УДК 537.876; 531.01; 519.62

Система уравнений Гамильтона для мод электромагнитного поля в стратифицированной изотропной среде

Л. А. Севастьянов

Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

В работе продемонстрирована Гамильтонова природа обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию монохроматических линейно поляризованных плоских электромагнитных волн в стратифицированной среде. Установлена возможность и необходимость использования симплектических численных методов интегрирования полученной системы уравнений Гамильтона.

Ключевые слова: стратифицированная изотропная среда, TE-моды, TM-моды, уравнения Гамильтона, симплектические численные методы интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Хорошо известно, что для плоских линейно поляризованных монохроматических волн, распространяющихся в стратифицированной среде, система уравнений Максвелла редуцируется к двум независимым подсистемам обыкновенных дифференциальных уравнений для TE- и TM- мод. Однако менее широко известно, что эти подсистемы образуют пары уравнений Гамильтона, так что вся система является системой уравнений Гамильтона с двумя степенями свободы. Наличие гамильтоновой структуры диктует выбор такого численного метода решения системы ОДУ, который сохраняет гамильтонову структуру для получающихся при численном решении сеточных функций и обычно называется гамильтоновым (симплектическим) интегратором.

Напомним выбор системы координат и обозначения. Среда стратифицирована вдоль оси Oz: $\varepsilon = \varepsilon(z)$, $\mu = \mu(z)$, так что тангенциальными являются векторы, лежащие в плоскости xOy. Волновой вектор $\vec{k}$ падающей монохроматической плоской однородной линейно поляризованной волны лежит в плоскости zOx, следовательно, в этой же плоскости лежат волновые векторы электромагнитной волны, распространяющейся в стратифицированной среде: $k_x = k_0\sqrt{\varepsilon(z)\,\mu(z)}\sin\alpha(z)$, $k_y = 0$.

Система уравнений Максвелла в диэлектрической среде в отсутствие сторонних токов и зарядов имеет вид

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{1}$$

Для полей вида

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\,\vec{r})}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\,\vec{r})}, \quad \vec{k} = k_0\sqrt{\varepsilon(z)\mu(z)}\,\vec{s} \tag{2}$$

в выбранной системе координат выполняются соотношения:

$$\partial\vec{E}/\partial y = \vec{0}, \quad \partial\vec{H}/\partial y = \vec{0}, \quad \partial\vec{E}/\partial x = -ik_x\vec{E}, \quad \partial\vec{H}/\partial x = -ik_x\vec{H}. \tag{3}$$

Статья поступила в редакцию 30 декабря 2010 г.
Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №10-01-00467-а.

С учётом (2) и (3) из уравнений (1) получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_y}{\partial z} &= -ik_0\mu H_x, \quad & -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= ik_0\varepsilon E_x, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} + ik_x E_z &= -ik_0\mu H_y, \quad & \frac{\partial H_x}{\partial z} + ik_x H_z &= ik_0\varepsilon E_y, \\ -ik_x E_y &= -ik_0\mu H_z, \quad & -ik_x H_y &= ik_0\varepsilon E_z. \end{aligned} \tag{4}$$

Система (4) распадается на две независимые системы уравнений для тангенциальных компонент [1]: для TE-моды

$$\frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}z} = ik_0\mu H_x, \frac{\mathrm{d}H_x}{\mathrm{d}z} = ik_0\left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\frac{k_x^2}{k_0^2}\right)E_y, \tag{5}$$

и для TM-моды

$$\frac{\mathrm{d}H_y}{\mathrm{d}z} = -ik_0\varepsilon E_x, \frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}z} = -ik_0\left(\mu - \frac{1}{\varepsilon}\frac{k_x^2}{k_0^2}\right)H_y. \tag{6}$$

Известно, что существуют две инвариантные комбинации из компонент электромагнитного поля. Через напряжённости полей они выражаются следующим образом [2]:

$$I_1 = \varepsilon\left(\vec{E},\vec{E}\right) - \mu\left(\vec{H},\vec{H}\right) \quad \text{и} \quad I_2 = \varepsilon\mu\left(\vec{E},\vec{H}\right),$$

причём I_1 — скалярный, а I_2 — псевдоскалярный инварианты. Функция Лагранжа $L \equiv I_1/2$ в записи через декартовы компоненты напряжённостей поля имеет вид:

$$\begin{aligned} L = \frac{\varepsilon}{2}\left(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\right) - \frac{\mu}{2}\left(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2\right) \equiv \\ \equiv \frac{1}{2}\left(\varepsilon E_y^2 - \mu H_x^2 - \mu H_z^2\right) - \frac{1}{2}\left(\mu H_y^2 - \varepsilon E_x^2 - \varepsilon E_z^2\right). \end{aligned} \tag{7}$$

С учётом алгебраических уравнений системы (4) выражение (7) переписывается в виде:

$$L = \frac{1}{2}\left(\left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\frac{k_x^2}{k_0^2}\right)E_y^2 - \mu H_x^2\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\mu - \frac{1}{\varepsilon}\frac{k_x^2}{k_0^2}\right)H_y^2 - \varepsilon E_x^2\right) \equiv L_1 + L_2. \tag{8}$$

Введём обозначения

$$q_1 \equiv -E_y, \quad q_2 \equiv iH_y, \quad p_1 \equiv \partial L_1/\partial\left(\mathrm{d}q_1/\mathrm{d}z\right), \; p_2 \equiv \partial L_2/\partial\left(\mathrm{d}q_2/\mathrm{d}z\right),$$

после чего проделаем преобразование Лежандра относительно введённых переменных:

$$H = \left(p_1\left(\mathrm{d}q_1/\mathrm{d}z\right) - L_1\right) + \left(p_2\left(\mathrm{d}q_2/\mathrm{d}z\right) - L_2\right) = H_1 + H_2,$$

так что

$$H_1 = \frac{1}{2}\left(\left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\frac{k_x^2}{k_0^2}\right)q_1^2 + \left(\mu k_0^2\right)p_1^2\right), \quad H_2 = \frac{1}{2}\left(\left(\mu - \frac{1}{\varepsilon}\frac{k_x^2}{k_0^2}\right)q_2^2 + \left(\varepsilon k_0^2\right)p_2^2\right). \tag{9}$$

Тогда системы уравнений (5) и (6) примут вид:

$$\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}z} = \mu k_0^2 p_1, \quad \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z} = -\left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\frac{k_x^2}{k_0^2}\right)q_1, \quad \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}z} = \varepsilon k_0 p_2, \quad \frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}z} = -\left(\mu - \frac{1}{\varepsilon}\frac{k_x^2}{k_0^2}\right)q_2. \tag{10}$$

Уравнения (10) имеют канонический вид уравнений Гамильтона:

$$\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial H_1}{\partial p_1}, \ \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_1}, \quad \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial H_2}{\partial p_2}, \quad \frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}z} = -\frac{\partial H_2}{\partial q_2} \tag{11}$$

Уравнения можно также переписать в виде:

$$\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}z} = -\frac{\partial H}{\partial q_2} \tag{12}$$

Системы уравнений (11) являются системами уравнений Гамильтона для двух систем с одной степенью свободы, а именно для ТЕ- моды и ТМ- моды. Система уравнений (12) является системой уравнений Гамильтона для одной системы с двумя степенями свободы, а именно для монохроматической плоской однородной линейно поляризованной волны, состоящей из ТЕ- моды и ТМ- моды. Функции H_1, H_2, H при этом являются функциями Гамильтона соответствующих физических систем.

В последние годы для систем уравнений Гамильтона разработаны эффективные численные алгоритмы решения, приводящие к сеточным функциям q_1^N, p_1^N и q_2^N, p_2^N размерности N, образующим попарно дискретные переменные, канонически сопряжённые относительно дискретных функций Гамильтона $H^N = H_1^N + H_2^N$. В частности, вследствие представления функций Гамильтона (9) для ТЕ- и ТМ- мод в виде $H\left(q,p\right) = H\left(q\right) + H\left(p\right)$, существует семейство симплектических методов Рунге-Кутта различного порядка точности [3,4] решения систем (11) и (12).

Литература

1. *Born M., Wolf E.* Principles of Optics. — Pergamon Press, 1968.
2. *Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П.* Электродинамика. — М.: Высшая школа, 1980. [*Terleckiyj Ya. P., Rihbakov Yu. P.* Ehlektrodinamika. — M.: Vihsshaya shkola, 1980.]
3. *Forest E., Ruth R. D.* Forth-Order Symplectic Integration // Physica D. — 1990. — Vol. 43. — Pp. 105–117.
4. *Candy J., Rozmus W.* A Symplectic Integration Algorithm for Separable Hamiltonian Functions // J. Comp. Phys. — 1991. — Vol. 92. — Pp. 230–256.

UDC 537.876; 531.01; 519.62

The System of Hamilton Equations for the Modes of the Electromagnetic Field in a Stratified Isotropic Medium

L. A. Sevastianov

Telecommunication Systems Department
Peoples Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, 117198, Russia

The paper demonstrates the Hamiltonian nature of ordinary differential equations describing the evolution of monochromatic linearly polarized plane electromagnetic waves in a stratified medium. The possibility and necessity of using symplectic numerical methods for integrating the resulting system of Hamilton equations is established.

Key words and phrases: stratified isotropic medium, TE-modes, TM-modes, Hamiltonian equations, symplectic integrators.