Математика

УДК 517.9
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-103-112

О применении метода М.Н. Лагутинского к интегрированию дифференциальных уравнений 1-го порядка. Часть 1. Отыскание алгебраических интегралов

М. Д. Малых[*†]

[*] *Факультет наук о материалах*
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Ленинские Горы, Корпус «Б», Москва, Россия, 119991
[†] *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей*
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Метод М.Н. Лагутинского (1871–1915) позволяет искать рациональные интегралы и многочлены Дарбу заданного дифференциального кольца и поэтому может быть использован при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений в символьном виде. В настоящей статье представлена реализация метода Лагутинского, выполненная в свободной системой компьютерной алгебры Sage, и дан обзор её возможностей по интегрированию дифференциальных уравнений 1-го порядка в символьном виде.

В первой части статьи кратко изложены основные понятия метода Лагутинского для полиномиальных колец, затем этот метод приложен к отысканию алгебраических интегральных кривых дифференциальных уравнений вида $p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y$, где $p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$. Показано, как метод Лагутинского позволяет искать кривые заданного порядка или убеждаться в несуществовании таковых. Особо рассмотрены вопросы об ускорении вычислений и отыскании интегралов среди малочленов. Теория и её реализация протестированы на примерах из задачника А.Ф. Филиппова. В заключении даны рекомендации по оптимальному использованию метода Лагутинского.

Ключевые слова: метод Лагутинского, интегральные алгебраические кривые, sage, sagemath

Введение

В 1911 г. М.Н. Лагутинский [2,3] предложил способ отыскания частных и общих интегралов дифференцирований колец, основанный на вычислении определителей. Современное изложение этого метода для случая полиномиальных колец дано в [4,5], более общий случай рассмотрен в [6]. Этот метод подразумевает выполнение значительного числа рутинных вычислений, в целях ускорения которых был написан небольшой пакет Lagutinski [7] под Sage [1], который был представлен в 2016 году на ряде конференций по компьютерной алгебре [8–10]. В настоящей работе дан отчёт об использовании метода Лагутинского для интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка в символьном виде и тестировании названного в его честь пакета этого пакета на уравнениях, взятых из задачника А.Ф. Филиппова [11].

Статья поступила в редакцию 18 декабря 2016 г.
Исследование выполнено в рамках соглашения № 02.a03.21.0008 от 24.04.2016 г. между Министерством образования и науки Российской Федерации и Российским университетом дружбы народов. Работа поддержана грантом РФФИ № 16-07-00556.
Автор признателен проф. Л.А. Севастьянову (РУДН), взявшему на себя труд прочитать статью в рукописи, и сделавшему ряд важных замечаний. Приведённые в статье рисунки и вычисление были выполнены при помощи `Sage Mathematics Software` [1].

1. Определители Лагутинского в полиномиальных кольцах

1.1. Определители Лагутинского

Пусть R — полиномиальное кольцо с дифференцированием D и полем констант $\mathbb{Q}$. Сетное упорядоченное множество B элементов m_j кольца R будем называть базисом кольца, если

1) любой элемент кольца R можно представить как линейную комбинацию конечного числа элементов множества B с постоянными коэффициентами;
2) произведение любых двух элементов множества B принадлежит B, и следует строго после обоих сомножителей, т.е. $m_i m_j = m_n$ и n строго больше чисел i и j.

В дальнейшем по умолчанию используется базис, образованный мономами в градуированном лексикографическом упорядочении (glex-упорядочении). Условимся говорить, что порядок многочлена f равен наибольшему из номеров базисных элементов, входящих в разложение f по базису с ненулевыми коэффициентами. Порядком дроби f/g будем называть максимум из порядков числителя и знаменателя.

С тройкой R, D, B свяжем последовательность определителей Лагутинского. С этой целью вообразим бесконечную матрицу, первой строкой которой служит $m_1, m_2, \ldots$, второй строкой — производная первой $Dm_1, Dm_2, \ldots$, третьей — вторая производная первой $D^2m_1, D^2m_2, \ldots$, и так до бесконечности. Угловой минор n-го порядка этой матрицы будем обозначать как Δ_n и называть определителем Лагутинского n-го порядка.

Замечание 1. Эти определители относительно стандартного glex-базиса были впервые введены М.Н. Лагутинским (1871–1915) [2, 3], ему же в существенном принадлежит изложенный ниже метод отыскания интегралов дифференцирования кольца, о нем см. [12].

1.2. Вычисление определителей Лагутинского

Вычисление этих определителей реализовано в Sage в виде функции `lagutinski_det(R,D,B,N)`.

Пример 1. Вычисление определителя Лагутинского 2-го порядка в кольце $R = \mathbb{Q}[x, y]$ с дифференцированием

$$D = y(x+1)\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 + x + 2)\frac{\partial}{\partial y}$$

в стандартном glex-базисе в Sage можно выполнить так:

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 2)
sage: D=lambda phi: y*(x+1)*diff(phi,x)+(y^2+x+2)*diff(phi,y)
sage: B= sorted(((1+x+y)^30).monomials(),reverse=0)
sage: load("lagutinski.sage")
None
sage: lagutinski_det(R,D,B,2)
  y^2 + x + 2
```

Ресурсы, потребные для вычисления определителей Лагутинского, существенно зависят от порядка определителя. Например, в кольце $\mathbb{Q}[x, y]$ на современном компьютере уверенно и незаметно для пользователя вычисляют определители 10 порядка, возможность же вычисления определителя 20 порядка существенно зависит от дифференцирования. Оценки сложности получены в [5].

Обычно коэффициенты этих определителей являются очень большими по абсолютному значению целыми числами, поэтому можно было бы надеяться, что переход к полю $\mathbb{Z}/(p)$ позволит существенно ускорить вычисление. Пакет Lagutinski поддерживает работу с любыми полями, с которыми может работать система. Однако вычислительные эксперименты учат, что при больших порядках переход от $\mathbb{Q}$ к $\mathbb{Z}/(p)$ не приводит к существенному приросту производительности.

С другой стороны, вычисление определителя Лагутинского в фиксированной точке с целыми координатами, занимает заметно меньше ресурсов при условии, что подстановка координат точек предшествует вычислению определителя.

1.3. Рациональные интегралы дифференцирования кольца

Определение 1. Общим или рациональным интегралом f дифференцирования D называют элемент поля частных исходного кольца R, производная которого Df равна нулю.

Задача 1 (об отыскании рационального интеграла). Для заданной тройки R, D, B выяснить, допускает отыскать все многочлены Дарбу, порядок которых не превосходит заданного числа N; в случае утвердительного ответа вычислить интеграл.

Решение даётся следующей теоремой.

Теорема 1 (М.Н. Лагутинский, 1911). *Рациональный интеграл, порядок которого не превосходит N, существует тогда и только тогда, когда $\Delta_N = 0$, при этом интеграл можно вычислить как отношение миноров этого интеграла.*

Функция `lagutinski_integral(R,D,B,N)` возвращает искомый интеграл, если $\Delta_N = 0$ и $\Delta_{N-1} \neq 0$.

Пример 2. Дифференцирование

$$D = y(x+1)\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 + x + 2)\frac{\partial}{\partial y}$$

кольца $R = \mathbb{Q}[x, y]$ не имеет интегралов, числитель и знаменатель которых зависят от x и y линейно ($N = 3$), поскольку

```
sage: lagutinski_det(R,D,B,3)==0
False
```

но имеет таковой, среди функций, числитель и знаменатель которых зависят от x и y квадратично ($N = 6$), поскольку

