УДК 517.917

Уравнения программных движений манипуляционных систем

Р. Г. Мухарлямов *, **Г. Йоро** †, **Н. В. Абрамов** ‡

* *Кафедра теоретической механики*
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

† *Кафедра математики и информатики*
Университет Абобо–Аджамэ Абиджан
Кот Д' Ивуар, 02 Bp 801 Абиджан 02 UFR-SFA

‡ *Кафедра экономической информатики*
Самарский государственный экономический университет
ул. Советской Армии, 141, Самара, Россия, 443091

Предлагается метод построения уравнений динамики манипуляционных систем в обобщённых координатах и в канонических переменных. Управляющие воздействия определяются в соответствии с требованием экспоненциальной устойчивости интегрального многообразия системы дифференциальных уравнений динамики, соответствующего уравнениям связей. Приводится решение задачи управления программным движением плоского двухзвенного манипулятора.

Ключевые слова: программные движения, двухзвенный манипулятор, управления связей.

1. Введение

Уравнения динамики управляемого манипуляционного робота могут быть составлены, если известны его кинетическая энергия, внешние силы, способ воздействия управляющих сил и программа движения схвата или отдельных звеньев, представленная уравнениями связей. Известны разнообразные формы определения выражений динамических показателей и уравнений связей и алгоритмы составления уравнений динамики манипулятора. В [1–5] представлено достаточно полное описание динамики манипулятора на основе методов Лагранжа–Эйлера и алгоритмов определения функции Лагранжа. В [6] динамика манипуляционного робота с программными связями и с заданными уравнениями возмущений связей представлена уравнениями Лагранжа второго рода. Построенные уравнения позволяют определить значения управляющих сил и моментов, обеспечивающих необходимые движения схвата и звеньев манипулятора, согласованные с программными связями. В [7] приводятся условия устойчивости многообразия, определяемого уравнениями связей.

В настоящей работе предлагается метод построения уравнений динамики манипуляционных систем в обобщённых координатах и в канонических переменных. Определяются управляющие воздействия, обеспечивающие устойчивость интегрального многообразия уравнений динамики, соответствующего уравнениям связей. Формулируются условия экспоненциальной устойчивости интегрального многообразия системы дифференциальных уравнений динамики, соответствующего уравнениям связей. Приводится решение задачи управления программным движением двухзвенного манипулятора в обобщённых координатах и в канонических переменных.

Статья поступила в редакцию 12 февраля 2009 г.
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (06-01-00664) .

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему твёрдых тел, положение которой определяется обобщёнными координатами $q_1, \ldots, q_n$, составляющими вектор $q = (q_1, \ldots, q_n)$. Пусть $v = (v_1, \ldots, v_n)$ — вектор обобщённых скоростей $v = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, $T = \frac{1}{2}v^T M v$ — кинетическая энергия системы, $M = (m_{ij})$, $m_{ij} = m_{ij}(q)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $P = P(q)$ — потенциальная энергия, $L = T - P$ — лагранжиан, $Q = Q(q, v, t)$ – вектор обобщённых непотенциальных внешних сил.

К звеньям манипулятора приложены управляющие силы и моменты, составляющие вектор обобщённых сил R, который должен быть определён так, чтобы удовлетворялись уравнения связей, наложенных на обобщённые координаты и обобщённые скорости,

$$f(q,t) = 0, \quad \dot f(q,v,t) = 0, \quad f'(q,v,t) = 0, \tag{1}$$

где $f = f_1, \ldots, f_m$ и $f' = (f_{m+1}, \ldots, f_r)$ — соответственно векторы левых частей уравнений голономных и неголономных связей, а вектор $\dot f = \dot f_1, \ldots, \dot f_m$ определяется производной от уравнений голономных связей:

$$\begin{gathered} \dot f = f_q v + f_t, \quad f_q = (f_{\mu i}), \quad f_t = (f_{\mu t}), \quad f_{\mu i} = \frac{\partial f_\mu}{\partial q_i}, \quad f_{\mu t} = \frac{\partial f_\mu}{\partial t}, \\ \mu = 1, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{2}$$

Требуется построить уравнения динамики манипуляционной системы, обеспечивающие стабилизацию связей по отношению к начальным отклонениям от уравнений связей (1), которые неизбежно приводят к отклонениям от уравнений связей при численном решении.

