Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 672–682

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-672-682 УДК 917.986.3

ОБ АЛГЕБРЕ ОПЕРАТОРОВ, ОТВЕЧАЮЩЕЙ ОБЪЕДИНЕНИЮ ГЛАДКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

© 2019 г. **Д. А. ПОЛУЭКТОВА, А. Ю. САВИН, Б. Ю. СТЕРНИН**

Аннотация. Для пары гладких трансверсально пересекающихся подмногообразий в некотором объемлющем гладком многообразии исследуется алгебра, порожденная псевдодифференциальными операторами и (ко)граничными операторами, отвечающими подмногообразиям. Устанавливается, что данная алгебра имеет 18 типов порождающих элементов. Для операторов из этой алгебры определяется понятие символа и устанавливается формула композиции.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Рассмотрим гладкое замкнутое многообразие X_0 и два его подмногообразия X_1 и X_2 произвольной размерности, которые пересекаются трансверсально. С этой геометрической ситуацией ассоциирован класс граничных задач с граничными условиями на указанных подмногообразиях. Эти задачи рассматривались, например, в работах [1, 9, 10] (см. также [6, 7]). В цитированных работах были установлены теоремы о фредгольмовости некоторых из задач такого вида, также были получены формулы индекса, учитывающие вклады в индекс стратов многообразия с особенностями — объединения $X_1 \cup X_2$. В дальнейшем эти результаты и методы применялись при исследовании некоторых нелокальных задач с граничными условиями на гладком подмногообразии (см. [2, 4]).

В настоящей работе мы исследуем алгебраические аспекты этой теории. А именно, рассматривается алгебра операторов, мультипликативно порожденная псевдодифференциальными операторами на основном многообразии и на подмногообразиях, а также операторами сужения функций на подмногообразия и соответствующими двойственными операторами продолжения функций с подмногообразия на объемлющее многообразие. Мы показываем, что рассматриваемая алгебра имеет 18 видов аддитивных порождающих элементов, а общий элемент этой алгебры записывается в виде матрицы размера 3×3 вида

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_0 + G_1 + G_2 + M_0 & C_1 + C_1' & C_2 + C_2' \\ B_1 + B_1' & D_1 + M_1 & T_{12} \\ B_2 + B_2' & T_{21} & D_2 + M_2 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}', \tag{1.1}$$

где через $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ обозначены прямые суммы пространств Соболева на многообразиях X_0, X_1, X_2 с некоторыми показателями гладкости для каждого из многообразий. Компоненты матрицы (1.1) имеют следующую природу:

- D_0, D_1, D_2 — псевдодифференциальные операторы (далее ПДО) на соответствующих многообразиях X_0, X_1, X_2;

- B_1, B_2 и C_1, C_2 — граничные и кограничные операторы (см. [8]), сосредоточенные на подмногообразиях X_1, X_2;
- B_1', B_2' и C_1', C_2' — граничные и кограничные операторы, сосредоточенные на пересечении $X_1 \cap X_2$;
- G_1, G_2 — операторы Грина (см., напр., [3, 11, 13]), сосредоточенные на подмногообразиях X_1, X_2;
- M_0, M_1, M_2 — операторы Меллина (см., напр., [7]), сосредоточенные на пересечении $X_1 \cap X_2$;
- T_{12}, T_{21} — трансляторы (см. [10]), сосредоточенные на пересечении $X_1 \cap X_2$.

Отметим, что ранее большинство из указанных классов операторов исследовалось в литературе. Однако наш подход в данной работе позволяет рассматривать все эти операторы с единой точки зрения. Более того, мы показываем, что классификация (1.1) по существу дается в терминах того, на каком страте многообразия с особенностями рассматриваемый оператор сосредоточен. Кроме указанной классификации, в данной работе мы также даем формулу для символа таких операторов и устанавливаем формулу композиции.

Постановка задачи, которая решается в настоящей работе, а также формулировки основных результатов даны А. Ю. Савиным и Б. Ю. Стерниным. Работа над окончательной версией текста работы проводилась Д. А. Полуэктовой и А. Ю. Савиным.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 16-31-00176, 16-01-00373, 19-01-00574.

2. Постановка задачи

Рассмотрим пространство $X_0 = \mathbb{R}^n$ с фиксированными координатами $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $X_1, X_2 \subset X_0$ — некоторые координатные плоскости, такие что

$$\dim X_k < \dim X_0, \quad k = 1, 2,$$

и

$$\dim(X_1 \cap X_2) > 0.$$

При этом на плоскостях в качестве координат будем брать только соответствующие компоненты из координат $x_1, \ldots, x_n$ объемлющего пространства.

Для $k = 1, 2$ будем обозначать $n_k = \operatorname{codim}_{X_k}(X_1 \cap X_2)$ — коразмерность подпространства $X_1 \cap X_2$ в объемлющем пространстве X_k, $\nu_k = \operatorname{codim}_{X_0} X_k$. Также обозначим $\nu_3 = \operatorname{codim}_{X_0}(X_1 \cap X_2)$.

