Математика

УДК 515.142.5, 515.143

Рациональный гомотопический тип обратных систем в категории $\mathfrak{T}_2$

В. В. Марченко

Кафедра математического анализа и теории функций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

Преимуществом подхода Квиллена к построению теории рационального гомотопического типа для категории $\mathfrak{T}_2$ односвязных топологических пространств и установлению ее связи с алгебраическими структурами является функториальность. Это позволяет обобщить теорию на случай обратных систем.

В настоящей статье определяется понятие рационального гомотопического типа обратных систем односвязных топологических пространств. Доказывается его эквивалентность рациональным гомотопическим теориям обратных систем некоторых алгебраических категорий.

Ключевые слова: рациональный гомотопический тип, обратные системы, замкнутая модельная категория, сопряженные функторы, эквивалентности.

1. Введение

В 60–70-х годах XX века была построена теория рационального гомотопического типа, авторами которой считаются Д. Квиллен [1] и Д. Сулливан [2], хотя вклад в её создание внесли многие видные топологи мира.

Рациональная гомотопическая теория есть изучение топологических пространств по модулю кручения. Это означает, что топологическое пространство X заменяется другим, более простым — так называемым $\mathbb{Q}$-пространством X_0, гомотопические группы $\pi_*(X_0)$ которого являются векторными пространствами над $\mathbb{Q}$ и изоморфны группам $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$. При этом для некоммутативной группы $\pi_1(X)$ группа $\pi_1(X) \otimes \mathbb{Q}$ понимается как пополнение по Мальцеву.

Важный результат работы Сулливана — установление эквивалентности между $\mathbb{Q}$-пространствами и так называемыми минимальными $\mathbb{Q}$-алгебрами, преимущество которых состоит в простоте вычислений. Эти алгебры полностью определяют рациональный гомотопический тип нильпотентных пространств. Недостаток построения состоит в том, что эта связь не является функториальной[1].

Квилленом рассмотрены следующие категории, на которых он вводит структуру *замкнутой модельной категории*[2]:
1) $\mathfrak{T}_2$ — категория односвязных топологиеских пространств с отмеченной точкой и непрерывных отображений, сохраняющих отмеченную точку;
2) $\mathfrak{S}_2$ — категория 2-редуцированных симплициальных множеств (полная подкатегория категории симплициальных множеств, состоящая из таких K, что K_q содержит лишь вырожденный симплекс для $q = 0, 1$);
3) $(SGP)_1$ — категория редуцированных симплициальных групп (полная подкатегория категории сиплициальных групп, состоящая из таких G, что $G_0 = \{e_0\}$);
4) $(SCHA)_1$ — категория редуцированных симплициальных полных алгебр Хопфа над $\mathbb{Q}$;
5) $(SLA)_1$ — категория редуцированных симплициальных алгебр Ли над $\mathbb{Q}$;

Статья поступила в редакцию 25 мая 2011 г.

[1]Функториальной она становится лишь на уровне гомотопических категорий.

[2]Будет описана ниже.

6) $(DGL)_1$ — категория редуцированных дифференциальных градуированных алгебр Ли над $\mathbb{Q}$;
7) $(DGC)_2$ — категория 2-редуцированных дифференциальных градуированных (кокоммутативных, коассоциативных) коалгебр над $\mathbb{Q}$.

Для каждой из этих категорий K Квиллен строит локализацию $Ho_{\mathbb{Q}}K = S^{-1}K$, где S — семейство рациональных гомотопических эквивалентностей, т. е. таких отображений f, что $\pi_* f \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ есть изоморфизм.

Квилленом построена цепочка сопряженных функторов

$$\mathfrak{T}_2 \underset{||}{\overset{E_2Sing}{\rightleftarrows}} \mathfrak{S}_2 \underset{\overline{W}}{\overset{G}{\rightleftarrows}} (SGP)_1 \underset{\mathcal{G}}{\overset{\widehat{Q}}{\rightleftarrows}} (SCHA)_1 \underset{\mathcal{P}}{\overset{\widehat{U}}{\rightleftarrows}} (SLA)_1 \underset{N}{\overset{N^*}{\rightleftarrows}} (DGL)_1 \underset{\mathcal{C}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} (DGC)_2,$$

которые индуцируют сопряженные эквивалентности

$$Ho_{\mathbb{Q}}\mathfrak{T}_2 \underset{\widetilde{||}}{\overset{\widetilde{E_2Sing}}{\rightleftarrows}} Ho_{\mathbb{Q}}\mathfrak{S}_2 \underset{\widetilde{\overline{W}}}{\overset{\widetilde{G}}{\rightleftarrows}} Ho_{\mathbb{Q}}(SGP)_1 \underset{\widetilde{\mathcal{G}}}{\overset{\widetilde{\widehat{Q}}}{\rightleftarrows}} Ho_{\mathbb{Q}}(SCHA)_1 \underset{\widetilde{\mathcal{P}}}{\overset{\widetilde{\widehat{U}}}{\rightleftarrows}}$$
$$\rightleftarrows Ho_{\mathbb{Q}}(SLA)_1 \underset{\widetilde{N}}{\overset{\widetilde{N^*}}{\rightleftarrows}} Ho_{\mathbb{Q}}(DGL)_1 \underset{\widetilde{\mathcal{C}}}{\overset{\widetilde{\mathcal{L}}}{\rightleftarrows}} Ho_{\mathbb{Q}}(DGC)_2.$$

Теория Сулливана оказалась проще, поэтому работа Квиллена не привлекла к себе должного интереса. В частности, не ставилась проблема распространения теории Квиллена на нильпотентные пространства. Аналогичная проблема для теории Сулливана решена в работе [3] для случая нильпотентных симплициальных множеств конечного ранга, а в работе [4] теория Сулливана распространяется на случай локально нильпотентных симплициальных множеств произвольного ранга.

Целью настоящей работы является построение рационального гомотопического типа для обратных систем односвязных пространств и распространение на этот слуай результата Квиллена. В дальнейшем будет построена теория рационального *шейпового* типа односвязного топологического пространства.

2. Категория обратных систем

2.1. Категория inv-$\mathfrak{C}$

Определение 1. Пусть $\mathfrak{C}$ — произвольная категория. Обратная система $X = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ в категории $\mathfrak{C}$ состоит из направленного множества индексов Λ, объектов X_λ из $\mathfrak{C}$, $\lambda \in \Lambda$, и морфизмов $p_{\lambda\lambda'}\colon X_{\lambda'} \to X_\lambda$ из $\mathfrak{C}$ для $\lambda \leqslant \lambda'$. Более того, должны быть выполнены следующие условия:

1. $p_{\lambda\lambda} = \mathbf{1}_{X_\lambda}\colon X_\lambda \to X_\lambda$ — тождественный морфизм (часто его кратко обозначают $\mathbf{1}_\lambda$);
2. $p_{\lambda\lambda'}p_{\lambda'\lambda''} = p_{\lambda\lambda''}$ всякий раз, когда $\lambda \leqslant \lambda' \leqslant \lambda''$.

Морфизмы $p_{\lambda\lambda'}\colon X_{\lambda'} \to X_\lambda$ будем называть *граничными морфизмами.*

Определение 2. Морфизм обратных систем $(f_\mu, \varphi)\colon \underline{X} \to \underline{Y} = (Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M)$ состоит из функции $\varphi\colon M \to \Lambda$ и набора морфизмов $f_\mu\colon X_{\varphi(\mu)} \to Y_\mu$ в $\mathfrak{C}$ (для каждого μ — единственный морфизм f_μ), причем для каждой пары индексов $\mu \leqslant \mu' \in M$ существует такой индекс $\lambda \in \Lambda$, что $\lambda \geqslant \varphi(\mu), \varphi(\mu')$ и $f_\mu p_{\varphi(\mu)\lambda} = q_{\mu\mu'} f_{\mu'} p_{\varphi(\mu')\lambda}$, т. е. следующая диаграмма (1) коммутативна.

$$\begin{tikzcd} & X_\lambda \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_{f_\mu} \arrow[d, "f_\mu"'] & & X_{f_{\mu'}} \arrow[d, "f_{\mu'}"] \\ Y_\mu & & Y_{\mu'} \arrow[ll] \end{tikzcd} \tag{1}$$

Если $\underline{Z} = (Z_\nu, r_{\nu\nu'}, N)$ — обратная система в $\mathfrak{C}$ и $(g_\nu, \psi)\colon \underline{Y} \to \underline{Z}$ — ещё один морфизм обратных систем, композицию $(g_\nu, \psi)(f_\mu, \varphi) = (h_\nu, \chi)\colon \underline{X} \to \underline{Z}$ определим следующим образом: $\chi = \varphi\psi\colon N \to \Lambda$ и $h_\nu = g_\nu f_{\psi(\nu)}\colon X_{\chi(\nu)} \to Z_\nu$. Можно проверить, что определённый таким образом морфизм действительно удовлетворяет всем условиям определения 2 (см. [5]).

Тождественный морфизм систем $\underline{X} \to \underline{X}$ состоит из тождественной функции $\mathbf{1}_\Lambda\colon \Lambda \to \Lambda$ и набора тождественных морфизмов $\mathbf{1}_\lambda\colon X_\lambda \to X_\lambda$. Так как $p_{\lambda\lambda} = \mathbf{1}_\lambda$, то диаграмма (1) в этом случае действительно коммутативна.

Заметим, что $(f_\mu, \varphi)(\mathbf{1}_\lambda, \mathbf{1}_\Lambda) = (f_\mu, \varphi)$ и $(\mathbf{1}_\mu, \mathbf{1}_M)(f_\mu, \varphi) = (f_\mu, \varphi)$.

Таким образом, построена категория *inv*-$\mathfrak{C}$, объектами которой являются все обратные системы в $\mathfrak{C}$, а морфизмами — морфизмы обратных систем, описанные выше.

2.2. Категория *pro*-$\mathfrak{C}$

Определение 3. Говорят, что два морфизма $(f_\mu, \varphi), (f'_\mu, \varphi')\colon \underline{X} \to \underline{Y}$ обратных систем эквивалентны, и пишут $(f_\mu, \varphi) \sim (f'_\mu, \varphi')$, если для всякого индекса $\mu \in M$ существует такой индекс $\lambda \in \Lambda$, что $\lambda \geqslant \varphi(\mu), \varphi'(\mu)$ и диаграмма (2) коммутативна

$$\begin{tikzcd} & X_\lambda \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_{\varphi(\mu)} \arrow[dr, "f_\mu"'] & & X_{\varphi'(\mu)} \arrow[dl, "f'_\mu"] \\ & Y_\mu & \end{tikzcd} \tag{2}$$

Введённое отношение действительно удовлетворяет всем аксиомам отношения эквивалентности (см. [5]).

Далее, если $(f_\mu, \varphi) \sim (f'_\mu, \varphi')$, $(g_\nu, \psi) \sim (g'_\nu, \psi')$, то $(g_\nu, \psi)(f_\mu, \varphi) \sim (g'_\nu, \psi')(f'_\mu, \varphi')$. Таким образом, может быть корректно определена композиция классов $\mathbf{f}\colon \underline{X} \to \underline{Y}$ и $\mathbf{g}\colon \underline{Y} \to \underline{Z}$ эквивалентных морфизмов обратных систем как класс, содержащий композицию $(g_\nu, \psi)(f_\mu, \varphi)$.

Определим $\mathbf{1}_{\underline{X}}\colon \underline{X} \to \underline{X}$ как класс, содержащий морфизм $(\mathbf{1}_\lambda, \mathbf{1}_\Lambda)$. Тогда, по определению композиции, будем иметь $\mathbf{1}_{\underline{Y}} f = f$, $f \mathbf{1}_{\underline{X}} = f$ для любого класса $\mathbf{f}\colon \underline{X} \to \underline{Y}$ эквивалентных морфизмов.

Таким образом, может быть дано

Определение 4. Категорией *pro*-$\mathfrak{C}$ для категории $\mathfrak{C}$ называется категория, объектами которой являются обратные системы в $\mathfrak{C}$, а морфизмами — классы эквивалентных морфизмов обратных систем.

2.3. Кофинитные системы индексов и уровневые морфизмы

Морфизм $(f_\lambda, \varphi)\colon \underline{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \to \underline{Y} = (Y_\lambda, q_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ двух обратных систем с одним и тем же множеством индексов будем называть *уровневым*, если
1. $\varphi = \mathbf{1}_\Lambda$;
2. для $\lambda \leqslant \lambda'$ диаграмма (3) коммутативна.

$$\begin{tikzcd} X_\lambda & X_{\lambda'} \arrow[l] \arrow[d, "f_{\lambda'}"] \\ Y_\lambda \arrow[from=u, "f_\lambda"'] & Y_{\lambda'} \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{3}$$

Определение 5. Упорядоченное множество $(\Lambda, \leqslant)$ называется кофинитным, если для всякого $\lambda \in \Lambda$ множество $\{\lambda' \in \Lambda |\, \lambda' \leqslant \lambda\}$ всех его предшественников конечно.

Теорема 1. *Для всякой обратной системы $\underline{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \in pro$-$\mathfrak{C}$ существует изоморфная ей в pro-$\mathfrak{C}$ обратная система $\underline{Y} = (Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M)$ с кофинитным множеством индексов M.*

Теорема 2. *Пусть $(f_\mu, \varphi)\colon \underline{X} \to \underline{Y} = (Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M) \in pro$-$\mathfrak{C}$ — морфизм обратных систем. Тогда существует морфизм систем $(g_\mu, \psi)\colon \underline{X} \to \underline{Y}$, такой, что функция ψ является возрастащей и морфизмы (g_μ, ψ) и (f_μ, φ) равны в pro-$\mathfrak{C}$.*

Теорема 3. *Пусть $\mathbf{f}\colon \underline{X} \to \underline{Y}$ — морфизм в pro-$\mathfrak{C}$. Тогда существуют обратные системы $\underline{X}'$, $\underline{Y}'$ с одним и тем же кофинитным направленным множеством индексов. Более того, существуют изоморфизмы $\mathbf{i}\colon \underline{X} \to \underline{X}'$ и $\mathbf{j}\colon \underline{Y} \to \underline{Y}'$, а также морфизм $\mathbf{f}'\colon \underline{X}' \to \underline{Y}'$ в pro-$\mathfrak{C}$, такие, что диаграмма (4) коммутативна.*

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "\mathbf{i}"] \arrow[d, "\mathbf{f}"'] & \underline{X}' \arrow[d, "\mathbf{f}'"] \\ \underline{Y} \arrow[r, "\mathbf{j}"'] & \underline{Y}' \end{tikzcd} \tag{4}$$

При этом в классе f' существует представитель, являющийся уровневым морфизмом.

3. Замкнутые модельные категории и гомотопические теории

Определение 6. Категория $\mathcal{C}$ называется замкнутой модельной категорией (в смысле Квиллена), если в ней выделены три класса морфизмов, называемых расслоениями, корасслоениями и слабыми эквивалентностями, так, что выполнены условия:
- категория $\mathcal{C}$ замкнута относительно конечных прямых и обратных пределов;
- если в последовательности $W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \in \mathcal{C}$ любые два из отображений f, g, gf являются слабыми эквивалентностями, то слабой эквивалентностью является и третье отображение;
- если отображение f является ретрактом отображения g, т. е. если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & V \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "\tilde{u}"] & Y \arrow[r, "\tilde{v}"] & W \end{tikzcd}$$

такая, что $v \circ u = id_V$, $\tilde{v} \circ \tilde{u} = id_W$, и g — слабая эквивалентность, расслоение или корасслоение, — то и f — слабая эквивалентность, расслоение или корасслоение соответственно;

– в любой коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "v"] & B \end{tikzcd}$$

где i — корасслоение, p — расслоение, существует отображение $f\colon X \to E$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "v"] \arrow[ur, "f"] & B \end{tikzcd}$$

коммутативна (в этом случае еще говорят, что i обладает свойством левого поднятия относительно p или что p обладает свойством правого поднятия относительно i) в каждом из следующих случаев:

i — слабая эквивалентность;
p — слабая эквивалентность;

– любое отображение f из $\mathcal{C}$ может быть двумя способами разложено в композицию:

$f = pi$, где i — корасслоение и слабая эквивалентность, p — расслоение;
$f = qj$, где j — корасслоение, q — расслоение и слабая эквивалентность.

Структура замкнутой модельной категории $\mathcal{C}$ может быть обобщена на обратные системы *pro*-$\mathcal{C}$ (см. [6, §3.3]), если частично упорядоченное направленное множество индексов Λ является кофинитным.

В частности, отображение $\underline{f}\colon \underline{X} \to \underline{Y}$, которое есть набор послойных отображений $f_\lambda\colon X_\lambda \to Y_\lambda$, есть *слабая эквивалентность*, если для каждого $\lambda \in \Lambda$ отображение f_λ является слабой эквивалентностью.

Для всякой замкнутой модельной категории $\mathcal{C}$ Квиллен построил гомотопическую категорию $Ho(\mathcal{C})$. Ее объектами являются объекты из $\mathcal{C}$, а морфизмы получены путем формального обращения слабых эквивалентностей. Им показано, что $Ho(\mathcal{C})$ эквивалентна другой гомотопической категории $ho(\mathcal{C})$, в которой объектами являются фибрантно-кофибрантные объекты из $\mathcal{C}$, а отображениями — гомотопические классы отображений.

4. Локализация односвязного пространства и рациональный гомотопический тип

Определение 7. Локализацией односвязного[3] пространства X называется такое $\mathbb{Q}$-пространство X_0 вместе с отображением $f_0\colon X \to X_0$, такие, что для любого $\mathbb{Q}$-пространства Y и любого отображения $f\colon X \to Y$ существует единственное с точностью до гомотопии отображение $g\colon X_0 \to Y$, такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f_0"] & & X_0 \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

гомотопически коммутативна.

[3] В общем случае — нильпотентного.

В [7] построен функтор $\mathbb{Q}$-пополнения $\mathbb{Q}_\infty\colon \mathfrak{S}_* \to \mathfrak{S}_*$ для категории $\mathfrak{S}_*$ симплициальных множеств, обладающий следующими свойствами:

1. Отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует изоморфизм $\tilde{H}_*(X,\mathbb{Q}) \cong \tilde{H}_*(Y,\mathbb{Q})$ тогда и только тогда, когда оно индуцирует гомотопическую эквивалентность $\mathbb{Q}_\infty X \cong \mathbb{Q}_\infty Y$.
2. Пространство X либо «$\mathbb{Q}$-хорошее», т. е. отображение $\varphi\colon X \to \mathbb{Q}_\infty X$ индуцирует изоморфизм $\tilde{H}_*(X,\mathbb{Q}) \cong \tilde{H}_*(\mathbb{Q}_\infty X,\mathbb{Q})$ и, значит, отображения $\varphi\colon \mathbb{Q}_\infty^k X \to \mathbb{Q}_\infty^{k+1} X$ есть гомотопические эквивалентности $\forall k \geqslant 1$, либо оно «$\mathbb{Q}$-(очень) плохое», т. е. индуцированное отображение $\varphi_*\colon \tilde{H}_*(X,\mathbb{Q}) \to \tilde{H}_*(\mathbb{Q}_\infty X,\mathbb{Q})$ не является изоморфизмом и отображение $\varphi\colon \mathbb{Q}_\infty^k X \to \mathbb{Q}_\infty^{k+1} X$ не является гомотопической эквивалентностью ни для какого $k \geqslant 1$.
3. Для нильпотентного[4] пространства $X \in \mathfrak{S}_*$ с отмеченной точкой
   - пространство $\mathbb{Q}_\infty X$ и группа $\pi_*(\mathbb{Q}_\infty X)$ являются $\mathbb{Q}$-нильпотентными (см. [7, гл. 3, §5; гл. 5, §3]);
   - отображение $\varphi\colon X \to \mathbb{Q}_\infty X$ индуцирует изоморфизм
   $$\tilde{H}_*(X,\mathbb{Q}) \cong \tilde{H}_*(\mathbb{Q}_\infty X,\mathbb{Q}),$$
   т. е. пространство X является $\mathbb{Q}$-хорошим ([7, гл. 5, §3]);
   - группы $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ и $\pi_*(\mathbb{Q}_\infty X)$, а также $\tilde{H}_*(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ и $\tilde{H}_*(\mathbb{Q}_\infty X,\mathbb{Z})$ изоморфны.

(Для цепного комплекса C $H_n(C) \cong \begin{cases} \tilde{H}_n(C), & n \neq 0, \\ \tilde{H}_0(C) \oplus \mathbb{Z}, & n = 0 \end{cases}$ ([8, гл. 4, §3.1])).

Гомотопическая теория симплициальных множеств эквивалентна гомотопической теории топологических пространств ([7, гл. 8, § 3]) и понятие локализации эквивалентно понятию $\mathbb{Q}$-пополнению Бусфилда — Кана ([7, гл. 5, § 4]). Причём сопряженные функторы $Sin\colon \mathfrak{T} \rightleftarrows \mathfrak{S} : ||$ индуцируют эквивалентности гомотопических категорий[5] $Sin\colon Ho\mathfrak{T} \rightleftarrows Ho\mathfrak{S} : ||$.

5. Изоморфизм pro-категорий как замкнутых модельных категорий

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — замкнутые модельные категории, а $\mathcal{A}\colon \mathfrak{A} \rightleftarrows \mathfrak{B} : \mathcal{B}$ есть пара сопряженных функторов, индуцирующих сопряженные эквивалентности $Ho\mathcal{A}\colon Ho\mathfrak{A} \rightleftarrows Ho\mathfrak{B} : Ho\mathcal{B}$. Тогда можно построить пару сопряженных функторов $\mathcal{A}\colon pro\text{-}\mathfrak{A} \rightleftarrows pro\text{-}\mathfrak{B} : \mathcal{B}$, которые при ограничениях на гомотопические категории дадут сопряженные эквивалентности $Ho\mathcal{A}\colon Ho(pro\text{-}\mathfrak{A}) \rightleftarrows Ho(pro\text{-}\mathfrak{B}) : Ho\mathcal{B}$.*

Доказательство. Для каждого объекта $\underline{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \in pro\text{-}\mathfrak{A}$ определим $\mathcal{A}\underline{X} \in pro\text{-}\mathfrak{B}$ как обратную систему $(\mathcal{A}X_\lambda, \mathcal{A}p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$. Тот факт, то функторы $\mathcal{A}\colon \mathfrak{A} \rightleftarrows \mathfrak{B} : \mathcal{B}$ сопряжены, а функторы $Ho\mathcal{A}\colon Ho\mathfrak{A} \rightleftarrows Ho\mathfrak{B} : Ho\mathcal{B}$ эквивалентны, означает, что:

1. Существуют функторные морфизмы $\varphi\colon \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \to \mathcal{B}\mathcal{A}$ и $\psi\colon \mathbf{1}_{\mathfrak{B}} \to \mathcal{A}\mathcal{B}$, т. е. для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует отображение $\varphi_\lambda\colon X_\lambda \to \mathcal{B}\mathcal{A}X_\lambda$, такое, что для $\lambda' \geqslant \lambda$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_{\lambda'} \arrow[r, "\varphi_{\lambda'}"] \arrow[d, "p_{\lambda\lambda'}"'] & \mathcal{B}\mathcal{A}X_{\lambda'} \arrow[d, "\mathcal{B}\mathcal{A}p_{\lambda\lambda'}"] \\ X_\lambda \arrow[r, "\varphi_\lambda"] & \mathcal{B}\mathcal{A}X_\lambda \end{tikzcd} \qquad (5)$$

[4]В частности, для односвязного.

[5]Как замкнутых модельных категорий.

коммутативна. Аналогично, для $\mu' \geqslant \mu \in M$ коммутативной является диаграмма

$$\begin{tikzcd} Y_{\mu'} \arrow[r, "\psi_{\mu'}"] \arrow[d, "q_{\mu\mu'}"'] & \mathcal{AB}Y_{\mu'} \arrow[d, "\mathcal{AB}q_{\mu\mu'}"] \\ Y_{\mu} \arrow[r, "\psi_{\mu}"] & \mathcal{AB}X_{\mu} \end{tikzcd} \tag{6}$$

2. $\mathcal{A}\varphi = \psi\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\psi = \varphi\mathcal{B}$ в гомотопических категориях $Ho\mathfrak{A}$ и $Ho\mathfrak{B}$ соответственно, т. е. для каждого $X \in \mathfrak{A}$ и $Y \in \mathfrak{B}$ отображение $\mathcal{A}\varphi(X)$ слабо эквивалентно отображению $\psi\mathcal{A}(X)$, а $\mathcal{B}\psi(Y)$ слабо эквивалентно $\varphi\mathcal{B}(Y)$.

Определим функторные морфизмы $\varphi\colon id_{pro\text{-}\mathfrak{A}} \to \mathcal{BA}$ и $\psi\colon id_{pro\text{-}\mathfrak{B}} \to \mathcal{AB}$ следующим образом. Каждому объекту $\underline{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \in pro\text{-}\mathfrak{A}$ поставим в соответствие объект $\varphi\underline{X} = (\varphi X_\lambda, \mathcal{BA}p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \in pro\text{-}\mathfrak{A}$. Аналогично, для каждого $\underline{Y} = (Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M) \in pro\text{-}\mathfrak{B}$ положим $\psi\underline{Y} = (\psi Y_\mu, \mathcal{AB}q_{\mu\mu'}, M) \in pro\text{-}\mathfrak{B}$.

Пусть $(f_\lambda, f)\colon \underline{\tilde{X}} \to \underline{X} \in pro\text{-}\mathfrak{C}$ — отображение обратных систем. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "\varphi_\lambda"] & \mathcal{BA}X_\lambda \\ \tilde{X}_{f(\lambda)} \arrow[u, "f_\lambda"] \arrow[r, "\varphi_{\lambda'}"] & \mathcal{BA}\tilde{X}_{f(\lambda)} \arrow[u, "\mathcal{BA}f_\lambda"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна в силу сопряженности функторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Пусть теперь $(f'_\lambda, f')\colon \underline{\tilde{X}} \to \underline{X} \in pro\text{-}\mathfrak{C}$ — морфизм обратных систем, равный морфизму (f_λ, f), т. е. для всякого $\lambda \in \Lambda$ найдется $\lambda' \geqslant f(\lambda), f'(\lambda)$, такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X_{\lambda'} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \tilde{X}_{f'(\lambda)} \arrow[dr, "f'_\lambda"'] & & \tilde{X}_{f(\lambda)} \arrow[dl, "f_\lambda"] \\ & X_\lambda & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Так как функтор сохраняет композицию, то диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{BA}X_{\lambda'} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{BA}\tilde{X}_{\mathcal{BA}f'(\lambda)} \arrow[dr, "\mathcal{BA}f'_\lambda"'] & & \mathcal{BA}\tilde{X}_{\mathcal{BA}f(\lambda)} \arrow[dl, "\mathcal{BA}f_\lambda"] \\ & \mathcal{BA}X_\lambda & \end{tikzcd}$$

также коммутативна, т. е.морфизмы $(\mathcal{B}\mathcal{A}f_\lambda, f)$ и $(\mathcal{B}\mathcal{A}f'_\lambda, f)$ равны в pro-$\mathfrak{C}$. Таким образом, диаграмма

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{B}\mathcal{A}\underline{X} \\ \underline{\tilde{X}} \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{B}\mathcal{A}\underline{\tilde{X}} \arrow[u, "\mathcal{B}\mathcal{A}f"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна. Аналогичным образом коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \underline{Y} \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{A}\mathcal{B}\underline{Y} \\ \underline{\tilde{Y}} \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{A}\mathcal{B}\underline{\tilde{Y}} \arrow[u, "\mathcal{A}\mathcal{B}g"'] \end{tikzcd}$$

Таким образом, функторы

$$\mathcal{A}\colon pro\text{-}\mathfrak{A} \rightleftarrows pro\text{-}\mathfrak{B} : \mathcal{B},$$

сопряжены.

Далее,

$$\mathcal{A}\varphi\underline{X} = (\mathcal{A}\varphi X_\lambda, \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{A}p_{\lambda\lambda'}), \Lambda)\,,$$
$$\psi\mathcal{A}\underline{X} = (\psi\mathcal{A}_X\lambda, \mathcal{A}\mathcal{B}(\mathcal{A}p_{\lambda\lambda'}), \Lambda)\,.$$

Так как $\mathcal{A}\varphi X_\lambda$ и $\psi\mathcal{A}X_\lambda$ слабо эквивалентны в замкнутой модельной категории $\mathfrak{A}$ (изоморфны в $Ho\mathfrak{A}$), т. е. существуют слабые эквивалентности $a_\lambda\colon \mathcal{A}\varphi X_\lambda \to \psi\mathcal{A}X_\lambda$ и $b_\lambda\colon \psi\mathcal{A}X_\lambda \to \mathcal{A}\varphi X_\lambda$, то существуют послойные слабые эквивалентности $a = (a_\lambda)\colon \mathcal{A}\varphi\underline{X} \to \psi\mathcal{A}\underline{X}$ и $b = (b_\lambda)\colon \psi\mathcal{A}\underline{X} \to \mathcal{A}\varphi\underline{X}$, т. е. $\mathcal{A}\varphi\underline{X}$ и $\psi\mathcal{A}\underline{X}$ изоморфны в $Ho(pro\text{-}\mathfrak{A})$, если только $\underline{X} \in pro\text{-}\mathfrak{A}$. Аналогично, $\mathcal{B}\psi\underline{Y}$ изоморфно $\varphi\mathcal{B}\underline{Y}$ для $\underline{Y} \in pro\text{-}\mathfrak{B}$. □

Следствие 1. Существуют сопряженные функторы

$$pro\text{-}\mathfrak{T}_2 \underset{pro\text{-}||}{\overset{pro\text{-}E_2Sing}{\rightleftarrows}} pro\text{-}\mathfrak{S}_2 \underset{\text{-}\overline{W}}{\overset{pro\text{-}G}{\rightleftarrows}} pro\text{-}(SGP)_1 \underset{pro\text{-}\mathcal{G}}{\overset{pro\text{-}\widehat{Q}}{\rightleftarrows}} pro\text{-}(SCHA)_1 \underset{pro\text{-}\mathcal{P}}{\overset{pro\text{-}\widehat{U}}{\rightleftarrows}}$$
$$\rightleftarrows pro\text{-}(SLA)_1 \underset{pro\text{-}N}{\overset{pro\text{-}N^*}{\rightleftarrows}} pro\text{-}(DGL)_1 \underset{pro\text{-}\mathcal{C}}{\overset{pro\text{-}\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} pro\text{-}(DGC)_2,$$

которые индуцируют сопряженные эквивалентности

$$Ho(pro\text{-}\mathfrak{T}_2) \underset{Ho(pro\text{-}||)}{\overset{Ho(pro\text{-}E_2Sing)}{\rightleftarrows}} Ho(pro\text{-}\mathfrak{S}_2) \underset{Ho(pro\text{-}\overline{W})}{\overset{Ho(pro\text{-}G)}{\rightleftarrows}} Ho(pro\text{-}(SGP)_1) \underset{Ho(pro\text{-}\mathcal{G})}{\overset{Ho(pro\text{-}\widehat{Q})}{\rightleftarrows}}$$
$$\rightleftarrows Ho(pro\text{-}(SCHA)_1) \underset{Ho(pro\text{-}\mathcal{P})}{\overset{Ho(pro\text{-}\widehat{U})}{\rightleftarrows}} Ho(pro\text{-}(SLA)_1) \underset{Ho(pro\text{-}N)}{\overset{Ho(pro\text{-}N^*)}{\rightleftarrows}}$$
$$\rightleftarrows Ho(pro\text{-}(DGL)_1) \underset{Ho(pro\text{-}\mathcal{C})}{\overset{Ho(pro\text{-}\mathcal{L})}{\rightleftarrows}} Ho(pro\text{-}(DGC)_2).$$

Естественно дать следующее

Определение 8. Рациональным гомотопическим типом обратной системы $\underline{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \in pro\text{-}\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ — любая из описанных во введении категорий, назовем класс объектов, изоморфных обратной системе $\underline{X}$ в гомотопической категории $Ho_{\mathbb{Q}}(pro\text{-}\mathfrak{C})$.

В качестве важного следствия доказанной выше общей теоремы сформулируем следующую теорему.

Теорема 5. *Рациональная гомотопическая теория обратных систем односвязных топологических пространств эквивалентна рациональной гомотопической теории обратных систем следующих пространств:*
– *2-редуцированных симплициальных множеств;*
– *редуцированных симплициальных групп;*
– *редуцированных симплициальных полных алгебр Хопфа над* $\mathbb{Q}$*;*
– *редуцированных симплициальных алгебр Ли над* $\mathbb{Q}$*;*
– *редуцированных дифференциальных градуированных алгебр Ли над* $\mathbb{Q}$*;*
– *2-редуцированных дифференциальных градуированных коалгебр над* $\mathbb{Q}$*.*

Литература

1. *Quillen D. G.* Rational Homotopy Theory. — Ann Arbor, New York: JSTOR, 1969. — 91 p.
2. *Sullivan D.* Infinitesimal Computations in Topology. — Paris: Numdam, 1977. — 63 p.
3. *Боусфилд О. Н., Гугенхейм В. К.* О PL-теории де Рама и рациональном гомотопическом типе. — Москва: Мир, 1981. — 86 с. [*Bousfild O. N., Gugenkheyjm V. K.* O PL-teorii de Rama i racionaljnom gomotopicheskom tipe. — Moskva: Mir, 1981. — 86 s.]
4. *Lisica J. T.* Rational Homotopy Type, Rational Proper Homotopy Type And Rational Homotopy Type At Infinity. — Alabama 36849 USA, 2011. — 51 p.
5. *Mardešić S., Segal J.* Shape Theory. — Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company, 1982. — 379 p.
6. *Edwards D. A., Hastings H. M.* Čech and Steenrod Homotopy Theories with Applications to Geometric Topology. — Berlin, Heidelberg, New-York: Springer-Verlag, 1976. — 300 p.
7. *Bousfield A. K., Kan D. M.* Homotopy Limits, Completions and Localizations. — Berlin, Heidelberg, New-York: Springer-Verlag, 1972. — 349 p.
8. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. — Москва: Мир, 1971. — 676 с. [*Spenjer Eh.* Algebraicheskaya topologiya. — Moskva: Mir, 1971. — 676 s.]

UDC 515.142.5, 515.143

Rational Homotopy Type of Inverse Systems in $\mathfrak{T}_2$ Category

V. V. Marchenko

Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho–Maklaya str., 6, Moscow, 117198, Russia

A connection between Rational homotopy theory of $\mathfrak{T}_2$ category of 1-connected spaces and homotopy theory of certain algebraic categories is established. Quillen's approach is mainly based upon functoriality. This enables one to extend the theory to the category of inverse systems.

In the present paper a notion of Rational homotopy type of inverse systems of 1-connected spaces is introduced. Its equivalence to Rational homotopy theories of certain algebraic categories is proved.

Key words and phrases: rational homotopy type, inverse systems, closed model category, adjunction functors, equivalences.