УДК 519.21

# Анализ двухканальной многопотоковой системы массового обслуживания с переупорядочиванием заявок и с распределением фазового типа

**Е. С. Данник, С. И. Матюшенко**

*Кафедра теории вероятностей и математической статистики*
*Российский университет дружбы народов*
*ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Рассматривается двухканальная система массового обслуживания ограниченной ёмкости, на которую поступает несколько пуассоновских потоков заявок разного типа. Предполагается, что длительности обслуживания заявок случайны и имеют распределение фазового типа, зависящее как от типа заявки, так и от прибора, на котором производится обслуживание. На выходе из системы располагается буфер, в котором происходит переупорядочивание заявок в соответствии с порядком их поступления.

Функционирование системы описывается однородным марковским процессом. В предположении, что интенсивности потоков и обслуживания заявок положительны и конечны финальные вероятности состояний марковского процесса существуют, строго положительны, не зависят от начального распределения и совпадают со стационарными вероятностями. Для поиска этих вероятностей выводится система уравнений равновесия. Далее устанавливается возможность сведения полученных уравнений к аналогичным уравнениям для системы массового обслуживания с переупорядочиванием заявок с одним пуассоновским потоком суммарной интенсивности и последующим определением типа заявки непосредственно перед поступлением на обслуживание. Последнее обстоятельство позволило использовать для расчёта стационарного распределения длины очереди результаты предыдущих работ авторов. В итоге был разработан рекуррентный матричный алгоритм для расчёта вероятностей состояний рассматриваемой системы в условиях стационарного режима работы.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания, распределение фазового типа, стационарное распределение, переупорядочивание заявок.

## 1. Описание системы

Рассматривается двухканальная система массового обслуживания (СМО) с общим накопителем ёмкости $r$, $r < \infty$ на которую поступает $s$ независимых пуассоновских потоков с интенсивностями $\lambda_l$, $l = \overline{1,s}$. Предполагается, что длительность обслуживания заявок различных типов на приборе $j$ являются независимыми в совокупности с.в. с ФР фазового типа $B_j^l(t)$,

$$B_j^l(t) = 1 - \vec{\beta}_j^{l\,T} e^{M_j^l t}\vec{1}, \quad t \geqslant 0, \quad \vec{\beta}_j^{l\,T}\vec{1} = 1,$$

с неприводимым $PH$-представлением $\left(\vec{\beta}_j^l, M_j^l\right)$ порядка $m_j^l$, $l = \overline{1,s}$, $j = 1, 2$ [1].

Будем считать, что заявка, поступающая в свободную СМО, направляется на первый прибор, а при наличии очереди действует дисциплина FCFS.

Предположим, что всем заявкам независимо от типа при поступлении в систему присваивается порядковый номер. Будем требовать сохранения порядка между заявками на выходе из СМО, установленного при входе в неё. Заявки, завершившие обслуживание и нарушившие установленный порядок, будут накапливаться на выходе системы в буфере переупорядочивания (БП) (рис. 1).

В соответствии с обозначениями Кендалла будем кодировать рассматриваемую СМО как $M_s/PH_s/2/\mathrm{r}/\mathrm{res}$, где res — сокращение от “resequence” — переупорядочивание.

Статья поступила в редакцию 19 декабря 2013 г.

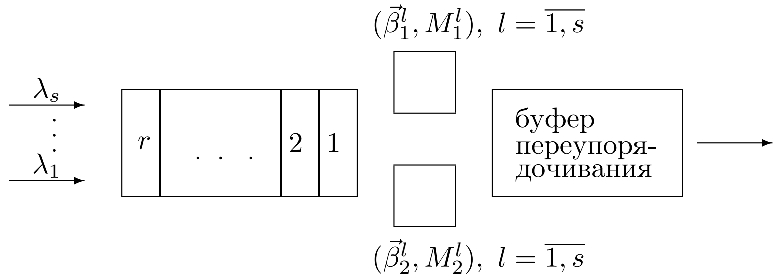


**Рис. 1. Двухканальная СМО конечной ёмкости с $s$ пуассоновскими потоками и буфером переупорядочивания**

## 2. Вывод уравнений равновесия

Введём понятие упорядоченности системы. Будем считать, что СМО $M_s/PH_s/2/\mathrm{r}/\mathrm{res}$ находится в упорядоченном состоянии (упорядочена), если на приборах 1 и 2 обслуживаются заявки с номерами $N_1$ и $N_2$ и $N_1 < N_2$. В противном случае, т. е. при $N_1 > N_2$, система неупорядочена.

С учётом принятого выше понятия упорядоченности функционирование рассматриваемой СМО описывается марковским процессом (МП) $X(t)$, $t \geqslant 0$, над пространством состояний

$$x = \{0\} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{r+2} \sum_{\vec{l}_k} x_{\vec{l}_k^T, i, n},$$

где

$$\vec{l}_k^T = \big(l_1, \ldots, l_k\big), \quad l_\alpha = \overline{1, s}, \quad \alpha = \overline{1, k},$$

$$x_{\vec{l}_1^T, i, n} = \left\{\big(\vec{l}_1^T, j_i, i, n\big), \quad j_i = \overline{1, m_i^{l_1}}\right\}, \quad i = 1,\, 2, \quad n \geqslant 0;$$

$$x_{\vec{l}_k^T, i, n} = \left\{\left(\vec{l}_k^T, j_i, j_2, i, n\right),\ j_1 = \overline{1, m_1^{l_1}},\ j_2 = \overline{1, m_2^{l_2}}\right\},\ i = 1, 2,\ k = \overline{2, r+2},\ n \geqslant 0.$$