Тройке (X_0, X_1, X_2) сопоставим следующие операторы:

1. *Псевдодифференциальные операторы* на многообразиях X_0, X_1, X_2:
$$A_k \colon H^s(X_k) \longrightarrow H^{s-m}(X_k), \quad k = 0, 1, 2, \tag{2.1}$$
действующие в пространствах Соболева. Здесь и ниже будем рассматривать только псевдодифференциальные операторы (2.1) (ПДО), ядра Шварца которых имеют компактный носитель.
2. *Элементарные граничные операторы*, отвечающие подмногообразию X_k, $k = 1, 2$:
$$i^k \colon H^s(X_0) \longrightarrow H^{s-\nu_k/2}(X_k), \quad u(y, z) \longmapsto u(y, 0), \tag{2.2}$$
где $s - \nu_k/2 > 0$ и (y, z) — координаты на X_0, в которых $X_k = \{y = 0\}$.
3. *Элементарные кограничные операторы*, отвечающие подмногообразию X_k, $k = 1, 2$:
$$i_k \colon H^{-s+\nu_k/2}(X_k) \longrightarrow H^{-s}(X_0), \quad u(z) \longmapsto u(z) \otimes \delta(y), \tag{2.3}$$
где $s - \nu_k/2 > 0$, $\delta(y)$ — дельта-функция Дирака и координаты (y, z) выбраны как в предыдущем пункте.

Далее будем считать, что для каждого оператора зафиксированы показатели порядков пространств Соболева, в которых он действует (при этом сами пространства будем обозначать через $H(Z)$, $Z \subset X_0$, не указывая явно их порядок). Кроме того, если рассматривается композиция операторов $D_1 D_2$, то будем предполагать, что пространство Соболева, на котором определен оператор D_1, совпадает с пространством Соболева, в которое действует оператор D_2.

Теперь для любых $k, l \in \{0, 1, 2\}$ рассмотрим линейное пространство, обозначаемое через $\mathrm{Mor}_{k,l}$, операторов $H(X_l) \to H(X_k)$ некоторого фиксированного порядка, которое мультипликативно порождается операторами (2.1), (2.2) и (2.3) как образующими. Более точно, операторы из $\mathrm{Mor}_{k,l}$ определим как конечные суммы операторов вида

$$\mathcal{D}_{kl} = D_{k,j_1} D_{j_1,j_2} \ldots D_{j_N,l}, \tag{2.4}$$

где $D_{\alpha,\beta}\colon H(X_\beta) \to H(X_\alpha)$ — композиция псевдодифференциальных операторов на X_α и X_β с элементарным граничным оператором (если $X_\alpha \subset X_\beta$) или с элементарным кограничным оператором (если $X_\beta \subset X_\alpha$). Обозначим через Mor прямую сумму

$$\mathrm{Mor} = \bigoplus_{k,l=0,1,2} \mathrm{Mor}_{k,l}\,.$$

Элементы этой прямой суммы будем называть *морфизмами* (ср. [9]). Для определенности далее будем рассматривать только морфизмы нулевого порядка, действующие в пространстве

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{2} H^{s_k}(X_k) \tag{2.5}$$

для некоторых фиксированных чисел $s_k \in \mathbb{R}$. Из построения следует, что такие морфизмы определяют алгебру относительно композиции (ее по-прежнему будем обозначать через Mor).

Возникает задача об исследовании операторов из алгебры Mor . Более точно, речь идет об описании природы этих операторов, определения их символов и понятия эллиптичности, доказательстве фредгольмовости эллиптических операторов (теорема конечности) и получении формулы индекса.

В данной работе мы проведем классификацию возникающих операторов, определим понятие символа для них и установим формулу композиции. Вопросы, связанные с эллиптичностью, планируется рассмотреть в отдельной публикации.

3. Классификация морфизмов

Объединение $X_1 \cup X_2$ представляет собой многообразие с особенностями в X_0. Проведем классификацию элементов из Mor в соответствии с тем, на каком страте они сосредоточены. Сначала дадим определение понятия сосредоточенности.

Через $C_c^\infty(X_0)$ обозначим алгебру гладких финитных функций на X_0. Заметим, что пространство $\mathcal{H}$ (см. (2.5)) является $C_c^\infty(X_0)$-модулем относительно умножения на функции из $C_c^\infty(X_0)$ и их сужений на X_1 и X_2.

Определение 3.1. Будем говорить, что оператор $\mathcal{D}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *сосредоточен на подмногообразии* $Z \subset X_0$, если операторы $\varphi\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}\varphi$ являются операторами меньшего порядка, чем $\mathcal{D}$, для любой функции $\varphi \in C_c^\infty(X_0 \setminus Z)$.

Несложно проверить, что элементарные граничный и кограничный операторы сосредоточены на подмногообразии, которому они отвечают. В самом деле, например, для оператора $i^1 : H(X_0) \to H(X_1)$ и всех функций $\varphi \in C_c^\infty(X_0 \setminus X_1)$ имеем

$$\varphi i^1 = i^1 \varphi = 0.$$

Отсюда вытекает следующая

Лемма 3.1. *Композиция* (2.4) *сосредоточена на пересечении подмногообразий*

$$X_k \cap X_{j_1} \cap \cdots \cap X_{j_N} \cap X_l. \tag{3.1}$$

Лемма 3.1 позволяет все композиции вида (2.4) разбить на четыре класса в соответствии с тем, чему равно пересечение (3.1): оно равно одному из подмногообразий $X_0, X_1, X_2, X_1 \cap X_2$. Покажем, какой вид имеют операторы в каждом из четырех классов.

Далее все морфизмы из Mor будем представлять как 3×3 матричные операторы $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

1. *Пересечение* (3.1) *равно* X_0. Ясно, что этот случай реализуется тогда и только тогда, когда

$$X_k = X_{i_1} = \cdots = X_{i_N} = X_l = X_0,$$

т. е. мы имеем дело с ПДО на X_0. Соответствующий матричный оператор равен

$$\begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}.$$

2. *Пересечение* (3.1) *равно* X_1. Этот случай реализуется тогда и только тогда, когда все многообразия в (3.1) равны либо X_0, либо X_1, так что мы имеем дело с композициями ПДО на X_0 и X_1 с, по крайней мере, одним элементарным граничным или кограничным операторами i_1, i^1. В соответствии с тем, между какими многообразиями эти композиции действуют, получаем матричные операторы вида

$$\begin{pmatrix} G_1 & C_1 & 0 \\ B_1 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}.$$

Здесь оператор D_1 всегда является ПДО на X_1, поскольку композиция $i^1 A i_1$, где A — ПДО на X_0, является ПДО на X_1 (см. [5, 8]). Оператор B_1 называется *граничным* оператором и имеет вид

$$A_1\, i^1\, A_0, \tag{3.2}$$

где A_1, A_0 — ПДО на многообразиях X_1 и X_0, соответственно. Отметим, что «длинные» композиции

$$A_1\, i^1\, A_0\, i_1\, A_1'\, i^1\, A_0',$$

где A_1', A_0' — ПДО на X_1 и X_0, соответственно, всегда можно записать в виде (3.2), так как $i^1 A_1' i_1$ есть ПДО на X_1 (см. [5, 8]). Двойственным образом оператор C_1 называется *кограничным оператором* и имеет вид

$$A_0\, i_1\, A_1.$$

Наконец, оператор G_1 называется *оператором Грина*. Он сосредоточен на подмногообразии X_1 и записывается в виде

$$G_1 = A_0\, i_1\, A_1\, i^1\, A_0', \tag{3.3}$$

где A_0, A_0' — ПДО на X_0, A_1 — ПДО на X_1. Отметим, что длинные композиции вида

$$A_0\, i_1\, A_1\, i^1\, A_0' i_1\, A_1'\, i^1\, A_0''$$

сводятся к виду (3.3), поскольку оператор $i^1\, A_0' i_1$ является ПДО на X_1 в силу цитированных работ.

3. *Пересечение* (3.1) *равно* X_2. Этот случай аналогичен предыдущему. Получаем операторы вида

$$\begin{pmatrix} G_2 & 0 & C_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & D_2 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H},$$

включающие ПДО D_2 на X_2, (ко)граничные операторы C_2, B_2 и оператор Грина G_2, сосредоточенные на подмногообразии X_2.

4. *Пересечение* (3.1) *равно* $X_1 \cap X_2$. Возникающие в этом случае операторы запишем в виде

$$\begin{pmatrix} M_0 & C_1' & C_2' \\ B_1' & M_1 & T_{12} \\ B_2' & T_{21} & M_2 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}.$$

Каждый из операторов в этой матрице является композицией, в которую входят не менее одного (ко)граничного оператора, отвечающих каждому из подмногообразий X_1 и X_2. Операторы M_0, M_1, M_2 называются *операторами Меллина*, сосредоточенными на подмногообразии $X_1 \cap X_2$. Операторы B_1', B_2' и C_1', C_2' называются *граничными* и *кограничными* операторами, сосредоточенными на подмногообразии $X_1 \cap X_2$. Операторы T_{12}, T_{21} называются *трансляторами*, действующими между многообразиями X_1 и X_2 (трансляторы были введены в работе [10]).

Операторы перечисленных выше классов представляют собой аддитивные образующие алгебры Mor. Таким образом, общий морфизм имеет вид

$$\mathcal{D}=\begin{pmatrix} D_0+G_1+G_2+M_0 & C_1+C_1' & C_2+C_2' \\ B_1+B_1' & D_1+M_1 & T_{12} \\ B_2+B_2' & T_{21} & D_2+M_2 \end{pmatrix}:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}. \tag{3.4}$$

Итак, алгебра Mor имеет 18 типов аддитивных образующих.

Проиллюстрируем возникающие типы операторов графически. А именно, рассмотрим ориентированный граф с петлями, изображенный на рис. 1. Вершины этого графа отвечают пространствам Соболева на соответствующих многообразиях, петли отвечают ПДО, ребра $X_0\to X_k$ — граничным операторам i^k, а ребра $X_k\to X_0$ — кограничным операторам i_k.

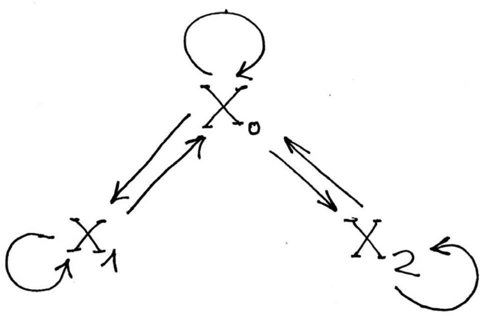

Рис. 1. Ориентированный граф с петлями.

Тогда композиции вида (2.4) отвечает путь

$$X_l\longrightarrow X_{j_1}\longrightarrow X_{j_2}\longrightarrow\ldots\longrightarrow X_{j_N}\longrightarrow X_k$$

в этом графе из вершины X_l в вершину X_k. При этом тип композиции полностью определяется соответствующим путем. Для путей малой длины соответствующая классификация дается на рис. 2, причем пути отвечают следующим классам операторов:

a) ПДО,
b) граничные операторы,
c) кограничные операторы,
d) операторы Грина;

и на рис. 3, где пути отвечают следующим классам операторов:

a) операторы Меллина на X_0,
b) граничные операторы, сосредоточенные на $X_1\cap X_2$,
c) кограничные операторы, сосредоточенные на $X_1\cap X_2$,
d) трансляторы,
e) операторы Меллина на X_1 и X_2.

4. Символы морфизмов

4.1. Символы ПДО и (ко)граничных операторов. Для построения символа общего морфизма из алгебры Mor определим символы образующих на разных подмногообразиях.

1. *Символ ПДО.* Пусть A — ПДО на X_0. Определим его символ[1] на подмногообразии $Z\subset X_0$. Ниже в качестве Z используются многообразия X_0, X_1, X_2, $X_1\cap X_2$. Выберем на X_0 координаты (z,y), в которых Z задается уравнениями $y=0$. Соответствующие копеременные (в слоях T^*X_0) обозначим через (ζ,η). Символ ПДО A обозначим через $A(z,y,\zeta,\eta)$.

[1]Здесь и далее под символом оператора понимается его главный символ.

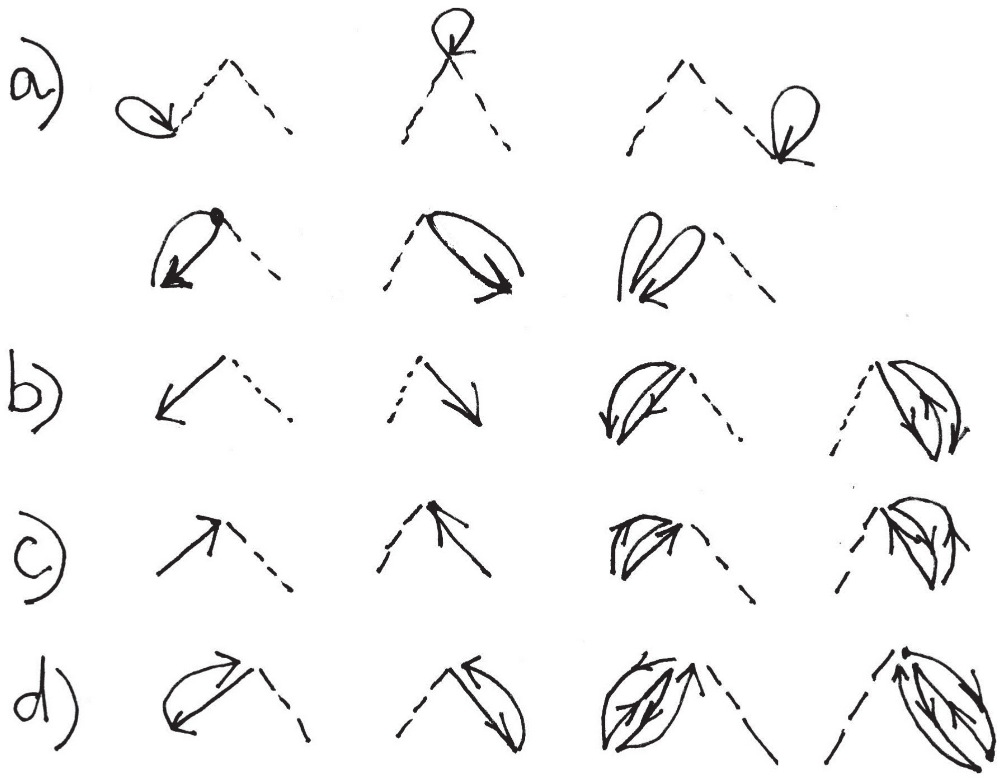

Рис. 2. Типы путей в графе.

