Весовые неравенства для квазилинейных интегральных операторов на конусе монотонных функций

Г. Э. Шамбилова

Кафедра математического анализа и теории функций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо Маклая, 6, Москва, 117198, Россия

В работе рассматривается задача о нахождении необходимых и достаточных условий выполнения весовых неравенств типа Харди для квазилинейных операторов на конусе монотонных функций. Для этого выбирается композиция степенных интегральных операций и изучается вопрос о характеризации ее ограниченности в весовых (квази) нормах Лебега на конусах неотрицательных монотонно убывающих функций на действительной полуоси. Основным методом решения поставленной задачи является метод редукции интегральных неравенств на конусах монотонных функций к неравенствам на конусах всех произвольных неотрицательных функций, допускающих эквивалентное описание в терминах ограниченности подходящих функционалов, зависящих от ингредиентов исходной задачи. Как правило мы получаем эквивалентность получаемых функционалов и наилучших констант, участвующих в исходном неравенстве с точностью до мультипликативных сомножителей, зависящих только от параметров суммирования. В отличие от первоначальных задач в данной области мы рассматриваем многопараметрический случай, увеличивая количество весовых функций и параметров суммирования. Этот случай является новым и для конусов монотонных функций рассматривается впервые.

Ключевые слова: неравенство Харди, весовое пространство Лебега, квазилинейный оператор, конус монотонных функций, ограниченность.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$, $\mathfrak{M}^+$ — множество всех неотрицательных измеримых функций на $\mathbb{R}_+$, $\mathfrak{M}^\downarrow \subset \mathfrak{M}^+ (\mathfrak{M}^\uparrow \subset \mathfrak{M}^+)$ — подмножество всех невозрастающих (неубывающих) функций. Пусть $0 < q$, $r < \infty$, $1 \leqslant p < \infty$.

В работе изучаются интегральные неравенства вида

$$\left(\int_0^\infty [Rf(x)]^r \rho(x) \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C \left(\int_0^\infty f^p(x) v(x) \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \tag{1}$$

где $\rho(x)$ и $v(x)$ — неотрицательные локально суммируемые функции на $\mathbb{R}_+$ и константа C, не зависящая от f, выбирается наименьшей из возможных. В качестве оператора R рассматриваются квазилинейные операторы

$$Tf(x) := \left(\int_x^\infty \left(\int_0^t fu \right)^q w(t) \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \tag{2}$$

$$\mathcal{T}f(x) := \left(\int_0^x \left(\int_t^\infty fu \right)^q w(t) \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \tag{3}$$

$$Sf(x) := \left(\int_x^\infty \left(\int_t^\infty fu \right)^q w(t) \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \tag{4}$$

Статья поступила в редакцию 20 июня 2013 г.

$$\mathcal{S}f(x) := \left(\int\limits_0^x \left(\int\limits_0^t fu\right)^q w(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^{\downarrow}, \tag{5}$$

где u, w — неотрицательные локально суммируемые функции на $\mathbb{R}_+$.

На основе работ [1–4] дана характеризация неравенства (1) для указанных выше операторов. Эти неравенства играют важную роль в теории пространств Морри [5, 6].

2. Основные результаты для оператора T

Пусть

$$V(t) := \int\limits_0^t v, \quad U(t) := \int\limits_0^t u, \quad \widetilde{V}(t) := \int\limits_t^\infty \frac{u}{V^2},$$

$$W(t) := \int\limits_t^\infty w, \quad U(s,t) := \int\limits_t^s u, \quad 0 < t < s < \infty.$$

Сначала докажем критерии дискретного типа.

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $0 < q$, $r < \infty$, $\frac{1}{s} := \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)_+$. *Пусть* $0 < \int_0^x \rho < \infty$, $x \in (0,\infty)$, $\int_0^\infty \rho = \infty$ *и последовательность* $\{a_n\} \subset (0,\infty)$ *определена из уравнений* $\int_0^{a_n} \rho = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Положим* $\Delta_n := [a_n, a_{n+1})$. *Тогда для наилучшей константы* C *в неравенстве* (1) *с оператором вида* (2) *выполняются оценки* $C \approx A_i + B_i$, *где*
1) $p = 1$, $0 < q$, $r < \infty$.

$$A_1 \approx \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \left(\int\limits_{\Delta_n} w\right)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}}, \quad B_1 \approx \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \left(\int\limits_{\Delta_n} U^q w\right)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

2) $1 < p \leqslant q$, $r < \infty$.

$$A_2 \approx \sup_{n\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{n}{r}} \sup_{t\in\Delta_n} \left(\int\limits_t^{a_{n+1}} w\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{a_n}^t \left(\frac{U}{V}\right)^{p'} v\right)^{\frac{1}{p'}} + \\ + \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\geqslant n} 2^k \left(\int\limits_{\Delta_k} w\right)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int\limits_0^{a_n} \left(\frac{U}{V}\right)^{p'} v\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$B_2 \approx \sup_{n\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{n}{r}} \sup_{t\in\Delta_n} \left(\int\limits_{a_n}^t U^q w\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_t^{a_{n+1}} V^{-p'} v\right)^{\frac{1}{p'}} + \\ + \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\leqslant n} 2^k \left(\int\limits_{\Delta_k} U^q w\right)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int\limits_{a_{n+1}}^\infty V^{-p'} v\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

3) $0 < q < p < \infty$, $1 < p \leqslant r < \infty$, $\dfrac{1}{\varkappa} := \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$.

$$A_3 \approx \sup_{n\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{n}{r}} \left(\int\limits_{\Delta_n} \left(\int\limits_t^{a_{n+1}} w \right)^{\frac{\varkappa}{p}} \left(\int\limits_{a_n}^t \left(\frac{U}{V}\right)^{p'} v \right)^{\frac{\varkappa}{p'}} w(t)\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{\varkappa}} +$$

$$+ \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\geqslant n} 2^k \left(\int\limits_{\Delta_k} w \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int\limits_0^{a_n} \left(\frac{U}{V}\right)^{p'} v \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$B_3 \approx \sup_{n\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{n}{r}} \left(\int\limits_{\Delta_n} \left(\int\limits_{a_n}^t U^q w \right)^{\frac{\varkappa}{p}} \left(\int\limits_t^{a_{n+1}} V^{-p'} v \right)^{\frac{\varkappa}{p'}} U^q(t) w(t)\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{\varkappa}} +$$

$$+ \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\leqslant n} 2^k \left(\int\limits_{\Delta_k} U^q w \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int\limits_{a_{n+1}}^{\infty} V^{-p'} v \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

4) $1 < p < \infty$, $0 < r < p \leqslant q < \infty$, $\dfrac{1}{s} := \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}$.

$$A_4 \approx \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[2^{\frac{n}{r}} \sup_{t\in\Delta_n} \left(\int\limits_t^{a_{n+1}} w \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{a_n}^t \left(\frac{U}{V}\right)^{p'} v \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^s \right)^{\frac{1}{s}} +$$

$$+ \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\geqslant n} 2^k \left(\int\limits_{\Delta_k} w \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{s}{p}} \left(\int\limits_0^{a_n} \left(\frac{U}{V}\right)^{p'} v \right)^{\frac{s}{p'}} \right)^{\frac{1}{s}},$$

$$B_4 \approx \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[2^{\frac{n}{r}} \sup_{t\in\Delta_n} \left(\int\limits_{a_n}^t U^q w \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_t^{a_{n+1}} V^{-p'} v \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^s \right)^{\frac{1}{s}} +$$

$$+ \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\leqslant n} 2^k \left(\int\limits_{\Delta_k} U^q w \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{s}{p}} \left(\int\limits_{a_{n+1}}^{\infty} V^{-p'} v \right)^{\frac{s}{p'}} \right)^{\frac{1}{s}}.$$

5) $1 < p < \infty$, $0 < q$, $r < p$.

$$A_5 \approx \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{sn}{r}} \left(\int\limits_{\Delta_n} \left(\int\limits_t^{a_{n+1}} w \right)^{\frac{\varkappa}{p}} \left(\int\limits_{a_n}^t \left(\frac{U}{V}\right)^{p'} v \right)^{\frac{\varkappa}{p'}} w(t)\mathrm{d}t \right)^{\frac{s}{\varkappa}} \right)^{\frac{1}{s}} +$$

$$+ \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\geqslant n} 2^k \left(\int\limits_{\Delta_k} w \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{s}{p}} \left(\int\limits_0^{a_n} \left(\frac{U}{V}\right)^{p'} v \right)^{\frac{s}{p'}} \right)^{\frac{1}{s}},$$

$$B_5 \approx \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{sn}{r}} \left(\int\limits_{\Delta_n} \left(\int\limits_{a_n}^{t} U^q w \right)^{\frac{\varkappa}{p}} \left(\int\limits_{t}^{a_{n+1}} V^{-p'} v \right)^{\frac{\varkappa}{p'}} U^q(t) w(t) \mathrm{d}t \right)^{\frac{s}{\varkappa}} \right)^{\frac{1}{s}} +$$

$$+ \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\leqslant n} 2^k \left(\int\limits_{\Delta_k} U^q w \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{s}{p}} \left(\int\limits_{a_{n+1}}^{\infty} V^{-p'} v \right)^{\frac{s}{p'}} \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Доказательство. По теореме 2.1 из [2] неравенство (1) эквивалентно

$$\left(\int\limits_0^\infty \left[T \left(\int\limits_y^\infty g \right) \right]^r \rho \right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C \left(\int\limits_0^\infty g^p V^p v^{1-p} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad g \in \mathfrak{M}^+,$$

$$T \left(\int\limits_y^\infty g \right)(x) = \left(\int\limits_x^\infty \left(\int\limits_0^t \left(\int\limits_y^\infty g \right) u(y) \mathrm{d}y \right)^q w(t) \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Имеем

$$T \left(\int\limits_y^\infty g \right)(x) \approx \left(\int\limits_x^\infty \left(\int\limits_0^t gU \right)^q w(t) \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int\limits_x^\infty \left(\int\limits_t^\infty g \right)^q U^q(t) w(t) \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Тогда (1) эквивалентно двум неравенствам на $\mathfrak{M}^+$

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_x^\infty \left(\int\limits_0^t gU \right)^q w(t) \mathrm{d}t \right)^{\frac{r}{q}} \rho(x) \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C_1 \left(\int\limits_0^\infty g^p V^p v^{1-p} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{6}$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_x^\infty \left(\int\limits_t^\infty g \right)^q U^q(t) w(t) \mathrm{d}t \right)^{\frac{r}{q}} \rho(x) \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C_2 \left(\int\limits_0^\infty g^p V^p v^{1-p} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

и, следовательно, $C \approx C_1 + C_2$. Для оценки наилучших констант C_1 и C_2 воспользуемся теоремой 1 из [4]. Неравенства (6) и (7) эквивалентны с точностью до переобозначений неравенствам (1)и (3) из [4], критерии для которых приводят к результатам нашей теоремы. □

Далее получим интегральные критерии для выполнения неравенства (1) с оператором вида (2). Для этого предположим, что $0 < \int_0^x \rho < \infty$, $x \in (0;\infty)$ и определим функцию $\sigma : [0;\infty) \to [0;\infty)$ формулой

$$\sigma(x) := \inf \left\{ y > 0 : \int\limits_0^y \rho \geqslant 2 \int\limits_0^x \rho \right\}, \quad x > 0.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $0 < r < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$. *Для выполнения неравенства* (1) *с оператором вида* (2) *необходимо и достаточно выполнение неравенств на* $\mathfrak{M}^+$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_x^\infty w_1\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_0^x g\right)^r \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant D_1\left(\int_0^\infty g^p v_1^{1-p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_x^{\sigma^2(x)} w_2\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_{\sigma^2(x)}^x g\right)^r \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant D_2\left(\int_0^\infty g^p v_2^{1-p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

и конечности констант
1) $1 < p \leqslant q,\ r < \infty.$

$$A_1 := \sup_{t>0}\left(\int_0^t \rho\right)^{\frac{1}{r}}(B_1 + B_2),$$

где

$$B_1 := \sup_{s>t}\left(\int_s^\infty w_1\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^s v_1^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, \quad B_2 := \sup_{s>t}\left(\int_0^s w_2\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_s^\infty v_2^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

2) $0 < q < p < \infty,\ 1 < p \leqslant r < \infty,\ \frac{1}{\varkappa} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$

$$A_2 := \sup_{t>0}\left(\int_0^t \rho\right)^{\frac{1}{r}}(B_1 + B_2),$$

где

$$B_1 := \left(\int_t^\infty\left(\int_s^\infty w_1\right)^{\frac{\varkappa}{q}}\left(\int_0^s v_1^{1-p'}\right)^{\frac{\varkappa}{q'}} v_1^{1-p'}(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\varkappa}},$$

$$B_2 := \left(\int_t^\infty\left(\int_0^s w_2\right)^{\frac{\varkappa}{q}}\left(\int_s^\infty v_2^{1-p'}\right)^{\frac{\varkappa}{q'}} v_2^{1-p'}(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\varkappa}}.$$

3) $1 < p < \infty,\ 0 < r < p \leqslant q < \infty,\ \dfrac{1}{s} := \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}.$

$$A_3 := \left\{\int_0^\infty \rho(x)\left[\int_{\sigma^{-1}(x)}^{\sigma(x)} \rho(y)\left(B_1(x,y) + B_2(x,y)\right)\mathrm{d}y\right]^{\frac{s}{p}}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{s}},$$

где

$$B_1(x,y) := \left(\sup_{\sigma^{-1}(y)<t<\sigma(x)}\left(\int_t^{\sigma(x)} w\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\sigma^{-2}(y)}^t v_1^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^p,$$

$$B_2(x,y) := \left(\sup_{\sigma^{-1}(y)<t<\sigma(x)} \left(\int\limits_{\sigma^{-1}(y)}^{t} w \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{t}^{\sigma^2(x)} v_2^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right)^{p}.$$

4) $1 < p < \infty$, $0 < r$, $q < p$, $\dfrac{1}{s} := \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}$, $\dfrac{1}{\varkappa} := \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$.

$$A_3 := \left\{ \int\limits_0^{\infty} \rho(x) \left[\int\limits_{\sigma^{-1}(x)}^{\sigma(x)} \rho(y) \left(B_1(x,y) + B_2(x,y)\right) \mathrm{d}y \right]^{\frac{s}{p}} \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{s}},$$

где

$$B_1(x,y) := \left(\int\limits_{\sigma^{-1}(y)}^{\sigma(x)} \left(\int\limits_{t}^{\sigma(x)} w \right)^{\frac{\varkappa}{q}} \left(\int\limits_{\sigma^{-2}(y)}^{t} v_1^{1-p'} \right)^{\frac{\varkappa}{q'}} v_1^{1-p'}(t)\mathrm{d}t \right)^{\frac{p}{\varkappa}},$$

$$B_2(x,y) := \left(\int\limits_{\sigma^{-1}(y)}^{\sigma(x)} \left(\int\limits_{\sigma^{-1}(y)}^{t} w \right)^{\frac{\varkappa}{q}} \left(\int\limits_{t}^{\sigma^2(x)} v_2^{1-p'} \right)^{\frac{\varkappa}{q'}} v_2^{1-p'}(t)\mathrm{d}t \right)^{\frac{p}{\varkappa}}.$$

Более того, $C \approx D_1 + D_2 + A_i$.

Доказательство. Так как выполнение неравенства (1) для оператора (2) эквивалентно выполнению неравенств (6) и (7), то доказательство теоремы следует из теорем 2 и 3 работы [4]. □

Рассмотрим случай $0 < p \leqslant q$, $r < \infty$, $0 < p \leqslant 1$.

Теорема 3. *Пусть* $0 < p \leqslant q$, $r < \infty$, $0 < p \leqslant 1$. *Тогда для наилучшей константы* C *в неравенстве* (1) *с оператором вида* (2) *выполнена оценка*

$$C \approx \sup_{t>0} \left[\int\limits_0^{\infty} \left(A(x,t) + B(x,t)\right)^r \rho(x)\mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{r}} V^{-\frac{1}{p}}(t),$$

где

$$A(x,t) := \chi_{[0,t]}(x) \left(\int\limits_x^t U^q w + U^q(t)W(t) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad B(x,t) := \chi_{[t,\infty)}(x)U(t)W^{\frac{1}{q}}(x).$$

Доказательство. Покажем, что для оператора (2) выполнено условие

$$T\left(\sum_n f_n\right) \ll \left(\sum_n [Tf_n]^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{8}$$

Действительно, применяя неравенства Йенсена при $0 < p \leqslant 1$ и Минковского при $\dfrac{q}{p} \geqslant 1$, получаем

$$\left[T\left(\sum_n f_n\right)\right]^p = \left(\int_x^\infty w(y)\left(\int_0^y \left(\sum_n f_n\right)u\right)^q \mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{q}} =$$

$$= \left(\int_x^\infty w(y)\left(\sum_n \int_0^y f_n u\right)^q \mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\int_x^\infty w(y)\left[\left(\sum_n \int_0^y f_n u\right)^p\right]^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_x^\infty w(y)\left[\sum_n \left(\int_0^y f_n u\right)^p\right]^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{q}} \leqslant \sum_n \left(\int_x^\infty w(y)\left(\int_0^y f_n u\right)^q \mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{q}} =$$

$$= \sum_n [Tf_n]^p .$$

Далее, применяя теорему 3.1 из [3], утверждение теоремы следует пересчетом соответствующих функционалов. □

3. Основные результаты для оператора S

Докажем критерии дискретного типа.

Теорема 4. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $0 < q,\ r < \infty$, $\dfrac{1}{s} := \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}\right)_+$. *Пусть* $0 < \int_0^x \rho < \infty$, $x \in (0,\infty)$, $\int_0^\infty \rho = \infty$ *и последовательность* $\{a_n\} \subset (0,\infty)$ *определена из уравнений* $\int_0^{a_n} \rho = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Положим* $\Delta_n := [a_n, a_{n+1})$. *Тогда для наилучшей константы* C *в неравенстве* (1) *с оператором вида* (4) *выполняются оценки* $C \approx A_i + B_i$, *где*
1) $p = 1$, $0 < q,\ r < \infty$.

$$A_1 \approx \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \left(\int_{\Delta_n} \widetilde{V}^q w\right)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}}, \quad B_1 \approx \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \left(\int_{\Delta_n} w\right)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

2) $1 < p \leqslant q$, $r < \infty$.

$$A_2 \approx \sup_{n\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{n}{r}} \sup_{t\in\Delta_n} \left(\int_t^{a_{n+1}} \widetilde{V}^q w\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{a_n}^t vV^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+ \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\geqslant n} 2^k \left(\int_{\Delta_k} \widetilde{V}^q w\right)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^{a_n} vV^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$B_2 \approx \sup_{n\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{n}{r}} \sup_{t\in\Delta_n} \left(\int_{a_n}^t w\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_t^{a_{n+1}} \widetilde{V}^{p'} V^{p'} v\right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+ \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\leqslant n} 2^k \left(\int_{\Delta_k} w\right)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{a_{n+1}}^\infty \widetilde{V}^{p'} V^{p'} v\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

3) $0 < q < p < \infty$, $1 < p \leqslant r < \infty$, $\dfrac{1}{\varkappa} := \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$.

$$A_3 \approx \sup_{n\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{n}{r}} \left(\int\limits_{\Delta_n} \left(\int\limits_t^{a_{n+1}} \widetilde{V}^q w \right)^{\frac{\varkappa}{p}} \left(\int\limits_{a_n}^t v V^{p'} \right)^{\frac{\varkappa}{p'}} \widetilde{V}^q(t) w(t) \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{\varkappa}} +$$

$$+ \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\geqslant n} 2^k \left(\int\limits_{\Delta_k} \widetilde{V}^q w \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int\limits_0^{a_n} v V^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$B_3 \approx \sup_{n\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{n}{r}} \left(\int\limits_{\Delta_n} \left(\int\limits_{a_n}^t w \right)^{\frac{\varkappa}{p}} \left(\int\limits_t^{a_{n+1}} \widetilde{V}^{p'} V^{p'} v \right)^{\frac{\varkappa}{p'}} w(t) \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{\varkappa}} +$$

$$+ \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\leqslant n} 2^k \left(\int\limits_{\Delta_k} w \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int\limits_{a_{n+1}}^{\infty} \widetilde{V}^{p'} V^{p'} v \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

4) $1 < p < \infty$, $0 < r < p \leqslant q < \infty$, $\dfrac{1}{s} := \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}$.

$$A_4 \approx \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[2^{\frac{n}{r}} \sup_{t\in\Delta_n} \left(\int\limits_t^{a_{n+1}} \widetilde{V}^q w \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{a_n}^t v V^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^s \right)^{\frac{1}{s}} +$$

$$+ \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\geqslant n} 2^k \left(\int\limits_{\Delta_k} \widetilde{V}^q w \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{s}{p}} \left(\int\limits_0^{a_n} v V^{p'} \right)^{\frac{s}{p'}} \right)^{\frac{1}{s}},$$

$$B_4 \approx \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[2^{\frac{n}{r}} \sup_{t\in\Delta_n} \left(\int\limits_{a_n}^t w \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_t^{a_{n+1}} \widetilde{V}^{p'} V^{p'} v \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^s \right)^{\frac{1}{s}} +$$

$$+ \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\leqslant n} 2^{-k} \left(\int\limits_{\Delta_k} w \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{s}{p}} \left(\int\limits_{a_{n+1}}^{\infty} \widetilde{V}^{p'} V^{p'} v \right)^{\frac{s}{p'}} \right)^{\frac{1}{s}}.$$

5) $1 < p < \infty$, $0 < q$, $r < p$.

$$A_5 \approx \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{sn}{r}} \left(\int\limits_{\Delta_n} \left(\int\limits_t^{a_{n+1}} \widetilde{V}^q w \right)^{\frac{\varkappa}{p}} \left(\int\limits_{a_n}^t v V^{p'} \right)^{\frac{\varkappa}{p'}} \widetilde{V}^q(t) w(t) \mathrm{d}t \right)^{\frac{s}{\varkappa}} \right)^{\frac{1}{s}} +$$

$$+\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{k\geqslant n}2^k\left(\int\limits_{\Delta_k}\widetilde{V}^q w\right)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{s}{p}}\left(\int\limits_0^{a_n} vV^{p'}\right)^{\frac{s}{p'}}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

$$B_5\approx\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}2^{\frac{sn}{r}}\left(\int\limits_{\Delta_n}\left(\int\limits_{a_n}^{t} w\right)^{\frac{\varkappa}{p}}\left(\int\limits_t^{a_{n+1}}\widetilde{V}^{p'}V^{p'}v\right)^{\frac{\varkappa}{p'}} w(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{s}{\varkappa}}\right)^{\frac{1}{s}}+$$

$$+\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{k\leqslant n}2^k\left(\int\limits_{\Delta_k} w\right)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{s}{p}}\left(\int\limits_{a_{n+1}}^{\infty}\widetilde{V}^{p'}V^{p'}v\right)^{\frac{s}{p'}}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Доказательство. По теореме 2.2 из [2] неравенство (1) эквивалентно

$$\left(\int\limits_0^{\infty}\left(T\left(\frac{1}{V^2(x)}\int\limits_0^{x} gV\right)\right)^{r}\rho(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant C\left(\int\limits_0^{\infty} g^p v^{1-p}\right)^{\frac{1}{p}},\quad g\in\mathfrak{M}^+,$$

$$T\left(\frac{1}{V^2(y)}\int\limits_0^{y} gV\right)(x)=\left(\int\limits_x^{\infty}\left(\int\limits_t^{\infty}\left(\frac{1}{V^2(y)}\int\limits_0^{y} gV\right)u(y)\mathrm{d}y\right)^{q} w(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Имеем

$$T\left(\frac{1}{V^2(y)}\int\limits_0^{y} gV\right)(x)\approx\left(\int\limits_x^{\infty}\left(\int\limits_0^{t} gV\right)^{q}\widetilde{V}^q(t)w(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\left(\int\limits_x^{\infty}\left(\int\limits_t^{\infty} gV\widetilde{V}\right)^{q} w(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Тогда (1) эквивалентно двум неравенствам на $\mathfrak{M}^+$

$$\left(\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_x^{\infty}\left(\int\limits_0^{t} gV\right)^{q}\widetilde{V}^q(t)w(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{r}{q}}\rho(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant C_1\left(\int\limits_0^{\infty} g^p v^{1-p}\right)^{\frac{1}{p}},\tag{9}$$

$$\left(\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_x^{\infty}\left(\int\limits_t^{\infty} gV\widetilde{V}\right)^{q} w(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{r}{q}}\rho(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant C_2\left(\int\limits_0^{\infty} g^p v^{1-p}\right)^{\frac{1}{p}}\tag{10}$$

и, следовательно, $C\approx C_1+C_2$. Для оценки наилучших констант C_1 и C_2 воспользуемся теоремой 1 из [4]. Неравенства (9), (10) эквивалентны с точностью до переобозначений неравенствам (1), (3) из [4], критерии для которых приводят к результатам нашей теоремы . □

Далее получим интегральные критерии для выполнения неравенства (1) с оператором вида (4), для этого предположим $0<\int_0^x\rho<\infty$, $x\in(0;\infty)$.

Теорема 5. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $0 < r < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$. *Для выполнения неравенства* (1) *с оператором вида* (4) *необходимо и достаточно выполнение неравенств*

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_x^\infty w_1\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_0^x g\right)^r \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant D_1\left(\int_0^\infty g^p v_1^{1-p}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad g \in \mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_x^{\sigma^2(x)} w_2\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_{\sigma^2(x)}^x g\right)^r \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant D_2\left(\int_0^\infty g^p v_2^{1-p}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad g \in \mathfrak{M}^+$$

и конечности констант

1) $1 < p \leqslant q$, $r < \infty$.

$$A_1 := \sup_{t>0}\left(\int_0^t \rho\right)^{\frac{1}{r}}(B_1 + B_2),$$

где

$$B_1 := \sup_{s>t}\left(\int_s^\infty w_1\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^s v_1^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, \quad B_2 := \sup_{s>t}\left(\int_0^s w_2\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_s^\infty v_2^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

2) $0 < q < p < \infty$, $1 < p \leqslant r < \infty$, $\dfrac{1}{\varkappa} := \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$.

$$A_2 := \sup_{t>0}\left(\int_0^t \rho\right)^{\frac{1}{r}}(B_1 + B_2),$$

где

$$B_1 := \left(\int_t^\infty\left(\int_s^\infty w_1\right)^{\frac{\varkappa}{q}}\left(\int_0^s v_1^{1-p'}\right)^{\frac{\varkappa}{q'}} v_1^{1-p'}(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\varkappa}},$$

$$B_2 := \left(\int_t^\infty\left(\int_0^s w_2\right)^{\frac{\varkappa}{q}}\left(\int_s^\infty v_2^{1-p'}\right)^{\frac{\varkappa}{q'}} v_2^{1-p'}(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\varkappa}}.$$

3) $1 < p < \infty$, $0 < r < p \leqslant q < \infty$, $\dfrac{1}{s} := \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}$.

$$A_3 := \left\{\int_0^\infty \rho(x)\left[\int_{\sigma^{-1}(x)}^{\sigma(x)} \rho(y)(B_1(x,y) + B_2(x,y))\mathrm{d}y\right]^{\frac{s}{p}} \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{s}},$$

где

$$B_1(x,y) := \left(\sup_{\sigma^{-1}(y)<t<\sigma(x)} \left(\int\limits_t^{\sigma(x)} w \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\sigma^{-2}(y)}^{t} v_1^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right)^p,$$

$$B_2(x,y) := \left(\sup_{\sigma^{-1}(y)<t<\sigma(x)} \left(\int\limits_{\sigma^{-1}(y)}^{t} w \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_t^{\sigma^2(x)} v_2^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right)^p.$$

4) $1 < p < \infty$, $0 < r$, $q < p$, $\frac{1}{s} := \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}$, $\dfrac{1}{\varkappa} := \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$.

$$A_4 := \left\{ \int\limits_0^\infty \rho(x) \left[\int\limits_{\sigma^{-1}(x)}^{\sigma(x)} \rho(y)(B_1(x,y) + B_2(x,y)\mathrm{d}y \right]^{\frac{s}{p}} \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{s}},$$

где

$$B_1(x,y) := \left(\int\limits_{\sigma^{-1}(y)}^{\sigma(x)} \left(\int\limits_t^{\sigma(x)} w \right)^{\frac{\varkappa}{q}} \left(\int\limits_{\sigma^{-2}(y)}^{t} v_1^{1-p'} \right)^{\frac{\varkappa}{q'}} v_1^{1-p'}(t)\mathrm{d}t \right)^{\frac{p}{\varkappa}},$$

$$B_2(x,y) := \left(\int\limits_{\sigma^{-1}(y)}^{\sigma(x)} \left(\int\limits_{\sigma^{-1}(y)}^{t} w \right)^{\frac{\varkappa}{q}} \left(\int\limits_t^{\sigma^2(x)} v_2^{1-p'} \right)^{\frac{\varkappa}{q'}} v_2^{1-p'}(t)\mathrm{d}t \right)^{\frac{p}{\varkappa}}.$$

Более того, $C \approx D_1 + D_2 + A_i$.

Доказательство. Так как выполнение неравенства (1) для оператора (4) эквивалентно выполнению неравенств (9) и (10), то доказательство теоремы следует из теорем 2 и 3 работы [4]. □

Рассмотрим случай $0 < p \leqslant q$, $r < \infty$, $0 < p \leqslant 1$.

Теорема 6. *Пусть* $0 < p \leqslant q$, $r < \infty$, $0 < p \leqslant 1$. *Тогда для наилучшей константы* C *в неравенстве* (1) *с оператором вида* (4) *выполнена оценка*

$$C \approx \sup_{t>0} \left[\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_x^\infty U^q(t,y)w(y)\mathrm{d}y \right)^{\frac{r}{q}} \rho(x)\mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{r}} V^{-\frac{1}{p}}(t).$$

Доказательство. Так как для оператора вида (4) выполнено условие (8), то утверждение теоремы следует по теореме 3.1 из [3]. □

4. Заключительные замечания

Аналогично предыдущим теоремам находятся дискретные и интегральные критерии ограниченности сублинейных операторов $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$, а также соответствующие результаты для конуса неубывающих функций. Детали опускаем.

Литература

1. *Гогатишвили А., Степанов В. Д.* Об операторах на конусах монотонных функций // Доклады АН. — 2012. — Т. 445, № 6. — С. 618–621. [Gogatishvili A., Stepanov V. D. Operators on Cones of Monotone Functions // DAN. — 2012. — Vol. 86, No 1. — P. 562–565.]
2. *Гогатишвили А., Степанов В. Д.* Об интегральных операторах на конусах монотонных функций // Доклады АН. — 2012. — Т. 446, № 4. — С. 367–370. [Gogatishvili A., Stepanov V. D. Integral Operators on Cones of Monotone Functions // DAN. — 2012. — Vol. 86, No 2. — P. 650–653.]
3. *Gogatishvili A., Stepanov V. D.* Reduction Theorems for Operators on the Cones of Monotone Functions // J. Math. Anal. Appl. — 2013. — Vol. 405, No 1. — Pp. 156–172.
4. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* О весовых неравенствах Харди в смешанных нормах // Тр. МИАН. — 2013. — Т. 283. — С. 125–140. [Prokhorov D. V., Stepanov V. D. Weighted Hardy Inequalities in Mixed Norms // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2013.— Vol. 283. — P. 125–140.]
5. Boundedness of the Fractional Maximal Operator in Local Morrey-Type Spaces / V. I. Burenkov, A. Gogatishvili, V. S. Guliev, R. C. Mustafaeyev // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010. — Vol. 55, No 8. — Pp. 739–758.
6. Boundedness of the Riesz Potential in Local Morrey-Type Spaces / V. I. Burenkov, A. Gogatishvili, V. S. Guliev, R. C. Mustafaeyev // Potential Anal. — 2011. — Vol. 35. — Pp. 67–87.

Weighted Inequalities for Quasilinear Integral Operators on the Cone of Monotone Functions

G. E. Shambilova

Mathematical Analysis and Functiona Theory Department
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho Maklai str., 6, Moscow 117198, Russia

Criteria for the Hardy-type inequalities with quasi-linear operators on the cones of monotone functions on the semiaxis are obtained. We study the problem of finding necessary and sufficient conditions for the weighted Hardy-type inequalities for the quasi-linear operators on the cone of monotone functions. To this end we choose a composition of power type integral operations and investigate the characterization problem on its boundedness in the weighted Lebesgue (quasi) norms on the cones of non-negative monotone decrasing functions on the real semiaxis. The main method of the solution of the problem is the reduction method which allows to reduce the inequality on the cones of monotone functions to the corresponding inequalities on the cones of arbitrary non-negative functions, which adopt equivalent description in terms of the boundedness appropriated functionals depending on ingredients of the initial problem. As usual we obtain equivalence of the functionals and the best constants involving into initial inequalities, where the mulpiple constants of equivalence depend only of the parameters of summation. Unlike the initial problems of this area we study multiparametrical case increasing the number of weight functions and summation parameters. This case is new for the weighted inequalities on the cones of monotone functions.

Key words and phrases: Hardy inequality, weighted Lebesgue space, quasi-linear operator, cones of monotone functions, boundedness.