Здесь для некоторого момента времени $t$: $X(t) = (0)$, если в момент $t$ система пуста; $X(t) = (\vec{l}_1^T, j_i, i, n)$, если в системе имеется единственная заявка типа $l_1$, обслуживаемая на приборе $i$, и при этом процесс обслуживания находится на фазе $j_i$, а в БП системы содержится $n$ заявок произвольных типов; $X(t) = (\vec{l}_k^T, j_1, j_2, i, n)$, если в системе имеется $k$ заявок, при этом в очереди ожидают в порядке их прибытия заявки с номерами потоков $l_3, \ldots, l_k$, на $\nu$-м приборе обслуживается заявка типа $l_\nu$ и обслуживание происходит на фазе $j_\nu$, $\nu = 1, 2$, индекс $n$ имеет прежний смысл, а индекс $i$ характеризует состояние упорядоченности системы: система упорядочена, если $i = 1$ и неупорядочена, если $i = 2$.

Обозначим через $q = k-2$ длину очереди, а через $q_l$ — число $l$-заявок в очереди, $q_1 + \cdots + q_s = q$, и положим $\vec{q}^T = (q_1, \ldots, q_s)$.

Далее, определим следующие макросостояния системы:

$(\vec{q}^T, l_1, l_2, j_1, j_2, i, n)$ — состояние, означающее, что в очереди имеется $q$ заявок, причём число $l$-заявок равно $q_l$, $l = \overline{1, s}$, на $\nu$-ом приборе обслуживается заявка типа $l_\nu$, $\nu = 1, 2$, а индексы $j_1$, $j_2$, $i$ и $n$ имеют прежний смысл;

$(k, l_1, l_2, j_1, j_2, i, n)$ — состояние, означающее, что в очереди имеется $k$ заявок, $k = \overline{2, r+2}$, а индексы $l_1$, $l_2$, $j_1$, $j_2$, $i$, $n$ имеют прежний смысл;

$(k, l_1, l_2, j_\nu, i, n)$ — состояние, отличающееся от предыдущего тем, что в нём учитывается номер фазы обслуживания на приборе 3-$\nu$, $\nu = 1, 2$.

Кроме того, введём макросостояния системы, не учитывающие состояние БП:

$$(l_1, j_i, i) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (l_1, j_i, i, n), \quad l_1 = \overline{1, s}, \quad j_i = \overline{1, m_i^{l_1}}, \quad i = 1, 2;$$

$$(\vec{l}_k^T, j_1, j_2, i) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\vec{l}_k^T, j_1, j_2, i, n), \quad l_\alpha = \overline{1, s}, \quad \alpha = \overline{1, k}, \quad j_i = \overline{1, m_i^{l_i}}, \quad i = 1, 2;$$

$$(\vec{q}^T, l_1, l_2, j_1, j_2, i) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\vec{q}^T, l_1, l_2, j_1, j_2, i, n), \quad q_l = \overline{0, q}, \quad q = \overline{0, r},$$
$$l_i = \overline{1, s}, \quad j_i = \overline{1, m_i^{l_i}}, \quad i = 1, 2;$$

$$(k, l_1, l_2, j_1, j_2, i) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (k, l_1, l_2, j_1, j_2, i, n), \quad k = \overline{2, r+2},$$
$$l_i = \overline{1, s}, \quad j_i = \overline{1, m_i^{l_i}}, \quad i = 1, 2;$$

$$(k, l_1, l_2, j_\nu, i) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (k, l_1, l_2, j_\nu, i, n), \quad k = \overline{2, r+2},$$
$$j_\nu = \overline{1, m_\nu^{l_\nu}}, \quad \nu = 1, 2, \quad l_i = \overline{1, s}, \quad i = 1, 2.$$

В предположении, что интенсивности потоков и обслуживания заявок положительны и конечны, финальные вероятности

$$p(x) = \lim_{t \to \infty} P\{X(t) = x\}, \quad x \in X,$$

существуют, строго положительны, не зависят от начального распределения и совпадают со стационарными вероятностями [2].

Стационарные вероятности рассмотренных выше макросостояний системы обозначим соответственно через $p(\vec{q}^T, l_1, l_2, j_1, j_2, i, n)$, $p(k, l_1, l_2, j_1, j_2, i, n)$, $p(\vec{l}_1^T, j_i, i)$, $p(\vec{l}_k^T, j_1, j_2, i)$, $p(\vec{q}^T, l_1, l_2, j_1, j_2, i)$, $p(k, l_1, l_2, j_1, j_2, i)$.

Кроме того, введём векторы:

$$\vec{p}^T(l_1, i, n) = \big(p(l_1, 1, i, n), \ldots, p(l_1, m_i^{l_1}, i, n)\big);$$
$$\vec{p}^T(\vec{l}_k^T, i, n) = \big(p(\vec{l}_k^T, 1, 1, i, n), \ldots, p(\vec{l}_k^T, 1, m_2^{l_2}, i, n), \ldots, p(\vec{l}_k^T, m_1^{l_1}, m_2^{l_2}, i, n)\big);$$
$$\vec{p}^T(\vec{q}^T, l_1, l_2, i, n) = \big(p(\vec{q}^T, l_1, l_2, 1, 1, i, n), \ldots, p(\vec{q}^T, l_1, l_2, 1, m_2^{l_2}, i, n), \ldots,$$
$$p(\vec{q}^T, l_1, l_2, m_1^{l_1}, m_2^{l_2}, i, n)\big);$$
$$\vec{p}^T(k, l_1, l_2, i, n) = \big(p(k, l_1, l_2, 1, 1, i, n), \ldots, p(k, l_1, l_2, 1, m_2^{l_2}, i, n), \ldots,$$
$$p(k, l_1, l_2, m_1^{l_1}, m_2^{l_2}, i, n)\big);$$
$$\vec{p}^T(\vec{l}_1^T, i) = \big(p(l_1, 1, i), \ldots, p(l_1, m_i^{l_1}, i)\big);$$
$$\vec{p}^T(\vec{l}_k^T, i) = \big(p(\vec{l}_k^T, 1, 1, i), \ldots, p(\vec{l}_k^T, 1, m_2^{l_2}, i), \ldots, p(\vec{l}_k^T, m_1^{l_1}, m_2^{l_2}, i)\big);$$
$$\vec{p}^T(\vec{q}^T, l_1, l_2, i) = \big(p(\vec{q}^T, l_1, l_2, 1, 1, i), \ldots, p(\vec{q}^T, l_1, l_2, 1, m_2^{l_2}, i), \ldots,$$
$$p(\vec{q}^T, l_1, l_2, m_1^{l_1}, m_2^{l_2}, i)\big);$$
$$\vec{p}^T(k, l_1, l_2, i) = \big(p(k, l_1, l_2, 1, 1, i), \ldots, p(k, l_1, l_2, 1, m_2^{l_2}, i), \ldots, p(k, l_1, l_2, m_1^{l_1}, m_2^{l_2}, i)\big).$$

Далее, положим $\vec{\mu}^{l}_{j} = -M^{l}_{j}\vec{1}$, $l = \overline{1,s}$, $j = 1, 2$, $M^{l_1 l_2} = M^{l_1}_{1} \oplus M^{l_2}_{2}$, $\lambda = \lambda_1 + \ldots \lambda_s$, а через $\vec{l}_{k,\alpha}$ обозначим вектор, получаемый из вектора $\vec{l}_k$ отбрасыванием координат $l_1, \ldots, l_{\alpha-1}$, т. е. $\vec{l}^{T}_{k,\alpha} = (l_\alpha, \ldots, l_k)$.

Здесь и в дальнейшем $U \otimes V$ — кронекерово произведение матриц $U$ и $V$, а $U \oplus V = U \otimes I + I \otimes V$ — кронекерова сумма матриц $U$ и $V$.

Стационарные вероятности $p(x)$, $x \in X$, являются единственным решением следующей системы уравнений равновесия (СУР):

$$0 = -\lambda p(0) + \sum_{l_1=1}^{s} \vec{p}^{T}(\vec{l}^{T}_{1}, 1)\vec{\mu}^{l_1}_{1} + \sum_{l_1=1}^{s} \vec{p}^{T}(\vec{l}^{T}_{1}, 2)\vec{\mu}^{l_2}_{2}; \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\vec{0}^{T} = \vec{p}^{T}(\vec{l}^{T}_{1}, i, n)(-\lambda \oplus M^{l_i}_{i}) + u(1-n)\Big[u(2-i)\big(p(0)\lambda_{l_1}\vec{\beta}^{l_1 T}_{1} + \\ + \sum_{l_2=1}^{s} \vec{p}^{T}(\vec{l}^{T}_{2}, 2)(I \otimes \vec{\mu}^{l_2}_{2})\big) + u(i-1)\sum_{l_1=1}^{s} \vec{p}^{T}(\vec{l}^{T}_{2}, 1)(\vec{\mu}_{1} \otimes I)\Big] + \\ + u(n)\Big[u(2-i)\sum_{l_2=1}^{s} \vec{p}^{T}(\vec{l}^{T}_{2}, 1, n-1)(I \otimes \vec{\mu}^{l_2}_{2}) + \\ + u(i-1)\sum_{l_1=1}^{s} \vec{p}^{T}(\vec{l}^{T}_{2}, 2, n-1)(\vec{\mu}^{l_1}_{1} \otimes I)\Big], \\ l_i = \overline{1,s}, \quad i = 1, 2, \quad n \geqslant 0;\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\vec{0}^{T} = \vec{p}^{T}(\vec{l}^{T}_{k}, i, n)(-\lambda \oplus M^{l_1 l_2}) + u(k-2)\vec{p}^{T}(\vec{l}^{T}_{k-1}, i, n)(\lambda_{l_k} \otimes I \otimes I) + \\ + u(3-k)\Big[u(2-i)\vec{p}^{T}(\vec{l}^{T}_{1}, 1, n)(\lambda_{l_2} \otimes I \otimes \vec{\beta}^{l_2 T}_{2}) + \\ + u(i-1)\vec{p}^{T}(l_2, 2, n)(\lambda_{l_1} \otimes \vec{\beta}^{l_1 T}_{1} \otimes I)\Big] + \\ + u(1-n)\Big[u(2-i)\sum_{l=1}^{s} \vec{p}^{T}\big((l_1, l, \vec{l}^{T}_{2,k}), 2\big)(I \otimes \vec{\mu}^{l}_{2}\vec{\beta}^{l_2 T}_{2}) + \\ + u(1-i)\sum_{l=1}^{s} \vec{p}^{T}\big((l, l_2, l_1, \vec{l}^{T}_{3,k}), 1\big)(\vec{\mu}^{l}_{1}\vec{\beta}^{l_1 T}_{1} \otimes I)\Big] + \\ + u(n)\Big[u(2-i)\sum_{l=1}^{s} \vec{p}^{T}\big((l_1, l, \vec{l}^{T}_{2,k}), 1, n-1\big)(I \otimes \vec{\mu}^{l}_{2}\vec{\beta}^{l_2 T}_{2}) + \\ + u(1-i)\sum_{l=1}^{s} \vec{p}^{T}\big((l, l_2, l_1, \vec{l}^{T}_{3,k}), 2, n-1\big)(\vec{\mu}^{l}_{1}\vec{\beta}^{l_1 T}_{1} \otimes I)\Big], \\ l_\alpha = \overline{1,s}, \quad \alpha = \overline{1,k}, \quad k = \overline{2, r+1}, \quad i = 1,\ 2, \quad n \geqslant 0;\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\vec{0}^{T} = \vec{p}^{T}(\vec{l}^{T}_{r+2}, i, n)M^{l_1 l_2} + \vec{p}^{T}(\vec{l}^{T}_{r+1}, i, n)(\lambda_{l_{r+2}} \otimes I \otimes I), \\ l_\alpha = \overline{1,s}, \quad \alpha = \overline{1, r+2}, \quad i = 1,\ 2, \quad n \geqslant 0,\end{gathered} \tag{4}$$

с условием нормировки

$$p(0) + \sum_{k=1}^{r+2} \sum_{l_1,\ldots,l_k=1}^{s} \sum_{i=1}^{2} \sum_{n \geqslant 0} \vec{p}^{T}(\vec{l}^{T}_{k}, i, n)\vec{1} = 1. \tag{5}$$

Поясним вывод уравнений равновесия. Предварительно условимся для любых фиксированных $l_1 = \overline{1,s}$ и $l_2 = \overline{1,s}$ обозначать через $(M^{l_1 l_2})_{\mathrm{dg}}$ диагональную матрицу с диагональными элементами, равными соответствующим элементам матрицы $M^{l_1l_2}$, а через $(M^{l_1l_2})^0_{\rm dg}$ — матрицу $M^{l_1l_2}$, в которой все диагональные элементы заменены нулями. Кроме этого, положим

$$x_{\vec{l}^T_k,i,\cdot} = \bigcup_{n=0}^{\infty} x_{\vec{l}^T_k,i,n}, \quad k=\overline{1,r+2}, \quad i=1,\,2.$$

Рассмотрим уравнения (3) для $k=\overline{3,r+1}$. Их вывод проиллюстрируем диаграммой переходов МП $X(t)$ за $\Delta t$ между множествами $x_{\vec{l}^T_k,i,n}$, $k=\overline{3,r+1}$, $i=1,\,2$, $n\geqslant 0$, множества $x$ (рис. 2). Поясним сначала вывод уравнения (3) для $k=\overline{3,r+1}$ в случае, когда $i=1$, $n=0$. В подмножество $x_{\vec{l}^T_k,1,0}$ за $\Delta t$ можно попасть из подмножества $x_{\vec{l}^T_{k-1},1,0}$ за счёт поступления $l_k$-заявки с интенсивностью $\lambda_{l_k}$. Кроме того, в подмножество $x_{\vec{l}^T_k,1,0}$ можно попасть за $\Delta t$ из подмножеств $x_{(l_1,1,\vec{l}^T_{2,k}),2,\cdot}$, $\ldots$, $x_{(l_1,s,\vec{l}^T_{2,k}),2,\cdot}$ путём окончания обслуживания заявки на втором приборе, так как при этом неупорядоченная система перейдёт в упорядоченное состояние, расположение заявок в системе станет характеризоваться вектором $\vec{l}_k$, а БП системы опустошится. Интенсивность обслуживания $l$-заявки на втором приборе характеризуется вектором $\vec{\mu}^{\,l}_2$, $l=\overline{1,s}$. При этом дополнительно нужно иметь в виду, что освободившийся второй прибор займёт $l_1$-заявка и, следовательно, начальная фаза обслуживания будет выбираться в соответствии с начальным вектором $\vec{\beta}^{\,l_1}_2$. И, наконец, имеется возможность за $\Delta t$ не выйти за пределы множества $x_{\vec{l}^T_k,1,0}$. Это может осуществиться двумя способами. В первом случае за $\Delta t$ не закончится прохождение текущих фаз обслуживания и не поступит в систему новая заявка. Эту возможность отражают интенсивности, равные элементам главной диагонали матрицы $(-\lambda)\oplus M^{l_1l_2}$, взятые с противоположным знаком. Во втором случае за $\Delta t$ могут произойти изменения фаз текущих процессов обслуживания. Эту ситуацию отражают интенсивности, равные элементам матрицы $M^{l_1l_2}$, не расположенным на главной диагонали.

При выводе уравнений (3) для $k=\overline{3,r+1}$ в случае, когда $i=1$, $n>0$, учитывается, что переход в множество $x_{\vec{l}^T_k,1,n}$ может произойти из множеств $x_{(l_1,1,\vec{l}^T_{2,k}),1,n-1}$, $\ldots$, $x_{(l_1,s,\vec{l}^T_{2,k}),1,n-1}$ за счёт обслуживания заявки на втором приборе, так как при этом система, по-прежнему, останется упорядоченной, расположение заявок в системе станет характеризоваться вектором $\vec{l}_k$, а обслуженная заявка поступает в БП системы. Все остальные переходы в множество $x_{\vec{l}^T_k,1,n}$, $n>0$, аналогичны соответствующим переходам в множество $x_{\vec{l}^T_k,1,0}$, поэтому их пояснения опускаем.

При выводе уравнений (3) для $k=\overline{3,r+1}$ и $n\geqslant 0$ в случае, когда $i=2$, учитывается, что после окончания обслуживания заявки на первом приборе упорядоченная система переходит в неупорядоченное состояние и БП опустошается, а после окончания обслуживания заявки на втором приборе неупорядоченная система остаётся неупорядоченной и обслуженная заявка поступает в БП. Поэтому переход в подмножество $x_{\vec{l}^T_k,2,0}$ возможен из подмножеств $x_{(1,l_2,l_1,\vec{l}^T_{3,k}),1,\cdot}$, $\ldots$, $x_{(s,l_2,l_1,\vec{l}^T_{3,k}),1,\cdot}$ за счёт окончания обслуживания заявки на первом приборе, а переход в подмножество $x_{\vec{l}^T_k,2,n}$, $n>0$, возможен из подмножеств $x_{(1,l_2,l_1,\vec{l}^T_{3,k}),2,n-1}$, $\ldots$, $x_{(s,l_2,l_1,\vec{l}^T_{3,k}),2,n-1}$ за счёт окончания обслуживания заявки на втором приборе. В первом случае интенсивность обслуживания $l$-заявки характеризуется вектором $\vec{\mu}^{\,l}_1$, $l=\overline{1,s}$, а выбор начальной фазы обслуживания следующей заявки — вектором $\vec{\beta}^{\,l_1}_1$. Во втором случае интенсивность обслуживания $l$-заявки

$$\begin{tikzcd}
x_{(l_1,1,\vec{l}^T_{2,k}),2,\cdot} \arrow[dr, "(I\otimes\vec{\mu}^1_2\vec{\beta}^{l_2T}_2)\Delta t"'] & \cdots & x_{(l_1,s,\vec{l}^T_{2,k}),2,\cdot} \arrow[dl, "(I\otimes\vec{\mu}^s_2\vec{\beta}^{l_2T}_2)\Delta t"] \\
& x_{(\vec{l}^T_k),1,0} \arrow[loop left, "(M^{l_1l_2})^0_{dg}\Delta t"] \arrow[loop right, "I+[(-\lambda)\oplus(M^{l_1l_2})_{dg}]\Delta t"] & \\
& x_{(\vec{l}^T_{k-1}),1,0} \arrow[u, "(\lambda_{l_k}\otimes I\otimes I)\Delta t"'] &
\end{tikzcd}$$

а)

$$\begin{tikzcd}
x_{(l_1,1,\vec{l}^T_{2,k}),1,n-1} \arrow[dr, "(I\otimes\vec{\mu}^1_2\vec{\beta}^{l_2T}_2)\Delta t"'] & \cdots & x_{(l_1,s,\vec{l}^T_{2,k}),1,n-1} \arrow[dl, "(I\otimes\vec{\mu}^s_2\vec{\beta}^{l_2T}_2)\Delta t"] \\
& x_{(\vec{l}^T_k),1,n} \arrow[loop left, "(M^{l_1l_2})^0_{dg}\Delta t"] \arrow[loop right, "I+[(-\lambda)\oplus(M^{l_1l_2})_{dg}]\Delta t"] & \\
& x_{(\vec{l}^T_{k-1}),1,n} \arrow[u, "(\lambda_{l_k}\otimes I\otimes I)\Delta t"'] &
\end{tikzcd}$$

б)

$$\begin{tikzcd}
x_{(1,l_2,l_1,\vec{l}^T_{3,k}),1,\cdot} \arrow[dr, "(\vec{\mu}^1_1\vec{\beta}^{l_1T}_1\otimes I)\Delta t"'] & \cdots & x_{(s,l_2,l_1,\vec{l}^T_{3,k}),1,\cdot} \arrow[dl, "(\vec{\mu}^s_1\vec{\beta}^{l_1T}_1\otimes I)\Delta t"] \\
& x_{(\vec{l}^T_k),2,0} \arrow[loop left, "(M^{l_1l_2})^0_{dg}\Delta t"] \arrow[loop right, "I+[(-\lambda)\oplus(M^{l_1l_2})_{dg}]\Delta t"] & \\
& x_{(\vec{l}^T_{k-1}),2,0} \arrow[u, "(\lambda_{l_k}\otimes I\otimes I)\Delta t"'] &
\end{tikzcd}$$

в)

$$\begin{tikzcd}
x_{(1,l_2,l_1,\vec{l}^T_{3,k}),2,n-1} \arrow[dr, "(\vec{\mu}^1_1\vec{\beta}^{l_1T}_1\otimes I)\Delta t"'] & \cdots & x_{(s,l_2,l_1,\vec{l}^T_{3,k}),2,n-1} \arrow[dl, "(\vec{\mu}^s_1\vec{\beta}^{l_1T}_1\otimes I)\Delta t"] \\
& x_{(\vec{l}^T_k),2,n} \arrow[loop left, "(M^{l_1l_2})^0_{dg}\Delta t"] \arrow[loop right, "I+[(-\lambda)\oplus(M^{l_1l_2})_{dg}]\Delta t"] & \\
& x_{(\vec{l}^T_{k-1}),2,n} \arrow[u, "(\lambda_{l_k}\otimes I\otimes I)\Delta t"'] &
\end{tikzcd}$$

г)

**Рис. 2. Диаграмма переходов МП $X(t)$ между множествами $x_{\vec{l}^T_k,i,n}$, $k=\overline{3,r+1}$, $i=1,\,2$, $n\geqslant 0$**

характеризуется вектором $\vec{\mu}_2^l$, $l = \overline{1,s}$, а выбор начальной фазы обслуживания следующей заявки — вектором $\vec{\beta}_2^{l_2}$. Все остальные переходы в множества $x_{\vec{l}_k^T,2,n}$ аналогичны соответствующим переходам в множества $x_{\vec{l}_k^T,1,n}$, $k = \overline{3, r+1}$, $n \geqslant 0$.

Пояснения уравнений (1), (2), (4) и (3) для $k = 2$ мы опускаем, так как после проведённых выше рассуждений их вывод не представляет большой сложности.

## 3. Анализ уравнений равновесия

Покажем, что решение СУР (1)–(5) можно выразить через решение СУР меньшей размерности. Введём предварительно ряд обозначений:

$$c_l = \lambda_l/\lambda, \quad l = \overline{1,s}, m_j = m_j^1 + \ldots m_j^s\,, \quad \vec{\beta}_j^T = (c_1\vec{\beta}_j^{1\,T}, \ldots, c_s\vec{\beta}_j^{s\,T}),$$
$$M_j = \mathrm{diag}\{M_j^1, \ldots, M_j^s\}, \quad \vec{\mu}_j = -M_j\vec{1}, \quad j = 1,\,2, \quad M = M_1 \oplus M_2\,.$$

Кроме того, введём векторы

$$\vec{p}_0^T = \big(p(0)\big);$$
$$\vec{p}_{1in}^T = \big(\vec{p}^T(1,i,n), \ldots, \vec{p}^T(s,i,n)\big), \quad n \geqslant 0, \quad i = 1,\,2;$$
$$\vec{p}_{1i}^T = \big(\vec{p}^T(1,i), \ldots, \vec{p}^T(s,i)\big), \quad i = 1,\,2;$$
$$\vec{p}_{kin}^T = \big(p(k,1,1,1,1,i,n), \ldots, p(k,1,1,1,m_2^1,i,n), p(k,1,2,1,1,i,n), \ldots,$$
$$p(k,1,2,1,m_2^2,i,n), \ldots, p(k,1,s,1,m_2^s,i,n), p(k,1,2,1,1,i,n), \ldots,$$
$$p(k,2,s,1,m_2^s,i,n), \ldots, p(k,s,s,m_1^s,m_2^s,i,n)\big), \quad k = \overline{2, r+2}, \quad i = 1,\,2, \quad n \geqslant 0;$$
$$\vec{p}_{ki}^T = \big(p(k,1,1,1,1,i), \ldots, p(k,s,s,m_1^s,m_2^s)\big), \quad k = \overline{2, r+2}, \quad i = 1,\,2,$$

причём структура вектора $\vec{p}_{ki}$ аналогична структуре вектора $\vec{p}_{kin}$.

Теперь покажем, что справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Стационарное распределение вероятностей*

$$\Big\{p(\vec{l}_k^T,1,1,i,n), \ldots, p(\vec{l}_k^T, m_1^{l_1}, m_2^{l_2}, i, n), \quad l_\alpha = \overline{1,s}, \quad \alpha = \overline{1,k}, \quad k = \overline{2, r+2}, \quad i = 1,\,2, \quad n \geqslant 0\Big\}$$

*определяется следующими соотношениями:*

$$\vec{p}^T(\vec{l}_k^T, i, n) = \vec{p}^T(k, l_1, l_2, i, n)\prod_{\alpha=3}^{k} c_{l_\alpha}\,, \tag{6}$$

*а координаты вектора $p(k,l_1,l_2,i,n)$ являются решением СУР для СМО $M/PH/2/\mathrm{r/res}$ с пуассоновским потоком интенсивности $\lambda$ и функцией распределения длительности обслуживания $B_j(t)$ на приборе $j$ фазового типа с неприводимым $PH$-представлением $(\vec{\beta}_j, M_j)$ порядка $m_j$, $j = 1,\,2$.*

**Доказательство.** Подставляя равенства (6) в уравнения (3) и (4) и производя несложные алгебраические преобразования, получим следующие равенства:

$$\vec{0}^T = \vec{p}^T(k,l_1,l_2,i,n)\big(-\lambda \oplus M^{l_1 l_2}\big) + u(k-2)\vec{p}^T(k-1,l_1,l_2,i,n)(\lambda \otimes I \otimes I) +$$
$$+\, u(3-k)\Big[u(2-i)\vec{p}^T(l_1,1,n)(\lambda \otimes I \otimes c_{l_2}\vec{\beta}_2^{l_2 T}) +$$

$$+ u(i-1)\vec{p}^T(l_2, 2, n) \cdot (\lambda \otimes c_{l_1}\vec{\beta}_1^{l_1 T} \otimes I)\Big] +$$
$$+ u(1-n)\Big[u(2-i)\sum_{l=1}^{s}\vec{p}^T(k+1, l_1, l, 2) \cdot (I \otimes c_{l_2}\vec{\mu}_2^{l}\vec{\beta}_2^{l_2 T}) +$$
$$+ u(i-1)\sum_{l=1}^{s}\vec{p}^T(k+1, l, l_2, 1)(c_{l_1}\vec{\mu}_1^{l}\vec{\beta}_1^{l_1 T} \otimes I)\Big] +$$
$$+ u(n)\Big[u(i-1)\sum_{l=1}^{s}\vec{p}^T(k+1, l, l_2, 2, n-1)(c_{l_1}\vec{\mu}_1^{l}\vec{\beta}_1^{l_1 T} \otimes I) +$$
$$+ u(2-1)\sum_{l=1}^{s}\vec{p}^T(k+1, l_1, l, 1, n-1)(I \otimes c_{l_2}\vec{\mu}_2^{l}\vec{\beta}_2^{l_2 T})\Big], \quad (7)$$
$$k = \overline{2, r+1}, \quad l_i = \overline{1, s}, \quad i = 1,\, 2, \quad n \geqslant 0;$$

$$\vec{0}^T = \vec{p}^T(r+2, l_1, l_2, i, n)M^{l_1 l_2} + \vec{p}^T(r+1, l_1, l_2, i, n)(\lambda \otimes I \otimes I),$$
$$l_i = \overline{1, s}, \quad i = 1,\, 2, \quad n \geqslant 0. \quad (8)$$

С учётом введённых выше обозначений уравнения (1), (2) и равенства (7), (8) можно записать в следующем виде:

$$0 = -\lambda\vec{p}_0^T + \vec{p}_{11}^T\vec{\mu}_1 + \vec{p}_{12}^T\vec{\mu}_2\,; \quad (9)$$

$$\vec{0}^T = \vec{p}_{1in}^T(-\lambda \oplus M_i) + u(1-n)u(2-i)\vec{p}_0^T(\lambda \otimes \vec{\beta}_1^T) +$$
$$+ u(1-n)\big[u(2-i)\vec{p}_{22}^T(I \otimes \vec{\mu}_2) + u(i-1)\vec{p}_{21}^T(\vec{\mu}_1 \otimes I)\big] +$$
$$+ u(n)\big[u(2-i)\vec{p}_{21,n-1}^T(I \otimes \vec{\mu}_2) + u(i-1)\vec{p}_{22,n-1}^T(\vec{\mu}_1 \otimes I)\big], \; i = 1,\, 2, \; n \geqslant 0; \quad (10)$$

$$\vec{0}^T = \vec{p}_{kin}^T(-\lambda \oplus M) + u(k-2)\vec{p}_{k-1,in}^T(\lambda \otimes I \otimes I) +$$
$$+ u(3-k)\big[u(2-i)\vec{p}_{11}^T(\lambda \otimes I \otimes \vec{\beta}_2^T) + u(i-1)\vec{p}_{12n}^T(\lambda \otimes \vec{\beta}_1^T \otimes I)\big] +$$
$$+ u(1-n)\big[u(2-i)\vec{p}_{k+1,2}^T(I \otimes \vec{\mu}_2\vec{\beta}_2^T) + u(i-1)\vec{p}_{k+1,1}^T(\vec{\mu}_1\vec{\beta}_1^T \otimes I)\big] +$$
$$+ u(n)\big[u(2-i)\vec{p}_{k+1,1,n+1}^T(I \otimes \vec{\mu}_2\vec{\beta}_2^T) + u(i-1)\vec{p}_{k+1,2,n-1}^T(\vec{\mu}_1\vec{\beta}_1^T \otimes I)\big],$$
$$k = \overline{2, r+1}, \quad i = 1,\, 2, \quad n \geqslant 0; \quad (11)$$

$$\vec{0}^T = \vec{p}_{r+2,in}^T M + \vec{p}_{r+1,in}^T(\lambda \otimes I \otimes I), \quad i = 1,\, 2, \quad n \geqslant 0\,. \quad (12)$$

Сравнивая полученные соотношения с уравнениями (3)–(7) из работы [3], приходим к выводу о том, что уравнения (9)–(12) представляют собой СУР для СМО $M/PH/2$/r/res с параметром потока, равным $\lambda$ и распределением длительности обслуживания на приборе $j$ с $PH$-представлением $(\vec{\beta}_j, M_j)$, $j = 1, 2$. Причём неприводимость этих представлений очевидным образом вытекает из определения $\beta_j$, $M_j$, и неприводимости $PH$-представлений $(\beta_j^l, M_j^l)$, $l = \overline{1, s}$, $j = 1, 2$. Так как полученная система с учётом условия нормировки имеет единственное решение, то соотношения (6) единственным образом определяют распределение исходной СМО. Таким образом, теорема доказана. □

Заметим, что система $M/PH/2$/r/res является частным случаем системы $PH(k)/PH/2$/r/res, рассмотренной в [3]. Поэтому для расчёта стационарных вероятностей состояний этой системы, не учитывающих содержимое БП, можно воспользоваться результатами [3], предварительно полагая $\Lambda_k = (-\lambda)$, $k = \overline{0, r+2}$, $\vec{\alpha} = (I)$.