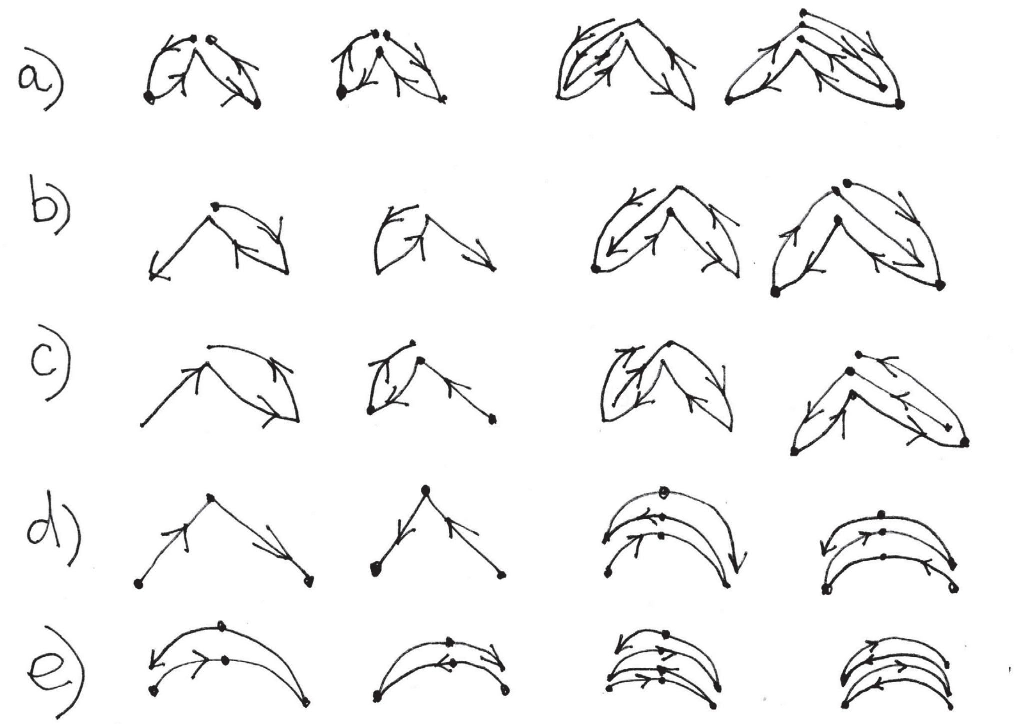

Рис. 3. Типы путей в графе.

Символом ПДО A на подмногообразии Z назовем оператор-функцию

$$\sigma_Z(A)(z,\zeta) = A\left(z,0,\zeta,-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\colon H(\mathbb{R}^k_y) \longrightarrow H(\mathbb{R}^k_y), \tag{4.1}$$

где $(z,\zeta)\in T^*_0Z$. Аналогично определяются символы ПДО, действующих на X_1, X_2, $X_1\cap X_2$.

Ясно, что формула (4.1) получается стандартными операциями: замораживанием коэффициентов оператора на страте и последующим взятием преобразования Фурье по касательным к страту переменным.

2. *Символ граничного оператора.* Символ граничного оператора i^1 на страте X_1 есть оператор

$$\sigma_{X_1}(i^1)(z,\zeta)\colon H(\mathbb{R}^{\nu_1}_y) \longrightarrow \mathbb{C},\quad u(y)\longmapsto u(0),\quad (z,\zeta)\in T^*_0Z,$$

где мы использовали координаты (z,y) на X_0, в которых $X_1=\{y=0\}$.

Чтобы определить символ $\sigma_{X_1\cap X_2}(i^1)$ оператора i^1 на страте $X_1\cap X_2$, введем на X_0 координаты (x,y,z), в которых

$$X_1=\{y=0\},\quad X_1\cap X_2=\{(x,y)=(0,0)\}.$$

Тогда символ $\sigma_{X_1\cap X_2}(i^1)$ зададим как оператор-функцию

$$\sigma_{X_1\cap X_2}(i^1)(z,\zeta)\colon H(\mathbb{R}^{\nu_3}_{x,y}) \longrightarrow H(\mathbb{R}^{n_1}_x),\quad u(x,y)\longmapsto u(x,0),\quad (z,\zeta)\in T^*_0Z.$$

Аналогично определяются символы $\sigma_{X_2}(i^2)$ и $\sigma_{X_1\cap X_2}(i^2)$ оператора i^2.

3. *Символ кограничного оператора.* Символ кограничного оператора i_1 определяется двойственным образом. Более точно, положим

$$\sigma_{X_1}(i_1)(z,\zeta)\colon \mathbb{C} \longrightarrow H(\mathbb{R}^{\nu_1}_y),\quad q\longmapsto q\,\delta(y),\quad (z,\zeta)\in T^*_0Z,$$

и положим

$$\sigma_{X_1\cap X_2}(i^1)(z,\zeta)\colon H(\mathbb{R}^{n_1}_x) \longrightarrow H(\mathbb{R}^{\nu_3}_{x,y}),\quad u(x)\longmapsto u(x)\otimes\delta(y),\quad (z,\zeta)\in T^*_0Z.$$

Аналогично определяются символы $\sigma_{X_2}(i^2)$ и $\sigma_{X_1\cap X_2}(i^2)$ оператора i^2.

4.2. Символы морфизмов общего вида.

Пусть Z — любой из стратов X_0, X_1, X_2, $X_1\cap X_2$.

Определение 4.1. *Символ морфизма* (2.4) *на страте* Z определим как композицию

$$\sigma_Z(\mathcal{D}_{kl}) = \sigma_Z(D_{k,j_1})\,\sigma_Z(D_{j_1,j_2})\,\ldots\,\sigma_Z(D_{j_N,l}) \tag{4.2}$$

символов сомножителей $D_{j_\alpha,j_{\alpha+1}}$ на страте Z.

Для морфизма (3.4) получаем, таким образом, следующие символы:

1. символ на страте X_0 равен символу ПДО D_0:

$$\sigma_{X_0}(\mathcal{D})(z,\zeta)=\sigma(D_0)(z,\zeta)\colon \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\quad (z,\zeta)\in T^*_0X_0;$$

2. символ на страте X_1 является оператор-функцией

$$\sigma_{X_1}(\mathcal{D})(z,\zeta) == \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}(D_0+G_1) & \sigma_{X_1}(C_1)\\ \sigma_{X_1}(B_1) & \sigma(D_1)\end{pmatrix}(z,\zeta),\quad (z,\zeta)\in T^*_0X_1$$

со значениями в операторах, действующих в пространствах

$$\sigma_{X_1}(\mathcal{D})(z,\zeta)\colon \begin{matrix} H(\mathbb{R}^{\nu_1})\\ \oplus \\ \mathbb{C}\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H(\mathbb{R}^{\nu_1})\\ \oplus \\ \mathbb{C}\end{matrix};$$

3. символ на страте X_2 является оператор-функцией

$$\sigma_{X_2}(\mathcal{D})(z,\zeta) = \begin{pmatrix} \sigma_{X_2}(D_0+G_2) & \sigma_{X_2}(C_2)\\ \sigma_{X_2}(B_2) & \sigma(D_2)\end{pmatrix}(z,\zeta),\quad (z,\zeta)\in T^*_0X_2$$

со значениями в операторах, действующих в пространствах

$$\sigma_{X_2}(\mathcal{D})(z,\zeta)\colon \begin{matrix} H(\mathbb{R}^{\nu_2})\\ \oplus \\ \mathbb{C}\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H(\mathbb{R}^{\nu_2})\\ \oplus \\ \mathbb{C}\end{matrix};$$

4. наконец, символ на пересечении $Z = X_1 \cap X_2$ есть оператор-функция

$$\sigma_Z(\mathcal{D})(z,\zeta) = \begin{pmatrix} \sigma_Z(D_0+G_0+G_1+M_0) & \sigma_Z(C_1+C_1') & \sigma_Z(C_2+C_2') \\ \sigma_Z(B_1+B_1') & \sigma_Z(D_1+M_1) & \sigma_Z(T_{12}) \\ \sigma_Z(B_2+B_2') & \sigma_Z(T_{21}) & \sigma_Z(D_2+M_2) \end{pmatrix}(z,\zeta),$$

где $(z,\zeta) \in T_0^*Z$, со значениями в операторах, действующих в пространствах

$$\sigma_Z(\mathcal{D})(z,\zeta)\colon \begin{array}{c} H(\mathbb{R}^{\nu_3}) \\ \oplus \\ H(\mathbb{R}^{n_1}) \\ \oplus \\ H(\mathbb{R}^{n_2}) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} H(\mathbb{R}^{\nu_3}) \\ \oplus \\ H(\mathbb{R}^{n_1}) \\ \oplus \\ H(\mathbb{R}^{n_2}) \end{array}.$$

4.3. Формула композиции. В этом пункте устанавливается, что символ морфизма корректно определен и справедлива формула композиция. Более точно, установим следующую теорему, которая является основным результатом данной работы.

Теорема 4.1. *Для морфизма* $\mathcal{D} \in \mathrm{Mor}$ *его символ* $\sigma_Z(\mathcal{D})$ (*см. определение* 4.1) *на любом страте* Z *не зависит от выражения морфизма через порождающие элементы. Кроме того, для любых морфизмов* $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1 \in \mathrm{Mor}$ *справедлива формула композиции*

$$\sigma_Z(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2) = \sigma_Z(\mathcal{D}_1)\,\sigma_Z(\mathcal{D}_2). \tag{4.3}$$

Доказательство. Из определения символа следует, что формула композиции (4.3) выполнена по построению. Поэтому надо установить только корректность определения символа (т. е., что символ не зависит от выбора представления морфизма в терминах образующих).

1. Определим операторы редукции порядка

$$(\Lambda_0,\Lambda_1,\Lambda_2)\colon \bigoplus_{k=0,1,2} H^{s_k}(X_k) \longrightarrow \bigoplus_{k=0,1,2} L^2(X_k), \tag{4.4}$$

где Λ_k — эллиптический ПДО порядка s_k на X_k. Тогда произвольный морфизм $\mathcal{D} \in \mathrm{Mor}$ можно свести к морфизму нулевого порядка, действующему в пространствах L^2, если морфизм $\mathcal{D}$ домножить слева и справа на соответствующие операторы редукции порядка. При этом несложно показать, что утверждения доказываемой теоремы для исходного морфизма $\mathcal{D}$ следуют из аналогичных утверждений для морфизма нулевого порядка.

Итак, достаточно доказать теорему в случае морфизма $\mathcal{D} \in \mathrm{Mor}$ нулевого порядка

$$\mathcal{D}\colon \bigoplus_{k=0,1,2} L^2(X_k) \longrightarrow \bigoplus_{k=0,1,2} L^2(X_k). \tag{4.5}$$

2. Для доказательства корректности определения символа оператора (4.5) мы используем подходы работы [12] (в случае гладкого замкнутого многообразия) и работы [14] (в случае краевых задач).

Определим вспомогательное семейство операторов. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{k+\nu}$ с координатами (z,y). Для точки $(z_0,\zeta_0) \in T_0^*\mathbb{R}^k$ определим семейство операторов

$$R_{\lambda,z,y}\colon L^2(\mathbb{R}^{k+\nu}_{z,y}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{k+\nu}_{z,y}), \qquad \lambda > 0, \tag{4.6}$$

действующих по формуле (ср. [14])

$$R_{\lambda,z,y}\colon u(z,y) \longmapsto \lambda^{k/4+\nu/2}\, e^{i\lambda z\zeta_0}\, u\big(\lambda^{1/2}(z-z_0), \lambda y\big).$$

Прямая проверка показывает, что операторы (4.6) являются унитарными и для любой функции $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{k+\nu})$ при $\lambda \to \infty$ имеет место слабая сходимость

$$R_{\lambda,z,y}u \to 0 \ \text{ в } \ L^2(\mathbb{R}^{k+\nu}_{z,y}).$$

Теперь вернемся к морфизму (4.5). Рассмотрим его компоненту

$$\mathcal{D}_{kl}\colon L^2(X_l) \longrightarrow L^2(X_k),$$

и пусть $Z \subset X_1 \cup X_2$ — некоторый страт, на котором вычисляется символ. Выберем координаты

$$(z, y) \in \mathbb{R}^{n+\nu} = X_k, \quad (z, y') \in \mathbb{R}^{n+\nu'} = X_l$$

так, что Z определяется уравнениями $Z = \{(z, 0)\}$ в X_k и в X_l. Здесь ν — коразмерность Z в X_k, а ν' — коразмерность Z в X_l.

В этих обозначениях корректность определения символа вытекает из следующей леммы.

Лемма 4.1. *Для любых функций $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_z^n)$, $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}_{y'}^{\nu'})$ и точки $(z_0, \zeta_0) \in T_0^* Z$ имеем*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left\| R_{\lambda,z,y}^{-1} \mathcal{D}_{kl} R_{\lambda,z,y'}(u \otimes v) - u \otimes \left[\sigma_Z(\mathcal{D}_{kl})(z_0, \zeta_0)\right] v \right\|_{L^2(X_k)} = 0. \tag{4.7}$$

Доказательство. В силу линейности и мультипликативности выражения в (4.7) достаточно доказать равенство предела нулю в следующих трех случаях:

1. $k = l$, а $\mathcal{D}_{kk}$ является псевдодифференциальным оператором нулевого порядка;
2. $l = 0$, $k > 0$ и
$$\mathcal{D}_{k0} = \Lambda_k i^k \Lambda_0 : L^2(X_0) \longrightarrow L^2(X_k), \tag{4.8}$$
где Λ_0, Λ_k — некоторые операторы редукции порядка на X_0 и X_k;
3. $k = 0$, $l > 0$ и
$$\mathcal{D}_{0l} = \Lambda_0 i_l \Lambda_l : L^2(X_l) \longrightarrow L^2(X_0), \tag{4.9}$$
где Λ_0, Λ_l — некоторые операторы редукции порядка на X_0 и X_l.

Отметим, что при определении операторов (4.8) и (4.9) предполагается, что композиции определены и являются операторами нулевого порядка.

Проверка справедливости соотношения (4.7) для указанных трех классов операторов проводится аналогично проверке в [14], и мы ее здесь для краткости опускаем. □

Из леммы 4.1 следует корректность определения символа для морфизмов нулевого порядка. Отсюда следует корректность определения символа для морфизмов произвольного порядка.

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зеликин М. И., Стернин Б. Ю.* Об одной системе интегральных уравнений, возникающей в задаче С. Л. Соболева// Сиб. мат. ж. — 1977. — *18*, № 1. — С. 97–102.
2. *Лощенова Д. А.* Задачи Соболева, ассоциированные с действиями групп Ли// Дифф. уравн. — 2015. — *51*, № 8. — С. 1056–1069.
3. *Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю.* Об операторе Грина в относительной эллиптической теории// Докл. РАН. — 2003. — *391*, № 3. — С. 306–309.
4. *Нгуен Л. Л.* О нелокальных задачах Соболева// Дифф. уравн. — 2012. — *48*, № 8. — С. 1192–1196.
5. *Новиков С. П., Стернин Б. Ю.* Следы эллиптических операторов на подмногообразиях и K-теория// Докл. АН СССР. — 1966. — *170*, № 6. — С. 1265–1268.
6. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Эллиптические трансляторы на многообразиях с многомерными особенностями// Дифф. уравн. — 2013. — *49*, № 4. — С. 513–527.
7. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Индекс задач Соболева на многообразиях с многомерными особенностями// Дифф. уравн. — 2014. — *50*, № 2. — С. 229–241.
8. *Стернин Б. Ю.* Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности// Тр. Моск. мат. об-ва — 1966. — *15*. — С. 346–382.
9. *Стернин Б. Ю.* Эллиптические (ко)граничные морфизмы// Докл. АН СССР. — 1967. — *172*, № 1. — С. 44–47.
10. *Стернин Б. Ю.* Эллиптические морфизмы на многообразиях с особенностями (оснащение эллиптического оператора)// Докл. АН СССР. — 1971. — *200*, № 1. — С. 45–48.
11. *Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Относительная эллиптическая теория и задача Соболева// Мат. сб. — 1996. — *187*, № 11. — С. 115–144.
12. *Hörmander L.* Pseudo-differential operators// Commun. Pure Appl. Math. — 1965. — *18*. — С. 501–517.
13. *Nazaikinskii V., Sternin B.* Relative elliptic theory// В сб.: «Aspects of Boundary Problems in Analysis and Geometry». — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2004. — С. 495–560.
14. *Rempel S., Schulze B.-W.* Index theory of elliptic boundary problems. — Berlin: Akademie-Verlag, 1982.