```
sage: lagutinski_det(R,D,B,6)==0
True
```

Интегралом будет

```
sage: lagutinski_integral(R,D,B,6)
  (-54*x^2 + 18*y^2 - 72*x)/(-18*y^2 - 36*x - 54)
```

Как отмечалось выше в 1.2, при больших порядках N вычисление определителя Лагутинского как многочлена является заметно более ресурсоёмким по сравнению с вычислением его значения в одной точке с целыми коэффициентами. В пакет Lagutinski встроена функция `lagutinski_det_random`, которая вычисляет значение Δ_N при случайных целых значениях переменных $x, y, \ldots$, порождавших рассматриваемое кольцо R, взятых в окне $|x| \leqslant 100$, $|y| \leqslant 100, \ldots$; за каждое применение координаты случайной точки генерируются заново. Если эта функция возвращает число, отличное от нуля, то дифференцирование не допускает рациональный интеграл, порядок которого не превосходит N. Если получился нуль, то весьма вероятно, что дифференцирование таковой допускает и поэтому следует потратить ресурсы на вычисление определителя как многочлена.

Пример 3. Дифференцирование

$$D = (x + 4y)\frac{\partial}{\partial x} + (2x + 3y^2)\frac{\partial}{\partial y}$$

кольца $R = \mathbb{Q}[x, y]$ не имеет рациональных интегралов, порядок которых меньше 50:

```
sage: D=lambda phi: (x+4*y)*diff(phi,x) +(2*x+3*y^2)*diff(phi,y)
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,50)==0
False
```

Пример 4. Дифференцирование

$$D = (x + 4y)\frac{\partial}{\partial x} + (2x + 3y - 5)\frac{\partial}{\partial y}$$

кольца $R = \mathbb{Q}[x, y]$ вероятно имеет рациональный интеграл порядка 28:

```
sage: D=lambda phi: (x+4*y)*diff(phi,x) +(2*x+3*y-5)*diff(phi,y)
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,27)==0
False
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,28)==0
True
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,28)==0
True
```

2. Рациональные интегралы дифференциального уравнения

2.1. Задача Дебона

Задача 2 (задача Дебона). Выяснить, допускает ли заданное дифференциальное уравнение

$$p(x, y)\mathrm{d}x + q(x, y)\mathrm{d}y = 0, p, q \in \mathbb{Q}[x, y], \tag{1}$$

интеграл u в поле $\mathbb{Q}(x, y)$, порядок которого не превосходит заданного числа N, и в случае утвердительного ответа выписать этот интеграл.

Замечание 2. Задача об интегрировании дифференциальных уравнений в алгебраических функциях возникла ещё в 1630-х годах, когда Дебон (Florimond de Beaune) предложил Декарту несколько «обратных задач на касательные» [13, С. 192]. В начале прошлого века эту задачу связывали с именем Пуанкаре.

Замечание 3. То, что интеграл ищется именно в поле $\mathbb{Q}(x, y)$, а не в более широком $\mathbb{C}(x, y)$, нисколько не сужает задачу, поскольку интеграл из $\mathbb{C}(x, y)$ уравнения (1) с точностью до мультипликативной константы всегда имеет целые коэффициенты.

Задачу Дебона можно сформулировать и применительно к интегральным кривым.

Задача 3 (задача Дебона). Выяснить, являются ли интегральные кривые заданного дифференциального уравнения (1) алгебраическим кривыми, порядок которых не превосходит заданного числа n, и в случае утвердительного ответа выписать уравнение пучка этих кривых.

Порядок N в определении 3 понимается в том же смысле, что и в разделе 1.1, поэтому

$$N = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

В теории по методу неопределённых коэффициентов можно подставить в уравнение $Dr = 0$ выражение

$$u = \frac{a + \cdots + by^n}{1 + \cdots + cy^n}$$

и получить систему нелинейных алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов $a, b, c, \dots$. Выяснить разрешимость этой системы можно за конечное число действий и чисто алгебраическим путём. На практике описанное решение системы нелинейных алгебраических уравнений потребует заметных вычислительных мощностей, поэтому создатели алгоритмов решения этой задачи стремятся обойти решение нелинейных систем. Среди реализованных алгоритмов следует отметить метод определителей Лагутинского и метод Ж.-А. Вейля, 1985 [14].

2.2. Решение задачи по методу Лагутинского

Задача Дебона состоит в отыскании рационального интеграла u дифференцирования

$$D = p\frac{\partial}{\partial y} - q\frac{\partial}{\partial x},$$

порядки числителя и знаменателя которого не превосходят заданного числа N.

Теорема 2. *Дифференциальное уравнение* (1) *допускает рациональный интеграл, порядок которого не превосходит N, тогда и только тогда, когда $\Delta_N = 0$, при этом интеграл можно вычислить как отношение миноров этого интеграла.*

Например, дифференциальное уравнение (1) допускает семейство интегральных кривых 2-го порядка в том и только в том случае, когда $\Delta_6 = 0$, 3-го порядка — когда $\Delta_{10} = 0$ и т.д.

Пример 5. Чтобы выяснить, является ли интегральные кривые уравнения

$$xy' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2,$$

предложенного в [11] за № 169, кривыми второго порядка, следует вычислить Δ_6.

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 2)
sage: B= sorted(((1+x+y)^30).monomials(),reverse=0)
sage: p=(2*x+1)*y-y^2-x^2
sage: q=-x
sage: D=lambda phi: q*diff(phi,x) -p*diff(phi,y)
sage: lagutinski_det(R,D,B,5)==0
False
sage: lagutinski_det(R,D,B,6)==0
True
```

