

Орлова Елена Юрьевна

«Динамика спинорных самогравитирующих полей
в аффинно-метрическом пространстве-времени»

На правах рукописи

УДК 530.12:531.51;539.12.17

Исследуются свойства спинорных полей в рамках общерелятивистской теории гравитации, рассматривающей гравитацию как проявление геометрических свойств искривленного пространства – времени, оснащенного в общем случае кривизной, кручением и неметричностью.

Получены точные решения системы уравнений Эйнштейна и спинорного поля, описывающих взаимодействие спинорного и гравитационного полей в аффинно-метрическом пространстве-времени. В результате показывается, что эффекты такого взаимодействия могут устранять космологические сингулярности и приводить к образованию геометрии пространства – времени с нетривиальной топологией, например типа «кротовых нор».

Elena Orlova

"The dynamics of self-gravitating spinor fields in the affine-metric
space-time"

We study the properties of spinor fields in general relativistic theory of gravitation, which considers gravity as a manifestation of the geometric properties of curved space-time, framed in the general case, the curvature, torsion and nonlinearity.

Exact solutions of Einstein's equations and the equations of spinor field, describing the interaction of spinor and gravitational fields in the affine-metric space-time. The result shows that the effects of such interaction can remove the cosmological singularity and give rise to the geometry of space-time with nontrivial topology, for example such as "wormholes".

Орлова Елена Юрьевна

**ДИНАМИКА СПИНОРНЫХ
САМОГРАВИТИРУЮЩИХ ПОЛЕЙ
В АФФИННО – МЕТРИЧЕСКОМ
ПРОСТРАНСТВЕ – ВРЕМЕНИ**

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Ярославль, 2011

Работа выполнена на кафедре общей физики физико-математического факультета Ярославского государственного педагогического университета имени К. Д. Ушинского.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Кречет В. Г.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Сарданашвили Г. А.,
кандидат физико-математических наук,
доцент Болохов С. В.

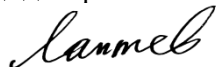
Ведущая организация: Федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования «Московский педагогический
государственный университет»

Защита состоится 15 ноября 2011 г. в 15 час. 30 мин. на заседании
диссертационного совета Д 212.203.34 Российского университета
дружбы народов по адресу: 115419, г. Москва ул. Орджоникидзе, 3,
зал № 1.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке
Российского университета дружбы народов по адресу: 117198,
г. Москва ул. Миклухо-Маклая, 6.

Автореферат разослан 1 октября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.203.34
кандидат физико-математических наук, доцент



Лаптев Ю. П.

и астрофизике. 4-ая Ульяновская международная школа-семинар «Проблемы теоретической и наблюдательной космологии». – Ульяновск: УлГУ, 2011, С. 100.

19.Алиев Б. Г. О конформном соответствии 4-мерной теории с электромагнитным полем и пятимерной теории Калуцы //Международная конференция по гравитации, космологии, астрофизике и нестационарной газодинамике, посвященной 90-летию со дня рождения профессора К. П. Станюковича. М.: РУДН, 2006, С. 23.

20.Владимиров Ю. С. Размерность физического пространства – времени и объединение взаимодействий. М.: МГУ, 1987.

21.Кречет В. Г. Пятимерная геометрическая модель электрослабых взаимодействий // Сб. Гравитация и электромагнетизм. Вып. 7, Минск, 1998. С. 61 – 67.

22.Krechet V.G. 5-dimensional geometric model grav – elektrowecikinteractions // Grav. and Cosmology, № 4, 1999. P. 61-65.

23.Кречет В. Г. Топологические и физические эффекты вращения и спина в общерелятивистской теории гравитации //Известия вузов. Физика. – 2007. - № 10.

24. Кречет В. Г. Нелинейные волновые поля и геометрия пространства – времени //Сб. Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат – Энергоиздат, вып. 13, 1982. С. 60 – 66.

25.Сарданашвили Г. А. Современные методы теории поля. Т. 5: Гравитация. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011, С. 74 – 78

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Среди разрабатываемых в настоящее время разделов теоретической физики одним из важнейших и интереснейших является теория спинорного поля и возникшее в результате развития этой теории спинорное исчисление. Спинорные поля, описывающие фермионы, то есть частицы с полуцелым спином $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, играют фундаментальную роль в

современной теории поля. Дираковское спинорное поле вместе с электромагнитным полем Максвелла составляет материальный объект исследования в квантовой электродинамике [1]. Такую же роль играет спинорное поле в объединенной теории слабых и электромагнитных взаимодействий – теории Вайнберга – Салама, в теории сильных взаимодействий – квантовой хромодинамике, а также во всех современных моделях теорий объединения фундаментальных взаимодействий. Еще больший интерес вызывают спинорные поля в связи с развитием возникшей недавно теорией суперсимметрии и супергравитации. Оказалось, что учет в квантовой теории гравитации полей полуцелого спина (супергравитация) резко уменьшает расходимости в теории. Эти факты с очевидностью приводят к мысли об определяющей роли спинорного поля в структуре материи и возрождают интерес к разрабатываемой в 50–х годах XX века теории фундаментального спинорного поля Иваненко – Гейзенберга, являющейся основой перспективной единой теории материи [2].

Интерес к нелинейной спинорной теории усилился сравнительно недавно в связи с обнаружением факта [3], свидетельствующего о том, что в рамках общерелятивистской теории гравитации с кручением взаимодействие линейного дираковского спинорного поля с кручением пространства – времени индуцирует у спинорного поля кубическую нелинейность псевдовекторного типа, в результате чего линейное спинорное уравнение Дирака переходит в нелинейное уравнение типа Иваненко – Гейзенберга [2].

Этот факт, в свою очередь, заставляет обратить внимание на проблему о возможной роли геометрии в структуре элементарных частиц [4,5,6].

Спинорное исчисление в настоящее время играет важную роль в общерелятивистской теории гравитации как в связи с исследованием динамики спинорных полей в гравитационном поле (в искривленном пространстве – времени [7]), так и в связи с исследованием структуры самого пространства – времени. Начало этому направлению положено в работах Р. Пенроуза, Е. Ньюмена и др. [8] по исследованию спинорной структуры пространства – времени. Поскольку спинор более простой математический объект, чем тензор, и из спиноров операциями квадрирования можно построить тензор произвольного ранга, то описание геометрических характеристик пространства – времени, метрики, связности, кривизны, на спинорном языке позволяет найти и исследовать более тонкие и фундаментальные свойства структуры пространства – времени.

Таким образом, даже кратко приведенное рассмотрение роли спинорных полей в современной теоретической физике демонстрирует важность и актуальность исследования теории спинорного поля, как на квантовом, так и на классическом уровнях в рамках общерелятивистской теории гравитации и развития спинорного исчисления[9].

Одним из важнейших направлений исследований является изучение динамики сплошных сред с внутренними степенями свободы в собственных гравитационных полях. Такая постановка задачи особенно актуальна в астрофизике и космологии в связи с проблемой сингулярностей, так как известно, что гравитационное сжатие (коллапс) сплошных сред с обычными свойствами с неизбежностью приводит к образованию сингулярностей[10,11]. Следовательно, возникает необходимость принять как можно более широкие представления о структуре пространства – времени и исследовать, в какой степени влияние внутренних степеней свободы материи, в частности, ее спина, в состоянии предотвратить возникновение сингулярностей.

- 7.Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии //Сб. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, С. 18-33.
- 8.Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.
- 9.Кречет В. Г. Проблемы гравитационного взаимодействия физических полей в пространствах аффинной связности //Докторская диссертация. Минск. Академия наук СССР, 1988.
10. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства – времени. М.: Мир, 1977.
11. Червон С. В. Нелинейные поля в теории гравитации и космологии. Ульяновск: УлГУ, 1997.
12. Весс Ю., Беггер Д. Суперсимметрия и супергравитация. М.: Мир, 1986.
13. Уэст П. Введение в суперсимметрию и супергравитацию. М.: Мир, 1989.
14. Dirac, P. A. M., Principles of Quantum Mechanics, 4th edition, Clarendon, 1982.
15. Дирак П.А.М. Релятивистское волновое уравнение электрона (рус.) // Успехи физических наук. — 1979. — В. 4. — Т. 129. — С. 681-691.
16. Владимиров Ю. С. Реляционная теория пространства – времени и взаимодействий. Часть 2. Теория физических взаимодействий. - М.: МГУ, 1998.
17. Lawson H., Michelson M.-L. Spin Geometri. Princeton Univ. Press, Princeton, 1989.
18. Болохов С. В. Ступенчатая размерная редукция в моделях Калуцы-Клейна //14 - я Российская гравитационная конференция – Международная научная конференция по гравитации, космологии

10.Krechet V.G. and Orlova E. Y. To the effects of the interaction between the spinor field and the vortex gravitation field. // Grav. and Cosmology, vol. 17, No. 4, 2011.P. 324-327.

11.Орлова Е. Ю. Пятимерные стационарные сферически – симметричные конфигурации со спинорным полем //Известия вузов. Физика. №10, 2011.

12.Кречет В. Г., Левкоева М. В., Орлова Е. Ю., Садовников Д.В. Топологические эффекты в геометрической модели грави-электрослабых взаимодействий. //12 - ая Российская гравитационная конференция. Казань, 2005, С. 149-150.

Список литературы

1. Дирак П. А. М. Общая теория относительности. М.: Атомиздат, 1978.
2. Иваненко Д. Д. Актуальность теории гравитации Эйнштейна. – В сб.: Проблемы физики: классика и современность / под ред. Л. И. Седова. – М.: Мир, 1982. – С. 127 – 154.
3. Родичев В. И. Пространство с кручением и обобщенные уравнения спинорного поля // Известия ВУЗов. Сер. Физика. 1963. № 2. С. 122 – 124.
4. Кречет В. Г. Геометрия пространства – времени и физические свойства фермионов //Известия вузов. Физика. Издательство Томского университета, № 10, 1986.
5. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство – время (том 2). Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства – времени. М.: Мир, 1988.
6. Гейзенберг В. Введение в единую полевую теорию элементарных частиц. – М.: Мир, 1968.

Одной из интересных моделей для такого рода исследований является самогравитирующая сплошная среда в виде спинорных полей различного типа. Это в свою очередь приводит к проблеме исследования динамики спинорных полей в рамках общерелятивистской теории гравитации и описанию спиноров в пространствах, наделенных различными геометрическими свойствами – кривизной, кручением, неметричностью и так далее. Исследование динамики самогравитирующих классических спинорных полей важно также в связи с исследованием поведения различных современных моделей теории объединения фундаментальных взаимодействий в древесном приближении на различных этапах эволюции Вселенной, когда квантовые эффекты еще достаточно малы, а также в связи с развитием теории суперсимметрии [12,13], приводящей к необходимости одновременного рассмотрения в моделях фундаментальных взаимодействий полей целого и полуцелого спинов.

В диссертационной работе представлены результаты исследований по динамике самогравитирующих спинорных полей в рамках общерелятивистской теории гравитации, которая включает в себя как классическую теорию гравитации А. Эйнштейна - общую теорию относительности (ОТО), так и ее обобщения – теорию гравитации с учетом кручения пространства – времени (теория Эйнштейна – Картана (ТЭК)), а также неметричности пространства – времени.

Поскольку приходится рассматривать свойства спинорных полей в различных пространствах более общего типа, нежели пространство Минковского M_4 , то есть 4 – мерное псевдоевклидово пространство $E(1,3)$, где спиноры первоначально и были введены, то есть в искривленном римановом пространстве V_4 , в пространстве Римана – Картана U_4 , в пространстве Эйнштейна – Вейля с неметричностью и других более общих пространствах, то в данной работе представлены также исследования и по вопросам спинорного анализа в этих обобщенных 4 – мерных пространствах.

Здесь рассмотрены дираковские 4-компонентные спиноры, которые с математической точки зрения являются композицией двухкомпонентных спиноров, то есть биспинорами [14,15], но в дальнейшем они просто будут называться спинорами.

Известно, что дираковские спиноры могут рассматриваться простейшими и неприводимыми представлениями алгебры Клиффорда [16,17] $C(1,4)$, которая соответствует 5-мерному пространству с сигнатурой $(-+++)$. Об этом говорит и формула связи между числом спинорных компонент N и

размерностью пространства n , в которой они вводятся: $N = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, где квадратные скобки обозначают целую часть от числа. Из этой формулы видно, что для $N = 4$ (размерность дираковского спинора) подходят и $n = 4$, и $n = 5$, то есть дираковский спинор является объектом и четырехмерного и пятимерного пространств.

Поэтому в представленной работе рассмотрены самогравитирующие спинорные поля и в пятимерных пространствах, тем более что современная теоретическая физика все более часто при разработке физических теорий объединений фундаментальных взаимодействий использует пространства высших размерностей. К ним относятся пятимерная геометрическая теория гравитации и электромагнетизма Калуцы [18,19], наиболее последовательно и полно представленная в работах Ю. С. Владимирова [20], геометрическая пятимерная модель гравитационно-электромагнитных взаимодействий, шестимерные и семимерные геометрические модели гравитационно-электромагнитных взаимодействий, объединяющая в единую геометрическую конструкцию все 4 фундаментальных взаимодействия [21,22].

Целью диссертационного исследования является рассмотрение свойств спинорных полей в рамках общерелятивистской теории гравитации, рассматривающей гравитацию как проявление геометрических свойств искривленного пространства – времени, оснащенного кручением и неметричностью. Это делается путем получения и исследования точных решений совместной системы

2. Кречет В. Г., Орлова Е. Ю., Садовников Д. В. Геометрические эффекты в пятимерной геометрической модели гравитационно-электромагнитных взаимодействий // Математика, физика, экономика и физико-математическое образование. Часть 2: Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. Ярославль: ЯГПУ, 2006. С. 3-12.

3. Кречет В. Г., Орлова Е. Ю. Пятимерная космология со спинорным полем // Математика, физика, экономика и физико-математическое образование. Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. Ярославль: ЯГПУ, 2008. С. 32 – 37.

4. Орлова Е. Ю. Пятимерная космология с нелинейным спинорным полем // 13-я Российская гравитационная конференция – международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике. – М.: РУДН, 2008. С. 118 – 119.

5. Кречет В. Г., Орлова Е. Ю. Астрофизические эффекты взаимодействия спинорного и гравитационного вихревого полей // Ярославский педагогический вестник, № 1, том III (Естественные науки), 2011. С. 31 – 36.

6. Кречет В. Г., Орлова Е. Ю. Пятимерные вращающиеся космологические модели со спинорным полем // Математика и физика, астрономия, экономика и технология и совершенствование их преподавания: материалы международной конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. – Ч. 1. – Ярославль: ЯГПУ, 2011. С. 48 – 53.

7. Кречет В. Г., Орлова Е. Ю. Пятимерные космологические модели со спинорными полями // Ярославский педагогический вестник, выпуск № 1 2010. С. 77 – 81.

8. Кречет В. Г., Орлова Е. Ю. Возможные эффекты спин – спинового взаимодействия спинорного и гравитационного полей // Известия вузов. Физика. №10, 2011.

9. Орлова Е. Ю. Астрофизические эффекты взаимодействия спинорного и гравитационного вихревого полей // 14-я Российская гравитационная конференция – Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике. 4-ая Ульяновская международная школа-семинар «Проблемы теоретической и наблюдательной космологии». – Ульяновск: УлГУ, 2011.

пространстве - времени, а также компоненты спинорной функции. Показано, что пятимерные цилиндрические конфигурации могут существовать, но у них отсутствует плоская асимптотика и не существует решения с нетривиальной топологией, например, типа «кротовой норы» или космических «струн» и нет «солитонных» решений.

7. В качестве примера гравитационного взаимодействия спинорного поля в пространстве с кручением рассмотрены однородные и изотропные космологические модели со спинорными полями, которые имеют нелинейность вида $(\bar{\Psi}\gamma_\alpha\gamma_5\Psi)^2$, индуцированную кручением пространства. Решена совместная система уравнений Эйнштейна и нелинейного спинорного поля.

Показано далее, что массивное дираковское спинорное поле с такой нелинейностью, индуцированной кручением пространства – времени, играет роль идеальной жидкости с предельным уравнением состояния ($p = \varepsilon$). Следовательно, кручение не может остановить коллапс.

8. Рассмотрено также гравитационное взаимодействие спинорного поля в пространстве Римана – Вейля. Исследованы однородные изотропные космологические модели (открытая, плоская, закрытая) со спинорным полем. Получены соответствующие точные решения системы уравнений Эйнштейна-Дирака. Показано, что у всех рассмотренных космологических моделей устраняется начальная космологическая сингулярность вследствие влияния неметричности.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Орлова Е. Ю. Самогравитирующие спинорные конфигурации с нелинейными спинорными полями // 10 – я международная конференция. Современные проблемы гравитации, космологии и релятивистской астрофизики. – М.: РУДН, 2010. С. 7 – 9.

гравитационных уравнений Эйнштейна и дираковского спинорного поля (в общем случае нелинейного) в аффинно-метрическом пространстве с кручением и неметричностью, как с четырьмя так и с пятью измерениями. Уравнения в этом случае выводятся из лагранжиана, являющегося суммой гравитационного лагранжиана $R(x^A)$ и спинорного лагранжиана $L(\Psi)$:

$$L(\Psi) = -\frac{R}{2\chi} + \frac{\hbar c}{2} [\nabla_A \bar{\Psi} \gamma^A \Psi - \bar{\Psi} \gamma^A \nabla_A \Psi - F(\bar{\Psi}\Psi) - \Phi(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)], \quad (1)$$

где $A=1,2,3,4,5$. Здесь R - скаляр кривизны аффинно - метрического пространства, связность которого определяется выражением $\Gamma_{AB}^C = \{\Gamma_{AB}^C\} + Q_{AB}^C + Q_{AB}^C + Q_{BA}^C + W^C g_{AB} - \delta_A^C W_B - \delta_B^C W_A$, $\nabla_A \Psi$ - ковариантная производная спина $\Psi(x^A)$ в аффинно - метрическом пространстве, $F(\bar{\Psi}\Psi)$ и $\Phi(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)$ некоторые функции от спинорного инварианта. Путем варьирования по независимым переменным Ψ, g_{AB} , и возможными другими геометрическими величинами, получается совместная система уравнений гравитационного и спинорного полей.

Научная новизна. В диссертационной работе:

- Сформулирована общая задача исследования динамики самогравитирующих спинорных полей в римановом пространстве, где в качестве примера рассмотрены четырехмерные однородные и изотропные космологические модели, описываемые метрикой Фридмана с линейными и нелинейными спинорными полями. Получены точные решения совместной системы уравнений Эйнштейна – Дирака, а также компоненты спинорной функции. Показано, что дираковское массивное спинорное поле во фридмановской космологии эквивалентно пылевидной материи, а дираковское безмассовое спинорное поле (например, нейтрино) в космологических моделях Фридмана является «духовым» полем, то есть оно не оказывает влияние на эволюцию космологической модели. Показано, что спинорное поле с нелинейностью вида $\lambda(\bar{\Psi}\Psi)^n$ в однородной космологии является хорошей полевой моделью для баротропной идеальной жидкости с широким

диапазоном изменения коэффициента баротропности

$$w(p = w\varepsilon) : p = w + 1, -\infty < w < \infty.$$

- Рассмотрены равновесные стационарные гравитационные и спинорные поля с цилиндрической симметрией. Получены точные решения совместной системы уравнений Эйнштейна – Дирака и спинорных полей более общего типа. Показано, что цилиндрические конфигурации самогравитирующего нелинейного спинорного поля с нелинейностью типа $\lambda(\bar{\Psi}\Psi)^n$ могут индуцировать образование геометрии пространства – времени с нетривиальной топологией, типа замкнутого пространства или «кротовой норы».
- Рассмотрены стационарные самогравитирующие спинорные поля со сферической симметрией. Получены точные решения совместной системы уравнений Эйнштейна – Дирака и других спинорных полей, а также компоненты спинорной функции в статическом пространстве-времени со сферической симметрией. Показано, что самогравитирующее нелинейное спинорное поле с нелинейностью $(\bar{\Psi}\Psi)^n$ с поляризованным спином в стационарном пространстве со сферической симметрией может индуцировать геометрию пространства – времени типа «кротовой норы».
- Показано реальное существование системы взаимодействующих спинорного поля и вихревого гравитационного поля на примере решения совместной системы уравнений Эйнштейна – Дирака в стационарном пространстве – времени с цилиндрической симметрией при наличии вихревого гравитационного поля $\omega^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{iklm}e_k^{(a)}e_{(a)l,m}$. Среди полученных решений есть решение, описывающее геометрию «кротовой норы».
- Рассмотрены пятимерные однородные космологические модели со спинорными полями (линейными и нелинейными), описываемые метрикой:

нелинейностью $(\bar{\Psi}\Psi)^n$ с поляризованным спином в стационарном пространстве со сферической симметрией может индуцировать геометрию пространства – времени типа «кротовой норы».

4. Показано реальное существование системы взаимодействующих спинорного поля и вихревого гравитационного поля на примере решения совместной системы уравнений Эйнштейна – Дирака в стационарном пространстве – времени с цилиндрической симметрией при наличии вихревого гравитационного поля $\omega^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{iklm}e_k^{(a)}e_{(a)l,m}$.

Среди полученных решений есть решение, описывающее геометрию «кротовой норы».

5. Рассмотрены пятимерные однородные космологические модели со спинорными полями (линейными и нелинейными), описываемые метрикой:

$$dS^2 = a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - dt^2 + b^2(t)(dx^5)^2, \text{ где } b(t) = g_{55}$$

является скалярным полем геометрического происхождения. Решена совместная система уравнений Эйнштейна – Дирака.

Показано, что в пятимерной космологической модели с массивным спинорным полем расширение или ее эволюция происходит медленнее, чем для соответствующей четырехмерной космологической модели. Это обусловлено влиянием геометрического скалярного поля $g_{55} = b(t)$, то есть в данном случае можно считать, что геометрическое скалярное поле играет роль невидимой гравитирующей «темной материи». А в космологической модели с нелинейным спинорным полем с нелинейностью типа $\lambda(\bar{\Psi}\Psi)^n$ ($n < 2$) получается, что за конечное время ($t = t_f$) скорость расширения Вселенной и ее размеры стремятся к бесконечности («Большой Треск» - разрыв пространства).

6. Рассмотрено взаимодействие спинорного и гравитационного полей в пятимерном стационарном римановом пространстве – времени с цилиндрической симметрией. Получены точные решения совместной системы уравнений Эйнштейна – Дирака в этом

В **заключении** сформулированы основные результаты и выводы работы.

ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Сформулирована общая задача исследования динамики самогравитирующих спинорных полей в римановом пространстве, где в качестве примера рассмотрены четырехмерные однородные и изотропные космологические модели с линейными спинорными полями с метрикой Фридмана. Получены точные решения совместной системы уравнений Эйнштейна – Дирака, а также компоненты спинорной функции.

Показано, что дираковское массивное спинорное поле во фридмановской космологии эквивалентно пылевидной материи, а дираковское безмассовое спинорное поле (например, нейтрино) в космологических моделях Фридмана является «духовым» полем, то есть оно не оказывает влияние на эволюцию космологической модели.

Показано, что спинорное поле с нелинейностью вида $\lambda(\bar{\Psi}\Psi)^n$ в однородной космологии является хорошей полевой моделью для баротропной идеальной жидкости с широким диапазоном изменения коэффициента баротропности w ($p = w\varepsilon$): $n = w + 1$.

2. Рассмотрены равновесные стационарные поля с цилиндрической симметрией. Получены точные решения совместной системы уравнений Эйнштейна – Дирака. Показано, что цилиндрические конфигурации самогравитирующего нелинейного спинорного поля с нелинейностью типа $\lambda(\bar{\Psi}\Psi)^n$ могут индуцировать образование геометрии пространства – времени с нетривиальной топологией, типа замкнутого пространства или «кротовой норы».

3. Рассмотрены стационарные поля со сферической симметрией. Получены точные решения совместной системы уравнений Эйнштейна – Дирака, а также компоненты спинорной функции в статическом пространстве-времени со сферической симметрией. Самогравитирующее нелинейное спинорное поле с

$dS^2 = a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - dt^2 + b^2(t)(dx^5)^2$, где масштабный фактор $b(t) = g_{55}$ является скалярным полем геометрического происхождения.

Показано, что в пятимерной космологической модели с массивным спинорным полем расширение или ее эволюция происходит медленнее, чем для соответствующей четырехмерной космологической модели. Это обусловлено влиянием геометрического скалярного поля $g_{55} = b(t)$, то есть в данном случае можно считать, что геометрическое скалярное поле играет роль невидимой гравитирующей «темной материи». А в космологической модели с нелинейным спинорным полем с нелинейностью типа $\lambda(\bar{\Psi}\Psi)^n$ ($n < 2$) получается, что за конечное время ($t = t_f$) скорость расширения Вселенной и ее размеры стремятся к бесконечности («Большой Треск» - разрыв пространства).

- Рассмотрено взаимодействие спинорного и гравитационного полей в пятимерном стационарном римановом пространстве – времени с цилиндрической симметрией. Получены точные решения совместной системы уравнений Эйнштейна – Дирака в этом пространстве - времени, а также компоненты спинорной функции.

Показано, что пятимерные цилиндрические конфигурации могут существовать, но у них отсутствует плоская асимптотика и не существует решения с нетривиальной топологией, например, типа «кротовой норы» или космических «струн» и нет «солитонных» решений.

- В качестве примера гравитационного взаимодействия спинорного поля в пространстве с кручением рассмотрены однородные и изотропные космологические модели со спинорными полями, которые имеют нелинейность вида $(\bar{\Psi}\gamma_\alpha\gamma_5\Psi)^2$, индуцированную кручением пространства. Решена совместная система уравнений Эйнштейна и нелинейного спинорного поля.

Показано далее, что в этих космологических моделях массивное дираковское спинорное поле с такой нелинейностью, индуцированной кручением пространства – времени, играет роль идеальной жидкости с предельным уравнением состояния ($p = \varepsilon$). Все эти космологические модели имеют начальную сингулярность. Следовательно, кручение не может остановить коллапс.

- Рассмотрено также гравитационное взаимодействие спинорного поля в пространстве Римана – Вейля. Исследованы однородные изотропные космологические модели (открытая, плоская, закрытая) со спинорным полем. Получены соответствующие точные решения системы уравнений Эйнштейна-Дирака. Показано, что у всех рассмотренных космологических моделей устраняется начальная космологическая сингулярность вследствие влияния неметричности.

Научная и практическая ценность работы. Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы в курсе теоретической физики, а также в спецкурсах по отдельным проблемам теоретической физики. Кроме того, полученные результаты могут быть использованы на физическом факультете МГУ, во ВНИИМС, в Российском университете Дружбы народов, в Астраханском, Казанском, Красноярском, Томском, Пермском, Ульяновском, Владивостокском государственных университетах, Московском, Астраханском, Ульяновском и Ярославском государственных педагогических университетах.

Научные положения, выносимые на защиту содержатся в списке основных результатов диссертационной работы.

Апробация работы. Основные результаты диссертации доложены на 10-й международной конференции (Современные проблемы гравитации, космологии и релятивистской астрофизики. – М.: РУДН, 2010), 12-й Российской гравитационной конференции (Казань, 2005), 13-й Российской

Рассмотрена модельная теория в пространстве с дилатациями, но без кручения, для выделения в «чистом» виде эффекта взаимодействия векторного тока материи с неметричностью пространства-времени. В качестве примера рассмотрено влияние неметричности пространства-времени на существование сингулярности в однородной космологической модели с дираковским спинорным полем, описываемой метрикой вида:

$$dS^2 = \frac{a^2(t)}{1-kr^2} dr^2 + a^2(t)r^2 d\theta^2 + a^2(t)r^2 \sin^2 \theta d\alpha^2 - dt^2.$$

Уравнение для масштабного фактора $a(t)$ этой модели

$$\frac{6\dot{a}^2}{a^2} = \frac{2\mu\hbar c\chi}{a^3} - \frac{\hbar c\chi l^2 b^2}{a^6} - \frac{k}{a^2}, \quad (11)$$

которое показывает, что эволюция модели при учете индуцирования неметричности начинается при конечном значении масштабного фактора $a(t_0) = a_0$, то есть устраняется начальная сингулярность в космологических моделях с неметричностью, индуцированной дираковским спинорным полем.

В случае плоской модели ($k=0$) решение уравнения (11)

следующее: $a = \sqrt[3]{\frac{3M\hbar\chi ct^2}{4} + \frac{l^2 k^2}{2M}}$. Оно показывает, что при $t=0$ $a(0) \neq 0 = const$. Масштабный фактор $a(t)$ при больших значениях

t возрастает как $t^{\frac{2}{3}}$, что совпадает с характером эволюции модели Вселенной с пылевидной материей ($\rho=0$). Поэтому дираковское массивное спинорное поле в пространстве Вейля эквивалентно пылевидной материи, но начальная сингулярность отсутствует.

При рассмотрении динамики гравитационного взаимодействия спинорного поля в пространстве с неметричностью и кручением последние одновременно индуцируют (или компенсируют) векторную и псевдовекторную нелинейность не только в уравнениях спинорного поля, но и в уравнениях гравитационного поля[9,24].

гравитационного взаимодействия спинорного поля в пространстве с кручением рассмотрены однородные и изотропные космологические модели с нелинейными спинорными полями, у которых нелинейность индуцирована кручением. Метрика такой модели следующая:

$$dS^2 = a^2(t)dr^2 + a^2(t)r^2d\theta^2 + a^2(t)r^2\sin^2\theta d\alpha^2 - dt^2,$$

где $a(t)$ - масштабный фактор - функция, которая зависит только от времени. Тензор энергии- импульса спинорного поля в пространстве с кручением вычислен по формуле (при $n = 2$):

$$G_b^a = \chi \left[T_b^a - \frac{l^2 \hbar c}{2} ((\bar{\Psi}\Psi)^2 + (\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2) \right] = \\ = \chi \left[T_b^a(\Psi) - \frac{l^2 \hbar c}{2} \left(\frac{\sigma_0^2 + s_0^2}{(a^3)^2} \delta_b^a \right) \right],$$

где $\bar{\Psi}\Psi = \frac{s_0}{a^3}$, ($s_0 = const$) и $\bar{\Psi}\gamma_5\Psi = \frac{\sigma_0}{a^3}$, ($\sigma_0 = const$) интегралы уравнений Дирака, а $T_b^a(\Psi)$ - тензор энергии - импульса спинорного поля в отсутствии кручения. Получены уравнения Эйнштейна для данной задачи. Найдены решения для случая $\mu = 0$, которые показывают, что сингулярность в данной космологической модели не устраняется, так как $a(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Масштабный фактор $a(t)$ для данной модели имеет вид, как и для космологической модели с идеальной жидкостью с предельным уравнением состояния ($p = \varepsilon$). Следовательно, кручение в данной модели не может остановить коллапс. Найдены решения для случая $\mu \neq 0$, которые показывают, что для массивного спинорного поля в данной космологической модели также наблюдается начальная сингулярность ($a(0) = 0$).

Затем исследуется спинорное поле в пространстве с неметричностью Вейля: $\nabla_\lambda g_{\alpha\beta} = 2W_\lambda g_{\alpha\beta} \neq 0$.

гравитационной конференции – международной конференции по гравитации, космологии и астрофизике (Москва, РУДН, 2008), 14-й Российской гравитационной конференции – Международной конференции по гравитации, космологии и астрофизике (Ульяновск: УлГУ, 2011), а также на конференциях «Чтения Ушинского» (Ярославль ЯГПУ, 2006, 2008, 2011).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 работ.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав основного текста, заключения и списка цитируемой литературы из 130 названий. Объем диссертации составляет 130 страниц текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обсуждена актуальность темы и сформулированы цели исследования. Представлен обзор методов введения спиноров и кратко охарактеризовано содержание диссертационной работы.

В **первой главе** введены спиноры в пространстве Минковского, через спинорные представления группы Лоренца, и рассмотрены свойства спинорных полей в псевдоевклидовом пространстве и различного вида линейные и нелинейные уравнения, описывающие динамику спинорных полей.

Вторая глава посвящена исследованию спинорного поля в римановой геометрии. Здесь рассмотрено ковариантное дифференцирование спиноров, где определяются коэффициенты спинорной связности Γ_k через матрицы γ_i и их римановы производные, и возможные физические следствия. Дана также формулировка теории динамики гравитационных взаимодействий спинорных полей с лагранжианом вида:

$$L(\Psi) = \frac{\hbar c}{2} \left[F(S) - \frac{\partial F}{\partial S} S + \Phi(P) - \frac{\partial \Phi}{\partial P} P \right] \quad (2)$$

и с тензором энергии-импульса:

$$T_{ik}(\Psi) = \frac{\hbar c}{4} [\nabla_i \bar{\Psi} \gamma_k \Psi + \nabla_k \bar{\Psi} \gamma_i \Psi - \bar{\Psi} \gamma_i \nabla_k \Psi - \bar{\Psi} \gamma_k \nabla_i \Psi] + \frac{\hbar c}{2} \left[\frac{\partial F}{\partial S} S - F(S) + \frac{\partial \Phi}{\partial P} P - \Phi(P) \right], \quad (3)$$

где в качестве примеров рассмотрены четырехмерные однородные и изотропные космологические модели с линейными спинорными полями, имеющими следующую метрику:

$$dS^2 = \frac{a^2(t)}{1 - k \frac{r^2}{a_0^2}} dr^2 + a^2(t) r^2 d\theta^2 + a^2(t) r^2 \sin^2 \theta d\alpha^2 - dt^2. \quad (4)$$

Получена и решена совместная система уравнений взаимодействия гравитационного и спинорного полей. Рассмотрены различные случаи решения этой системы уравнений 1) если $k = 0$ и $\mu = 0$ (безмассовое поле), то $a = \text{const}$. Поэтому модель описывает статическую Вселенную;

2) если $k \neq 0$ $\left(k < 0; \frac{k}{a_0^2} = -p^2 \right)$ и $\mu = 0$, то $a = pt$. Поэтому

скорость расширения в этой космологической модели

постоянна. 3) если $k = 0$ и $\mu \neq 0$, то $a(t) = \left(\frac{\chi \hbar c \mu s_0}{2} \right)^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}}$. Данное

решение показывает, что масштабный фактор $a(t)$ возрастает как $t^{\frac{2}{3}}$, что совпадает с характером эволюции модели Вселенной с пылевидной материей ($\rho = 0$). Эти космологические модели, как видно, имеют сингулярность. Результаты исследований показывают, что дираковское массивное спинорное поле во фридмановской космологии эквивалентно пылевидной материи и дираковское безмассовое спинорное поле (например, нейтрино) в космологических моделях Фридмана является «духовым» полем, то есть оно не оказывает влияние на

асимптотика и не существует решения с нетривиальной топологией, например, типа «кротовой норы» или космических «струн» и нет «солитонных» решений.

4) Пятимерные стационарные сферически – симметричные конфигурации с метрикой с нелинейным спинорным полем: $dS^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + e^{\mu(r)} (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\alpha^2) - e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\phi(r)} (dx^5)^2$. Записана совместная система уравнений Эйнштейна и нелинейных спинорных полей.

Приведено решение этих уравнений для случая квадратичной по $(\bar{\Psi}\Psi)^2$ нелинейности ($n = 2$):

$\phi = \nu = 0; \quad \lambda = 0; \quad e^{\mu} = (x^2 + a^2); \quad -\infty < x < \infty$. Для компонент

спинора Ψ имеем: $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 + a^2}} e^{\frac{\beta s_0}{\sqrt{x^2 + a^2}}}$

Получается метрика пространства – времени «кротовой норы» с плоской асимптотикой с обеих ее концов, то есть соединяющий два плоских пространства, где минимальный радиус данной «кротовой норы» имеет размер порядка планковской длины.

В четвертой главе рассмотрено спинорное поле в пространствах аффинной связности с кручением и неметричностью. Исследование динамики самогравитирующих спинорных полей проводится не только в римановом пространстве V_4 , но и в пространстве с кривизной и кручением оснащенном метрикой $dS^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ (пространство U_4), а также в пространствах с неметрической связностью ($\nabla_\alpha g_{\mu\nu} \neq 0$). Показано, что кручение может не только индуцировать, но и компенсировать кубическую нелинейность псевдовекторного типа $(\bar{\Psi} \gamma^\alpha \Psi) \gamma_\alpha \Psi$ как в уравнениях спинорных полей, так и в уравнениях гравитационного поля [9, 24].

Далее рассматривается гравитационное взаимодействие спинорного поля [25], в пространстве с кручением. В качестве примера

Найденное решение следующее. Для параметров задачи — μ, k, l^2

получаем $\mu = 0, k = 0, l^2 = \frac{3}{8} \chi \hbar c$, то есть получается случай безмассового нелинейного спинорного поля и существует причинная структура. Далее $a(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda t$; $\varphi = \frac{const}{a^2}$, то есть расширение пространственной части вращающейся космологической модели происходит с постоянной скоростью и с нулевым ускорением (пограничный между фридмановскими и инфляционными режимами эволюции), а поле $\varphi(t)$, играющее роль масштабного фактора при 5-й координате, уменьшается по мере расширения.

Получены выражения для компонент спинорных функций. Если рассматривать эволюцию данной космологической модели, заполненной спинорным полем и идеальной жидкостью, то

решение будет следующим $\mu = 0$, $a(t) = \lambda \sqrt{-\frac{2k+1}{3}} \cdot t$; $\varphi = \frac{const}{a^2}$.

Из решения совместной системы уравнений Эйнштейна - Дирака выяснилось, что космологическое вращение дает вклад в эффективную массу Вселенной $\rho_{эфф}(\omega) \approx \frac{\omega^2}{\chi c^4}$.

3)Пятимерные стационарные конфигурации самогравитирующего спинорного поля с цилиндрической симметрией с метрикой вида: $dS^2 = A(x)dx^2 + B(x)da^2 + C(x)dz^2 - D(x)dt^2 + \varphi(x)(dx^5)^2$. Записана совместная система уравнений Эйнштейна и массивного спинорного поля в пространстве – времени. Решение этой системы ищется в пятимерных гармонических координатах: $A = BCD\varphi$, где показано, что пятимерные цилиндрические конфигурации могут существовать, но у них отсутствует плоская

эволюцию космологической модели. Вычислены компоненты спинорной функции для данной модели.

Рассмотрены далее однородные космологические модели с нелинейными спинорными полями и с метрикой (4) и показано, что спинорное поле, моделирующее баротропную идеальную

жидкость, имеет степенную нелинейность по инварианту $\bar{\Psi}\Psi$: $F(S) = \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^n$, где $n = w+1$, $-\infty < w < \infty$, а лагранжиан спинорного поля имеет вид:

$$L(\Psi) = \frac{\hbar c}{2} (\nabla_i \bar{\Psi} \gamma^i \Psi - \bar{\Psi} \gamma^i \nabla_i \Psi - 2\mu \bar{\Psi} \Psi + \lambda (\bar{\Psi} \Psi)^n). \quad (5)$$

Получена система уравнений, описывающая эволюцию Вселенной с нелинейным спинорным полем и при $k=0$. В этом случае массивное дираковское спинорное поле играет роль идеальной жидкости. А в случае нелинейного спинорного поля ($\mu = 0, \lambda \neq 0$), решение для масштабного

фактора $a(t)$ при $n > 0$ следующее: $a(t) = a_0 t^{\frac{2}{3n}}$.

Отсюда видно, что когда степень нелинейности $n > \frac{2}{3}$, то расширение происходит с замедлением ($\ddot{a} < 0$), а если $0 < n < \frac{2}{3}$, то расширение Вселенной происходит по степенному закону (степенная инфляция).

При $n < 0$ решение для масштабного фактора $a(t)$ следующее:

$$a(t) = \frac{a_0}{\left(1 - \frac{t}{t_f}\right)^{\frac{2}{3\beta}}}, \quad (\beta = -n), \quad t_f = const - \text{значение финального}$$

времени. Отсюда видно, что в такой космологической модели отсутствует начальная сингулярность, но существует сингулярность в будущем при $t \rightarrow t_f$ («Большой Крах»): $a(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_f$.

Затем рассмотрены свойства гравитационного взаимодействия уже нелинейных спинорных полей с нелинейностью степенного вида с лагранжианом (5). В результате выяснилось, что цилиндрические конфигурации самогравитирующего спинорного поля с нелинейностью типа $\lambda(\bar{\Psi}\Psi)^n$ не обладают плоской асимптотикой, но могут индуцировать образование геометрии пространства – времени с нетривиальной топологией, типа замкнутого пространства или «кратовой норы», соответствующая метрика следующая:

$$dS^2 = (k\sqrt{|\lambda|})^{\frac{4}{n-2}} \cdot \left[ch\left(\frac{n-2}{2}x\right) \right]^{\frac{4}{n-2}} dx^2 + (k\sqrt{|\lambda|})^{\frac{4}{3(n-2)}} \cdot \left[ch\left(\frac{n-2}{2}x\right) \right]^{\frac{4}{3(n-2)}} d\alpha^2 + e^{2x} (k\sqrt{|\lambda|})^{\frac{4}{3(n-2)}} \cdot \left[ch\left(\frac{n-2}{2}x\right) \right]^{\frac{4}{3(n-2)}} dz^2 - e^{-2x} (k\sqrt{|\lambda|})^{\frac{4}{3(n-2)}} \cdot \left[ch\left(\frac{n-2}{2}x\right) \right]^{\frac{4}{3(n-2)}} dt^2; \quad (n > 2);$$

Решена задача о взаимодействии спинорного и гравитационного полей в стационарном римановом пространстве – времени, описываемой метрикой в сферически – симметричном пространстве-времени:

$$dS^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + e^{\mu(r)} (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\alpha^2) - e^{\nu(r)} dt^2. \quad (6)$$

Получены решения совместной системы уравнений Эйнштейна и нелинейного спинорного поля. Для массивного линейного спинорного поля, то есть когда отсутствует нелинейность, общее решение этих уравнений следующее:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{a^2}{r^2}; \quad e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{C_1 \sqrt{C+r}}{\sqrt{r}} + \frac{k \sqrt{C+r} \ln(\sqrt{C+r} + \sqrt{r})}{\sqrt{r}} + \frac{k}{\sqrt{r}}; \quad e^{\mu} = r^2$$

Чтобы не изменялась сигнатура, необходимо выполнение

$$a = a_1 t^k, \quad b = \frac{n^{\frac{2}{n}} (\chi \hbar c S_0)^{\frac{1}{n}}}{a_0^3} t^{\frac{2-3kn}{n}}, \quad 2k^2 - k = -\frac{\lambda(n-1)S_0^{\frac{n}{2}}}{6n^2},$$

$$k = \frac{1}{2} - \frac{\lambda(n-1)}{2n^2} S_0^{\frac{n}{2}}.$$

В результате за конечное время ($t = t_f$) скорость расширения Вселенной и ее размеры стремятся к бесконечности («Большой Треск» - разрыв пространства).

2) Пятимерные вращающиеся космологические модели с метрикой вида:

$$dS^2 = -dt + a^2(t)(dx^2 + ke^{2\lambda x} dy^2 + dz^2) + 2a(t)e^{\lambda x} dy dt + \varphi^2(t)(dx^5)^2, \quad (10)$$

где k, λ - постоянные величины. Здесь константа k определяет существование причинной структуры в космологической модели: при $k < 0$ – в модели существуют замкнутые времениподобные кривые, и причинная структура нарушается, при $k > 0$ замкнутые времениподобные кривые отсутствуют, и причинная структура восстанавливается. Когда $a(t)=1, \varphi(t)=1, k=-\frac{1}{2}$, то приходим к стационарной метрике Геделя. Угловая скорость вращения космологической модели $\omega = \frac{\lambda c}{2\sqrt{k+1}a}$.

Для данной космологической модели (10) решена совместная система пятимерных уравнений Эйнштейна – Дирака (с квадратичной нелинейностью по $\bar{\Psi}\Psi$):

$$\begin{cases} {}^5R_{AB} - \frac{1}{2} {}^5R g_{AB} = \chi T_{AB} \\ \gamma^A \nabla_A \Psi - \mu \Psi + l^2 (\bar{\Psi} \gamma^A \gamma_5) \gamma_A \gamma_5 \Psi = 0 \end{cases}.$$

Здесь l - константа взаимодействия, имеющая размерность длины.

1) Пятимерные изотропные космологические модели, где в качестве примера исследуются пятимерные однородные космологические модели со спинорными полями (линейными и нелинейными), описываемые метрикой:

$$dS^2 = a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - dt^2 + b^2(t)(dx^5)^2,$$

где $b(t) = g_{55}$ является скалярным полем геометрического происхождения. Рассматривая сначала массивное линейное спинорное поле ($\lambda = 0$) в 5-мерной Вселенной, получено следующее решение системы уравнений:

$$a(t) = a_0 t^{\frac{1}{2}}; \quad b(t) = b_0 t^{\frac{1}{2}} + \frac{c_0}{\sqrt{t}} \quad (b_0, a_0, c_0 - \text{постоянные}). \quad (9)$$

Отсюда следует также, что в пятимерной космологической модели с массивным спинорным полем расширение или ее эволюция происходит медленнее, чем для соответствующей четырехмерной космологической модели. Это обусловлено влиянием геометрического скалярного поля $g_{55} = b(t)$, то есть в данном случае можно считать, что геометрическое скалярное поле играет роль невидимой гравитирующей «темной материи». При $n = 2$ решение следующее:

$$a = a_0 \sqrt{t} e^{\frac{m}{t}}, \quad b = 2\mu a_0^{-3} \sqrt{t} e^{\frac{3m}{t}}, \quad m^2 = -\frac{\lambda}{24\chi\hbar c\mu^2}.$$

При больших $t \gg 1$ имеем $a \approx a_0 \sqrt{t}$, $b \approx 2\mu a_0^{-3} \sqrt{t}$, а при $n < 0$ пятимерное спинорное поле ведет себя как решение (7). При $n \neq 2$ и $\mu = 0$ получается решение:

условия $e^{-\lambda} \geq 0$, откуда $1 - \frac{a^2}{r^2} \geq 0$. Тогда заменой переменной

$$r^2 - a^2 = x^2 \quad (-\infty < x < \infty). \quad \text{Общее решение приведет к виду:}$$

$$e^\lambda = \frac{4(x^2 + a^2)}{x^2}; \quad e^\mu = x^2 + a^2;$$

$$e^\nu = \left(\frac{C_1 x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{k x \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{k}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right)^2$$

Поэтому метрика данного пространства – времени будет иметь

$$dS^2 = \frac{4(x^2 + a^2)}{x^2} dx^2 + (x^2 + a^2)(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\alpha^2) -$$

$$\text{вид:} \quad - \left(\frac{C_1 x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{k x \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{k}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right)^2 dt^2, \quad (7)$$

то есть получилась метрика «кротовой норы», но без плоской пространственной асимптотики при $-\infty < x < \infty$. Здесь минимум функции $e^\mu \equiv R(x)$ достигается в точке, где $x = 0$. Отсюда радиус горловины $R(x = 0)$ будет равен постоянной «а».

Переходя к нелинейному спинорному полю с нелинейностью вида $\lambda(\bar{\Psi}\Psi)^n$, рассмотрена совместная система уравнений Эйнштейна-Дирака при $n = 2$, где решение следующее:

$$e^\nu = 1; \quad e^{-\lambda} = 1 + \frac{k}{r^2}, \quad \text{а} \quad \frac{\chi\hbar c}{2} \beta s_0^2 = k.$$

Здесь интересен случай, когда $k < 0$, то есть когда $\beta s_0 < 0$. Тогда вводя обозначение $k = -a^2$, и переходя к переменной $r^2 - a^2 = x^2 \quad (-\infty < x < \infty)$, как в предыдущем случае массивного спинорного поля, получаем метрику «кротовой норы», но уже с плоской асимптотикой:

$$dS^2 = dx^2 + (x^2 + a^2)(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\alpha^2) - dt^2$$

и радиусом горловины, равным «а». Получены выражения для спинорных функций. Таким образом, самогравитирующее спинорное поле с поляризованным спином может индуцировать геометрию пространства – времени с нетривиальной топологией, например, топологией «кротовой норы». Причем в случае нелинейного спинорного поля получается асимптотически плоская «кротовая нора».

Рассмотрена структура лагранжиана спинорного поля в римановом пространстве, взаимодействующего с гравитационным полем, где в итоге полный лагранжиан спинорного поля (5) с учетом полученных результатов разлагается на следующие части[23]:

$$L(\Psi) = \frac{\hbar c}{2} (\nabla_\alpha \bar{\Psi} \gamma^\alpha \Psi - \bar{\Psi} \gamma^\alpha \nabla_\alpha \Psi - F(S, P)) + \frac{\hbar c}{2} \omega^\alpha \bar{\Psi} \tilde{\gamma}_k \tilde{\gamma}_5 \Psi, \quad \text{где}$$

$$\omega^\alpha = \frac{\chi \hbar c}{4} \bar{\Psi} \tilde{\gamma}_k \tilde{\gamma}_5 \Psi. \quad \text{Данное взаимодействие индуцирует}$$

псевдовекторную нелинейность у спинорного поля и приводит к взаимной поляризации. В общем случае спинорное поле взаимодействует с вихревой составляющей гравитационного поля так, что лагранжиан взаимодействия между ними равен

$$L_{\text{int}} = \frac{\hbar c}{2} \omega^k \bar{\Psi} \tilde{\gamma}_k \tilde{\gamma}_5 \Psi.$$

Чтобы показать возможность реального существования системы взаимодействующих спинорного поля и вихревого гравитационного поля, рассмотрен конкретный пример решения совместной системы гравитационных уравнений Эйнштейна для самогравитирующего спинорного поля и спинорных уравнений в пространстве – времени, где может существовать вихревое гравитационное поле. Это стационарное пространство – время с цилиндрической симметрией, описываемое метрикой:

$$ds^2 = A dx^2 + B d\alpha^2 + C dz^2 - D dt^2 + 2E d\alpha dt,$$

где метрические коэффициенты А, В, С, D, Е являются функциями только от радиальной координаты х. В этом

пространстве может существовать стационарное вихревое гравитационное поле, описываемое вектором ω^k , направленным вдоль оси симметрии OZ: $\omega^k = \delta_3^k \frac{E'D - D'E}{2D\sqrt{AC(E^2 + BD)}}$. Получена в

общем виде совместная система уравнений Эйнштейна – Дирака. Для случая безмассового спинорного поля $\mu=0$, например, нейтрино, а также $A=C$ (изотермические координаты) решение системы уравнений имеет

$$A = \frac{C_3}{\sqrt{x}}; \quad D = C_2 x + C_1 \frac{M}{\chi \hbar c s_0} \left(\frac{M}{2} x \right)^{1 + \frac{\chi \hbar c s_0}{M}};$$

$$\text{вид: } R = \frac{M}{2} \frac{x}{C_2 + \frac{C_1 M}{\chi \hbar c s_0} \left(\frac{M}{2} x \right)^{\frac{\chi \hbar c s_0}{M}}} \quad (0 \leq x < \infty). \quad (8)$$

Здесь $R = g_{\alpha\alpha}^{\varphi\phi} = \frac{BD + E^2}{D}$, M, C_1, C_2, C_3 - постоянные

интегрирования, а s_0 - граничное значение плотности потока спина в точке, где $\sqrt{-g} = 1$. Приведенный пример показывает, что возможна физическая ситуация, когда самогравитирующее спинорное поле с поляризованным спином, индуцируя появление вихревого гравитационного поля, может образовать «кротовую нору».

В третьей главе исследовано спинорное поле в пятимерной теории гравитации. Сначала разобран общий вопрос о ковариантном дифференцировании спиноров в пятимерном пространстве – времени, где показано, что формула для пятимерных коэффициентов спинорной связности полностью совпадает по виду с формулой для четырехмерных коэффициентов. Затем представлены следующие пятимерные задачи со спинорным полем: