

Зиновьев Дмитрий Александрович

**МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ПОДСТАНОВОК КОУЛА-ХОПФА В ТЕОРИИ
НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В САМОГРАВИТИРУЮЩИХ СЖИМАЕМЫХ СРЕДАХ И
ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ АСТРОФИЗИКИ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

по специальности 01.04.02-Теоретическая физика

Работа выполнена на кафедре Теоретической физики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Ульяновский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Журавлев Виктор Михайлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Шикин Георгий Николаевич
доктор физико-математических наук,
профессор
Чуличков Алексей Иванович

Ведущая организация: Институт физики атмосферы РАН

Защита состоится «17» января 2012г. в часов на заседании диссертационного совета Д212.203.34 в ФГБОУ ВПО Российском университете Дружбы народов (РУДН) по адресу: 115419 г.Москва, ул. Орджоникидзе д. 3, зал № 1.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГБОУ ВПО Российского университета Дружбы народов (РУДН) по адресу: 117198, г.Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Отзывы на автореферат направлять по адресу: 432000, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42, Ульяновский государственный университет, Управление научных исследований.

Автореферат разослан « » _____ 2011г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент

 Лаптев Ю.П.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Нелинейные волны в сжимаемой среде являются одной из самых распространенных задач теоретической физики, имеющей приложение в различных ее разделах, начиная от физики атмосферы и заканчивая астрофизикой и космологией. Исследование возникновения и распространения ударных волн при различных физических условиях и свойствах среды, является типичной задачей в таких исследованиях[4а]. Одной из часто возникающих задач в астрофизике является описание различных явлений, сопровождающихся высвобождением огромных энергий за небольшой промежуток времени[7а] в поле тяготения, создаваемом самим веществом исследуемого объекта. К таким явлениям относятся, например, взрывы сверхновых и сбросы оболочек звезд, которые сопровождаются возникновением ударных волн, распространяющихся как внутри звезд, так и в газопылевых облаках и межзвездной среде[8а]. Для космологии одной из фундаментальных задач является описание возникновения крупномасштабной структуры в распределении галактик, которая так же связана с проблемой описания динамики сжимаемой среды в собственном поле тяготения. Поэтому общая задача описания динамики нелинейных волн в сжимаемой самогравитирующей среде является актуальной задачей.

К настоящему времени существует целый ряд математических методов, позволяющих исследовать течения сжимаемой среды в различных частных случаях. Широко распространенным подходом является численный анализ уравнений динамики жидкости. Однако, не смотря на его эффективность, он обладает рядом недостатков, которые заставляют искать новые методы и подходы к решению задач гидродинамики на основе аналитических методов построения их точных решений. Среди таких методов в динамике сжимаемой среды наиболее широко распространенным является метод годографа [4а,19а]. Этот метод для некоторых частных задач применялся к исследованию образования крупномасштабной структуры Вселенной [11а]. Для несжимаемой вязкой среды важное значение имеет метод Коула-Хопфа [12а]. Однако для целого круга задач эти методы либо не могли быть применены, либо в рамках этих методов не удастся часто проанализировать динамику изучаемых объектов с достаточной степенью детальности и наглядности. В связи с этим возникает задача отыскания новых методов и подходов для анализа задач сжимаемой среды, в особенности для решения самосогласованной задачи ее течений в собственном поле тяготения. Таким новым общим методом является метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа[1а], использование которого для задач гидродинамики сжимаемой среды является актуальной задачей для физики атмосферы, астрофизики, космологии и других разделов теоретической физики.

Цель работы. Создание методов решения задач динамики сжимаемой жидкости на основе обобщенных подстановок Коула-Хопфа. Построение развитого метода обобщенных подстановок Коула-Хопфа в приложении к задачам гидродинамики самогравитирующих систем. Рассмотрение точно интегрируемых моделей течений сжимаемой жидкости. Применение полученных результатов для моделирования волновых процессов в сферически и цилиндрически симметричных самогравитирующих системах.

Задачи исследования.

1. Обобщить метод подстановок Коула-Хопфа на более широкий класс нелинейных уравнений типа Бюргера.
2. В рамках обобщенного метода найти уравнения, описывающие течения сжимаемой жидкости и построить их решения.

3. Построить модель динамики сферически симметричной самогравитирующей системы для различных начальных распределений плотности среды и ее скорости. Провести ее анализ на наличие волновых решений.

4. Исследовать распространение ударных волн газопылевых облаках с помощью построенной математической модели.

Методы исследования. Для исследования интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений в диссертации применяется метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа, развиваемый в гл. 2. Далее с его помощью в гл. 3 строятся точно интегрируемые модели течений сжимаемой жидкости, а в гл. 4 модели сферически симметричных самогравитирующих систем.

Научная новизна. В работе представлены следующие результаты.

1) Предложено и развито обобщение метода подстановок Коула-Хопфа (МОПК-Х), позволяющее строить иерархии полностью интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных и их точных решений в произвольной координатной размерности. Получены новые классы интегрируемых уравнений в частных производных гидродинамического типа.

2) С помощью МОПК-Х построены новые примеры точно интегрируемых моделей течений сжимаемой жидкости в размерности $1+1$ и $1+2$. Найдены интегралы движений для большого класса уравнений сжимаемой жидкости для разных физических условий.

3) С помощью МОПК-Х получены новые классы точных решений течений сжимаемой среды в собственном поле тяготения для начальных условий с различными типами симметрии (плоской, цилиндрической, сферической).

4) Впервые найдены в форме явных обобщенных подстановок Коула-Хопфа точные решения, описывающие формирование крупномасштабных структур в облаках пыли и газа вследствие гравитационной неустойчивости Джинса для произвольных начальных распределений скорости и плотности среды, имеющих плоскую, цилиндрическую или сферическую симметрию.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть применены в теории нелинейных дифференциальных и разностных уравнений и связанных с ними областях теоретической физики. Описанные в диссертации точно интегрируемые модели течений сжимаемой жидкости и сферически симметричных самогравитирующих газопылевых смесей могут быть использованы для решения астрофизических задач динамики нелинейных ударных волн в звездах и межзвездной среде, формирования крупномасштабных структур в самогравитирующей среде вследствие неустойчивости Рэлея-Джинса, а также для точного решения задач гидродинамики о течениях сжимаемой жидкости в размерности $1+1$ и $1+2$.

Основные положения, выносимые на защиту:

1) Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа. Для пары базовых дифференциальных соотношений (обобщенные подстановки Коула-Хопфа), связывающих три вспомогательные функции T, U, V , существует совокупность дифференциальных следствий, образующих замкнутую систему алгебраических уравнений конечного порядка относительно производных функции T . В результате, для каждого линейного дифференциального оператора $\hat{L}$ в частных производных в размерности $1+1$ и $1+2$

существует нелинейное дифференциальное уравнение, преобразующееся (линеаризуемое) с помощью обобщенной подстановки Коула-Хопфа к уравнению $\hat{L}U = 0$ или $\hat{L}V = 0$.