3. Уравнения динамики системы в обобщённых координатах

Для описания динамики манипуляционной системы воспользуемся принципом Журдена, записанном через обобщённые координаты:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial q} - Q - R\right)^T \delta v = 0. \tag{3}$$

Будем полагать, что уравнения связей (1) накладывают ограничения на вектор виртуальных скоростей системы:

$$F\delta v = \delta\alpha, \quad F = \begin{pmatrix} f_q \\ f' \end{pmatrix}, \quad \delta\alpha = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Решение уравнения (4) с прямоугольной матрицей коэффициентов F $(r < n)$ есть

$$\delta v = \delta s[FC] + F^+ \delta\alpha, \tag{5}$$

где δs — произвольно малая скалярная величина, $[FC]$ — векторное произведение векторов-строк матрицы Fи произвольных $n - r - 1$ векторов, составляющих строки матрицы C, $F^+ = F^T\left(FF^T\right)^{-1}$.

Подстановка выражения (5) в (3) приводит к равенству

$$\left(\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial q} - Q - R\right)^T (\delta s[FC] + F^+\delta\alpha) = 0.$$

Связи, описываемые уравнениями (1), предполагаются обычно идеальными. Следовательно, $R = F^T\lambda$, где $F = (f_{\rho i})$, $f_{\mu i} = \frac{\partial f_\mu}{\partial q_i}$, $f_{\sigma i} = \frac{\partial f_\sigma}{\partial v_i}$, $\rho = 1, \ldots, r$, $\mu = 1, \ldots, m$, $\sigma = m+1, \ldots, r$, и вектор $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ множителей Лагранжа λ_ρ.

Уравнения динамики системы записываются в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = v, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q + F^T\lambda, \quad q(t_0) = q^0, \quad v(t_0) = v^0. \tag{6}$$

Вектор $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ определяется из условий

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \dot{f}, \quad \frac{\mathrm{d}\dot{f}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{7}$$

При этом решение системы уравнений (7) устойчиво по отношению к интегральному многообразию $\Omega(t)$, которое определяется уравнениями (1). Так как тривиальное решение $f = 0$, $\dot{f} = 0$, $f' = 0$ не является устойчивым асимптотически, то при численном интегрировании дифференциальных уравнений отклонения от многообразия возрастают по норме. Решение задачи стабилизации связей введением уравнений программных связей с соответствующим построением уравнений возмущений связей приводит к модификации множителей Лагранжа λ, учитывающей отклонения от уравнений связей в процессе решения [7].

4. Уравнения динамики системы в канонических переменных

Для представления уравнений динамики в канонических переменных введём вектор соответствующих импульсов $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}$, и функцию Гамильтона:

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i - L. \tag{8}$$

Учитывая выражение функции Лагранжа и предположение о структуре кинетической энергии, определим выражения вектора обобщённых скоростей v и уравнений связей (1), (2) в канонических переменных q, p:

$$v = M^{-1}p, \quad M^{-1} = \left(m^{ij}\right), \quad m^{ij} = m^{ij}(q), \tag{9}$$

где m^{ij} — элементы матрицы M^{-1}, обратной к матрице M.

$$f(q, t) = 0, \quad \phi(q, p, t) = 0, \quad \phi = (\phi_1, \ldots, r), \tag{10}$$

$$\phi_\mu = \sum_{i,j=1}^{n} f_{\mu i}(q, t) m^{ij}(q) p_j + f_{\mu t}(q, t), \quad \phi_\sigma = f_\sigma\left(q, M^{-1}(q), p, t\right). \tag{11}$$

