ВЕРОЯТНОСТНАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

К.А. Пупков

Российский университет дружбы народов
ул. Орджоникидзе, 3, Москва, Россия, 115419

Е.А. Сметанина

Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана
ул. 2-ая Бауманская, 5, Москва, Россия, 105005

Показана возможность применения обобщенного полиномиального хаоса для исследования устойчивости стохастических динамических систем с вероятностной неопределенностью.

Ключевые слова: неопределенность, стохастические системы, полиномиальный хаос, Монте-Карло.

На определенном этапе развития теории управления синтез законов управления осуществлялся на основе того, что априори известны модели объекта управления, модели воздействий на систему управления и ее структуру.

Такое представление приводило к тому, что синтезированное управление оказывалось не в полной мере адекватным всей динамике реальной системы и воздействий на нее.

Такая неадекватность сопряжена с тем, что мы принципиально не можем отобразить точно в моделях свойства реальных систем, т.е. реально существует некая неопределенность. Она имеет в системах следующие виды:

— параметрическая;
— по начальным условиям;
— воздействиям окружающей среды;
— структуре системы.

Одним из направлений преодоления неопределенности является построение адаптивных систем. Однако построение в системе контуров адаптации приводит к значительному усложнению системы и в общем случае снижению ее надежности. Кроме того, алгоритмы адаптации плохо работают при плохо определенных моделях. Не отвергая такого направления преодоления неопределенностей, теория управления начала развиваться по пути синтеза робастного управления, т.е. такого управления, при котором обеспечивается устойчивость и допустимая точность ее работы, конечно, при известных диапазонах неопределенностей. Предполагалось также, что робастность управления достигается при граничных значениях неопределенностей, тем самым обеспечивалась гарантия желаемого функционирования. Однако робастное управление, построенное по граничным значениям неопределенности, могло существенно ухудшать динамические свойства системы, например, сужать полосу частот пропускания, а следовательно, отрицательно влиять на динамическую точность. Это связано с тем, что на самом деле в интервале неопределенности некоторое конкретное ее значение является значением случайной величины и во многих практических системах распределение этой случайной величины не является равномерным.

Поэтому возникла и стала развиваться задача синтеза робастного управления при предположении, что функция плотности вероятности неопределенности имеет другие типы, например, Гауссова, Коши и др. плотности вероятности.

Здесь определилась проблема: каким образом при синтезе управления учесть вероятностный характер неопределенностей?

При этом надо решать две задачи:

— обеспечение устойчивости;

— оптимизация управления.

Конечно, при исследовании устойчивости и точности работы неопределенных систем управления можно применить метод Монте-Карло, т.е. метод статистических испытаний. Для этого надо иметь цифровую модель системы, накопить при моделировании множество реализаций процессов управления и по ним оценить эффективность работы системы. Следует отметить достаточно объемный способ оценки, по сути, это вычислительный эксперимент. Альтернативная методология состоит в аппроксимации стохастических динамических систем функциональными рядами [1; 3].

Здесь мы рассмотрим аналитический метод исследования устойчивости и синтеза робастного управления в неопределенных системах, где неопределенность — вероятностная с априори известной функцией распределения.

Для решения этой задачи обратимся к теории полиномиального стохастического хаоса [2].

Сначала рассмотрим свойства ортогональных полиномов.

Рассмотрим множество полиномов $\{Q_n(x),\ n \in N\}$, где $Q_n(x)$ — полином степени n и N может быть $N = \{0, 1, 2, ...\}$, если ряд бесконечен. Для конечного ряда N есть конечные неотрицательные целые числа.

Система полиномов ортогональна по отношению к действительной положительной мере $\gamma(x)$, если

$$\int_D Q_n(x) Q_m(x) d\gamma(x) = h_n^2 \delta_{nm} \ \text{для}\ n, m \in N,$$

где D — область меры $\gamma(x)$ и h_n — положительные константы; δ_{nm} — функция Кронекера, такая, что при $n \neq m$ $\delta_{nm} = 0$, а при $n = m$ $\delta_{nm} = 1$.

Если $h_n = 1$, то ряд ортонормированный.

В общем $\gamma(x)$ может быть непрерывной весовой функцией $w(x)$, и она может быть тождественной плотности вероятности.

Ортогональные полиномы могут быть получены путем непрерывного оператора Родригеса

$$Q_n = \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n}\left(w(x)\alpha^n(x)\right),$$

где $\alpha^n(x)$ — полином степени n.

Здесь мы будем считать, $w(x)$ есть функция плотности вероятности.

Теперь рассмотрим и определим, что такое однородный хаос.

Классификация однородного хаоса (ОХ) была впервые введена Н. Винером (1938) и была продолжением работы Вольтерра по обобщению ряда Тейлора для функционалов (N. Winer. The Homogenous chaos). Однородный хаос использует ортогональные полиномы Эрмита для приближения гауссовых случайных переменных. Камерон и Мартин использовали функционалы Эрмита для создания ортогонального базиса нелинейных функционалов и показали, что с помощью функционалов можно аппроксимировать любые функционалы с конечным вторым моментом в L_2 и что эти функционалы действительно сходятся в смысле L_2.

Таким образом, можно использовать Эрмит-Хаос для описания любых процессов второго порядка и чтобы этот процесс имел конечный момент второго порядка в терминах ортогональных полиномов.

Тем не менее большинство физических процессов в действительности соответствует этому требованию и поэтому оно практически приемлемо.

Введем понятие однородного хаоса [4].

Определим множество всех интегрируемых с квадратом случайных переменных θ.

Пусть $\{\xi_i(\theta)\}_{i=1}^{\infty}$ будет множеством ортогональных Гауссовых случайных переменных и пусть $\hat{\Gamma}$ будет пространством всех множеств в $\{\xi_i(\theta)\}_{i=1}^{\infty}$ меньшим и равным p. Кроме того, Γ_p будет представлять множество всех полиномов, которые ортогональны множеству $\hat{\Gamma}_{p-1}$. Пространство, замещенное Γ_p, обозначим $\bar{\Gamma}_p$.

Это пространство является подпространством $\theta\left(\bar{\Gamma}_p \subseteq \theta\right)$ и называется p-тый однородный хаос.

Мы назовем Γ_p полиномиальным хаосом (ПХ) порядка — p.

Теперь можем записать любой общий второго порядка случайный процесс как

$$X(\theta) = \sum_{p \geq 0} \sum_{n_1 + \ldots n_r = p} \sum_{p_1, \ldots, p_r} \Gamma_p\left(\xi_{p_1}(\theta), \ldots, \xi_{p_r}(\theta)\right)$$

или как линейную комбинацию всех полиномиальных хаосов порядка $p \geq 0$.

Полиномы в этом уравнении включают в себя r отдельных случайных переменных на $\{\xi_i(\theta)\}_{i=1}^{\infty}$, с k-той случайной переменной, содержащей многообразие n_k, и конечное значение включенных случайных переменных равно порядку ПХ –р.

Если предположить, что полиномиальный хаос — симметричный, то приведенное выше уравнение можно упростить, а именно:

$$X(\theta)=a_0\Gamma_0+\sum_{i=1}^{\infty}a_{i_1}\Gamma_1\left(\xi_{i_1}(\theta)\right)+\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=2}^{i_1}a_{i_1}a_{i_2}\Gamma_2\left(\xi_{i_1}(\theta)\times\right.$$

$$\left.\times\xi_{i_2}(\theta)\right)+\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=2}^{i_1}\sum_{i_3=3}^{i_2}a_{i_1i_2i_3}\Gamma_3\left(\xi_{i_1}(\theta)\xi_{i_2}(\theta)\xi_{i_3}(\theta)\right)+\ldots, \qquad (1)$$

где $\Gamma_p(\bullet)$ есть ПХ p-порядка.

Для случая однородного хаоса с гауссовыми переменными ξ с нулевым средним значением и единичной дисперсией эти полиномы являются полиномами Эрмита, и мы их будем выражать как

$$\Gamma_p=H_p\ (\text{член}\ \xi=(\xi_{i_1},\xi_{i_2},\ldots,\xi_{i_n})).$$

Эти полиномы имеют вид

$$H_n(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_n})=\ell^{-\frac{1}{2}\xi^T\xi(-1)^n}\frac{d^n}{d\xi_{i_1}\ldots d\xi_{i_n}}\ell^{-\frac{1}{2}\xi^T\xi}.$$

Для удобства $X(\theta)$ можно записать следующим образом:

$$X(\theta)=\sum_{i=0}^{\infty}\hat{a}_i\bar{\Psi}_i(\xi). \qquad (2)$$

Здесь однозначное соответствие между $\Psi_i(\xi)$ и $H_p(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_n})$, а также между коэффициентами $\hat{a}_i$ и $a_{i,\ldots,i_n}$.

Чтобы представить форму суммирования в уравнении (1) для $X(\theta)$ и как соотносятся Ψ_i в уравнении (2) с H_n рассмотрим разложение для двух случайных переменных:

$$\begin{gathered}X(\theta)=a_0H_0+a_1H_1(\xi_1)+a_2H_1(\xi_2)+a_{11}H_2(\xi_1,\xi_1)+\\+a_{12}H_2(\xi_2\xi_1)+a_{22}H_2(\xi_2\xi_2)+a_{111}H_3(\xi_1,\xi_1,\xi_1)+\\a_{121}H_3(\xi_2,\xi_1,\xi_1)+a_{211}H_3(\xi_2,\xi_{21},\xi_1)+\\+a_{222}H_3(\xi_2,\xi_2,\xi_2)+\ldots\end{gathered}$$

Члены этого разложения связаны с членами в уравнении (2) таким образом:

$$\hat{a}_0\Psi_0=a_0H_0;\ \hat{a}_1\Psi_1=a_1H_1(\xi_1);\ \hat{a}_2\Psi_2=a_2H_1(\xi_2)\ \text{и т.д.}$$

Полиномы ОХ формируют ортогональный базис, что означает среднее

$$\left\langle\Psi_i,\Psi_j\right\rangle=\left\langle\Psi_i^2\right\rangle\delta_{ij},$$

где δ_{ij} — функция Кронекера; $\langle\bullet,\bullet\rangle$ — среднее взвешенное произведение.

При этом оператор $\left\langle \Psi_i^2 \right\rangle$ в некоторых случаях можно описать численно:

$$\left\langle xy \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i,$$

где $x = [x:], y = [y_i]$;

матрично:

$$\left\langle xy \right\rangle = y^T \mathrm{M}x,$$

где M — Эрмита матрица;

в случайной форме:

$$\left\langle xy \right\rangle = E(xy);$$

квадратная матрица:

$$\left\langle A, B \right\rangle = (B^T A^T).$$

Для Эрмитова хаоса произведение ⟨•, •⟩ на гильбертовом пространстве определяется на основе гауссовых переменных

$$\left\langle f(\xi) g(\xi) \right\rangle = \int f(\xi) g(\xi) w(\xi) d\xi,$$

где весовая функция w(ξ) равна

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \ell^{-\frac{1}{2}\xi^T \xi}.$$

Переменная n имеет размерность вектора случайной переменной ξ.

Весовая функция $w(\xi)$ эквивалентна функции плотности вероятности для независимых n-мерных гауссовых распределений. Таким образом, базис полиномов Эрмитова хаоса ортогонален относительно Гауссова распределения и переменные в разложении являются гауссовыми случайными переменными.

Таким образом, ОХ (ЭХ) можно использовать в ситуации, когда стохастическая неопределенность в системе известна, как Гауссова.

Построение множества ортогональных полиномов. Теперь рассмотрим, каким образом можно построить множество ортогональных полиномов. Суть состоит в том, что функция веса $w(x)$ в реальных случаях может быть не обязательно нормальной.

Например, это может быть распределение Коши:

$$f(x) = \frac{K}{\pi\left[K^2 + (x-\mu)^2\right]},$$

где $-\infty < x < \infty$, K и μ — вещественные константы и $K > 0$.

Кроме того, область определения полиномов Эрмита бесконечна. На практике часто бывает необходимо генерировать множество ортогональных полиномов с желаемой областью определения.

Это можно сделать несколькими способами. Один из них — процесс Грамма-Шмидта, который здесь и представлен. Этот процесс включает в себя множество ортогональных функций $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ из множества линейных независимых функций $\{u_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ с весовой функцией $w(x)$.

Для начала дадим

$$\phi_0(x) = u_0(x).$$

Следующая функция $\phi_i(x)$ может быть определена из $\phi_0(x)$ путем вычитания из нее проекции $u_i(x)$ в $\phi_0(x)$:

$$\phi_1 = u_1(x) - \frac{\langle u_i(x)\phi_0(x)\rangle}{\langle \phi_0(x)^2\rangle}\phi_0(x),$$

где $\langle f(x)g(x)\rangle = \int f(x)g(x)w(x)dx.$

Чтобы теперь проверить, что $\phi_1(x)$ ортогональна к $\phi_0(x)$, рассмотрим скалярное произведение

$$\langle \phi_0(x)\phi_1(x)\rangle = \langle \phi_0(x)u_1(x)\rangle - \frac{\langle u_i(x)\phi_0(x)\rangle}{\langle \phi_0(x)^2\rangle}\times$$

$$\times\langle \phi_0(x)\phi_0(x)\rangle = \langle \phi_0(x)u_1(x)\rangle - \langle \phi_0(x)u_1(x)\rangle = 0$$

В общем виде имеем

$$\phi_1 = u_1(x) - \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\langle u_i(x)\phi_\kappa(x)\rangle}{\langle \phi_\kappa(x)^2\rangle}\phi_\kappa(x).$$

Пример

Рассмотрим генерацию множества ортогональных полиномов по отношению к весовой функции

$$w(x) = \ell^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Примем $u(x) = x^i$, для $i = 0, 1, ..., \infty$.

Первый полином

$$\phi_0(x) = u_0(x) = 1,$$

чтобы найти

$$\phi_1(x) = x - \frac{\langle x\cdot 1\rangle}{\langle 1\cdot 1\rangle}.$$

Теперь $\langle 1\cdot 1\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\ell^{-x^2}dx = \sqrt{2\pi}$ и $\langle x\cdot 1\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}x\ell^{-x^2}dx = 0,$

так что

$$\phi_1(x) = x - \frac{0}{2\pi} = x.$$

Теперь найдем $\phi_2(x)$:

$$\phi_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle 1 \rangle} - \frac{\langle x^3 \rangle}{\langle x^2 \rangle},$$

где $\langle x^2 \rangle = 2\pi$ и $\langle x^3 \rangle = 0.$

Получим $\phi_2(x) = x^2 - 1,$

$\phi_3(x) = x^3 - 3x$ и т.д.

Это есть полиномы Эрмита.

Применение идеи ПХ приводит к преобразованию стохастической динамической линейной системе с $x \in R^n$, $u \in R^m$, с p-тым порядком ПХ приводит к детерминированной линейной системе с более высокой размерностью $n(p + 1)$.

Пример

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t, \Delta) = a(\Delta)x(t, \Delta),$$

где $a(\Delta) = \overline{a}_0 + \overline{a}_2\Delta^2$, $\Delta \in [-1, 1]$, — т.е. случайная величина с равномерным распределением и $\overline{a}_i$, $i = 0, 2$ — известна.

Поскольку Δ — равномерно распределенная случайная величина, будем использовать полиномы Лежандра для моделирования каждого из процессов.

В примере будем использовать полиномы до 3-го порядка. Разложение x здесь $x(t, \Delta) = \sum_{i=0}^{3} a_i\phi_i(\Delta)$ и разложение для $a(\Delta)$ есть $a(\Delta) = \sum_{i=0}^{3} a_i\phi_i(\Delta).$

Полиномы Лежандра (первые три) будут

$$\phi_0 = 1$$

$$\phi_1 = \Delta$$

$$\phi_2 = \frac{3}{2}\Delta^2 - \frac{1}{2}$$

$$\phi_3 = \frac{5}{2}\Delta^3 - \frac{3}{2}\Delta.$$

Ясно, что по формуле для $a(\Delta)$ разложение будет

$$a(\Delta) = \left(\overline{a}_0 + \frac{1}{3}\overline{a}_2\right)\phi_0 + \frac{2}{3}\overline{a}\phi_2.$$

Тогда уравнение движения будет

$$\sum_{j=0}^{3} \dot{x}_j\phi_j = \left(\sum_{k=0}^{3} a_k\phi_k\right)\left(\sum_{i=0}^{3} \phi_i\right) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} a_k x_i \phi_k \phi_i.$$

Если спроектировать обе части в ϕ_j и разделить на $\langle \phi_j^2 \rangle$, получим

$$\dot{x}_j = \frac{1}{\langle \phi_j^2 \rangle}\sum_{i=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} \langle \phi_k \phi_i \phi_j \rangle =$$

$$= \frac{1}{\left\langle \phi_j^2 \right\rangle} \left(\sum_{k=0}^{3} a_k \left[\left\langle \phi_k \phi_j \phi_0 \right\rangle \left\langle \phi_k \phi_j \phi_i \right\rangle \left\langle \phi_k \phi_j \phi_2 \right\rangle \left\langle \phi_k \phi_j \phi_3 \right\rangle \right] \right) X,$$

где $X = \left[x_0, x_1, x_2, x_3 \right]^T$.

Структура может быть легко идентифицирована как j-строка матрицы вида:

$$\Psi_k = \begin{bmatrix} \hat{\ell}_{0k0} & \hat{\ell}_{0k1} & \cdots & \hat{\ell}_{0kp} \\ \hat{\ell}_{0k1} & \hat{\ell}_{1k1} & \cdots & \hat{\ell}_{1kp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\ell}_{0kp} & \hat{\ell}_{1kp} & \cdots & \hat{\ell}_{pkp} \end{bmatrix}.$$

Поэтому уравнение движения, потому, что два ненулевых коэффициента в разложении $a(\Delta)$ будет иметь вид

$$\dot{X} = (a_0 \Psi_0 + a_1 \psi_2) X = \left(\left(\overline{a}_0 + \frac{1}{2} a_2 \right) \Psi_0 + \frac{2}{3} \overline{a}_2 \Psi_2 \right) X.$$

Таким образом можно описать динамику линейной стохастической системы. Эту процедуру можно повторить для полиномов более высокого порядка с целью лучшего приближения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Schetzen M.* The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems. — Melbourne, FL: Krieger Publishing Company, 2006.

[2] *Xiu D. and Karniadakis G.E.* The Winer-Askey polynomial chaoc for stochastic differential equations, SIAM J. Sci. Comput., vol. 24, pp. 619—644, 2002.

[3] *Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. — М.: Наука, 1976. [*Pupkov K.A., Kapalin V.I., Yushenko A.S.* Funkcionalnye rjady v teorii nelinejnyh system. — M.: Nauka, 1976.]

[4] *Fisher J.R.* “Stability analysis and control of stochastic dynamic systems using polynomial chaos.” Texas A&M University, Aerospace Engineering, August, 2008.

PROBABILITYS UNCERTAINTY IN STOCHASTIC DYNAMICAL CONTROL SYSTEMS

K.A. Pupkov

Peoples’Friendship University of Russia

Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

E.A. Smetanina

Bauman Moscow State Technical University

2-Bauman str., 5, Moscow, Russia, 105005

This study applies generalized polynomial chaos theory to dynamic systems with uncertainties.

Key words: uncertainty, stochastic systems, polynomial chaos, Monte-Carlo.