Зная, что $\Delta_6 = 0$, а $\Delta_5 \neq 0$, можно вычислить интеграл этого уравнения:

```
sage: lagutinski_integral(R,D,B,6)
  (-288*x^2 + 288*x*y - 288*x)/(-288*x + 288*y)
```

Чтобы убедится в том, что уравнение не допускает интегральных кривых порядка n, достаточно вычислить определитель Лагутинского порядка $N = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ в случайной точке, тем самым существенно сэкономив вычислительные ресурсы.

Пример 6. Интегральные кривые уравнения

$$(x - y^2)y' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2,$$

даже если они и являются алгебраическими, имеют порядок, большей 9:

```
sage: p=(2*x+1)*y-y^2-x^2
sage: q=-x+y^2
sage: D=lambda phi: q*diff(phi,x) -p*diff(phi,y)
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,55)==0
False
```

Часто отыскать уравнения интегральных кривых больших порядков помогает теория интегрирующего множителя, которая будет рассмотрена во второй части настоящей статьи.

2.3. Задача, в которой порядок искомого интеграла не задан

В формулировке задачи 3 явно требуется задание границы N для порядка искомых многочленов должна быть задана. Однако в классической парадигме интегрирования дифференциальных уравнений большое значение уделяли выяснению вопроса о существовании алгебраического интеграла произвольной степени.

Задача 4 (задача Дебона). Выяснить, допускает ли заданное дифференциальное уравнение (1) интеграл u в поле $\mathbb{Q}(x, y)$, и в случае утвердительного ответа выписать этот интеграл.

В теории оценка сверху для порядков интегралов заданного дифференцирования позволила бы свести эту задачу предыдущей. Однако с XVII века предпринимались многочисленные попытки нахождения оценок сверху для порядков интегралов заданного дифференциального уравнения, тем не менее эта проблема не решена и в то же время не доказана и её алгоритмическая неразрешимость. Оценки, полученные Пуанкаре в [15, С. 35–95], применимы лишь в некоторых частных случаях [2, С. 181]. Во всех современных реализациях алгоритмов отыскания рациональных интегралов дифференциальных уравнений 1-го порядка порядок интеграла полагают заданным [14].

2.4. Задача о малочленах

С практической точки зрения решение задачи 3 при больших N малоинтересно. Хорошо известно, что представление решения в виде алгебраического уравнения, содержащего несколько сотен слагаемых, обладает многими недостатками, в теории характерными только для решений в степенных рядах. Поэтому интересны не какие угодно рациональные интегралы, но представимые в компактном виде, то есть в виде отношения малого числа слагаемых (малочленов).

Задача 5 (о малочленах). Выяснить, допускает ли заданное дифференциальное уравнение (1) интеграл в поле $\mathbb{Q}(x, y)$, числитель и знаменатель которого является линейной комбинацией M мономов, порядки которых не превосходят заданного числа N, и в случае утвердительного ответа выписать этот интеграл.

При решении этой задачи по методу Лагутинского требуется вычислить много не связанных друг с другом определителей M-го порядка и выяснить, равен ли из них хоть один нулю или нет, эта процедура допускает естественное распараллеливание. Эта идея реализована в виде функции `lagutinski_micronomial(R,D,B,N,M)`, которая возвращает интеграл, представимый в виде отношения малочленов, если таковой существует.

Пример 7. Выясним, допускает ли заданное дифференциальное уравнение

$$(3x^4 + 2y)x\mathrm{d}y - (5x^4 + y)y\mathrm{d}x = 0$$

интеграл, числитель и знаменатель которого является линейной комбинацией трёх мономов, а порядок интегральных кривых не превосходит $n = 5$. В этом случае порядок интеграла ограничен числом $N = \dfrac{6 \cdot 7}{2} = 21$.

```
sage: p=-(5*x^4 + y)*y
sage: q=(3*x^4 + 2*y)*x
sage: D=lambda phi: q*diff(phi,x) -p*diff(phi,y)
```

Функция `lagutinski_micronomial` находит интеграл

```
sage: lagutinski_micronomial(R,D,B,21,3).factor()
  y^-3 * x * (x^4 + y)
```

на современном компьютере примерно за 20 секунд.

2.5. Интегрирование тестовых задач

Чтобы оценить возможности применения метода Лагутинского, обратимся к наиболее очевидному и простому источнику несложных дифференциальных уравнений — университетскому курсу «Дифференциальных уравнений», а именно к задачнику А. Ф. Филиппова [11].

Вычисление Δ_{55} в случайной точке (x, y) позволяет сразу выделить уравнения, интегральные кривые которых вероятно имеют порядок, не превышающий 9. В учебном курсе, кончено, алгебраические кривые большого порядка не встречаются, поэтому таким путём мы выделяем все 21 уравнение, интегральные кривые которых являются алгебраическими. Для двух третей из них $\Delta_{10} = 0$ и поэтому они легко интегрируются по методу Лагутинского, см. пример 5. Из оставшихся 7 номеров большинство удаётся проинтегрировать, повысив N.

Пример 8. Интегрирование уравнения № 198

$$xy^2(xy' + y) = 1$$

требует увеличения N до 25.

```
sage: q=x^2*y^2
sage: p=x*y^3-1
sage: D=lambda phi: q*diff(phi,x) -p*diff(phi,y)
sage: lagutinski_det(R,D,B,25)
  0
sage: lagutinski_integral(R,D,B,25)
  -x^3*y^3 + 3/2*x^2
```

В данном случае определитель 25-го порядка считается на удивление быстро.

Путём увеличения N не удаётся проинтегрировать лишь два номера — №№ 116 и 187, вычисления застревают на $N = 15$. Первое из этих уравнений, рассмотренное выше в примере 4, имеет интеграл, представимый в виде произведения степеней двух линейных функций. Интеграл второго уравнения оказывается четырёхчленом, который за несколько минут находится при помощи функции `lagutinski_micronomial(R,D,B,N,M)`. Следует также заметить, что уравнение № 187 — уравнение в полных дифференциалах, поэтому указанный способ, конечно, является чрезвычайно неэкономным.

Заключение

Проделанный вычислительный эксперимент подсказывает след. процедуру отыскания алгебраических интегральных кривых заданного дифференциального уравнения вида (1).

1. Вычислить Δ_{55} в случайно выбранной точке. Если $\Delta_{55} \neq 0$, то интегральные кривые имеют 10-й порядок и более или вовсе являются трансцендентными. Если $\Delta_{55} = 0$, то интегральные кривые вероятно имеют порядок, не превышающий 9.

2. Если $\Delta_{55} = 0$, вычислить Δ_{10} как функцию x и y. Если Δ_{10} тождественно равен нулю, то интегральные кривые имеет порядок, не превышающий 3-х, и они находятся по методу Лагутинского без существенных затрат.
3. Если Δ_{10} не равно тождественно нулю, пытаться вычислить Δ_N, постепенно повышая N до тех пор, пока не получится нуль или исчерпаются ресурсы.
4. Если ресурсы исчерпались, следует попытаться найти интегралы среди малочленов.

Литература

1. *Stein W. A. et al.*, 2015. — Sage Mathematics Software (Version 6.7). — The Sage Development Team. — `http://www.sagemath.org`.
2. *Лагутинский М. Н.* Приложение полярных операций к интегрировананию обыкновенных дифференциальных уравнений в конечном виде // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. — 1911. — Т. 12. — С. 111–243.
3. *Лагутинский М. Н.* О некоторых полиномах и связи их с алгебраическим интегрированием обыкновенных дифференциальньных алгебраических уравнений // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. — 1912. — Т. 13. — С. 200–224.
4. *Christopher C., Libre J., Vitório Pereira J.* Multiplicity of Invariant Algebraic Curves in Polynomial Vector Fields // Pacific J. Math. — 2007. — Vol. 229, No 1. — P. 63–117.
5. *Chéze G.* Computation of Darboux Polynomials and Rational First Integrals with Bounded Degree in Polynomial Time // Journal of Complexity. — 2011. — Vol. 27, No 2. — Pp. 246–262.
6. *Малых М. Д.* Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу М. Н. Лагутинского // Вестник НИЯУ МИФИ. — 2016. — Т. 5, № 24. — С. 327–336.
7. *Malykh M. D.*, 2016. — Lagutinski.sage, ver. 1.5. — RUDN University. — `http://malykhmd.neocities.org`.
8. *Malykh M. D.* On M. N. Lagutinski Method for Integration of Ordinary Differential Equations // International Conference “Polynomial Computer Algebra’2016”. — 2016. — Pp. 57–58.
9. *Малых М. Д.* Об интегрировании дифференциальных уравнений // Компьютерная алгебра. Материалы международной конференции. — 2016. — С. 25–29.
10. *Малых М. Д.* Об интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка в конечном виде // Пятая международная конференция «Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование». Сборник докладов. — 2016. — С. 81–82.
11. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: R&C, 2000.
12. *Добровольский В. А., Стрельцын Ж., Локоть Н. В.* Михаил Николаевич Лагутинский (1871–1915) // Историко-математические исследования. — 2001. — Т. 6. — С. 111–127.
13. *Декарт Р.* Геометрия с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. — Москва-Ленинград: ГОНТИ НКТП СССР, 1938.
14. Efficient Algorithms for Computing Rational First Integrals and Darboux Polynomials of Planar Polynomial Vector Fields / A. Bostan, G. Chéze, T. Cluzeau, J.-A. Weil // Math. Comp. — 2016. — Т. 85. — С. 1393–1425.
15. *Poincaré H.* Œuvres. — Paris: Gautier, 1934. — Vol. 3.