Варьирование обеих частей равенства (8)

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(v_i\delta p_i + p_i\delta v_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial L}{\partial v_i}\delta v_i\right)$$

приводит к известным соотношениям

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = v_i,$$

что позволяет представить уравнения динамики (6) в виде системы дифференциально-алгебраических уравнений, составленных из $2n$ дифференциальных уравнений динамики и уравнений связей, составленных относительно канонических переменных q, p:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q} + Q + F^T\lambda, \tag{12}$$

$$f(q,t) = 0, \quad \phi(q,p,t) = 0,$$

$$q(t_0) = q^0, \quad p(t_0) = M(q^0)v^0.$$

Элементы матрицы F в правой части второго уравнения системы (12) с учётом равенств (9), (11) являются функциями канонических переменных q, p:

$$F = (f_{\rho i}), \quad f_{\mu i} = \frac{\partial f_\mu(q,t)}{\partial q_i}, \quad f_{\sigma i} = \frac{\partial f_\sigma(q,v,t)}{\partial v_i}, \quad v = M^{-1}(q)p.$$

5. Управляющие реакции связей

Для обеспечения асимптотической устойчивости интегрального многообразия $\Omega(t)$ заменим уравнения связей (10) уравнениями программных связей:

$$f(q,t) = a, \quad \phi(q,p,t) = \alpha, \quad a = (a_1, \ldots, a_\mu), \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r). \tag{13}$$

Составляющие a_μ, α_ρ векторов a, α оценивают возмущения связей. Продифференцируем обе части равенств (13) с учётом уравнений системы (12):

$$\frac{\partial f}{\partial q}v + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}, \tag{14}$$

$$(\phi H) + \frac{\partial \phi}{\partial p}\left(Q + F^T\lambda\right) + \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}, \quad (\phi H) = \frac{\partial \phi}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial \phi}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{15}$$

Из равенств (11), (14) следует, что $\frac{\mathrm{d}\alpha_\mu}{\mathrm{d}t} = \alpha_\mu$ и $\frac{\partial\phi}{\partial p} = F$. Равенство (15) представляет систему линейных алгебраических уравнений относительно множителей Лагранжа, если значение производной $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$ считать заданным:

$$\left(FF^T\right)\lambda = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} - \left((\phi H) + FQ + \frac{\partial\phi}{\partial t}\right). \tag{16}$$

Если $\det\ \left(FF^T\right) \neq 0$, то существует обратная матрица $\left(FF^T\right)^{-1}$ и решение уравнения (16)

$$\lambda = \left(FF^T\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} - (\phi H) - FQ - \frac{\partial\phi}{\partial t}\right), \tag{17}$$

которое состоит из двух слагаемых:

$$\begin{gathered} \lambda = \lambda^0(q,p,t) + \lambda^1(a,\alpha,q,p,t), \\ \lambda^0(q,p,t) = -\left(FF^T\right)^{-1}\left((\phi H) + FQ + \frac{\partial\phi}{\partial t}\right), \\ \lambda^1(a,\alpha,q,p,t) = \left(FF^T\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}. \end{gathered} \tag{18}$$

В силу определения вектора λ поведение решения системы (12) по отношению к уравнениям связей (10) зависит от изменения во времени производной $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$

вектора α, оценивающего отклонения от уравнений связей. Если $\alpha = const$, то $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = 0$, следовательно, $\lambda = \lambda^0(q,p,t)$, и равенства

$$f(q,t) = a, \quad \phi(q,p,t) = \alpha$$

представляют первые интегралы уравнений динамики системы

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q} + Q + F^T\lambda^0. \tag{19}$$

В самом деле, подстановкой значения (18) вектора λ^0 в левую часть равенства (15) легко убедиться в выполнении равенства $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = 0$. Это означает, что, если начальные значения q^0, v^0 выбраны так, чтобы выполнялись условия

$$f\left(q^0, t\right) = 0, \quad \phi\left(q^0, p^0, t_0\right) = 0, \tag{20}$$

то решение системы уравнений (19) будет удовлетворять равенствам (10) при всех $t > t_0$. Если начальные значения q^0, v^0 не соответствуют равенствам (20), то поведение решения системы уравнений (19) относительно многообразия $\Phi(t)$, определяемого уравнениями (10), зависит от значения $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$.