2) Обобщенные подстановки Коула-Хопфа, преобразующие одномерные уравнения динамики сжимаемой идеальной жидкости к интегрируемым уравнениям, позволяющие получать новые классы точных решений в явном виде, в том числе для некоторых типов двумерных течений идеальной жидкости.

3) Обобщенные подстановки Коула-Хопфа, преобразующие одномерные уравнения динамики вязкой сжимаемой жидкости (аналог уравнения Бюргерса) к интегрируемым уравнениям, позволяющие получать новые классы точных решений в явном виде.

4) Класс обобщенных подстановок Коула-Хопфа, преобразующих уравнения течений идеальной самогравитирующей среды к интегрируемым уравнениям, позволяющие получить точные решения в явном виде. Полученные решения описывают динамику ударных волн в сжимаемых самогравитирующих средах вследствие наличия локальных возмущений.

5) Метод построения точных решений уравнений формирования крупномасштабных структур в самогравитирующей среде вследствие неустойчивости Рэлея-Джинса при наличии локальных возмущений в среде с уравнением состояния $p = 0$. Точные решения позволяют вычислять в явном виде: а) пространственную структуру волн плотности в каждый момент времени; б) время до образования сингулярностей при заданных начальных распределениях плотности и скорости среды; в) асимптотическое поведение параметров среды вблизи сингулярности.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры Теоретической физики Ульяновского государственного университета, а также на конференциях: Российская школа-семинар по гравитации и космологии GRACOS-2007 (г. Казань); Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2008» (г. Москва); Всероссийская конференция молодых ученых «Неравновесные процессы в сплошных средах» (г. Пермь, 5-6 декабря 2008г.); Седьмая Международная конференция «Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов» (г. Ульяновск, 2-5 февраля 2009г.); Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2009» (г. Москва); Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2010» (г. Москва); Всероссийская школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах» (24-29 мая 2010г., г. Звенигород, Московская обл.); Шестая Всероссийская конференция «Необратимые процессы в природе и технике» (г. Москва, 26-28 января 2011 г.); Конференция-конкурс молодых физиков (Физический институт академии наук, г. Москва, 31 января 2011 г.); XVII Зимняя школа по механике сплошных сред (г. Пермь, 28 февраля – 3 марта 2011 г.); Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2011» (г. Москва).

Публикации. Диссертация выполнена на основе работ [1] – [5], опубликованных в ведущих российских и зарубежных журналах. Работы [1] - [3] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК. Работы написаны совместно с научным руководителем. Вклад автора в приведенные в диссертации результаты является основным.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из четырех глав. Список литературы содержит 225 наименования. Общий объем 121 страница.

Содержание работы

Гл. 1, Введение содержит аргументацию актуальности исследуемой проблемы, обзор научной литературы, посвященной затронутым в диссертации темам, описание полученных в диссертации результатов и оценку их значения для теории нелинейных интегрируемых систем и решения прикладных задач астрофизики и теории ударных волн.

Гл. 2, Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа, содержит описание нового метода линеаризации целого класса нелинейных уравнений, развиваемого в работе.

2.1 Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа в размерности 1+1.

2.1.1 Математические основы.

В работах [1a, 1], был предложен новый подход к линеаризации большого класса нелинейных уравнений на основе метода, использующего подстановки типа Коула-Хопфа. Этот подход опирается на результат, полученный ранее в работе [2a], который “объясняет” с достаточно общих позиций смысл наличия подстановки Коула-Хопфа для уравнения Бюргерса. Основной смысл этого результата состоит в том, что уравнение Бюргерса является условием совместности семи линейных алгебраических уравнений относительно первых семи смешанных частных производных функции $T(x,t)$, являющейся решением уравнения теплопроводности: $T_t = aT_{xx}$ и переноса изолиний: $T_t + V(x,t)T_x = 0$. Здесь и далее введены обозначения: $T_t = \partial T / \partial t$, $T_{xx} = \partial^2 T / \partial x^2$ и т.д. В данной главе мы показываем, что этот результат можно обобщить и применить к построению более широкого класса нелинейных уравнений, линеаризуемых с помощью подстановки: $V = -T_t/T_x$ типа Коула-Хопфа. В частности показано, что существуют бесконечные цепочки нелинейных уравнений, которые линеаризуются указанной подстановкой, которую далее мы будем называть обобщенной подстановкой Коула-Хопфа.

Следуя работе [1a], рассмотрим уравнение теплопроводности с адвекцией:

$$T_t + W(x,t)T_x = a(x,t)T_{xx} \quad (1)$$

совместно с уравнением переноса изолиний функции T :

$$T_t + V(x,t)T_x = 0 \quad (2)$$

Здесь $W(x,t)$, $a(x,t)$, $V(x,t)$ - некоторые произвольные пока функции.

Последовательно дифференцируя эти два уравнения по x, t , получаем следующую систему уравнений, являющуюся их прямым следствием:

$$\begin{aligned} T_{tt} - aT_{xxt} + W_tT_x + WT_{xt} - a_tT_{xx} &= 0 \\ T_{tt} + V_tT_x + VT_{tx} &= 0 \\ T_{xt} - aT_{xxx} + W_xT_x + WT_{xx} - a_xT_{xx} &= 0 \\ T_{xt} + V_xT_x + VT_{xx} &= 0 \\ T_{txx} + V_{xx}T_x + 2V_xT_{xx} + VT_{xxx} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Условием совместности системы (1)-(3) как системы линейных алгебраических уравнений является уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}U + \frac{\partial}{\partial x}(VU) - V_{xx} = 0 \quad (4)$$

где $U = (V - W)/a$. Это уравнение в дальнейшем будем называть структурным уравнением. Смысл этого результата состоит в том, что для любой функции $T(x,t)$ функции U и V вычисляемые по формулам:

$$V = -\frac{T_t}{T_x} = -a \frac{\partial \ln T_x}{\partial x} + W, \quad U = -\frac{T_{xx}}{T_x}, \quad (5)$$

будут обращать уравнение (4) в тождество. В случае $W \equiv 0$ и $a = \text{const}$ эта подстановка переходит в стандартную подстановку Коула-Хопфа, а уравнение (4) - в уравнение Бюргерса. Поэтому эти подстановки можно рассматривать как обобщение подстановки Коула-Хопфа.

2.1.2 Рекуррентные соотношения. Основой использования обобщенных подстановок

типа Коула-Хопфа для линеаризации широкого класса нелинейных уравнений в подходе, изложенном в [1а, 1], является произвольность одной из функций T , U , V в исходных двух уравнениях (1) и (2). Это позволяет добавлять к указанной системе базовых уравнений какое-либо интегрируемое относительно функции $T(x,t)$ условие, которое автоматически будет приводить к нелинейному интегрируемому уравнению относительно функции $V(x,t)$ или $U(x,t)$.

Все последующие высшие производные могут быть получены из набора соотношений, который в дальнейшем будем называть приведенными базовыми соотношениями

2.1.3 Принцип построения интегрируемых уравнений.

Принцип построения уравнений, интегрируемых с помощью указанных подстановок можно проиллюстрировать следующим образом. Пусть $C_{kn} = C_{kn}(x,t)$, $k, n = 0, \dots, M; 0, \dots, N$ - некоторый заданный набор функций. Тогда к системе приведенных базовых соотношений можно добавить любое линейное уравнение следующего вида:

$$\sum_{k=1, \dots, M} \sum_{n=1, \dots, N} C_{kn} T^{[k,n]} + C_{10} T_x + C_{01} T_t = 0 \quad (6)$$

Это уравнение с использованием расширенной приведенной системы базовых соотношений приводит к связи между функциями V и U следующего вида:

$$\sum_{k=1, \dots, M} \sum_{n=1, \dots, N} C_{kn} A^{kn}[V, U] + C_{10} A^{10}[V, U] + C_{01} A^{01}[V, U] = 0 \quad (7)$$

Это уравнение совместно с условием совместности (4) образует замкнутую систему нелинейных уравнений относительно пары функций U и V , решение которой имеет вид подстановки (5) для любой функции T , являющейся решением уравнения (6).

2.1.4 Точно интегрируемые модели течений сжимаемой жидкости.

С помощью замены соотношения (6) на произвольное нелинейное интегрируемое уравнение для T , которое в результате использования приведенных базовых соотношений сводится к связи между U и V без производных и самой функции T , приходим к системе уравнений Эйлера одномерного течения сжимаемого газа при нулевом давлении и внешних силах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) &= 0 \\ \rho_t + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь плотность сжимаемого газа ρ , скорость течения газа u :

$$\rho = U, \quad u = V - \frac{V_x}{U} = -\frac{Q}{U} \quad (9)$$

Давление в таком потоке тождественно обращается в ноль в силу первого уравнения.

Систему уравнений (8) можно рассматривать как уравнения динамики пыли, поскольку именно пыль имеет уравнение состояния $p = 0$. Такого типа задачи возникают в астрофизике при анализе динамики пылевых облаков [7а, 8а, 9а].

В рамках предложенного подхода в работе были получены решения уравнений течения сжимаемой жидкости, описывающие распространение ударных волн.

2.2 Обобщенная подстановка Коула-Хопфа в размерности 1+2.

2.2.1 Математические основы.

Для построения решений двумерных уравнений Эйлера предлагаемый формализм полезно [10а] переписать в комплексные координаты $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right], \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

Следуя общим соображениям работы [2], рассмотрим пару уравнений, описывающих перенос изолиний некоторой функции $T = T(z, \bar{z}, t)$ в двумерном пространстве:

$$T_t + WT_z = 0, \quad T_t + \bar{W}T_{\bar{z}} = 0, \quad (10)$$

где

$$W = \frac{UV}{2(U - iV)}, \quad \bar{W} = \frac{UV}{2(U + iV)}, \quad T_z = \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (11)$$

Совокупность базовых соотношений, записанных в комплексифицированном виде имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} T_z &= -\frac{1}{W}T_t, \quad T_{z\bar{z}} = RT_t, \quad T_{zt} = PT_t, \quad T_{tt} = QT_t, \\ T_{zz} &= \frac{1}{W^3}[WW_z - W_t + QW]T_t. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{W^2}[W_t - QW], \\ R &= \frac{1}{|W|^4}[\bar{W}^2W_z - W\bar{W}_t + Q|\bar{W}|^2] = \\ &= \frac{1}{|W|^4}[W^2\bar{W}_z - \bar{W}W_t + Q|W|^2] \end{aligned} \quad (13)$$

2.2.2 Уравнения гидродинамического типа. Совокупность полученных соотношений, выполняющаяся при произвольной функции вещественной T сама по себе уже дает некоторые модели гидродинамического типа. Выражая функцию Q приходим к следующему уравнению:

$$P_t = \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{R_t}{R} + \frac{1}{R}(P_z + P\bar{P}) \right]. \quad (14)$$

Это уравнение переходит в уравнение квазипотенциального течения сжимаемой жидкости, если положить, что комплексная скорость течения $S = u - iv$, где u и v - компоненты скорости течения по декартовым осям x, y связана с P и R следующим образом:

$$S = -P/R = W - W_z/(WR) = u - iv, \quad (15)$$

а R функция отождествляется с плотностью жидкости $\rho: \rho \equiv R$. Полагая $W = \xi + i\eta = Ee^{i\phi}$, находим для компонент векторного поля скорости следующие выражения:

$$\begin{aligned} u &= \xi - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln E - \frac{\partial}{\partial y} \phi \right], \\ v &= -\eta + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial y} \ln E + \frac{\partial}{\partial x} \phi \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

2.2.3 Уравнения Эйлера сжимаемой жидкости. Для построения точного аналога уравнений Эйлера по аналогии с [1] рассмотрим в качестве уравнения для T уравнение следующего вида:

$$\{T_z, T_t\} = T_{zz}T_{tt} - T_{zt}T_{zt} = 0, \quad (17)$$

$$P\bar{P} - RQ = 0. \quad (18)$$

Если подставить выражения из (13) для R, Q, P в (18), то это уравнение примет следующий вид:

$$W_t + \overline{W}W_{\bar{z}} = \frac{|W_t|^2}{QW}.$$

Вещественная и мнимая часть этого уравнения могут быть записаны так:

$$2\xi_t + \xi\xi_x + \eta\xi_y + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\xi^2 + \eta^2) = \lambda\xi, \quad 2\eta_t + \xi\eta_x + \eta\eta_y + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\xi^2 + \eta^2) = \lambda\eta,$$

где

$$\lambda = \xi_x + \eta_y + \frac{2|(\xi_t)^2 + (\eta_t)^2|}{Q|(\xi)^2 + (\eta)^2|}.$$

Эти уравнения можно интерпретировать как двумерные уравнения Эйлера жидкости с компонентами скорости ξ и η .

2.2.4 Построение точных решений уравнений двумерных течений. Точные решения уравнений Эйлера могут быть построены с помощью всей совокупности соотношений для функций W, P, Q, R , реализующих обобщенную подстановку Коула-Хопфа для заданной вещественной функции T , которая должна удовлетворять уравнению (17).

2.2.5 Выбор функций G и H .

Выбирая функции G и H в более общем виде можно получить и более общие варианты уравнений Эйлера для квазипотенциального течения сжимаемой жидкости. В общем случае можно рассматривать функции G и H в таком виде:

$$G = T_z + \Psi, \quad H = T_t - \Phi, \quad (19)$$

где $\Phi = \Phi(z, \bar{z}, t, T, T_z, T_{\bar{z}}, T_{zz}, \dots)$, $\Psi = \Psi(z, \bar{z}, t, T, T_z, T_{\bar{z}}, T_{zz}, \dots)$.

В результате приходим к уравнениям следующего вида:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho(u^2 + v^2) - \frac{|\alpha|^2}{\rho(T_t)^2} + \frac{1}{\rho} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial z} + \bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) (T_t)^{-1} \right], \\ 2\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) &= -\frac{\partial}{\partial y} \left[\rho(u^2 + v^2) - \frac{|\alpha|^2}{\rho(T_t)^2} + \frac{1}{\rho} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial z} + \bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) (T_t)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Эти уравнения преобразуются к уравнениям Эйлера с давлением и внешней силой, явный вид которых не сложно получить с помощью соответствующей подстановки.

Гл. 3, Гидродинамические волны в самогравитирующих сжимаемых средах, содержит дальнейшее развитие предложенного в гл. 2 метода, и, в частности, его приложение к задаче о сферически симметричных самогравитирующих системах, что в некотором приближении описывает физические процессы, происходящие внутри звезд и других астрофизических объектов.

3.1 Одномерное течение вязкой жидкости с переменной плотностью.

Следуя работе [14a], построим специальную параметризацию одномерных течений жидкости. Рассмотрим представление для скорости $u(x, t)$ потока в следующем виде:

$$u(x, t) = -\frac{\theta_t}{\theta_x} \quad (21)$$

где $\theta = \theta(x, t)$ некоторая вспомогательная функция. Это соотношение рассматривается в дальнейшем как обобщенная подстановка Коула-Хопфа [4, 5, 6]. Эквивалентная запись этого соотношения имеет вид уравнения:

$$\theta_t + u(x, t)\theta_x = 0 \quad (22)$$

Из (22) следует несколько простых тождеств, выполняющихся для любой дифференцируемой функции $\theta(x, t)$. Первое из них имеет следующий вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \right] F(\theta) = F'(\theta)(\theta_t + u\theta_x) = 0 \quad (23)$$

Еще одно тождество можно получить, дифференцируя его по x :

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta_x + \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t)\theta_x) = 0 \quad (24)$$

Это соотношение принимает форму уравнения неразрывности, если в качестве плотности жидкости $\rho(x, t)$ рассматривать величину:

$$\rho(x, t) = \theta_x \quad (25)$$

В этом случае (24) эквивалентно уравнению неразрывности:

$$\rho_t + \frac{\partial}{\partial x} (u\rho) = 0 \quad (26)$$

Представим (26) в следующем виде:

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = -u_x \quad (27)$$

и продифференцируем его по x . Полученное соотношение можно записать так:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) \quad (28)$$

Это соотношение также является тождеством, выполняющимся для произвольной пары функций $\theta(x, t)$ и $u(x, t)$, связанных одним соотношением (22). Используя произвол в выборе функции $u(x, t)$, потребуем выполнения равенства:

$$u(x, t) = F(\theta) - v \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \quad (29)$$

где $F(\theta)$ – произвольная функция θ . Используя (21), это дополнительное требование приводится к уравнению для θ следующего вида:

$$\theta_t + F'(\theta)\theta_x = v\theta_{xx} \quad (30)$$

Учитывая тождества (23) и (28), получаем, что функция $u(x, t)$, удовлетворяющая (22) и (29), удовлетворяет уравнению:

$$u_t + uu_x = v \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) \quad (31)$$

которое имеет вид уравнения Навье-Стокса одномерного течения вязкой жидкости с переменной плотностью $\rho = \theta_x$.

3.2. Одномерное течение вязкой жидкости в собственном поле тяготения

Уравнения таких течений должны удовлетворять трем уравнениям:

$$u_t + uu_x = v \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) - \varphi_x; \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0 \quad (32)$$

$$\varphi_{xx} = 4\pi G \rho \quad (33)$$

Здесь φ – потенциал гравитационного поля, G – гравитационная постоянная. Посредством подстановок (21), (27), приходим к уравнению на θ вида:

$$\theta_t + [F(\theta) - 4\pi G \theta - v_0(t)] \theta_x = v \theta_{xx} \quad (34)$$

с произвольной функцией $F(\theta)$. Каждому решению этого уравнения при заданной функции $F(\theta)$ соответствует определенное точное решение системы уравнений (32)-(33) при заданных начальных распределениях скорости и плотности пыли $u_0(x) = u(x, 0)$ и $\rho_0(x) = \rho(x, 0)$.

3.3 Модифицированное уравнение Бюргерса.

Еще один способ получить дополнительный класс точных решений в задаче течений в самогравитирующей среде связан с модифицированным условием для скорости потока:

$$u = \alpha x - v \frac{\partial \ln \theta_x}{\partial x} - \frac{4\pi G \theta}{\alpha} \quad (35)$$

Уравнение для функции θ при выполнении всех этих условий будет иметь следующий вид:

$$\theta_t - \left(\frac{4\pi G}{\alpha} \theta - \alpha x \right) \theta_x - v \theta_{xx} = 0 \quad (36)$$

Это уравнение представляет собой модифицированное уравнение Бюргерса и может быть проинтегрировано полностью.

3.4 Одномерное адиабатическое течение идеальной жидкости.

Адиабатическое течение сжимаемой жидкости с уравнением состояния:

$$p = p(\rho),$$

$$u_t + uu_x = -\rho^{-1} p_x, \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0$$

подстановкой для скорости течения:

$$u = S(\rho)$$

приводится к уравнению:

$$\rho_t + W(\rho) \rho_x = 0$$

$$W(\rho) = S'(\rho) \rho + S(\rho)$$

Это уравнение имеет общий интеграл вида [205]:

$$H(\rho, x - W(\rho)t) = 0.$$

Давление в среде описывается соотношением:

$$p(\rho) = \int \rho^2 (S'(\rho))^2 d\rho.$$

3.6 Динамика невязкой самогравитирующей пыли.

Рассмотрим в качестве нового дополнительного условия для скорости потока следующее:

$$u = f(x) F(\theta) \quad (37)$$

В этом случае скорость потока удовлетворяет уравнению:

$$u_t + uu_x = f' f F^2(\theta) \quad (38)$$

Выражение для ускорения свободного падения $g(x,t)$ в правой части будет иметь необходимый вид (при условии $\vartheta_0(t) \equiv 0$), если выполняются два условия:

$$f'f = -1, \quad F^2(\theta) = 4\pi G\theta$$

Отсюда находим:

$$f = \pm\sqrt{2\sqrt{x_0-x}}, \quad F(\theta) = \sqrt{4\pi G\theta}$$

Здесь x_0 – постоянная интегрирования. Уравнение (37) преобразуется к уравнению для θ :

$$\theta_t \pm \sqrt{x_0-x}\sqrt{8\pi G}\sqrt{\theta}\theta_x = 0 \quad (39)$$

Это уравнение сводится к уравнению простой волны преобразованием координат $\xi = \sqrt{x_0-x}$ и имеет общий интеграл следующего вида:

$$H(\theta, \sqrt{x_0-x} \mp \sqrt{8\pi G}\sqrt{\theta}t) = 0 \quad (40)$$

где $H(\theta, q)$ – произвольная дифференцируемая функция двух аргументов.

3.7 Сферически и цилиндрически симметричные течения самогравитирующей идеальной сжимаемой жидкости.

Уравнения сферически и цилиндрически симметричных течений идеальной сжимаемой жидкости в собственном поле тяготения можно записать в следующем виде:

$$u_t + uu_r = -\varphi_r; \quad \rho_t + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r}(r^n \rho u) = 0 \quad (41)$$

$$(42)$$

Здесь $n=1$ для цилиндрической симметрии и $n=2$ – для сферической, а r – соответствующая радиальная координата. Введем вспомогательную функцию $q = r^n \rho$. В этом случае уравнения (41-42) можно переписать таким образом:

$$u_t + uu_r = -\varphi_r; \quad q_t + (qu)_r = 0 \quad (43)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^n \varphi_r) = 4\pi Gq \quad (44)$$

Используя исходную параметризацию скорости $u(r, t) = -\theta_r/\theta_r$ (с заменой x на r) и вспомогательной функции q в форме $q = \theta_r$ уравнение Пуассона (44) приведем к следующему виду:

$$\varphi_r = \frac{1}{r^n} 4\pi G\theta \quad (45)$$

В этом случае уравнение неразрывности выполняется тождественно, а уравнение для радиальной скорости примет такой вид:

$$u_t + uu_r = -\frac{4\pi G}{r^n} \theta \quad (46)$$

Далее, находим решения по аналогии с п. 3.5.

Гл. 4, Формирование структур в самогравитирующих сжимаемых средах вследствие джинсовской неустойчивости, содержит некоторые приложения предложенного в работе метода к решению задач о возникновении структур в самогравитирующих средах в одномерном и сферически симметричном случаях.

4.1 Джинсовская неустойчивость в одномерном случае

Полученные в гл. 3 решения позволяют на точных решениях рассмотреть динамику локальных возмущений плотности под действием собственного поля тяготения в одномерном случае. Эта задача о джинсовской неустойчивости самогравитирующей среды важна для описания динамики крупномасштабной структуры Вселенной, как это уже объяснялось во введении. При анализе формирования крупномасштабной структуры предполагают, что точками среды являются галактики. При этом давление в такой среде равно нулю, что соответствует уравнению состояния пыли $p = 0$. Кроме этого вязким трением в такой среде можно пренебречь. В результате динамика таких систем описывается в точности системой уравнений (32) - (33) с $\nu = 0$. Решения, полученные в предыдущей главе позволяют строить точные решения этой задачи при заданных начальных условиях распределения плотности и скорости потока. Начальные условия при $\nu = 0$ задаются соотношениями:

$$\rho(x,0) = \frac{\partial \theta_0(x)}{\partial x}, \quad u(x,0) = F(\theta_0(x)) - c(0), \quad (47)$$

где

$$\theta_0(x) = \theta(x,0).$$

Для получения физически понятных решений необходимо предварительно выяснить то, какие распределения плотности, скорости и гравитационного потенциала допустимы с физической точки зрения. Основным требованием, ограничивающим выбор функции $\theta_0(x)$, является неотрицательность плотности жидкости во всех точках пространства: $\rho \geq 0$. В этом случае имеем:

$$\theta(x,t) = \Theta_0(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,t) dx \geq 0.$$

Из уравнения Пуассона следует соотношение, которое связывает функцию θ с ускорением свободного падения в точке с координатой x . Отсюда следует:

$$\phi_x \geq g_0(t). \quad (48)$$

По своему смыслу $-\phi_x$ является ускорением свободного падения в точке пространства с координатой x . Из физических соображений естественным выбором постоянной $g_0(t)$ является такой, при котором ускорение свободного падения было бы равно нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Физически это связано с требованием $\rho \rightarrow 0$ в этих же пределах. Однако, если полагать:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_x = 0, \quad (49)$$

то тогда из соотношения (47) следует, что при $x \rightarrow +\infty$ ускорение свободного падения стремится к отрицательной постоянной.

В качестве примера демонстрации некоторых важных эффектов в одномерном случае рассмотрим начальное распределение плотности, которое задается простой функцией $\theta_0(x)$ следующего вида:

$$\theta_0(x) = \frac{M}{2}((kx) + 1),$$

где $k > 0$ - произвольная положительное вещественное число, величина которого обратно пропорциональна характерному пространственному размеру L области занятой материей: $L = k^{-1}$. Рассмотрим так же в качестве начального распределения скорости среды функцию $u(x,0) = 0$. При таком выборе $g_{-\infty} = 0$, $g_{\infty} = -4\pi GM$. При этом начальное распределение плотности и скорости будут иметь следующий вид:

$$\rho(x,0) = \frac{Mk}{2^2(kx)} > 0, \quad u(x,0) = 0. \quad (50)$$

На рис. 1 представлены распределения плотности в последовательные моменты времени $t = 0, 2, 4, 6, 8, 0.95$.

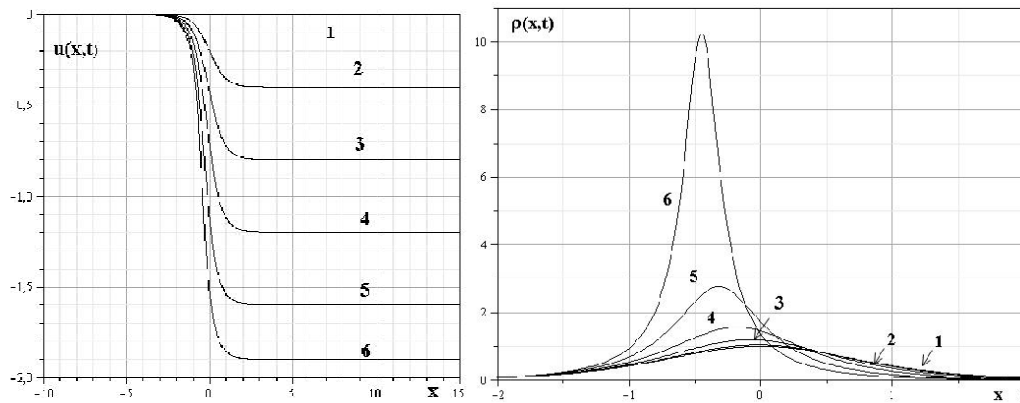


Рис. 1: Эволюция распределения скорости (а) и плотности (б) для начальных распределений (50)

Видно, что центр масс системы ускоряется в направлении обратной оси x .

Аналогичные решения для начальных условий:

$$\rho(x,0) = \frac{M}{\pi(1+k^2x^2)} > 0, \quad u(x,0) = 0. \quad (51)$$

представлены на рис. 2.

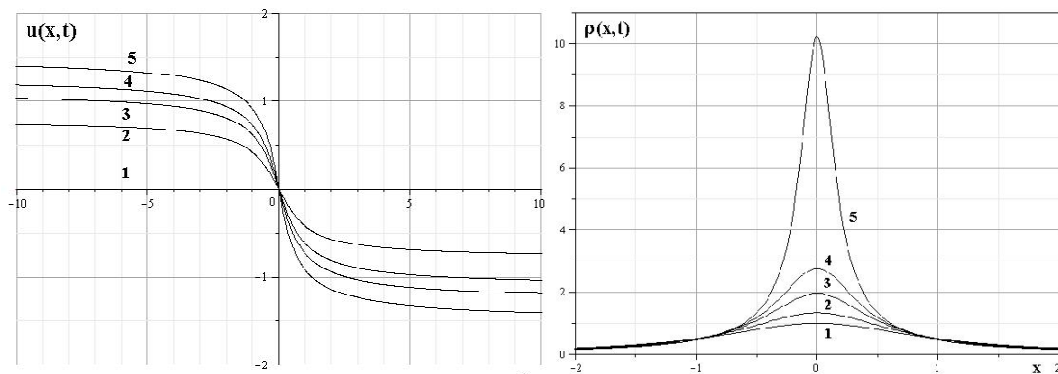


Рис. 2. Эволюция распределения скорости (а) и плотности (б) для начальных распределений (51)

Анализ построенных решений показывает, что за конечное время в распределении плотности возникает сингулярность. Момент возникновения сингулярности определяется условием, согласно которому знаменатель выражения для плотности обращается в ноль в какой-либо точке пространства. Для начального распределения (50) этот момент определяется условием:

$$t_* = \sqrt{\frac{2}{kM\mu_0}} = \sqrt{\frac{L}{\pi GM}},$$

а для (51) :

$$t_* = \sqrt{\frac{\pi}{kM\mu_0}} = \sqrt{\frac{L}{GM}}.$$

4.2 Джинсовская неустойчивость для распределений со сферической симметрией

При анализе модели эволюции сферически симметричного начального распределения плотности необходимо определить подходящую форму интеграла движения. Исходя из

необходимости задавать начальное распределение плотности общую форму интеграла движения полезно задавать в следующем виде:

$$\theta = \frac{M}{4\pi Q_0} Q(\chi(r, t)), \quad (52)$$

где M - полная масс вещества во всем пространстве,

$$Q_0 = \int_0^\infty Q'(r) dr = Q(\infty) - Q(0)$$

и

$$\chi(r, t) = r^{3/2} \pm \sqrt{8\pi G t} \sqrt{\theta}.$$

В этом случае функция $Q(\chi)$ задает форму начального распределения функции θ и в конечном итоге плотности, которая вычисляется в этом случае так:

$$\rho(r, t) = \frac{3M}{4\pi Q_0 r^{3/2}} \frac{\sqrt{\theta} Q'(\chi(r, t))}{8\pi G \sqrt{\theta} \mp M \sqrt{4\pi G} Q'(\chi(r, t)) t}.$$

Исходя из общих условий на выбор представления (57) и по аналогии с одномерным случаем рассмотрим интегралы движения двух типов. Первый интеграл:

$$\theta(r, t) = \frac{M}{4\pi} \operatorname{th} \left(k(r^{3/2} + \sqrt{8\pi G t} \sqrt{\theta})^2 \right), \quad (53)$$

Здесь $k > 0$ - как и раньше произвольная положительное вещественное число, величина которого обратно пропорциональна характерному пространственному размеру L области занятой материей: $L = k^{-1}$, а M - полная масса системы, $Q_0 = 1$.

Второй интеграл

$$\theta(r, t) = \frac{M}{2\pi^2} \left(k(r^{3/2} + \sqrt{8\pi G t} \sqrt{\theta})^2 \right), \quad (54)$$

соответствует начальным условиям:

$$\theta_0(r, 0) = \frac{M}{2\pi^2} (kr^3), \quad (55)$$

$$\rho(r, 0) = \frac{3Mk}{4\pi} \frac{1}{1+k^2 r^6} > 0, \quad u(r, 0) = 0. \quad (56)$$

Для этого случая $Q_0 = \pi/2$.

Имеются два решения относительно $\theta_0^\pm$, соответствующие двум общим решениям уравнения (52) для функции $\theta(r, t)$:

$$\theta_0^\pm(t) = \frac{Mk}{4\pi(1 \pm \mu_0 t \sqrt{Mk/4\pi})}.$$

Одно из этих решений при $t > 0$ за конечное время

$$t_* = \sqrt{\frac{4\pi}{Mk}} \frac{1}{\mu_0}$$

обращается в бесконечность, что соответствует возникновению в начале координат сингулярности в распределении массы. Второе решение не имеет физического смысла.

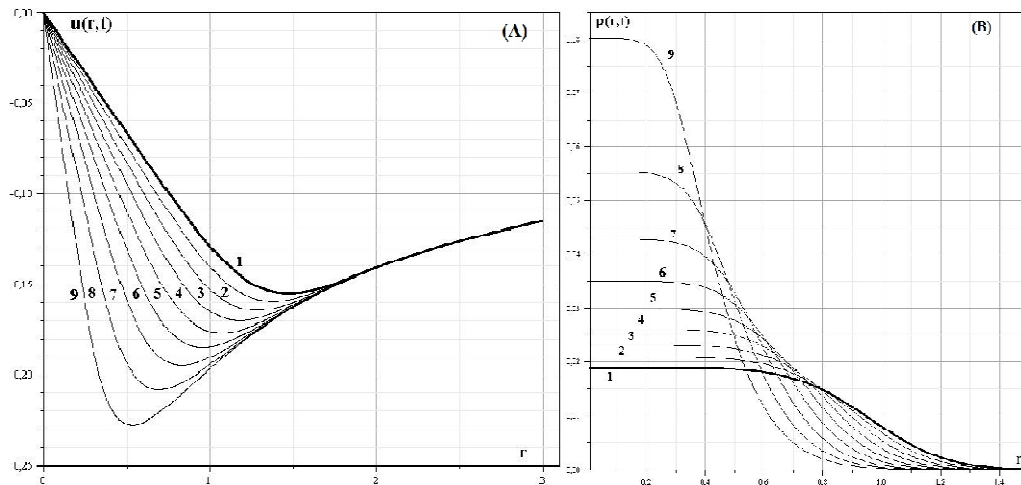


Рис. 3: Эволюция распределения скорости (а) и плотности (б) для начальных распределений (51) до образования сингулярности. 1 - $t = 0$, 2 - $t = 0.5$, 3 - $t = 1.0$, 4 - $t = 1.5$, 5 - $t = 2.0$, 6 - $t = 2.5$, 7 - $t = 3.0$, 8 - $t = 3.5$, 9 - $t = 4.0$

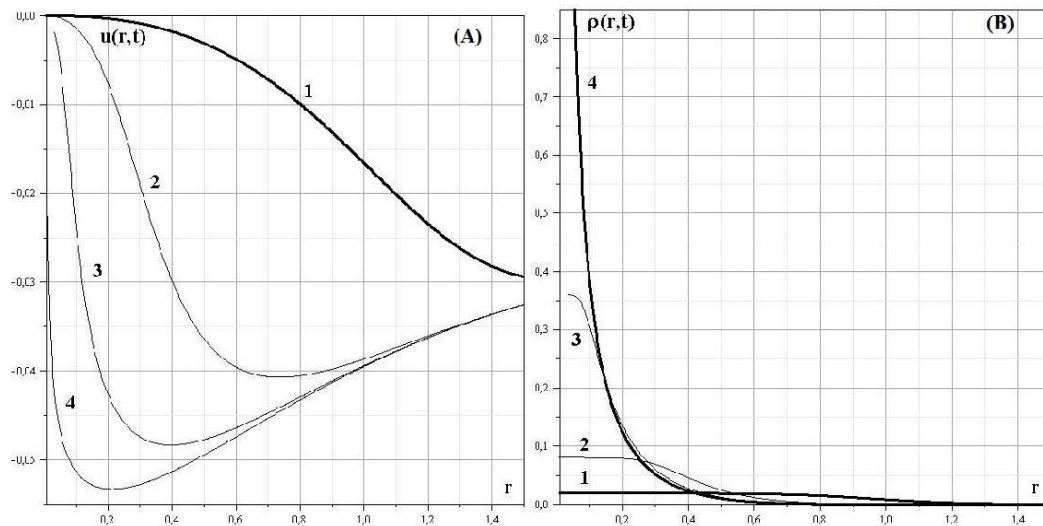


Рис. 4: Распределения скорости (а) и плотности (б) для начальных распределений (51) до и после образования сингулярности. 1 - $t = 0$, 2 - $t = 4.0$, 3 - $t = 4.8$, 4 - $t = 5.0$

4.3 Обратная волна сжатия

Из рассмотренных в п. 4.2 моделей следует, что кроме волны сжатия с начальной скоростью, направленной к центру возмущения (этому решению соответствует знак ``-'' в формуле для скорости потока), существует точное решение, описывающая волну первоначально распространяющуюся от центра возмущения. Такая волна может рассматриваться как волна от сферически симметричного взрыва, произошедшего в центре возмущения. Графики соответствующих точных решений представлены на рис. 5.

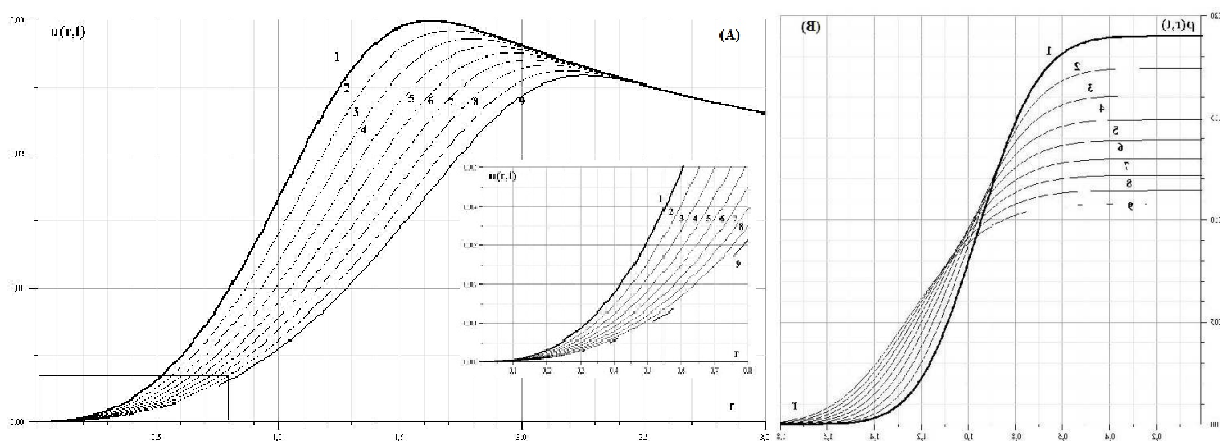


Рис. 5: Эволюция распределения скорости (а) и плотности (б) для начальных распределений (57) до образования сингулярности. 1 - $t = 0$, 2 - $t = 0.5$, 3 - $t = 1.0$, 4 - $t = 1.5$, 5 - $t = 2.0$, 6 - $t = 2.5$, 7 - $t = 3.0$, 8 - $t = 3.5$, 9 - $t = 4.0$

На рис. 5 видно как эволюционирует волна разрежения до образования разрывов и ударных волн. Кривая 9 соответствует моменту времени сразу после начала образования ударных волн. Разрывы образуются на отрезках графика, где сплошная линия прерывается. Для более детального анализа динамики ударных волн, возникающих вблизи центра поля, необходимо решать задачу в несколько иной постановке задачи, опираясь не только на форму аналитического интеграла движения, но и на физические условия на разрывах течения [18а, 17а]. Построение разрывных решений имеет свою специфику и требует отдельного рассмотрения.

4.4 Заключение

Пункт содержит сравнительный анализ эффективности применения МОПК-Х к рассмотренным в работе задачам.

Публикации по теме диссертации

Публикации в журналах, входящих в список ВАК:

- [1] Журавлев В.М., Зиновьев Д.А. Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула-Хопфа, и точно интегрируемые модели одномерных течений сжимаемой жидкости. Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики, том 87, вып. 5, с. 314 – 318.
- [2] Журавлев В.М., Зиновьев Д.А. Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа в размерности 1+2 и интегрируемые модели двумерных течений сжимаемой жидкости. Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики, том 88, вып. 3, с. 194 – 197.
- [3] Журавлев В.М., Зиновьев Д.А. Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула-Хопфа. Ударные волны в сферически симметричных самогравитирующих системах. Физическое образование в вузах, 2011, том 17, номер 1, приложение, ISSN 1609-3143.

Публикации в прочих изданиях:

- [4] Zhuravlev V.M., Zinov'ev D.A. The application of generalized Cole-Hopf substitutions in compressible-fluid hydrodynamics. Physics of Wave Phenomena, Volume 18, Number 4, October-December 2010, p. 245-250.
- [5] Zhuravlev V.M., Zinov'ev D.A. Nonlinear waves in self-gravitating compressible fluid and

generalized Cole–Hopf substitutions. Physics of Wave Phenomena, Volume 19, Number 4, October-December 2011, p. 313-317.

[6] Журавлев В.М., Зиновьев Д.А. Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула-Хопфа, и точно интегрируемые модели течений сжимаемой жидкости. Сборник тезисов Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2008» (г. Москва)

[7] Журавлев В.М., Зиновьев Д.А. Волновая гидродинамическая задача в теории собственных колебаний звезд. Труды Российской школы-семинара по гравитации и космологии GRACOS-2007 (г. Казань)

[8] Журавлев В.М., Зиновьев Д.А. Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула-Хопфа. Точно интегрируемые модели течений сжимаемой жидкости. Материалы Всероссийской конференции молодых ученых «Неравновесные процессы в сплошных средах» (г. Пермь, 5-6 декабря 2008г.)

[9] Журавлев В.М., Зиновьев Д.А. Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула-Хопфа. Точно интегрируемые модели течений сжимаемой жидкости. Труды Седьмой Международной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов» (г. Ульяновск, 2-5 февраля 2009г.)

[10] Журавлев В.М., Зиновьев Д.А. Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула-Хопфа. Ударные волны в сферически симметричных самогравитирующих системах. Сборник тезисов Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2009» (г. Москва)

[11] Журавлев В.М., Зиновьев Д.А. Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула-Хопфа и их применение к задачам газо-гидродинамики. Сборник тезисов Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2010» (г. Москва)

[12] Журавлев В.М., Зиновьев Д.А. Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула-Хопфа. Точно интегрируемые модели течений сжимаемой жидкости. Сборник трудов XII Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах» (24-29 мая 2010г., г. Звенигород, Московская обл.)

[13] Журавлев В.М., Зиновьев Д.А. Интегрируемые модели двумерных и трехмерных течений сжимаемой жидкости и метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа. Труды Шестой Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике» (г. Москва, 26-28 января 2011 г.)

[14] Журавлев В.М., Зиновьев Д.А. Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула-Хопфа. Ударные волны в сферически симметричных самогравитирующих системах. Тезисы докладов XVII Зимней школы по механике сплошных сред (г. Пермь, 28 февраля – 3 марта 2011 г.)

[15] Журавлев В.М., Зиновьев Д.А. Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула-Хопфа и их применение к задачам газо-гидродинамики. Сборник тезисов Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2011» (г. Москва)

Цитируемая литература:

[1a] Журавлев В.М., Никитин А.В. Нелинейный мир, , N 9, 603 (2007)

[2a] Б.А. Урюков, Теплофизика и аэромеханика. , N 3, 421 (1999)

[4a] Зельдович Я.Б., Ройзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: Физматгиз, 1963

[5a] Бредли (Bradley J.N.). Shock waves in chemistry and physics. – London: Methuen, 1962

[6a] Зельдович Я.Б., Компанеев А.С. Теория детонации. Учебное пособие. – М.: Гостехиздат, 1955

[7a] Горбачкий В.Г. Газодинамические неустойчивости в астрофизических системах:

- Учеб.пособие. – СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1999. – 168 с.
- [8a] Каплан С.А. Межзвездная газодинамика. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. – 196 с.
- [9a] Саслау У. Гравитационная физика звездных и галактических систем. – М.: Мир, 1989. – 542 с.
- [10a] Современные проблемы физики космоса/ Сб. статей. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 584 с.
- [11a] А.В. Гуревич, К.П. Зыбин Крупномасштабная структура Вселенной. Аналитическая теория. Успехи физических наук, т. 165, № 7 (1995)
- [12a] Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1978
- [13a] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука (1980). 319 с.
- [14a] В.М. Журавлев. Сб. Инновационные технологии, Ульяновск, УлГУ, 2010. с. 77-93
- [15a] Н.М. Рыскин, Д.И. Трубецков. Нелинейные волны. М.: Наука, 2000. 272 с.
- [16a] А.Г. Куликовский, Е.И. Свешникова, А.П. Чугайнова. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений. Лекционные курсы НОЦ/ Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (МИАН) Вып. 16 – М.: МИАН, 2010, 121 с
- [17a] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: "Наука", 1978
- [18a] А.Г. Куликовский, Е.И. Свешникова, А.П. Чугайнова. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений. М.: МИАН, 2011
- [19a] Чаплыгин С. А., О газовых струях, М.-Л., 1949.

Зиновьев Дмитрий Александрович

“Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа в теории нелинейных волн в самогравитирующих сжимаемых средах и его приложение к задачам астрофизики”

Построен новый метод линеаризации целого класса нелинейных уравнений типа Бюргерса, позволяющий составить максимально полный список точно интегрируемых уравнений. Найдены точные решения систем уравнений, описывающих течения сжимаемой идеальной вязкой жидкости в размерности $1+1$ и $1+2$. Найдены точные решения системы уравнений, описывающей динамику самогравитирующей сжимаемой среды в плоском, цилиндрически и сферически симметричных случаях. Найдены новые аналитические решения в задаче формирования структур в самогравитирующей сжимаемой среде вследствие гравитационной неустойчивости Джинса.

Zinov'ev Dmitry

“The generalized method of Coul-Hopf substitutions in the theory of non-linear waves in compressible fluids in self-gravitational field and its astrophysical problems application”

New method of linearization of wide class Burgers type equations is developed. The list of such equations may be compiled by this method. The systems of equations described flows of compressible ideal and viscous fluid in 1+1 and 1+2 dimensions were exactly solved. The systems of equations described dynamics of compressible fluid in self-gravitational field in flat, cylindrical and spherical symmetries were exactly solved. New analytical solutions of the problem of formation of structures in compressible fluid in own gravitational field due to gravitational Jeans's instability were constructed.