Далее, суммируя соотношения (6) при фиксированных $\vec{l}_k$, $i$ по $n$, $n \geqslant 0$, мы очевидным образом получаем

$$\vec{p}^T(\vec{l}_k^T, i) = \vec{p}^T(k, l_1, l_2, i) \prod_{\alpha=3}^{k} c_{l_\alpha} . \tag{13}$$

Таким образом, на основании результатов работы [3] и формулы (13) можно утверждать, что нами решена задача об определении вероятностей состояний исходной СМО, не учитывающих содержимое БП.

Теперь заметим, что из теоремы 1 вытекает несколько очевидных следствий.

**Следствие 1.** Стационарные вероятности состояний $(\vec{l}_k^T, j_1, j_2, i, n)$ зависят лишь от состава и длины очереди и не зависят от расположения заявок в ней.

В силу последнего утверждения можно также заметить, что имеет место следствие 2.

**Следствие 2.** Состояния, отличающиеся только порядком расположения заявок в очереди и входящие в состав макросостояния $(\vec{q}^T, l_1, l_2, j_1, j_2, i, n)$, равновероятны.

Величина $c_l = \lambda_l/\lambda$, $l = \overline{1, s}$, в формуле (6) есть условная вероятность того, что при наличии очереди на любом её фиксированном месте находится $l$-заявка. Очевидно, что вероятность $c_l$ не зависит от видов обслуживаемых заявок, фаз обслуживания, длины очереди, расположения в ней заявок и значения $r$ и равна вероятности нахождения в очереди $l$-заявки при условии, что некоторая заявка поступила и принята в систему.

Таким образом, в вероятностном смысле теорема 1 представляет собой теорему умножения стационарных вероятностей. Основанием в такому простому результату являются физические предпосылки, базирующиеся на независимости пуассоновских потоков и отсутствии приоритетов при выборе заявок на обслуживание и постановке их в очередь.

Сформулируем ещё одно следствие из теоремы 1.

**Следствие 3.** Стационарные вероятности $p(\vec{q}^T, l_1, l_2, j_1, j_2, i, n)$ определяются соотношениями

$$\begin{gathered} \vec{p}^T(\vec{q}^T, l_1, l_2, i, n) = \vec{p}^T(q+2, l_1, l_2, i, n) \frac{q!}{q_1! \cdot \dots \cdot q_s!} c_1^{q_1} \cdot \dots \cdot c_s^{q_s} , \\ q_l = \overline{0, q} , \quad q = \overline{0, r} , \quad l = \overline{1, s} , \quad l_i = \overline{1, s} , \quad i = 1,\, 2, n \geqslant 0 . \end{gathered} \tag{14}$$

Доказательство формулы (14) получается из формулы (6), следствия 2 и того факта, что число равновероятных состояний, входящих в состав макросостояния $(\vec{q}^T, l_1, l_2, j_1, j_2, i, n)$ равно $q!/(q_1! \cdot \dots \cdot q_s!)$.

Заметим, что из (13) очевидным образом вытекает справедливость утверждений, аналогичных следствиям 1–3 для макросостояний рассматриваемой СМО, не учитывающих содержимое БП.

## Литература

1. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. — М.: РУДН, 1995. — 529 с. [Bocharov P. P., Pechinkin A. V. Queuing Theory. — Moscow: PFUR, 1995. — 529 p. — (in russian). ]

2. *Башарин Г. П., Бочаров П. П., Коган Я. А.* Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчёта. — М.: Наука, 1989. [Basharin G.P., Bocharov P.P., Kogan Ya.A. Analysis of Queues in Computer Networks. Theory and Methods of Calculation. — Moscow: Nauka, 1989. — (in russian). ]
3. *Матюшенко С. И.* Анализ двухканальной системы массового обслуживания ограниченной ёмкости с буфером переупорядочивания и с распределениями фазового типа // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2010. — № 4. — С. 83–87. [Matushenko S.I. Analysis of Two-Channel System of Service of Limited Capacity with Buffer of Reordering and with Distributions of Phase Type // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2010. — No 4. — P. 83–87. — (in russian). ]

UDC 519.21

## Analysis of Two-Channel Multi-Flow Queuing System with Resequence Customers and Distributions of Phase Type

**E. S. Dannik, S. I. Matyushenko**

*Department of Probability Theory and Mathematical Statistics*
*Peoples' Friendship University of Russia*
*6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198*

The two-channel finite-capacity queuing system with several Poisson flows of customers of different types is considered. The service time is distributed according to phase-type which depends on the type of customers and the device of which it is served. On leaving the system there is a buffer in which there is a resequence of customers according to order of their receipt.

Functioning of the system is described by uniform Markov process. In the assumption that intensity of flows and service of customers are positive and finite the final probabilities of statuses of Markov process exist, are strictly positive, don't depend on initial distribution and match the stationary probabilities. For search of these probabilities the equilibrium system of equations is removed. Then possibility of convergence of the received equations to the similar equations for queuing system with resequence of customers with one Poisson flow of summary intensity and the subsequent determination of the type of customers just before arrival on service is set. The last circumstance allowed using results of the previous operations of authors for calculation of stationary distribution of queue length. As a result the recurrent matrix algorithm was developed for calculation of probabilities of statuses of considered system in the conditions of a stationary operation mode.

**Key words and phrases:** queuing system, phase type distribution, stationary probabilities, resequence customers.