UDC 517.9
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-103-112

On Application of M. N. Lagutinski Method to Integration of Differential Equations in Symbolic Form. Part 1

M. D. Malykh[*†]

[*] *Faculty of Materials Sciences*
Lomonosov Moscow State University
GSP-1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation
[†] *Department of Applied Probability and Informatics*
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

The method of M. N. Lagutinski (1871–1915) allows to find rational integrals and Darboux polynomials for given differential ring and thus can be used for integration of ordinary differential equations in symbolic form. A realization of Lagutinski method was made under free open-source mathematics software system Sage and will be presented in this article with application for symbolic integration of 1st order differential equations.

In the first part of the article basic concepts of the Lagutinski method is briefly stated for polynomials rings. Then this method is applied to search of algebraic integrated curves for given ordinary differential equations of the form $p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y$ with $p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$. It is shown how the Lagutinski method allows to look for curves of the given order or to prove that there are not such curves. In particular questions about the optimization of computations and integration in micronomials are considered. The theory and its realization in Sage are tested on numerous examples from standard for Russia text-book by A.F. Filippov. Some recommendations for optimization of the Lagutinski method usage are made in the conclusion of the article.

Key words and phrases: Lagutinski method, algebraic integral curves, sage, sagemath

References

1. W. A. Stein, et al., Sage Mathematics Software (Version 6.7), The Sage Development Team (2015).
URL `http://www.sagemath.org`
2. M. N. Lagutinski, The Application of Polar Operations to Integration of the Ordinary Differential Equations in Finite Terms, Soobshh. Har'kov. matem. obshh. 2 ser. 12 (1911) 111–243, in Russian.
3. M. N. Lagutinski, On Some Polynoms and Their Aplication for Algebraic Integration of Ordinary Differential Algebraic Equations, Soobshh. Har'kov. matem. obshh. 2 ser. 13 (1912) 200–224, in Russian.
4. C. Christopher, J. Llibre, J. Vitório Pereira, Multiplicity of Invariant Algebraic Curves in Polynomial Vector Fields, Pacific J. Math. 229 (1) (2007) 63–117.
5. G. Chéze, Computation of Darboux Polynomials and Rational First Integrals with Bounded Degree in Polynomial Time, Journal of Complexity 27 (2) (2011) 246–262.
6. M. D. Malykh, On M.N. Lagutinsky's Method for Computation of Rational Integrals of Ordinary Differential Equations Systems, Vestnik of NRNU MEPhi 5 (24) (2016) 327–336, in Russian.
7. M. D. Malykh, Lagutinski.sage, ver. 1.5., RUDN University (2016).
URL `http://malykhmd.neocities.org`
8. M. D. Malykh, On M.N. Lagutinski Method for Integration of Ordinary Differential Equations, in: International Conference "Polynomial Computer Algebra'2016", 2016, pp. 57–58, in Russian.
9. M. D. Malykh, On Integration of Ordinary Differential Equations, in: Computer algebra. Materials of international conference, 2016, pp. 25–29, in Russian.
10. M. D. Malykh, On Integration of 1st Order Differential Equations in a Finite Terms, 2016, pp. 81–82, in Russian.
11. A. F. Filippov, Text-Book on Differential Equations, R&C, Izhevsk, 2000, in Russian.

12. V. A. Dobrovol'skij, J.-M. Strelcyn, N. V. Lokot', Mihail Nikolaevich Lagutinskij (1871–1915), Istoriko-matematicheskie issledovanija 6 (2001) 111–127, in Russian.
13. R. Descartes, Geometry with the Appendix of Selected Works of P. Fermat and Descartes' Correspondence, GONTI NKTP SSSR, Moscow-Leningrad, 1938, in Russian.
14. A. Bostan, G. Chéze, T. Cluzeau, J.-A. Weil, Efficient Algorithms for Computing Rational First Integrals and Darboux Polynomials of Planar Polynomial Vector Fields, Math. Comp. 85 (2016) 1393–1425.
15. H. Poincaré, Œuvres, Vol. 3, Gautier, Paris, 1934.