Д. А. Полуэктова
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: darya.loshhenova.90@bk.ru

А. Ю. Савин
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: antonsavin@mail.ru

Б. Ю. Стернин
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-672-682 UDC 917.986.3

On the Algebra of Operators Corresponding to the Union of Smooth Submanifolds

 D. A. Poluektova, A. Yu. Savin, B. Yu. Sternin

Abstract. For a pair of smooth transversally intersecting submanifolds in some enveloping smooth manifold, we study the algebra generated by pseudodifferential operators and (co)boundary operators corresponding to submanifolds. We establish that such an algebra has 18 types of generating elements. For operators from this algebra, we define the concept of symbol and obtain the composition formula.

REFERENCES

1. M. I. Zelikin and B. Yu. Sternin, "Ob odnoy sisteme integral'nykh uravneniy, voznikayushchey v zadache S. L. Soboleva" [On one system of integral equations arising in the Sobolev problem], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1977, **18**, No. 1, 97–102 (in Russian).
2. D. A. Loshchenova, "Zadachi Soboleva, assotsiirovannye s deystviyami grupp Li" [Sobolev problems associated with actions of Lie groups], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2015, **51**, No. 8, 1056–1069 (in Russian).
3. V. E. Nazaykinskiy and B. Yu. Sternin, "Ob operatore Grina v otnositel'noy ellipticheskoy teorii" [On the Green operator in the relative elliptic theory], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2003, **391**, No. 3, 306–309 (in Russian).
4. L. L. Nguyen, "O nelokal'nykh zadachakh Soboleva" [On nonlocal Sobolev problems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2012, **48**, No. 8, 1192–1196 (in Russian).
5. S. P. Novikov and B. Yu. Sternin, "Sledy ellipticheskikh operatorov na podmnogoobraziyakh i K-teoriya" [Traces of elliptic operators on submanifolds and the K-theory], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1966, **170**, No. 6, 1265–1268 (in Russian).
6. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, "Ellipticheskie translyatory na mnogoobraziyakh s mnogomernymi osobennostyami" [Elliptic translators on manifolds with multidimensional singularities], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2013, **49**, No. 4, 513–527 (in Russian).
7. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, "Indeks zadach Soboleva na mnogoobraziyakh s mnogomernymi osobennostyami" [The index of Sobolev problems on manifolds with multidimensional singularities], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2014, **50**, No. 2, 229–241 (in Russian).
8. B. Yu. Sternin, "Ellipticheskie i parabolicheskie zadachi na mnogoobraziyakh s granitsey, sostoyashchey iz komponent razlichnoy razmernosti" [Elliptic and parabolic problems on manifolds with the boundary consisting of components of different dimension], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1966, **15**, 346–382 (in Russian).
9. B. Yu. Sternin, "Ellipticheskie (ko)granichnye morfizmy" [Elliptic (co)boundary morphisms], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1967, **172**, No. 1, 44–47 (in Russian).

10. B. Yu. Sternin, “Ellipticheskie morfizmy na mnogoobraziyakh s osobennostyami (osnashchenie elliptiches-kogo operatora)” [Elliptic morphisms on manifolds with singularities (rigging of an elliptic operator)], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1971, **200**, No. 1, 45–48 (in Russian).
11. B. Yu. Sternin and V. E. Shatalov, “Otnositel’naya ellipticheskaya teoriya i zadacha Soboleva” [Relative elliptic theory and the Sobolev problem], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1996, **187**, No. 11, 115–144 (in Russian).
12. L. Hörmander, “Pseudo-differential operators,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1965, **18**, 501–517.
13. V. Nazaikinskii and B. Sternin, “Relative elliptic theory,” In: *Aspects of Boundary Problems in Analysis and Geometry*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2004, pp. 495–560.
14. S. Rempel and B.-W. Schulze, *Index theory of elliptic boundary problems*, Akademie-Verlag, Berlin, 1982.

D. A. Poluektova
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: darya.loshhenova.90@bk.ru

A. Yu. Savin
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: antonsavin@mail.ru

B. Yu. Sternin
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia