

на правах рукописи

ПОПОВ Аркадий Александрович



**КВАНТОВЫЕ И КЛАССИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ
НЕМИНИМАЛЬНО СВЯЗАННОГО С КРИВИЗНОЙ
СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ**

01.04.02 — теоретическая физика

17 ОКТ 2013

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук



005535066

КАЗАНЬ — 2013

Работа выполнена на кафедре высшей математики и математического моделирования института математики и механики им. Н.П. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета

Научный консультант:

доктор физико-математических наук Суников Сергей Владимирович,
заведующий кафедрой ТОиГ К(П)ФУ

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Мельников Виталий Николаевич, ведущий научный сотрудник ВНИИМС

доктор физико-математических наук Павлов Юрий Викторович,
старший научный сотрудник ИПМаш РАН

доктор физико-математических наук Фролов Борис Николаевич,
профессор кафедры физики для естественных факультетов МГПУ

Ведущая организация:

Томский государственный университет

Защита состоится « 7 » ноября 2013 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании Диссертационного совета Д 212.203.34 при Российском университете дружбы народов по адресу: 115419, г.Москва, ул.Орджоникидзе, д.3, зал №1.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского университета дружбы народов по адресу: 117198, г.Москва, ул.Миклухо-Маклая, д.6.

Автореферат разослан « ____ » _____ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических
наук



Попова В.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

Исследование эффектов квантованных полей на фоне внешнего гравитационного поля имеет долгую историю. Эти эффекты оказались весьма важными, например, при описании ранней вселенной [1] и квантового испарения черных дыр [2]. Одними из наиболее важных величин, характеризующих квантованные поля во внешнем гравитационном поле, являются средние по некоторому состоянию $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$, где φ есть квантованное поле, а T_{ν}^{μ} – оператор тензора энергии-импульса для φ . Однако, получить точную функциональную зависимость этих величин от метрики даже в однопетлевом приближении невозможно, за исключением ряда высокосимметричных пространств-времен. Численные вычисления на заданном гравитационном фоне, как правило, являются весьма трудоемкими. Очевидно, таким образом, что получение аналитических приближений для $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, когда это возможно, является полезным. Интерес к вычислению величин $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ связан также с вопросом существования проходных кротовых нор – топологических ручек, соединяющих удаленные части одной или разных вселенных. Возможность существования статических сферически симметричных проходных кротовых нор как топологически нетривиальных решений уравнений Эйнштейна была впервые изучена Моррисом, Торном и Юртсесвером [3, 4]. Они нашли, что материя, заполняющая горловину кротовой норы, должна обладать необычными свойствами. В частности, радиальное давление материи должно превышать его плотность как локально в горловине, так и интегрально вдоль радиального направления. В дальнейшем нарушение энергетических условий в статических кротовых норах детально анализировалось. В качестве примера материи, обеспечивающей существование кротовых нор Моррис и Торн предложили вакуум Казимира между проводящими сферическими пластинами. Аналогичными свойствами, как известно, обладает вакуум квантованных полей в искривленных пространствах-времени, пространствах с нетривиальной топологией или пространствах с границами. Поэтому естественным развитием идеи Морриса и Торна является использование вакуума квантованных полей в качестве материи, обеспечивающей

существование кротовых нор. Такой подход даст возможность определять метрику кротовой норы как самосогласованное решение полуклассической теории гравитации

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren},$$

где $G_{\mu\nu}$ – тензор Эйнштейна, и $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ – перенормированное среднее значение оператора тензора энергии-импульса квантованных полей, построенное для некоторого квантового состояния. Принципиальной проблемой, стоящей на пути получения решений уравнений полуклассической теории гравитации является получение функциональной зависимости тензора энергии-импульса квантованных полей $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ от метрического тензора g_{mn} . Попытки построить приближенные выражения для $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ при тех или иных предположениях о гравитационном фоне неоднократно предпринимались.

Следует отметить принципиальное отличие приближений, полученных аналитически или численно на фоне заданного внешнего гравитационного поля, от приближений, для которых функциональный вид метрики не фиксировался, поскольку только последние можно использовать при анализе уравнений полуклассической теории гравитации. Явная функциональная зависимость вакуумных средних величин в таких приближениях от метрики оставляет, конечно, вопросы о применимости этих приближений для безмассовых квантованных полей, поскольку вакуумные средние таких полей, как известно, являются величинами нелокальными. Тем не менее авторы упомянутых работ выдвигали те или иные соображения, касающиеся справедливости рассматриваемых приближений. В данной работе показано, что в некоторых областях пространства-времени вакуумные средние квантованного неминимально связанного с кривизной пространства-времени скалярного поля могут определяться локальными свойствами пространства-времени. Это позволило провести анализ возможности получения решений уравнений полуклассической теории гравитации в таких областях пространства-времени.

Особая роль экстремальных горизонтов в современной физике не вызывает никаких сомнений. Достаточно лишь напомнить о таких вопросах, как энтропия черных дыр, сценарии их испарения, включая проблему конечного состояния черных дыр, и т.д. Такие объекты (экстремальные горизонты) естественным образом появляются на классическом уровне - характерным

примером является горизонт черной дыры Рейсснера-Нордстрема с массой, равной заряду. Однако вопрос о существовании экстремальных горизонтов становится нетривиальным в полуклассической теории гравитации, в рамках которой учитывается обратная реакция квантовых полей на метрику. Выражение для квантово-поправленной метрики содержит комбинации тензора энергии-импульса, имеющие смысл энергии, измеряемой в системе отсчета свободно падающего наблюдателя, и заранее не очевидно, является ли эта величина конечной или расходится вблизи экстремального горизонта. Численные расчеты показали, что для безмассового поля на фоне экстремальной черной дыры Рейсснера-Нордстрема таких расходимостей нет [5]. Аналитическое исследование поведения массивных полей вблизи экстремальных горизонтов дало тот же результат [6]. Такие исследования были распространены и на случай ультраэкстремальных горизонтов [7], для которых метрический коэффициент $g_{tt} \sim (r_+ - r)^3$ вблизи горизонта. Здесь r - шварцшильдова радиальная координата (координата кривизны), $r = r_+$ соответствует горизонту. Такие горизонты встречаются, например, в пространстве Рейсснера - Нордстрема - де Ситтера, в случае, когда космологическая константа $\Lambda > 0$ [8]. Соответствующий этому случаю горизонт оказывается космологическим, так что метрика является статической между $r = 0$ и $r = r_+$. Результаты для ультраэкстремальных горизонтов были получены в [7] только для массивных полей. Возникает естественный вопрос, существуют ли ультраэкстремальные горизонты с учетом квантовых поправок полей произвольной массы, включая случай безмассовых полей, вклад которых в вакуумные средние оператора тензора энергии-импульса квантованных полей много больше соответствующего вклада массивных полей. Для такого случая в данной работе провести вычисления удалось, что позволило судить о возможности существования ультраэкстремальных горизонтов с учетом квантовых поправок скалярных полей произвольной массы.

Хорошо известным фактом классической электродинамики является утверждение о том, что движение точечного заряда определяется взаимодействием заряда с полем, которое он создает. Этот эффект (называемый самодействием или радиационной реакцией) связан с нелокальной структурой поля, источником которого является заряд. Первые исследования в этой об-

ласти были сфокусированы на самоускорении электрически заряженных точечных частиц в плоском пространстве-времени [9]. В дальнейшем ДеВитт, Брем и Хоббс [10, 11, 12] получили формальные выражения для силы самодействия на электрический заряд в искривленном пространстве-времени. Мино, Сасаки, Танака [13] и, независимо, Куин и Уолд [14] получили аналогичные выражения для гравитационной силы самодействия на точечную массу. Сила самодействия на скалярный заряд, взаимодействующий с собственным безмассовым минимально связанным с кривизной скалярным полем, была рассмотрена Куином в работе [15]. Хотя формальные аналитические выражения для различных типов силы самодействия хорошо известны, вычисления явных выражений требуют значительных усилий, которые были осуществлены, в основном, на фоне пространств-времен черных дыр. Эти усилия связаны, в основном, с подготовкой гравитационно-волновых детекторов, таких как LISA, способных детектировать гравитационные волны, излучаемые компактным объектом, падающим на супермассивную черную дыру [16]. В отличие от случая плоского пространства-времени, сила самодействия может быть не нулевой даже для статического заряда на искривленном гравитационном фоне. Было также показано, что эта сила может быть не нулевой для статического заряда в плоских пространствах-времени топологических дефектов [17]. В искривленных пространствах-времени с нетривиальной топологической структурой исследования эффекта самодействия имеют дополнительные интересные черты [18, 19, 20].

Для покоящихся зарядов в статических пространствах-времени описание эффекта самодействия сводится к отысканию функции Грина трёхмерного искривлённого пространства. Это означает, что по аналогии с упомянутым выше эффектом поляризации вакуума в некоторых областях пространства-времени, эффект самодействия заряда, являющегося источником неминимально связанного с кривизной пространства-времени скалярного поля, может определяться локальными свойствами пространства-времени. В данной работе дается описание эффекта в упомянутом случае.

Таким образом, **актуальность** работы объясняется как общетеоретическим интересом к разработке методов расчета квантовых эффектов в искривленном пространстве-времени (поляризация вакуума квантованных по-

лей в искривленном пространстве-времени, обратное влияние квантованного поля на пространственно-временную метрику), к исследованию квантовых эффектов в физике горизонтов, так и практическим интересом к эффекту самодействия заряда, связанным с подготовкой гравитационно-волновых детекторов, таких как LISA, способных детектировать гравитационные волны, излучаемые компактным объектом, падающим на супермассивную черную дыру [21, 16].

Цели и задачи диссертационной работы

Целью диссертационной работы является исследование эффектов квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени, в частности, эффекта поляризации вакуума квантованного неминимально связанного с кривизной скалярного поля в искривленном пространстве-времени; обратного влияния квантованных полей на геометрию пространства-времени; а также эффекта самодействия заряда в искривленном пространстве-времени.

В диссертационной работе решаются следующие задачи:

1. Анализ проблем, возникающих при использовании процедуры перенормировки вакуумных средних $\langle \phi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ квантованного скалярного поля в искривленных пространствах-времени методом раздвижки точек; построение явных выражений для ренормализационных контрчленов, используемых в этой процедуре, в произвольной системе координат.
2. Разработка метода построения аналитических приближенных выражений для вакуумных средних $\langle \phi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ квантованного неминимально связанного с кривизной скалярного поля в статических сферически симметричных областях пространства-времени, допускающих локальное представление исследуемых величин.
3. Разработка метода построения аналитических приближенных выражений для вакуумных средних $\langle \phi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ квантованного скалярного поля в асимптотически плоской области статического сферически симметричного пространства-времени.
4. Разработка метода построения аналитического приближения для вакуумного среднего $\langle \phi^2 \rangle$ квантованного скалярного поля в асимптотически

плоской области ультрастатического пространства-времени.

5. Определение условий существования и построение самосогласованных статических сферически симметричных решений с длинной горловиной в полуклассической теории гравитации.

6. Построение самосогласованных ультрастатических цилиндрически симметричных решений в полуклассической теории гравитации.

7. Изучение условий существования длинных горловин, порождаемых вакуумными флуктуациями квантованных полей.

8. Исследование возможности существования ультраэкстремальных горизонтов с учетом обратной реакции квантованного неминимально связанного с кривизной скалярного поля.

9. Разработка метода перенормировки собственного потенциала покоящегося скалярного и электрического заряда в статическом пространстве-времени.

10. Исследование эффекта самодействия покоящегося скалярного заряда в длинной горловине ультрастатического пространства-времени.

11. Исследование эффекта самодействия покоящегося электрического заряда в длинной горловине кротовой норы.

Научная новизна

В диссертации получены следующие новые результаты:

В отличие от предшествующих работ, разложение бивектора параллельного переноса вектора вдоль кратчайшей геодезической линии, соединяющей близкие точки, в ряд по степеням разности координат этих точек получено в явной координатной форме. Это позволяет явно выписать ренормализационные контрчлены ДеВитта-Швингера $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ квантованного скалярного поля в произвольной системе координат.

В отличие от предшествующих работ показано, что вакуумные средние $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ для квантованного неминимально связанного с кривизной скалярного поля в областях статического сферически симметричного пространства-времени, называемых длинными горловинами, определяются локальными свойствами пространства-времени. При этом скалярное поле полага-

ется массивным или безмассовым и находящимся в вакуумном состоянии с нулевой температурой, определенном по отношению к времениподобному вектору Киллинга, всегда существующему в статическом пространстве-времени. В длинных горловинах получены аналитические приближения для вакуумных средних $\langle \phi^2 \rangle$ и $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Показано, что такие приближения аналогичны разложениям ДеВитта-Швингера вакуумных средних $\langle \phi^2 \rangle$ и $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ массивного скалярного поля, комптоновская длина волны которого много меньше характерного масштаба радиуса кривизны фонового гравитационного поля, и переходят в них в случае большой (по сравнению с обратным радиусом длинной горловины) массы поля.

В отличие от предшествующих работ получены пределы применимости аналитических приближений $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ квантованного неминимально связанного с кривизной скалярного поля в статических сферически симметричных асимптотически плоских пространствах-времени. Предполагается, что скалярное поле является массивным или безмассовым и находится в квантовом состоянии с нулевой температурой и совпадает с вакуумом Минковского на асимптотике.

В отличие от предшествующих работ получены пределы применимости аналитического приближения $\langle \varphi^2 \rangle$ квантованного скалярного поля в ультрарелятивистских асимптотически плоских пространствах-времени. Предполагается, что поле обладает произвольной массой, константа ξ связи поля со скалярной кривизной произвольна, и поле находится в вакуумном состоянии с произвольной температурой и совпадает с вакуумом Минковского на асимптотике.

В отличие от предшествующих работ для обоснования существования статических сферически симметричных кротовых нор, порождаемых вакуумными флуктуациями квантованных полей, использовано аналитическое приближение $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}$, предложенное Андерсоном, Хискоком и Самуэлем для квантованного скалярного поля, находящегося в вакуумном квантовом состоянии с нулевой температурой. В рамках этого приближения построено самосогласованное решение уравнений полуклассической гравитации, описывающее кротовую нору.

В отличие от предшествующих работ показано, что область пространства-

времени, которую можно назвать длинной горловины, может порождаться электростатическим полем и вакуумными флуктуациями квантованных скалярных полей. Такая горловина может быть, например, частью кротовой норы.

В отличие от предшествующих работ показано, что ультраэкстремальные горизонты не разрушаются вакуумными флуктуациями квантованного безмассового неминимально связанного с кривизной скалярного поля.

В отличие от предшествующих работ показана возможность перенормировать собственный потенциал покоящегося скалярного и электрического заряда в статическом пространстве-времени вычитанием перенормировочных контрчленов. В случае скалярного поля такой метод перенормировки справедлив для произвольной константы связи скалярного поля с кривизной фонового гравитационного поля и произвольной массы поля. В пределе, когда комптоновская длина волны $1/m$ скалярного поля много меньше характерного масштаба l_g радиуса кривизны фонового гравитационного поля, вычислена сила самодействия на покоящийся скалярный заряд в статическом пространстве-времени.

В отличие от предшествующих работ показано, что собственный потенциал покоящегося заряда, который является источником неминимально связанного с кривизной пространства-времени скалярного поля, в длинной горловине ультрастатического пространства-времени определяется локальной областью пространства-времени. Получено аналитическое приближение для силы самодействия в этом случае.

В диссертационной работе был модифицирован и усовершенствован метод, позволяющий вычислить силу самодействия, действующую на статический электрический заряд в длинной горловине кротовой норы.

Теоретическое значение

Теоретическое значение результатов диссертационного исследования заключается в том, что развитый метод вычисления приближенных выражений для вакуумных средних $\langle \phi^2 \rangle$, $\langle T^\mu_\nu \rangle$ квантованного неминимально связанного с кривизной скалярного поля произвольной массы позволяет решать задачи

расчета квантовых эффектов в пространствах-времени длинных горловин. Полученные в работе результаты показывают принципиальную возможность в некоторых случаях описывать квантовые эффекты безмассовых полей локальными величинами. Развитый метод перенормировки собственного потенциала покоящегося скалярного или электрического заряда в статическом пространстве-времени позволяет наиболее просто решать задачи расчета эффекта самодействия в такой ситуации. А построенная в работе асимптотика при $m \rightarrow \infty$ для перенормированного собственного потенциала заряда, являющегося источником скалярного поля массы m , может быть использована для проверки расчетов эффекта самодействия статического скалярного заряда.

Практическое значение

Полученные в диссертации результаты и развитые методы могут быть использованы в исследованиях по квантовой теории поля в искривленных пространствах-времени, физике ультраэкстремальных горизонтов и эффекту самодействия зарядов в пространствах-времени кротовых нор.

Научные положения, выносимые на защиту

1. Вакуумные средние $\langle \phi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ квантованного неминимально связанного с кривизной скалярного поля в статических сферически симметричных областях пространства-времени, называемых длинными горловинами, определяются локальными свойствами пространства-времени.

2. Выражения для вакуумных средних $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ скалярного поля в асимптотически плоской области статического сферически симметричного пространства-времени или ультрастатического пространства-времени могут быть разбиты на низкочастотную и высокочастотную части. Для высокочастотной можно получить приближенное выражение, аналогичное приближенному выражению ДеВитта-Швингера для массивного поля с комптоновской длиной много меньшей характерного масштаба радиуса кривизны фонового гравитационного поля. Низкочастотный вклад может быть вычислен в асимптотически плоской области пространства-времени в квантовом со-

стоянии соответствующем вакууму Минковского.

3. Вакуум квантованных полей способен обеспечить существование статических сферически симметричных кротовых нор в случае большого числа N полей. Особенность таких кротовых нор состоит в том, что характерный масштаб радиуса горловины такой кротовой норы имеет порядок $\sqrt{N}l_{Pl}$.

4. Электростатическое поле и вакуумные флуктуации квантованных неминимально связанных с кривизной скалярных полей в рамках общей теории относительности могут обеспечивать существование длинных горловин.

5. Обратная реакция неминимально связанного с кривизной квантового скалярного поля не разрушает ультраэкстремальные горизонты.

6. Процедуру перенормировки собственного потенциала покоящегося скалярного или электрического заряда в статическом пространстве-времени можно свести к вычитанию из поля заряда перенормировочных контрчленов, которые явно выписаны. В пределе, когда комптоновская длина волны $1/m$ скалярного поля много меньше характерного масштаба l_g радиуса кривизны фонового гравитационного поля, сила самодействия на покоящийся скалярный заряд в статическом пространстве-времени может быть вычислена.

7. Собственный потенциал покоящегося заряда, который является источником электростатического или неминимально связанного с кривизной пространства-времени скалярного поля, в длинной горловине ультрастатического пространства-времени есть функционал метрики. Аналитическое приближение для силы самодействия в этом случае может быть вычислено.

В диссертации развито **новое направление**, связанное с исследованием вакуумных квантовых эффектов безмассовых полей, определяемых локальной геометрией искривленного пространства-времени.

Достоверность результатов диссертации

Достоверность полученных результатов основывается на использовании экспериментально и теоретически установленных принципов квантовой теории поля и общей теории относительности, корректности проведенных математических преобразований и расчетов. Достоверность конкретных результатов

вычислений подтверждается, кроме того, сравнением в предельных случаях с результатами полученными ранее другими авторами. Во всех случаях, когда более общий результат, полученный в диссертации, должен совпадать с ранее опубликованным частным результатом, такая согласованность имеется.

Апробация работы

Основные материалы диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и рабочих совещаниях:

"Quantum Field Theory and Gravity (QFTG'12)" International Conference (Tomsk, 2012); Международная сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН «Физика фундаментальных взаимодействий» (Москва, 2012); 3-я Российская школа-семинар "Современные теоретические проблемы теории гравитации и космологии", GRACOS-2012 (Казань-Яльчик, 2012); Международная научно-практическая конференция "Информационные технологии в образовании и науке - ИТОН 2012" (Казань, 2012); 14-я Российская гравитационная конференция - Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике (Ульяновск, 2011); Международная конференция "Современные проблемы гравитации, космологии и релятивистской астрофизики" RUDN-10 (Москва, 2010); Международная конференция "Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation" (Казань, 2010); APCTP-BLTP JINR Joint Workshop "Frontiers in Black Hole Physics at Dubna" (Dubna, 2009); 2 Российская летняя школа-семинар "Современные теоретические проблемы гравитации и космологии" GRACOS-2009 (Казань, Яльчик, 2009) 13-я Российская гравитационная конференция - Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике (Москва, 2008) XX Международной летней школы-семинар по современным проблемам теоретической и математической физики "Волга -20'2008" (Казань, 2008); Российская летняя школа-семинар "Современные теоретические проблемы гравитации и космологии" GRACOS-2007 (Казань, Яльчик, 2007) Международная конференция по гравитации, космологии, астрофизике, посвященная 90-летию со дня рождения проф. К.П. Станюковича (Москва, 2006); Между-

народный семинар по проблемам измеримости в квантовой гравитации и темной составляющей Вселенной (Санкт-Петербург, 2006) 18-я Международная школа-семинар по современным проблемам теоретической и математической физики “Волга XVIII-2006” (Казань, 2006); 12 Российская гравитационная конференция по гравитации, космологии и астрофизике (Казань, 2005); Международная конференция “Astrophysics and cosmology after Gamow” (Odessa, 2004); 3 Международная школа-семинар “Проблемы теоретической и наблюдательной космологии” (Ульяновск, 2003); 11 Международная конференция “Теоретические и экспериментальные проблемы общей теории относительности и гравитации” (Томск, 2002); V международная конференция “Gravitation and Astrophysics of Asian-Pacific Countries” (Москва, 2001); 2 Международная школа-семинар “Проблемы теоретической космологии” (Ульяновск, 2000); IV международный семинар им. А.А. Фридмана “Gravitation and Cosmology” (Санкт-Петербург, 1998); 15th International Conference on General Relativity and Gravitation (Pune, India, 1997); 1 Международная школа-семинар “Современные проблемы космологии” (Ульяновск, 1997); III Международная конференция “Геометризация физики” (Казань, 1997); Международный геометрический семинар “Современная геометрия и теория физических полей” (Казань, 1997); 9 Российская гравитационная конференция “Теоретические и экспериментальные проблемы гравитации” (Новгород, 1996); III международное рабочее совещание “Quantum Field Theory Under the Influence of External Conditions”, (Германия, Лейпциг, 1995); 14th international conference on general relativity and gravitation (Florence, Italy, 1995); а также на научных семинарах кафедры теории относительности и гравитации Казанского государственного университета, кафедры высшей математики и математического моделирования Казанского (Приволжского) федерального университета, Российского гравитационного общества (Центр гравитации и фундаментальной метрологии ВНИИМС), кафедры физики Ульяновского государственного педагогического университета, кафедры геометрии и кафедры теоретической физики Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. Научная работа по теме диссертации поддерживалась различными фондами: РФФИ (Россия, девять грантов), НИОКР (Россия, Татарстан, один грант).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав основного текста, заключения, приложений и списка литературы из 213 наименований. Общий объем диссертации составляет 229 страниц.

Основное содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели работы, даётся представление об основном содержании работы, перечислены основные положения диссертации, выносимые на защиту.

В первой главе "Поляризация вакуума квантованного скалярного поля в искривленном пространстве - времени" диссертации обсуждаются некоторые проблемы вычисления перенормированных вакуумных средних $\langle \phi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ квантованных полей в искривленных пространствах-времени. В качестве модели рассматривается скалярное поле ϕ , лагранжиан которого есть

$$L(x) = \sqrt{|g|} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - (m^2 + \xi R) \phi^2], \quad (1)$$

где $|g| = |\det(g_{\mu\nu})|$, m – масса поля, ξ – константа связи скалярного поля с кривизной R пространства-времени.

§1.1 этой главы носит вводный характер. В **§1.2** описана процедура регуляризации в искривленных пространствах вакуумных средних $\langle \phi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ квантованного скалярного поля раздвижкой точек, а **§1.3** процедуры их перенормировки вычитанием контрчленов ДеВитта-Швингера. В **§1.3.1** строится разложение бивектора $\tilde{g}_n^{\tilde{m}}$ параллельного переноса вектора вдоль кратчайшей геодезической, соединяющей раздвинутые точки, в ряд по разности координат этих точек, что используется в упомянутой процедуре перенор-

мировки,

$$\begin{aligned}
g_n^{\tilde{m}} = & \delta_n^m - \Gamma_{nk}^m \varepsilon^k + \left(-\frac{1}{2} \Gamma_{nk,p}^m + \frac{1}{2} \Gamma_{ka}^m \Gamma_{np}^a \right) \varepsilon^k \varepsilon^p \\
& + \left(-\frac{1}{6} \Gamma_{nk,pq}^m - \frac{1}{12} \Gamma_{nk,a}^m \Gamma_{pq}^a + \frac{1}{12} \Gamma_{na,k}^m \Gamma_{pq}^a + \frac{1}{3} \Gamma_{ka,p}^m \Gamma_{nq}^a + \frac{1}{6} \Gamma_{ka}^m \Gamma_{np,q}^a \right. \\
& \left. - \frac{1}{12} \Gamma_{ab}^m \Gamma_{nk}^a \Gamma_{pq}^b + \frac{1}{12} \Gamma_{ka}^m \Gamma_{nb}^a \Gamma_{pq}^b - \frac{1}{6} \Gamma_{ka}^m \Gamma_{pb}^a \Gamma_{nq}^b \right) \varepsilon^k \varepsilon^p \varepsilon^q \\
& + \left(-\frac{1}{24} \Gamma_{nk,pqs}^m + \frac{1}{24} \Gamma_{na,kp}^m \Gamma_{qs}^a - \frac{1}{24} \Gamma_{nk,pa}^m \Gamma_{qs}^a - \frac{1}{8} \Gamma_{ka,pq}^m \Gamma_{ns}^a \right. \\
& + \frac{1}{24} \Gamma_{ka}^m \Gamma_{np,qs}^a + \frac{1}{24} \Gamma_{na,k}^m \Gamma_{pq,s}^a - \frac{1}{24} \Gamma_{nk,a}^m \Gamma_{pq,s}^a + \frac{1}{8} \Gamma_{ka,p}^m \Gamma_{nq,s}^a \\
& - \frac{1}{12} \Gamma_{ab,k}^m \Gamma_{np}^a \Gamma_{qs}^b + \frac{1}{24} \Gamma_{ka,p}^m \Gamma_{nb}^a \Gamma_{qs}^b - \frac{1}{8} \Gamma_{ka,p}^m \Gamma_{qb}^a \Gamma_{ns}^b + \frac{1}{24} \Gamma_{ka,b}^m \Gamma_{np}^a \Gamma_{qs}^b \\
& - \frac{1}{24} \Gamma_{ab}^m \Gamma_{nk,p}^a \Gamma_{qs}^b - \frac{1}{24} \Gamma_{ab}^m \Gamma_{nk}^a \Gamma_{pq,s}^b + \frac{1}{24} \Gamma_{ka}^m \Gamma_{np,b}^a \Gamma_{qs}^b + \frac{1}{24} \Gamma_{ka}^m \Gamma_{nb}^a \Gamma_{pq,s}^b \\
& - \frac{1}{24} \Gamma_{ka}^m \Gamma_{pb,q}^a \Gamma_{ns}^b - \frac{1}{24} \Gamma_{ka}^m \Gamma_{pb}^a \Gamma_{nq,s}^b + \frac{1}{24} \Gamma_{ab}^m \Gamma_{kp}^a \Gamma_{qc}^b \Gamma_{ns}^c \\
& \left. - \frac{1}{24} \Gamma_{ka}^m \Gamma_{pb}^a \Gamma_{nc}^b \Gamma_{qs}^c + \frac{1}{24} \Gamma_{ka}^m \Gamma_{pb}^a \Gamma_{qc}^b \Gamma_{ns}^c \right) \varepsilon^k \varepsilon^p \varepsilon^q \varepsilon^s + O(\varepsilon^5), \quad (2)
\end{aligned}$$

где символы Кристоффеля Γ_{nk}^m перед разностями координат $\varepsilon^k = \tilde{x}^k - x^k$ (или произведениями таких разностей) должны быть вычислены в точке x . Некоторые технические детали процедуры перенормировки вакуумных средних $\langle \phi^2 \rangle$ и $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ обсуждаются в §1.3.2.

В §1.4 и §1.5 этой главы строятся аналитические приближения для вакуумных средних $\langle \phi^2 \rangle$ и $\langle T_{\mu\nu}^n \rangle$ неминимально связанного с кривизной квантованного скалярного поля в области статического сферически симметричного пространства-времени

$$ds^2 = -f(\rho)dt^2 + d\rho^2 + r(\rho)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3)$$

по малому параметру

$$\varepsilon_{wKB} = L_\star / L \ll 1, \quad (4)$$

где

$$L_\star = \left[m^2 + \frac{2\xi}{r^2} \right]^{-1/2}, \quad (5)$$

m - масса поля, ξ - константа связи скалярного поля с кривизной и L -

характерный масштаб изменения метрических функций $f(\rho)$ и $r(\rho)$:

$$\frac{1}{L(\rho)} = \max \left\{ \left| \frac{r'}{r} \right|, \left| \frac{f'}{f} \right|, \left| \frac{r'}{r} \sqrt{|\xi|} \right|, \left| \frac{f'}{f} \sqrt{|\xi|} \right|, \left| \frac{r''}{r} \right|^{\frac{1}{2}}, \left| \frac{f''}{f} \right|^{\frac{1}{2}}, \dots \right\}. \quad (6)$$

Такая область, в дальнейшем, называется *длиной горловины*. Скалярное поле полагается массивным или безмассовым и находящимся в вакуумном состоянии с нулевой температурой, определенном по отношению к временноподобному вектору Киллинга, всегда существующему в статическом пространстве-времени.

Аналитические приближения для вакуумных средних $\langle \phi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ строятся с точностью до ε_{wkb}^4 и ε_{wkb}^6 соответственно. Нулевые члены таких приближений описывают однопетлевые выражения для $\langle \phi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ в пространстве-времени (3) с постоянными метрическими коэффициентами f и r

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \langle \phi^2 \rangle_{ren} = & \frac{1}{4} \left[m^2 + \frac{2}{r^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \right] \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{bs}^2 r^2} \right) \\ & - \frac{(\xi - 1/8)}{2r^2} - \frac{\mu^2}{r^2} I_1(\mu), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \langle T_t^t \rangle_{ren} = \langle T_\rho^\rho \rangle_{ren} = & \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{m^2}{8r^2} \left(\xi - \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{r^4} \left(\frac{79}{7680} - \frac{11}{96}\xi + \frac{3}{8}\xi^2 \right) \right. \\ & + \left[-\frac{m^4}{8} + \frac{m^2}{2r^2} \left(\frac{1}{6} - \xi \right) + \frac{1}{r^4} \left(-\frac{1}{60} + \frac{1}{6}\xi - \frac{1}{2}\xi^2 \right) \right] \ln \sqrt{\frac{\mu^2}{m_{bs}^2 r^2}} \\ & \left. + \left[\frac{m^4}{2} + \frac{2m^2}{r^2} \left(\xi - \frac{1}{8} \right) + \frac{2}{r^4} \left(\xi - \frac{1}{8} \right)^2 \right] \left[I_1(\mu) - I_2(\mu) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \langle T_\theta^\theta \rangle_{ren} = \langle T_\varphi^\varphi \rangle_{ren} = & \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{m^2}{8r^2} \left(\xi - \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{8r^4} \left(\xi - \frac{1}{8} \right)^2 \right. \\ & + \left[-\frac{m^4}{8} + \frac{1}{r^4} \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{6}\xi + \frac{1}{2}\xi^2 \right) \right] \ln \sqrt{\frac{\mu^2}{m_{bs}^2 r^2}} + \left[\frac{m^2}{r^2} \left(\frac{1}{8} - \xi \right) \right. \\ & \left. - \frac{2}{r^4} \left(\xi - \frac{1}{8} \right)^2 \right] I_1(\mu) + \left[\frac{m^4}{2} + \frac{2m^2}{r^2} \left(\xi - \frac{1}{8} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{r^4} \left(\xi - \frac{1}{8} \right)^2 \right] I_2(\mu) \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\mu^2 = m^2 r^2 + 2\xi - \frac{1}{4}, \quad (10)$$

$$I_n(\mu) = \int_0^\infty \frac{x^{2n-1} \ln|1-x^2|}{1+e^{2\pi\mu x}} dx, \quad (11)$$

m_{DS} равна массе m поля для массивного скалярного поля. В случае безмассового поля эта константа является известным параметром инфракрасного обреза в $\langle T_\nu^\mu \rangle_{DS}$. Конкретный выбор величины m_{DS} соответствует конечной перенормировке коэффициентов при членах гравитационного лагранжиана, квадратичных по тензору Вейля и скалярной кривизне, и должен быть фиксирован экспериментом или наблюдениями.

В пределе большой массы поля ($m^2 r^2 \gg 1$) построенные аналитические приближения совпадают с известными выражениями [22].

В параграфе §1.6 получено аналитическое приближение для $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ квантованного скалярного поля в статических асимптотически плоских пространствах времени. Предполагается, что скалярное поле является массивным или безмассовым и находится в квантовом состоянии с нулевой температурой. Выражения для $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ разделяются на низкочастотную и высокочастотную части. Для аппроксимации высокочастотных частей используется подход Андерсона, Хискока и Самюэля [22]. Эти части содержат все ультрафиолетовые расходимости и могут быть перенормированы. Низкочастотный вклад в $\langle \varphi^2 \rangle_{ren}$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle_{ren}$ определяется в общем случае глобальной структурой пространства-времени и вычислен в статическом сферически симметричном асимптотически плоском пространстве-времени для квантового состояния соответствующего вакууму Минковского (в общепринятой терминологии это соответствует выбору квантового состояния Бульвара). Обе части $\langle T_\nu^\mu \rangle_{ren}$ удовлетворяют закону сохранения. В случае конформно инвариантного поля след низкочастотной части $\langle T_\nu^\mu \rangle_{ren}$ равен нулю, а след высокочастотной части равен аномальному следу. Важной частью исследования является получение пределов применимости рассмотренных приближений.

В параграфе §1.7 аналогичное приближение получено для $\langle \varphi^2 \rangle$ квантованного скалярного поля в ультрастатических асимптотически плоских пространствах времени. Предполагается, что поле обладает произвольной мас-

сой, константа ξ связи поля со скалярной кривизной произвольна и поле находится в вакуумном состоянии с произвольной температурой.

Глава 2 "Самосогласованные решения полуклассической теории гравитации с квантованным скалярным полем" посвящена исследованию вопроса существования статических искривленных пространств-времени, кривизна которых порождается вакуумом квантованных полей

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}. \quad (12)$$

Подчеркнем, что единственным параметром размерности длины в таких задачах является планковская длина l_p . Это означает, что характерный масштаб l_g радиуса кривизны гравитационного поля, соответствующий решению уравнений (12) может быть много больше l_p (что требуется условиями применимости полуклассической теории) только если в задаче существует большой безразмерный параметр. В качестве такого параметра обычно рассматривают число квантованных полей, поляризация которых является источником искривления пространства-времени. В параграфе §2.1 для получения статического сферически симметричного численного решения с горловиной уравнений полуклассической теории гравитации используется аналитическое приближение Андерсона, Хискока и Самуэля для $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ квантованного скалярного поля [22]. Предполагается также, что поле является конформно связанным и находится в квантовом состоянии с нулевой температурой. Метрика статического сферически симметричного пространства-времени может быть представлена в виде

$$ds^2 = -f(\rho)dt^2 + d\rho^2 + r^2(\rho) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (13)$$

где $f(\rho), r(\rho)$ являются функциями собственной радиальной координаты ρ , $-\infty < \rho < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Одно из численных решений уравнений (12), определяемое граничными условиями на горловине

$$\begin{aligned} K^2 &= (5760\pi)^{-1}; \quad \ln f(0) = -2/3; \quad f'(0) = 0; \quad f''(0) = 0; \quad f'''(0) = 0; \\ r(0) &= \sqrt{-16K^2 \ln f(0)} \approx 0.02l_p; \quad r'(0) = 0; \quad r''(0) = 0; \quad r'''(0) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

имеет вид

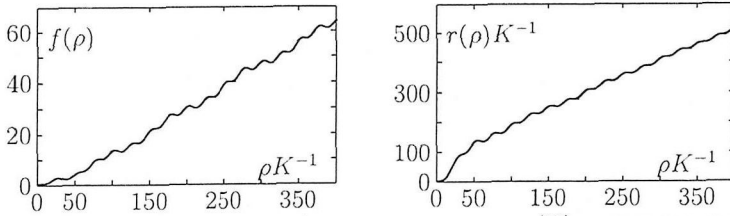


Рис. 1: Численное статистическое сферически симметричное (13) решение уравнений (12), определяемое граничными условиями на горловине (14).

В параграфе §2.2 описаны численные ультростатистические цилиндрически симметричные решения уравнений полуклассической теории гравитации. В качестве источника гравитационного поля в этих уравнениях используется вакуум безмассового конформно связанного с кривизной скалярного поля, описываемый средним вакуумным значением оператора тензора энергии-импульса $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ в приближении Фролова-Зельникова [23]. В параграфе §2.3 исследована возможность поддержания длинной горловины вакуумными флуктуациями квантованных полей. Если в качестве источника кривизны такого пространства-времени использовать вакуумное среднее оператора тензора энергии-импульса $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ в приближении (4, 8, 9), то система уравнений полуклассической гравитации (12) является алгебраически несовместной. Для преодоления этой проблемы в качестве источника рассмотрены два квантованных скалярных поля: первое - конформно инвариантное ($\xi_1 = 1/6, m_1 = 0$), второе - массивное ($\xi_2 \equiv \xi$ - произвольная постоянная, $m_2 \equiv m, \mu_2^2 = m^2 r^2 + 2\xi - 1/4 \gg 1, m^2 r^2 \gg |2\xi - 1/4|$), а также классическое электромагнитное поле. Нетривиальные уравнения (12) в этом случае имеют вид

$$-\frac{1}{8\pi r^2} \simeq \frac{1}{4\pi^2 r^4} \left[0.00310 + \frac{1}{720} \ln(m_{ds}^2 r^2) + \frac{1}{m^2 r^2} \left(-\frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^2}{12} - \frac{\xi}{60} + \frac{1}{630} \right) \right] - \frac{Q^2}{8\pi r^4}, \quad (15)$$

$$0 \simeq \frac{1}{4\pi^2 r^4} \left[-0.00171 - \frac{1}{720} \ln(m_{ds}^2 r^2) + \frac{1}{m^2 r^2} \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi}{30} - \frac{1}{315} \right) \right] + \frac{Q^2}{8\pi r^4}, \quad (16)$$

где постоянная Q имеет смысл электрического заряда. Решением этих урав-

нений, удовлетворяющих условию $r^2 \gg 1/(720\pi)$, является

$$r^2 \simeq \sqrt{-\frac{1}{\pi m^2} \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi}{30} - \frac{1}{315} \right)}, \quad (17)$$

$$Q^2 \simeq \frac{2}{\pi} \left[0.00171 + \frac{1}{720} \ln \left(\frac{m_{ps}^2}{m\sqrt{\pi}} \sqrt{-\left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi}{30} - \frac{1}{315} \right)} \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{m} \sqrt{-\left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi}{30} - \frac{1}{315} \right)} \right]. \quad (18)$$

Примером частного решения системы (15,16), удовлетворяющего всем выше перечисленным условиям может служить

$$\xi = -10^4, \quad m^2 = 10^3, \quad r \simeq 101.49. \quad (19)$$

Отметим, что вещество, определяющее искривление пространства-времени в рассматриваемом случае обладает необходимыми "экзотическими" свойствами (в смысле Морриса и Торна [3, 4]) для того, чтобы горловина могла существовать:

$$p_r = -\epsilon = \frac{1}{4\pi^2 r^4} \left[0.00310 + \frac{1}{720} \ln(m_{ps}^2 r^2) + \frac{1}{m^2 r^2} \left(-\frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^2}{12} - \frac{\xi}{60} + \frac{1}{630} \right) \right] - \frac{Q^2}{8\pi r^4} < 0, \quad (20)$$

где p_r есть радиальное давление, ϵ - плотность энергии а r, Q определяются выражениями (17,18).

Очевидным недостатком вышеприведенного решения является то, что величина $|\xi|$, соответствующая большим, по сравнению с планковской длиной, радиусам горловины, является также большой (по сравнению с единицей). Тем не менее, в случае большого числа N полей радиус горловины r пропорционален $\sqrt{N}$ ($N^{1/4}$ для достаточно массивных полей) и большие (по сравнению с планковской длиной) радиусы горловины могут быть получены для значений $|\xi|$ меньших, чем рассмотренные выше.

В главе 3 "Обратная реакция квантованного скалярного поля на гравитационное поле фонового пространства-времени" исследован эффект обратного влияния квантованного скалярного поля на ультраэкстремальный

горизонт. Такой горизонт встречается, например, в пространстве Рейсснера - Нордстрема - Де Ситтера, в случае, когда космологическая константа $\Lambda > 0$ [8]. Соответствующий этому случаю горизонт оказывается космологическим, так что метрика

$$ds^2 = -U(r)dt^2 + \frac{dr^2}{V(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (21)$$

где

$$U(r) = V(r) = \frac{(r + 3r_+)}{6r_+^2 r^2} (r_+ - r)^3, \quad (22)$$

является статической между $r = 0$ и $r = r_+$. Влияние квантовых поправок на метрику (21,22) в окрестности горизонта определяется уравнениями

$$G_\mu^\nu + \Lambda \delta_\mu^\nu = T_\nu^\mu{}^{(cl)} + \langle T_\nu^\mu \rangle_{ren}, \quad (23)$$

где тензор энергии-импульса классического электромагнитного поля в координатах (21) есть

$$T_\nu^\mu{}^{(cl)} = \frac{Q^2}{8\pi r^4} \text{diag}(-1, -1, 1, 1). \quad (24)$$

В нулевом по квантовым поправкам приближении константа Q и космологическая константа Λ в ультраэкстремальном случае связаны соотношениями

$$Q^2 = \frac{r_+^3}{2}, \quad \Lambda = \frac{1}{2r_+^2}. \quad (25)$$

Требование ультраэкстремальности горизонта даже с учетом квантовых поправок

$$U(r_+) = U'(r_+) = U''(r_+) = V(r_+) = V'(r_+) = V''(r_+) = 0 \quad (26)$$

приводит к

$$Q^2 = \frac{r_+^2}{2} - 2\pi r_+^5 \frac{d\langle T_t^t \rangle_{ren}}{dr} \Big|_{r=r_+}, \quad (27)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2r_+^2} + 8\pi \langle T_t^t \rangle_{ren} \Big|_{r=r_+} + 2\pi r_+ \frac{d\langle T_t^t \rangle_{ren}}{dr} \Big|_{r=r_+}, \quad (28)$$

$$V(r) = 1 + \left(\frac{\Lambda r_+^3}{3} - \frac{Q^2}{r_+} - r_+ \right) \frac{1}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{8\pi}{r} \int_{r_+}^r d\tilde{r} \tilde{r}^2 \langle T_t^t \rangle_{ren}, \quad (29)$$

$$U = (1 + 2\psi)V, \quad (30)$$

$$\psi = \frac{const}{2} + 4\pi \int_{r_+}^r d\tilde{r} \tilde{r} \frac{T_r^r - T_t^t}{V}. \quad (31)$$

Окрестность ультраэкстремального горизонта $r = r_+$ является длинной горловиной (4-6). Используя для вычисления $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}$ квантованного скалярного поля полученные в главе 1 выражения с точностью до ε_{wkb}^6 (в координатах (21) это соответствует точности $(r - r_+)^3$) удастся показать, что выражения (27 – 31) сходятся. Это даст возможность утверждать, что квантованное скалярное поле не разрушает ультраэкстремальный горизонт.

В главе 4 "Эффект самодействия покоящегося заряда в статических пространствах-времених" построена процедура перенормировки собственного потенциала покоящегося заряда в статических пространствах-времених, а также вычислена сила самодействия на заряд в длинной горловине (4-6). Процедура перенормировки, изложенная в §4.1,

$$\phi_{ren}(x) = \lim_{x_0 \rightarrow x} (\phi(x; x_0) - \phi_{bs}(x; x_0)). \quad (32)$$

представляет собой вычитание некоторых членов разложения соответствующей функции Грина ϕ_m

$$\phi_{m;\mu}'' - (m^2 + \xi R) \phi_m = -4\pi q \int \delta^{(4)}(x - x_0(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{-g^{(4)}}}, \quad (33)$$

по степеням малости параметра $1/(ml_g)$, где l_g - характерный масштаб кривизны фонового гравитационного поля, m - масса скалярного поля, ξ - константа связи скалярного поля с кривизной R , $g^{(4)}$ - детерминант метрики $g_{\mu\nu}$, q - скалярный заряд и τ - его собственное время. Предполагается, что мировая линия заряда определяется функциями $x_0''(\tau)$. Перенормировочные члены определяются простым правилом: они не исчезают при стремлении массы соответствующего поля к бесконечности. Такой подход аналогичен перенормировке в квантовой теории поля в искривлённых пространствах-времених, используемой в регуляризационной процедуре раздвижки точек [24, 25]. В координатах

$$ds^2 = -g_t(x^i)dt^2 + g_{jk}(x^i)dx^jdx^k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (34)$$

выражение для перенормировочных членов имеет вид

$$\phi_{bs}(x^i; x_0^i) = q \left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma}} + \frac{\partial g_t(x_0)}{\partial x_0^i} \frac{\sigma^i}{4g_t(x_0)\sqrt{2\sigma}} - m \right), \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma^i = & - (x^i - x_0^i) - \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i (x^j - x_0^j) (x^k - x_0^k) \\ & - \frac{1}{6} \left(\Gamma_{jm}^i \Gamma_{kl}^m + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x_0^l} \right) (x^j - x_0^j) (x^k - x_0^k) (x^l - x_0^l) \\ & + O \left((x - x_0)^4 \right),\end{aligned}\quad (36)$$

$$\sigma = \frac{g_{ij}(x_0)}{2} \sigma^i \sigma^j, \quad (37)$$

а символы Кристоффеля Γ_{jk}^i вычисляются в точке x_0 . Как и в квантовой теории поля, такая перенормировка справедлива в случае произвольной массы m поля (даже $m = 0$).

В случае массивного поля, для которого $ml_g \gg 1$, приближенное выражение для собственного потенциала скалярного заряда есть

$$\begin{aligned}\phi_{ren}(x) = & \lim_{x_0 \rightarrow x} (\phi_m(x; x_0) - \phi_{bs}(x; x_0)) \\ = & \frac{q}{2m} \left[-\frac{g_{tt,i}^i}{12g_{tt}} + \frac{5g_{tt,i}g_{tt}^i}{48g_{tt}^2} - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right] + O \left(\frac{q}{m^2 l_g^3} \right).\end{aligned}\quad (38)$$

Конечно, порядок этого выражения в $1/(ml_g)$ раз меньше соответствующего порядка ϕ_{ren} для безмассового поля (или поля с массой $m \lesssim 1/l_g$). Тем не менее, выражение (38) может быть использовано для проверки асимптотического поведения ϕ_{ren} массивного поля в пределе $m \rightarrow \infty$.

В §4.2 вычислена силы самодействия на покоящийся заряд, являющийся источником безмассового скалярного поля, в длинной горловине (4-6)

$$f_\rho(x) = -\frac{q}{2} \frac{\partial \phi_{ren}}{\partial \rho} = -\frac{q^2}{2r^2} \frac{dr}{d\rho} F(\xi) \left(1 + O(\epsilon_{\text{вкн}}^2) \right), \quad (39)$$

где

$$F(\xi) = \sqrt{2\xi - \frac{1}{4}} - 2 \int_0^{\sqrt{2\xi - 1/4}} \frac{x dx}{(1 + e^{2\pi x}) \sqrt{2\xi - 1/4 - x^2}}, \quad \xi > \frac{1}{8}. \quad (40)$$

Для безмассового минимально связанного с кривизной ($\xi = 0$) скалярного поля нет малого параметра, аналогичного (4). Тем не менее, если разложить

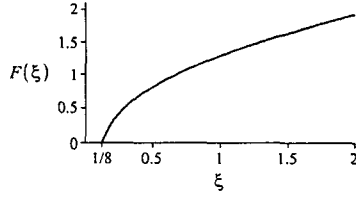


Рис. 2. Кривая задает функцию $F(\xi)$, описываемую выражением (40).

поле ϕ по угловым гармоникам

$$\begin{aligned}\phi(x^i; \tilde{x}^i) &= 4\pi q \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\Omega) Y_{l,m}(\Omega) g_l(\rho, \tilde{\rho}) \\ &= q \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \gamma) g_l(\rho, \tilde{\rho}),\end{aligned}\quad (41)$$

где P_l – полиномы Лежандра, $\cos \gamma \equiv \cos \theta \cos \tilde{\theta} + \sin \theta \sin \tilde{\theta} \cos(\varphi - \tilde{\varphi})$, то в длинной горловине кротовой норы приближенное решение уравнения (33) для всех значений l , за исключением $l = 0$, можно построить по аналогии с решением в предыдущем параграфе. При этом для моды с $l = 0$ можно получить решение в квадратурах, учитывающее поведение геометрии пространства-времени на асимптотике. Такая программа реализована в параграфе §4.3, где в качестве поля рассмотрено поле покоящегося электрического заряда, что не меняет задачу принципиально. В этом случае единственная ненулевая компонента силы самодействия в координатах

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + r(\rho)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (42)$$

оказывается равной

$$f_\rho(\rho) = f_\rho^{l=0} + f_\rho^{\text{wkb}}, \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned}f_\rho^{l=0} &= \frac{q^2}{2r(\rho)^2} \left(\int_0^\infty \frac{d\rho}{r(\rho)^2} \right)^{-1} \int_0^\rho \frac{d\rho}{r(\rho)^2}, \\ f_\rho^{\text{wkb}} &= \frac{q^2}{2r(\rho)^2} \frac{dr}{d\rho} \left(A - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(1 + O(\varepsilon_{\text{wkb}}^2) \right),\end{aligned}\quad (44)$$

$$A \simeq -0.01112 \dots \quad (45)$$

Основные результаты

1. Показано, что вакуумные средние $\langle \phi^2 \rangle$ и $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ для квантованного неминимально связанного скривизной скалярного поля в областях статического сферически симметричного пространства-времени, называемых длинными горловинами, определяются локальными свойствами пространства-времени. В области пространства-времени, называемой длиной горловины, получены аналитические приближения для вакуумных средних $\langle \phi^2 \rangle$ и $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Аналогичные приближения получены в статических сферически симметричных асимптотически плоских и ультрастатических асимптотически плоских пространствах-времени в квантовом состоянии, соответствующем вакууму Минковского в асимптотически плоской области.

2. В рамках полуклассической теории гравитации, описываемой уравнениями $G_{\mu}^{\nu} = 8\pi \langle T_{\mu}^{\nu} \rangle_{ren}$ рассмотрена задача самосогласованного описания статических сферически симметричных кротовых нор, порождаемых вакуумными флуктуациями квантованных полей. Получены примеры таких решений.

3. Рассмотрена квантовая обратная реакция на ультраэкстремальный горизонт квантового скалярного поля с произвольной массой и параметром связи с кривизной. Проанализировано поведение тензора энергии-импульса квантового поля вблизи горизонта и показано, что квантово-поправленные ультраэкстремальные горизонты действительно существуют.

4. Представлен метод, позволяющий перенормировать собственный потенциал покоящегося скалярного или электрического заряда в статическом пространстве-времени. В случае скалярного поля метод справедлив для произвольной константы связи скалярного поля с кривизной фонового гравитационного поля и произвольной массы поля. Приведены примеры вычисления силы самодействия, действующей на статический скалярный и электрический заряд в длинной горловине кротовой норы.

Список литературы

- [1] Гриб А. А., Мамасв С. Г., Мостепаненко В. М., *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*.—М.: Энергоатомиздат.—1988.—288 с.

- [2] Frolov V. P., Novikov I. D., *Black Holes Physics: Basic Concepts and New Developments*.—Kluwer Academic Publishers: Dordrecht/Boston/London, 1998. 770 p.
- [3] Morris M. S., Thorne K. S. *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity* // American Journal of Physics. —1988.—V.56.—P.395-412.
- [4] Morris M. S., Thorne K. S., Yurtsever U. *Wormholes, time machines, and the weak energy condition* // Physical Review Letters.—1988.—V.61.—P.1446-1449.
- [5] Anderson P.R., Hiscock W.A., Loran D.J. *Semiclassical stability of the extreme Reissner-Nordström black hole* // Physical Review Letters.—1995.—V.74.—P.1365-1368.
- [6] Matyjasek J., Zaslavskii O. *Quantum back reaction of massive fields and selfconsistent semiclassical extreme black holes and acceleration horizons* // Physical Review D.—2001.—V.64.—104018.
- [7] Matyjasek J., Zaslavskii O. *Semiclassical ultracextremal horizons* // Physical Review D.—2005.—V.71.—087501.
- [8] Romans L.J. *Supersymmetric, cold and lukewarm black holes in cosmological Einstein-Maxwell theory* // Nucl. Phys..—1992.—V.B383.—P.395-415.
- [9] Dirac P.A.M. *Classical Theory of Radiating Electrons* // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A.—1938. —V.167.—P.148-169.
- [10] DeWitt B.S., Brehme R.W. *Radiation damping in a gravitational field* // Ann. Phys.—1960.—V.9.—P.220-259.
- [11] Hobbs J.M. *A vierbein formalism of radiation damping* // Ann. Phys.. 1968. —V.47.—P.141-165.
- [12] Hobbs J.M. *Radiation damping in conformally flat Universes* // Ann. Phys..—1968.—V.47.—P.166-172.
- [13] Mino Y., Sasaki M., Tanaka T. *Gravitational radiation reaction to a particle motion* // Physical Review D.—1997.—V.55.—3457-3476.

- [14] Quinn T.C., Wald R.M. *Axiomatic approach to electromagnetic and gravitational radiation reaction of particles in curved spacetime* // Physical Review D. 1997. V.56. 3381-3394.
- [15] Quinn T.C. *Axiomatic approach to radiation reaction of scalar point particles in curved spacetime* // Physical Review D.—2000.—V.62.—064029.
- [16] Hughes S.A. *Listening to the universe with gravitational-wave astronomy* // Annals. Phys.—2003.—V.303.—P.142-178.
- [17] Хуснутдинов Н.Р. *Эффекты самодействия частиц в гравитационном поле* // Успехи физических наук.—2005.—Т.175.—С.603-620.
- [18] N.R. Khusnutdinov, I.V. Bakhmatov *Self-force of a point charge in the space-time of a symmetric wormhole* // Physical Review D.—2007.—V.76.—124015.
- [19] Bezerra V.B. and Khusnutdinov N.R. *Self-force on a scalar particle in a class of wormhole spacetimes* // Physical Review D.—2009.—V.79.—064012.
- [20] Casals M., Dolan S.R., Ottewill A.C., Wardell B. *Self-Force Calculations with Matched Expansions and Quasinormal Mode Sums* // Physical Review D.—2009.—V.78.—124043.
- [21] Schutz B.F. *Gravitational wave astronomy* // Class. Quant. Grav.—1999.—V.16.—P.A131-A156.
- [22] Anderson P.R., Hiscock W.A., Samuel D.A. *Stress-energy tensor of quantized scalar fields in static spherically symmetric spacetimes* // Physical Review D.—1995.—V.51.—P.4337-4358.
- [23] Зельников А.И., Фролов В.П. *Приближение Киллинга и поляризация вакуума в черных дырах* // Труды ФИАН.—1989.—Т.197.—С.63-87.
- [24] ДеВитт Б. С., *Динамическая теория групп и полей*: Пер. с англ./Под ред. Г. А. Вилковыского.—М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.—1987.—288 с.
- [25] Christensen S.M. *Regularization, renormalization, and covariant geodesic point separation* // Physical Review D.—1978.—V.17.—P.946-963.

Список основных работ по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах входящих в перечень ВАК

1. Popov A. A. *Self-force on a static charge in the long throat of a wormhole* // General Relativity and Gravitation – 2013. – DOI 10.1007/s10714-013-1546-5
2. Popov A. A. *Renormalization of static self-potential* // TSPU Bulletin. – 2012. – V.13(128). – P.125-129.
3. Popov A. A. *Renormalization for self-potential of a scalar charge in static space-times* // Physical Review D. – 2011. – V.84. – 064009.
4. N.R. Khusnutdinov, A.A. Popov, L.N. Lipatova *Self-force of a point charge in the space-time of a massive wormhole* // Classical and Quantum Gravity. – 2010. – V.27. – P.215012.
5. Popov A. A. *Self-force on a scalar point charge in the long throat* // Phys. Lett. B. 2010. V.693. P.180-183.
6. Popov A. A., Zaslavskii O.B. *Quantum-corrected ultraextremal horizons and the validity of the WKB approximation in the massless limit* // Physical Review D. – 2007. – V.75. – 084018.
7. Popov A. A. *Local expansion of the bivector of geodesic parallel displacement* // Gravitation & Cosmology. – 2007. – V.13. – P.119-122.
8. Popov A. A. *Long throat of a wormhole created from vacuum fluctuations* // Classical and Quantum Gravity. – 2005. – V.22. – P.5223–5230.
9. Popov A. A. *Analytical approximation for $\langle \varphi^2 \rangle$ of a quantized scalar field in ultrastatic asymptotically flat spacetimes* // Physical Review D. – 2004. – V.70. – 084017.
10. Popov A. A. *Analytical approximation of the stress-energy tensor of a quantized scalar field in static spherically symmetric spacetimes* // Physical Review D. – 2003. – V.67. – 044021.

11. Popov A. A. *Stress-energy of a quantized scalar field in static wormhole spacetimes* // Physical Review D.—2001.—V.64.—104005.
12. Popov A. A., Sushkov S. V. *Vacuum polarization of a scalar field in wormhole spacetimes* // Physical Review D.—2001.—V.63.—044017.
13. Popov A. A. *Cylindrical self-consistent solutions of semiclassical gravity* // Phys. Lett. A.—1998.—V.249.—P.376-382.
14. Hochberg D., Popov A., Sushkov S. V. *Self-consistent wormhole solutions of semiclassical gravity* // Physical Review Letters.—1997.—V.78.—P.2050-2053.
15. Попов А.А. *Перенормировка собственного потенциала статического скалярного заряда* // Вестник ТГГПУ.—2011.—Т.1(23).—С.36-40.
16. Попов А.А. *Сила самодействия на скалярный заряд в кротовой норе с длинной горловиной* // Вестник ТГГПУ.—2010.—Т.3(21).—С.59-63.

Статьи в других изданиях

17. Попов А.А., Заславский О.Б. *Полуклассические ультраэкстремальные горизонты* // Труды Института прикладной астрономии РАН.—2008.—Т.18.—С.279-293.
18. Попов А.А. *О существовании проходимых кротовых нор в полуклассической теории гравитации* // Вестник Казанского государственного педагогического университета.—2005.—Т.4.—С.160-167.
19. Попов А.А. *Использование компьютерных систем аналитических вычислений в квантовой теории поля на фоне искривленных пространств-времени* // Проблемы информационных технологий в математическом образовании: Учебное пособие.- Казань: Изд-во ТГГПУ — 2005. — С.78-84.
20. Попов А.А. *Поляризация вакуума квантованного скалярного поля в ультростатических асимптотически плоских пространствах* // Вестник Казанского государственного педагогического университета.—2004.—Т.2.—С.50-65.

21. Попов А.А. *Поляризация вакуума в пространстве-времени цилиндрически симметричной кротовой норы* // Труды математического центра имени Н.П. Лобачевского. Казанское математическое общество. Казань: Изд-во "Унипресс".—2001.—Т.11.—С.221-227.
22. Sushkov S. V., Popov A. A. *A selfconsistent semiclassical solution with a wormhole in the theory of gravity* // in "Quantum Field Theory Under the Influence of External Conditions". Ed. M.Bordag—Teubner, Leipzig — 1996. — P.206.

23

Попов Аркадий Александрович

Квантовые и классические эффекты неминимально связанного с кривизной скалярного поля

В диссертационной работе исследуются эффекты квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени, в частности, эффект поляризации вакуума квантованного неминимально связанного с кривизной скалярного поля в искривленном пространстве-времени; эффект обратного влияния квантованного скалярного поля на геометрию пространства-времени; а также эффект самодействия заряда в искривленном пространстве-времени.

Popov Arkady Alexandrovich

Quantum and classical effects of a scalar field with nonminimal coupling to curvature

The effects of quantum field theory in curved space-time, in particular, the effect of vacuum polarization of the quantized scalar field with nonminimal coupling to curvature are investigated in this work. We also investigate the effect of the backreaction of the quantized scalar field on the geometry of space-time and the effect of self-action of charge in curved space-time.

Подписано в печать 24.07.2013

Формат 60 x 84 1/16 Печ. л. 2.

Тираж 110 экз.

Казанский университет

420008, г. Казань, ул. Профессора Нухина, 1/37

32