей теории относительности.

В рамках исследования плоских анизотропных космологических моделей гравитации Лавлока с произвольным числом пространственных измерений:

1. разработан метод, позволяющий получать все возможные экспоненциальные решения с переменным объемом;
2. в явном виде получены все возможные точные экспоненциальные решения с переменным объемом в $(4+1)$ -, $(5+1)$ -, $(6+1)$ -, $(7+1)$ -мерных моделях;
3. получены необходимые условия существования экспоненциальных решений с постоянным объемом в модели Эйнштейна-Гаусса-Бонне с изотропной идеальной жидкостью.

Научная и практическая значимость.

- Разработанный метод дает возможность получать точные экспоненциальные решения в рамках общей (то есть с произвольным количеством поправок по кривизне в лагранжиане) модели Лавлока для произвольного числа пространственных измерений и может быть использован в широком классе космологических задач.
- Найденные необходимые условия существования экспоненциальных решений позволяют сузить диапазон допустимых космологических моделей, облегчая дальнейшие исследования в этом направлении.
- Полученные экспоненциальные решения с трехмерным изотропным подпространством в дальнейшем могут быть использованы в космологических моделях реальной Вселенной для описания определенных этапов ее эволюции (например, первичной инфляции).
- Полученные условия устойчивости степенных решений вблизи начальной космологической сингулярности, а также численно обнаруженные осциллирующие решения могут быть полезны для исследований, посвященных изучению природы начальной космологической сингулярности.

Методы исследования.

В данной работе использовались методы теории дифференциальных уравнений, алгебраические методы, численное интегрирование.

Апробация работы.

Основные результаты работы докладывались соискателем на:

- международной конференции по физике высоких энергий "17th International Seminar on High Energy Physics Quarks-2012", Ярославль, июнь 2012;
- международной конференции по теоретической и экспериментальной общей теории относительности, астрофизике и релятивистской теории поля "Thirteenth Marcel Grossmann Meeting", Стокгольм (Швеция), июль 2012;
- международной конференции по физике высоких энергий "18th International Seminar on High Energy Physics Quarks-2014", Суздаль, июнь 2014;
- международной конференции по гравитации, космологии и астрофизике "RUSGRAV-15", Казань, июль 2014.

Публикации и личный вклад автора.

Результаты диссертации изложены в 4 научных работах, опубликованных в российских и зарубежных изданиях, включенных в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, двух приложений, а также списка литературы, списка таблиц и списка рисунков. Диссертация содержит 86 страниц, 4 рисунка и 7 таблиц. Список литературы содержит 104 наименования.

Содержание диссертации.

Введение.

Во введении обосновывается актуальность работы; обсуждаются цели и задачи, научная новизна, научная и практическая значимость исследования; приводится список работ, в которых опубликованы результаты диссертации с указанием личного вклада автора в совместных публикациях; дано краткое содержание каждой главы.

Глава 1. Устойчивость степенных решений в гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне.

В первой главе диссертационной работы проведен анализ устойчивости степенных решений для плоских анизотропных космологических моделей с однородным магнитным полем в рамках классической эйнштейновской гравитации и гравитации Гаусса-Бонне. Специальный выбор системы отсчета, в которой метрика диагональна, позволил существенно упростить динамические уравнения, что, в свою очередь, дало возможность аналитически получить условия устойчивости степенных решений. Условия устойчивости имеют одинаковую структуру и в ОТО, и в модели гравитации Гаусса-Бонне.

Возмущения (обобщенных) казнеровских решений, не удовлетворяющих условиям устойчивости, могут приводить к появлению других, принципиально новых решений. Один класс таких решений был обнаружен численно в рамках космологических моделей с магнитным полем и гравитацией Гаусса-Бонне; эти решения отличаются следующие особенности: две из D компонент (диагональной) метрики осциллируют и имеют противоположные знаки, остальные изменяются медленно по сравнению с первыми двумя и осцилляций не проявляют; элемент объема $\sqrt{|g|}d^Dx$ также испытывает колебания, что качественно отличает такой режим приближения к начальной космологической сингулярности от колебательного режима, открытого Белинским, Лифшицем и Халатниковым. Для моделей с магнитным полем, управляемых гравитацией Эйнштейна, решения с осцилляциями объема обнаружены не были.

Глава 2. Точные экспоненциальные космологические решения в гравитации Лавлока.

Во второй главе диссертационной работы представлен метод получения экспоненциальных решений с переменным объемом в рамках моделей с любым числом пространственных измере-

ний и любым количеством лавлоковских членов в лагранжиане. Метод протестирован на $(4+1)$ -, $(5+1)$ -, $(6+1)$ - и $(7+1)$ -мерных моделях с двумя и тремя лавлоковскими членами. Описано применение метода на примерах $(7+1)$ -мерной модели с тремя лавлоковскими членами и $(5+1)$ -мерной модели с двумя лавлоковскими членами (модель Эйнштейна-Гаусса-Бонне); получены все возможные $(4+1)$ - и $(5+1)$ -мерные, а также $(6+1)$ - и $(7+1)$ -мерные решения с переменным объемом; составлена таблица, показывающая количественное распределение решений в зависимости от размерности пространства-времени и числа лавлоковских членов. Найдены необходимые условия существования решений с постоянным объемом.

Обнаружены следующие особенности экспоненциальных решений:

- все решения с переменным объемом принадлежат одному из двух типов: 1) вакуумные, 2) решения с Λ -членом; необходимым условием существования решений обоих типов является расщепление пространства на изотропные подпространства;
- решения с постоянным объемом существуют только при условии, что плотность энергии материи превышает некоторое критическое значение, зависящее от уравнения состояния материи; при этом параметр ω , фигурирующий в уравнении состояния $p = \omega\rho$, должен быть строго меньше $1/3$;
- для $(4+1)$ - и $(5+1)$ -мерных экспоненциальных решений с переменным объемом характерно преобладание решений с отрицательной константой связи ζ_2 (ζ_2 — коэффициент перед членом Гаусса-Бонне в лагранжиане) по сравнению с теми решениями, для которых $\zeta_2 > 0$; в частности, изотропные вакуумные экспоненциальные решения, а также невакуумные решения с $[D - 1] + 1$ расщеплением (D — число пространственных измерений) существуют только при $\zeta_2 < 0$ вне зависимости от размерности пространства;
- увеличение числа лавлоковских членов в лагранжиане приводит к увеличению числа решений с переменным объемом; в частности, в $(6+1)$ - и $(7+1)$ -мерных моделях, содержащих лавлоковские поправки до третьего порядка включительно, решений больше, чем в ЭГБ-моделях тех же размерностей.

Отдельно рассмотрены решения с трехмерным изотропным подпространством и различными знаками параметров Хаббла, соответствующих этому подпространству и остальным направлениям. Последнее требование позволяет добиться того, чтобы Вселенная изотропно расширялась вдоль трех измерений (при условии положительности соответствующих параметров Хаббла) и (анизотропно, вообще говоря) сжималась вдоль прочих измерений — таким образом достигается быстрая (благодаря экспоненциальному характеру сжатия) компактификация дополнительных измерений, и модель с трехмерным изотропно расширяющимся подпространством может быть использована при описании реальной Вселенной (разумеется, при условии введения в модель механизма, позволяющего "своевременно" завершить стадию инфляции). Составлена таблица, в которой представлено количественное распределение решений с трехмерным изотропным подпространством в зависимости от размерности пространства-времени и числа лавлоковских членов.

Заключение.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации и приведены положения, выносимые на защиту.

Положения, выносимые на защиту.

На защиту выносятся:

1. условия устойчивости степенных решений вблизи начальной космологической сингулярности в плоских анизотропных моделях гравитации Гаусса-Бонне с магнитным полем для произвольного числа пространственных измерений;
2. найденные численно в рамках $(5+1)$ -, $(6+1)$ -, $(7+1)$ -, $(8+1)$ -мерных плоских анизотропных моделей гравитации Гаусса-Бонне решения, демонстрирующие колебательный характер приближения к точке начальной космологической сингулярности;
3. метод, позволяющий получать все возможные экспоненциальные космологические решения с переменным объемом в рамках плоских анизотропных моделей гравитации Лавлока для произвольного числа пространственных измерений;
4. точные экспоненциальные космологические решения с переменным объемом в $(4+1)$ -, $(5+1)$ -, $(6+1)$ -, $(7+1)$ -мерных плоских анизотропных моделях гравитации Лавлока;
5. анализ решений с трехмерным изотропным подпространством;
6. необходимые условия существования экспоненциальных космологических решений с постоянным объемом в плоских анизотропных моделях гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне с изотропной идеальной жидкостью для произвольного числа пространственных измерений.

Итоги исследования и перспективы.

Полученные в настоящей диссертации условия устойчивости степенных решений, а также обнаруженный численно режим приближения к начальной космологической сингулярности, качественно отличающийся от известного колебательного режима, открытого Белинским, Лифшицем и Халатниковым, имеют важное значение для изучения космологических сингулярностей и поиска новых космологических решений.

Разработанный метод дает возможность получать точные экспоненциальные решения в рамках общей (то есть с произвольным количеством поправок по кривизне в лагранжиане) модели Лавлока для произвольного числа пространственных измерений и может быть использован в широком классе космологических задач. В частности, полученные экспоненциальные решения с трехмерным изотропным подпространством в дальнейшем могут быть использованы в космологических моделях реальной Вселенной для описания определенных этапов ее эволюции (например, первичной инфляции).

Публикации автора по теме диссертации

1. Chirkov D., Toporensky A. On the Stability of Power-Law Solutions in Multidimensional Gauss-Bonnet Cosmology // Gravitation and Cosmology. 2013. Vol. 19, No. 4. p. 275.
2. Chirkov D., Pavluchenko S., Toporensky A. Exact exponential solutions in Einstein Gauss Bonnet flat anisotropic cosmology // Mod. Phys. Lett. A. 2014. Vol. 29, No. 18. p. 1450093.
3. Chirkov D., Pavluchenko S., Toporensky A. Constant volume exponential solutions in Einstein–Gauss–Bonnet flat anisotropic cosmology with a perfect fluid // Gen. Rel. Grav. 2014. Vol. 46, No. 10. p. 1799.
4. Chirkov D., Pavluchenko S., Toporensky A. Non-constant volume exponential solutions in higher-dimensional Lovelock cosmologies // Gen. Rel. Grav. 2015. Vol. 47, No. 11. p. 137.

Аннотация.

Чирков Дмитрий Михайлович

Точные космологические решения в гравитации Лавлока

Получены условия устойчивости степенных решений вблизи начальной космологической сингулярности в плоских анизотропных моделях гравитации Гаусса-Бонне с магнитным полем для произвольного числа пространственных измерений. Разработан метод, позволяющий получать все возможные экспоненциальные космологические решения с переменным объемом в рамках плоских анизотропных моделей гравитации Лавлока для произвольного числа пространственных измерений. Найдены точные экспоненциальные космологические решения с переменным объемом в $(4+1)$ -, $(5+1)$ -, $(6+1)$ -, $(7+1)$ -мерных плоских анизотропных моделях гравитации Лавлока. Проведен анализ решений с трехмерным изотропным подпространством. Получены необходимые условия существования экспоненциальных космологических решений с постоянным объемом в плоских анизотропных моделях гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне с изотропной идеальной жидкостью для произвольного числа пространственных измерений.

Abstract.

Chirkov Dmitry Mikhailovich

Exact cosmological solutions in Lovelock gravity

Analysis of stability of known power-law solutions in Gauss-Bonnet anisotropic cosmology in the presence of a homogeneous magnetic field was performed; conditions for the particular power-law solution to be stable was found analytically. A method which allows one to find all possible exponential solutions of special class – non-constant volume solutions – in Lovelock gravity in arbitrary number of dimensions and with arbitrary combinations of Lovelock terms was proposed. All possible non-constant volume solutions for $(4+1)$ -, $(5+1)$ -, $(6+1)$ -, $(7+1)$ -dimensional models was obtained. Analysis of solutions which allow three-dimensional isotropic subspaces was performed. Necessary conditions of existence for constant volume exponential solutions in flat anisotropic Einstein-Gauss-Bonnet gravity was found.