6. Устойчивость по отношению к уравнениям связей

Определим изменение векторов a, α дифференциальными уравнениями возмущений связей

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \dot{a}, \quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = A_1(q,p,t)a + A_2(q,p,t)\alpha, \\ \dot{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \quad A_1 = \left(a_\gamma^\mu\right), \quad A_2 = \left(a_\gamma^{\mu+\rho}\right), \quad \gamma, \rho = 1, \ldots, r.\end{gathered} \tag{21}$$

Для описания динамики системы с учётом возможных отклонений от уравнений связей (10) можно использовать систему дифференциально-алгебраических уравнений (12), (13), (21) относительно неизвестных q, p, λ с начальными условиями (21). Матрицы A_1, A_2 в правой части уравнений (21) являются произвольными, от выбора которых зависит изменение вектора $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$, что посредством вектора λ влияет на решение системы (12).

Определение 1. Решение системы дифференциально-алгебраических уравнений (12), (13), (21) устойчиво по отношению к уравнениям связей (10), если для всех $\delta > 0$, для которых выполняется условие $\|y(t_0)\| \leqslant \delta, \quad y(t) = (a(t), \alpha(t))$, существует такое $\epsilon = \epsilon(\delta) > 0$, что при всех $t > t_0$ будет справедливо неравенство $\|y(t)\| \leqslant \epsilon$.

Определение 2. Решение системы дифференциально-алгебраических уравнений (12), (13), (21) устойчиво асимптотически по отношению к уравнениям связей (10), если оно устойчиво по отношению к уравнениям связей (10) и существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} \|y(t)\| = 0$.

Определение 3. Если существуют такие конечные значения q^0, p^0, $\delta > 0$, $T > t_0$, что решение системы дифференциально-алгебраических уравнений (12), (13), (21), соответствующее начальным условиям $q(t_0) = q^0$, $p(t_0) = p^0$, $\|y(t_0)\| \leqslant \delta$, удовлетворяет неравенству $\|y(T)\| \geqslant \epsilon > \delta$, то оно неустойчиво по отношению к уравнениям связей (10).

Очевидно, если матрицы $A_1(q,p,t)$, $A_2(q,p,t)$ ограничены: $\|A_1(q,p,t)\| < L_1$, $\|A_2(q,p,t)\| < L_2$, то из устойчивости или асимптотической устойчивости тривиального решения $a = 0$, $\alpha = 0$ системы дифференциальных уравнений возмущений связей (21) следуют соответствующие неравенства $\|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\| < L\epsilon$, $L = L_1 + L_2$, или $\lim\limits_{t\to\infty} \|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\| = 0$. Замена векторов a, α, $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$ соответствующими выражениями из (13), (21) после подстановки выражения (17) вектора λ приводит к системе уравнений относительно канонических переменных q, p:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p},$$
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q} + Q + F^T\left(FF^T\right)^{-1}\left(A_1 f + A_2\phi - \left((\phi H) + FQ + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\right), \tag{22}$$
$$q(t_0) = q^0, \quad p(t_0) = p^0.$$

В случае, когда матрицы A_1, A_2 являются нулевыми, система уравнений (22) принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q} + Q - F^T\left(FF^T\right)^{-1}\left((\phi H) + FQ + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

и допускает первые интегралы, определяемые равенствами $f(q,t) = c_0$, $\phi(q,p,t) = c_1$, где c_0, c_1 — произвольные постоянные векторы. Система дифференциальных уравнений (22) при соответствующих начальных значениях q^0, p^0 допускает интегральное многообразие $\Phi(t)$, определяемое уравнениями связей (10). В случае, когда матрицы A_{21}, A_{22} отличны от нуля, поведение решения системы (22) по отношению к многообразию $\Phi(t)$ зависит от выбора этих матриц.

Если матрицы A_1, A_2 являются постоянными, то для обеспечения асимптотической устойчивости тривиального решения системы (21) достаточно потребовать, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части. В общем случае суждение об устойчивости по отношению к уравнениям связей (10) делается по функции Ляпунова $V = V(a,\alpha,q,p,t)$, $V(0,0,q,p,t) = 0$, построенной применительно к векторам a, α, и её производной, вычисленной в силу системы уравнений (21):

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial p}F^T\left(FF^T\right)^{-1}\right)A_1 a + \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial p}F^T\left(FF^T\right)^{-1}\right)A_2\alpha +$$
$$+ (VH) + \frac{\partial V}{\partial p}Q - \frac{\partial V}{\partial p}F^T\left(FF^T\right)^{-1}\left((\phi H) + FQ + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + \frac{\partial V}{\partial t}. \tag{23}$$

В отдельных случаях суждение об устойчивости упрощается. Так, если $V = V(a,\alpha,q,t)$, то выражение (23) принимает вид:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial a}A_1 a + \frac{\partial V}{\partial \alpha}A_2\alpha + \frac{\partial V}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Составим функцию Ляпунова в виде положительно определённой квадратичной формы

$$2V = y^T K y, \quad y = (a_1, \ldots, a_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_r)$$

с постоянной матрицей коэффициентов и представим систему уравнений (21) в виде

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A(q,p,t)y, \tag{24}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad I = \left(\delta_\mu^\nu\right), \quad \delta_\mu^\nu = 0, \quad \mu \neq \nu, \quad \mu, \nu = 1, \ldots, m,$$

$$A_{21} = \left(a_\mu^\nu\right), \quad A_{22} = \left(a_\mu^{m+\nu}\right), \quad A_{23} = \left(a_\mu^{m+\sigma}\right),$$

$$A_{31} = \left(a_\sigma^\nu\right), \quad A_{32} = \left(a_\sigma^{m+\nu}\right), \quad A_{33} = \left(a_\sigma^{m+\kappa}\right),$$

$$\kappa, \sigma = m+1, \ldots, r.$$

Теорема. *Если матрица A может быть представлена в виде произведения симметричных определённо-положительных матриц $A = -K^{-1}L$, где K — постоянная матрица, $L = L(q,p,t)$, и выполняются неравенства*

$$\|L(q,p,t)\| \geqslant \lambda_0 > 0, \quad k_1 \leqslant \|K\| \leqslant k,$$

то система (24) *имеет экспоненциально устойчивое тривиальное решение $a = 0$, $\alpha = 0$.*

Производная функции V, вычисленная в силу системы уравнений (24), является определённо-отрицательной квадратичной формой относительно составляющих вектора α: $\dot V = -y^T L(q,p,t)y$. Оценим величину производной функции Ляпунова с учётом условий теоремы:

$$\dot V = -y^T L(q,p,t)y \leqslant -\lambda_0 \|y\|^2. \tag{25}$$

Из неравенства (25) с учётом оценки $k_1\|y\|^2 \leqslant y^T K y \leqslant k_2 \|y\|^2$ получаем неравенство $\dot V \leqslant kV$, $k = -2\lambda_0/k_2$ или $V \leqslant V_0 e^{k(t-t_0)}$. Следовательно,

$$\|\alpha\|^2 \leqslant 2V/k_1 \leqslant 2V_0 e^{k(t-t_0)}/k_1 \leqslant (k_2/k_1)\|\alpha_0\|^2 e^{k(t-t_0)}.$$

Пример. Рассмотрим модель двухзвенного манипулятора промышленного робота РПМ-25 [4]. Звенья O_1O_2 и O_2C манипулятора являются абсолютно твёрдыми стержнями, соединёнными цилиндрическим шарниром O_2. Звено O_1O_2 связано с неподвижным основанием цилиндрическим шарниром O_1. Обозначим C_1, C_2 центры масс звеньев и $l_1 = O_1O_2$, $l_2 = O_2C$, $L_1 = O_1C_1$, $L_1 = O_2C_2$. За обобщённые координаты примем углы поворота звеньев q_1, q_2. Пусть m_1, m_2, и J_1, J_2 соответственно массы и моменты инерции звеньев относительно осей шарниров, g — ускорение свободно падающего тела. Будем считать, что манипулятор управляется моментами R_1, R_2, приложенными в шарнирах.

Вектор $R = (R_1, R_2)$ управляющих моментов определим так, чтобы невесомый схват манипулятора, совпадающий с концом C звена O_2C, совершил переход из произвольной точки M_0 плоскости O_1xy в начало координат, минуя препятствие, ограниченное границей $\Psi : (x-2)^2 + 4y^2 - 1 = 0$. Это возможно, если движение схвата в прямоугольной системе координат определяется решением системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{3}x\left((x-2)^2 + 4y^2 - 1\right) - 4xy^2, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{2}{3}y\left((x-2)^2 + 4y^2 - 1\right) + xy(x-2). \end{cases} \tag{26}$$

Правые части системы дифференциальных уравнений (26) определены [8] так, чтобы начало координат являлось особой точкой типа узел, и кривая Ψ представляла собой сепаратрису. При этом система (26) допускает интегралы

$$f_1(x,y) \equiv x = 0, \quad f_2(x,y) \equiv y = 0, \quad f_3 \equiv \frac{1}{2}\left((x-2)^2 + 4y^2 - 1\right) = C_3, \tag{27}$$

где C_3 — произвольная постоянная. В окрестности начала координат система (26) может быть заменена уравнениями

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2y.$$

Выражая прямоугольные координаты x, y точки C и их производные через обобщённые координаты q_1, q_2 и обобщённые скорости $\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = v_1$, $\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} = v_2$ манипулятора

$$\begin{cases} x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2), \\ y = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\left((l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)\right) v_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) v_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \left(l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)\right) v_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) v_2, \end{cases}$$

представим систему (26) уравнениями неголономных программных связей:

$$B(q)v + b(q) = \alpha, \tag{28}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

$$b_{11} = 3\left(l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)\right), \quad b_{12} = 3 l_2 \sin(q_1 + q_2),$$

$$b_{21} = 3\left(l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)\right), \quad b_{22} = 3 l_2 \cos(q_1 + q_2),$$

$$\begin{aligned} b_1 = &-(l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2))\times \\ &\times \Big((l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) - 2)^2 + 4\left(l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)\right)^2 - 1\Big) - \\ &- 12(l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2))(l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2))^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 = &\ 2(l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2))\times \\ &\times \Big((l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) - 2)^2 + 4\left(l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)\right)^2 - 1\Big) - \\ &- 3(l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2))(l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2))\times \\ &\times (l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) - 2). \end{aligned}$$

Уравнения возмущений связей представим линейной системой

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = A\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{29}$$

с постоянной матрицей коэффициентов A. Будем считать, что действительные части корней характеристического уравнения системы (29) отрицательны.

Матрица $M = (m_{ij})$ коэффициентов кинетической энергии $T = = \frac{1}{2} v^T M v$ и потенциальная энергия P системы определяются выражениями:

$$m_{11} = J_1 + J_2 + m_2 l_1 (l_1 + 2L_2 \cos q_2), \quad m_{12} = m_{21} = J_2 + m_2 l_1 L_2 \cos q_2, \quad m_{22} = J_2,$$

$$P = \left(m_1 L_1 \sin q_1 + m_2\left(l_1 \sin q_1 + L_2 \sin(q_1 + q_2)\right)\right) g.$$

Уравнения динамики манипулятора записываются в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = v, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = M^{-1}(R-\gamma), \end{cases} \tag{30}$$

где

$$M^{-1} = \left(m_{11}m_{22} - m_{11}^2\right)^{-1} \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}, R = B^T\lambda, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2), \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2),$$

$$\gamma_1 = -m_2 l_1 L_2 (2v_1 + v_2) v_2 \sin q_2 + (m_1 L_1 + m_2 l_1 g)\cos q_1 + m_2 L_2 \cos(q_1+q_2),$$

$$\gamma_2 = m_2 L_2 \left(l_1 v_1^2 \sin q_2 + g\cos(q_1+q_2)\right).$$

Из (28)–(30) следует выражение вектора λ через обобщённые координаты и скорости манипулятора:

$$\begin{aligned}
&\lambda = \left(BM^{-1}B^T\right)^{-1}\left(\left(AB - \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right)v + \left(Ab - \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\right) + BM^{-1}\gamma\right),\\
&\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}b_{11}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}b_{12}}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}b_{21}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}b_{22}}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}b_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}b_2}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix},\\
&\frac{\mathrm{d}b_{11}}{\mathrm{d}t} = 3v_1(l_1\cos q_1 + l_2\cos(q_1+q_2)) + 3l_2 v_2 \cos(q_1+q_2),\\
&\frac{\mathrm{d}b_{12}}{\mathrm{d}t} = 3v_2(v_1+v_2)\cos(q_1+q_2),\\
&\frac{\mathrm{d}b_{21}}{\mathrm{d}t} = -3v_1(l_1\sin q_1 + l_2\sin(q_1+q_2)) - 3l_2 v_2\cos(q_1+q_2),\\
&\frac{\mathrm{d}b_{22}}{\mathrm{d}t} = -3l_1(v_1+v_2)\sin(q_1+q_2),\\
&\frac{\mathrm{d}b_1}{\mathrm{d}t} = b_1^1(q)v_1 + b_1^2(q)v_2, \quad \frac{\mathrm{d}b_2}{\mathrm{d}t} = b_2^1(q)v_1 + b_2^2(q)v_2,\\
&b_1^1(q) = y(q)\left(3(x(q)-1)^2 - 2x(q) + 16y(q)(y(q) - 2x(q))\right),\\
&b_2^1(q) = 2y^2(q) + x(q)\left(26(y(q))^2 + 7 - (x(q)+1)^2\right),\\
&b_2^2(q) = 2y(q)(x(q)+1)l_2\sin(q_1+q_2) + \\
&\qquad + \left(24(y(q))^2 + 7 - (x(q)+1)^2\right)l_2\cos(q_1+q_2),\\
&x(q) = l_1\cos q_1 + l_2\cos(q_1+q_2), \quad y(q) = l_1\sin q_1 + l_2\sin(q_1+q_2).
\end{aligned}$$

Составим уравнения динамики манипулятора в канонических переменных

$$q = (q_1, q_2), \quad p = (p_1, p_2), \quad p_1 = \frac{\partial L}{\partial v_i}, \quad L = T - P, \quad p = Mv,$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = M^{-1}p, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q} + B^T\lambda, \tag{31}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \frac{\partial H}{\partial q_2}\right), \quad H = T + P,$$

$$T = \frac{1}{2} p^T M^{-1} p, \quad P = \left(m_1 L_1 \sin q_1 + m_2 (l_1 \sin q_1 + L_2 \sin(q_1 + q_2))\right) g,$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = p^T \frac{\partial M^{-1}}{\partial q_k} p + \left(\frac{\partial P}{\partial q_k}, \frac{\partial M^{-1}}{\partial q_k}\right) M^{-1}, \quad \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_1} = 0, \quad i, j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial m_{11}}{\partial q_2} = -2 m_2 l_1 L_2 \sin q_2, \quad \frac{\partial m_{12}}{\partial q_2} = \frac{\partial m_{21}}{\partial q_2} = -m_2 l_1 L_2 \sin q_2, \quad \frac{\partial m_{22}}{\partial q_2} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial q_1} = \left(m_1 L_1 \cos q_1 + m_2 (l_1 \cos q_1 + L_2 \cos(q_1 + q_2))\right) g,$$

$$\frac{\partial P}{\partial q_2} = m_2 L_2 g \cos(q_1 + q_2).$$

Представим уравнение связей (28) в канонических переменных q, p:

$$B(q) M^{-1}(q) p + b(q) = \alpha. \tag{32}$$

Тогда из (29), (31), (32) следует:

$$\lambda = \left(B M^{-1} B^T\right)^{-1} \times$$
$$\times \left(\left(\left(AB = \frac{\partial B}{\partial q} M^{-1} p - \frac{\partial b}{\partial q} \right) M^{-1} - B \left(\frac{\partial M^{-1}}{\partial q} M^{-1} p \right) \right) p + Ab + B M^{-1} \frac{\partial H}{\partial q} \right).$$

Если матрицу A представить в виде произведения двух ограниченных постоянных матриц

$$A = -K^{-1} L, \quad \|L\| \geqslant \lambda_0 > 0, \quad k_1 \leqslant \|K\| \leqslant k_2,$$

причём матрица K удовлетворяет условиям Сильвестра, то система дифференциально-алгебраических уравнений (29), (31), (32) имеет решение

$$\|\alpha\|^2 \leqslant (k_2/k_1) \|\alpha_0\|^2 e^{k(t - t_0)}, \quad k = -2\lambda_0 / k_2,$$

экспоненциально устойчивое по отношению к уравнениям связей

$$B(q) M^{-1}(q) p + b(q) = 0.$$

Литература

1. *Пол Р.* Моделирование, планирование траекторий и управление. Движение робота-манипулятора. — М.: Наука, 1976. — 104 с.
2. *Витенбург И.* Динамика систем твердых тел (пер. с англ.). — М.: Мир, 1980. — 202 с.
3. *Вукабратович М., Стокич Д.* Управление манипуляционными роботами: теория и прилоложения. — М.: Наука, 1985. — 384 с.
4. *Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г.* Манипуляционные роботы. — М.: Наука, 1989. — 368 с.
5. *Мухарлямов Р. Г., Абрамов Н. В.* Моделирование механических систем // Вестник РУДН. Серия «Прикладная математика и информатика». — 1995. — № 1. — С. 29–33.
6. *Мухарлямов Р. Г.* Управление программным движением многозвенного манипулятора // Вестник РУДН. Серия «Прикладная математика и информатика». — 1998. — № 1. — С. 22–39.

7. *Мухарлямов Р. Г.* Стабилизация движений механических систем на заданных многообразиях фазового пространства // ПММ. — 2006. — Т. 70, № 2. — С. 236–249.
8. *Мухарлямов Р. Г.* Уравнения движения механических систем. — М.: Изд. РУДН, 2001. — 99 с.

UDC 517.917

Programmed Motions Equations of Manipulation Systems

R. G. Mukharliamov [*], **G. Joro** [†], **N. V. Abramov** [‡]

[*] *Department of Theoretical Mechanics*
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho–Maklaya str. 6, Moscow, Russia, 117198

[†] *Département de mathématiques*
Université d'Abobo-Adjamé, UFR-SFA
22 BP 1709, Abidjan 22, Côte d'Ivoire

[‡] *Department of mathematics and informatics*
Samara State Unversity of Economics
Sovetskoi Armii str. 141, Samara, Russia, 443090

The method of constructing dynamics equations of manipulation systems in generalized coordinates and canonical variables is suggested. Control actions are defined in consistence with exponential stability of the dynamics equations integral manifold, which is described by constraints equations. The solution of the problem of two-link plane manipulators programmed motion is given.