

## ГЕОМЕТРИЯ И ФОРМООБРАЗОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КУНСА

В.Н. Иванов

Российский университет дружбы народов  
ул. Орджоникидзе, 3, Москва, Россия, 115419

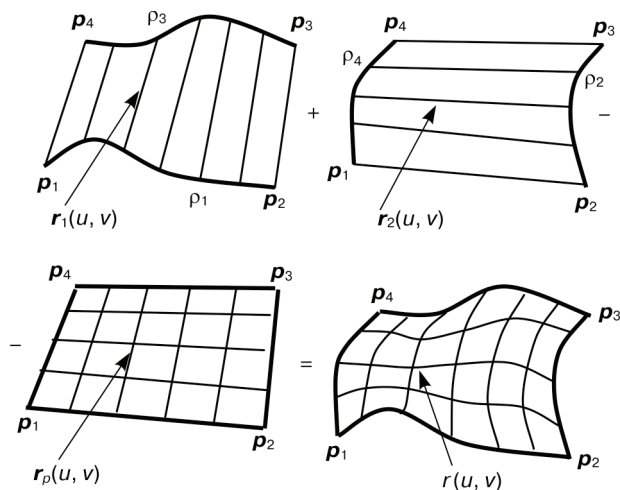
В статье рассматриваются вопросы формообразования модифицированных поверхностей Кунса с наклонными плоскими и пространственными опорными кривыми, а также вопросы задания пространственных опорных кривых на заданном четырехугольном и треугольном криволинейных планах. Приводятся изображения некоторых видов модифицированных поверхностей Кунса в системе MathCad.

**Ключевые слова:** четырехугольный криволинейный план, параметризация кривых, поверхности Кунса, модифицированные поверхности Кунса.

Современное градостроительство требует создания новых архитектурных форм при проектировании общественных зданий, спортивных и специальных сооружений с использованием тонкостенных пространственных конструкций.

Широкие возможности создания разнообразных пространственных форм представляют поверхности Кунса [1; 2]. Геометрия и вопросы конструирования разнообразных пространственных форм на основе поверхностей Кунса рассматривались в работах [3; 4; 5]. Поверхность Кунса строится на произвольном 4-угольном плане как сумма двух линейчатых поверхностей, построенных по двум противоположным опорным плоским кривым (в вертикальной плоскости) за вычетом косоугольной плоскости (гипара), проведенной через угловые точки контура [1].

Построение поверхности Кунса отображено на рис. 1.



**Рис. 1.** Образование поверхности Кунса:

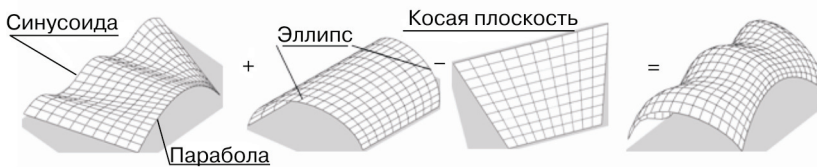
$\rho_i(t)$ ,  $t_{i1} \leq t_i \leq t_{i2}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  — векторные уравнения контурных линий;  $\mathbf{p}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — векторы угловых точек контура;  $u_i = t_i(u) = t_{i1}(1 - u) + t_{i2}u$ ,  $v_j = t_j(v) = t_{j1}(1 - v) + t_{j2}v$ ,  $i = 1, 3$ ,  $j = 2, 4$  — параметризация контурных кривых

Векторное уравнение поверхности получаем в виде

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_1(u, v) + \mathbf{r}_2(u, v) - \mathbf{r}_p(u, v), \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}_1(u, v) = \mathbf{p}_1(u_1) \cdot (1-v) + \mathbf{p}_3(u_3) \cdot v$ ;  $\mathbf{r}_2(u, v) = \mathbf{p}_4(v_4) \cdot (1-u) + \mathbf{p}_2(v_2) \cdot u$  — уравнения линейчатых поверхностей, построенных по противоположным контурным линиям  $\mathbf{p}_1(u_1)$ ,  $\mathbf{p}_3(u_3)$  и  $\mathbf{p}_2(v_2)$ ,  $\mathbf{p}_4(v_4)$  соответственно;  $\mathbf{r}_p(u, v) = [\mathbf{p}_1(1-u) + \mathbf{p}_2u](1-v) + [\mathbf{p}_4(1-u) + \mathbf{p}_3u]v$  — уравнение косой плоскости (гипара), проведенной через угловые точки 4-угольного плана.

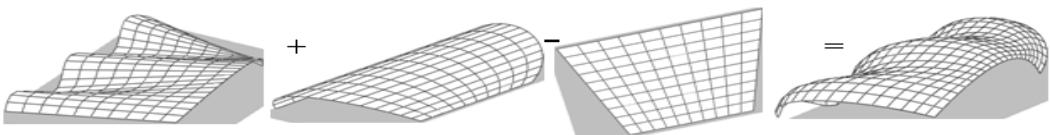
Рассмотрим для примера трапециевидный план с координатами угловых точек угловыми  $\mathbf{p}_1(-1, 5; 0; 0)$ ;  $\mathbf{p}_2(1, 5; 0; 0)$ ;  $\mathbf{p}_3(2, 5; 3; 0)$ ;  $\mathbf{p}_4(-2, 5; 3; 0)$ . Принимаем опорные кривые:  $\mathbf{p}_1(t_1)$  — парабола со стрелой подъема 0,5;  $\mathbf{p}_3(t_3)$  — синусоида на 5 полувольт с амплитудой 0,25;  $\mathbf{p}_2(t_2)$ ,  $\mathbf{p}_4(t_4)$  — полуэллипсы с осями 3,08 и 1,0. Образование поверхности Кунса приведено на рис. 2.



**Рис. 2.** Поверхность Кунса с опорными кривыми:  
1 — парабола; 2, 4 — эллипсы; 3 — синусоида

Анализ векторного уравнения поверхности Кунса (1) показывает, что если в качестве опорных кривых  $\mathbf{p}_i(t_i)$  взять пространственные или плоские наклонные кривые, то это уравнение также будет определять некоторую поверхность. Как и в случае поверхности Кунса, вид поверхности с произвольными пространственными опорными кривыми определяется заданием опорных кривых.

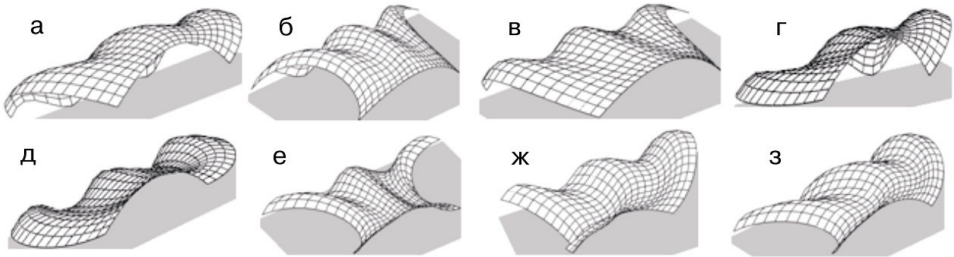
Рассмотрим образование поверхности с плоскими наклонными опорными кривыми. Четырехугольный план и опорные кривые возьмем из предыдущего примера. Пусть опорные кривые образуют с вертикальной плоскостью углы: 1-я, 3-я —  $\pi/6$ ; 2-я, 4-я —  $\pi/4$ . Образование поверхности с наклонными кривыми показано на рис. 3.



**Рис. 3.** Модифицированная поверхность Кунса с наклонными опорными кривыми

Поверхности, образованные суммированием линейчатых поверхностей с плоскими наклонными и пространственными кривыми, будем далее называть *модифицированными* поверхностями Кунса.

Изменяя наклон опорных кривых, можно получить множество новых форм поверхностей, не меняя тип опорных кривых и заданный 4-угольный план. На рисунке 4 показаны варианты поверхностей Кунса с опорными кривыми предыдущего примера, получаемые при изменении наклона опорных эллипсов.

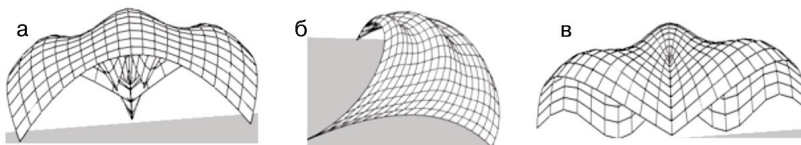


**Рис. 4.** Варианты модифицированных поверхностей Кунса при изменении наклона опорных эллипсов

На рисунке 4а показано отклонение эллипсов от вертикальной плоскости на угол  $\pi/4$  во внешнюю сторону трапецевидного плана, на рис. 4б — отклонение опорных эллипсов во внутреннюю сторону плана. На рисунке 4в один эллипс отклоняется во внутреннюю область плана, другой — во внешнюю сторону плана. При этом на симметричном трапецевидном плане получаем асимметричную форму поверхности. На рисунке 4г и 4з один из опорных эллипсов лежит в горизонтальной плоскости с отклонением во внешнюю и внутреннюю сторону плана. На рисунке 4д оба опорных эллипса горизонтальны с отклонением во внешнюю сторону плана, а на рис. 4е — с отклонением во внутреннюю сторону плана. На рисунке 4ж показано отклонение опорных эллипсов от вертикальной плоскости на углы  $\pi/4$  и  $5/4\pi$  соответственно.

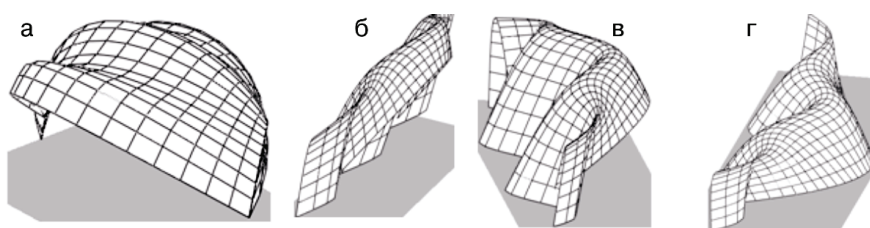
Аналогичные варианты можно рассматривать и с другими опорными кривыми как с каждой опорной кривой отдельно, так и в совместных комбинациях с двумя, тремя и четырьмя опорными кривыми одновременно.

Совмещая две опорные точки 4-угольного контура, можно получить поверхность на треугольном криволинейном плане. На рисунке 5а 3-я и 4-я точки трапецевидного плана совмещены в точке с координатой  $(0; 3)$ , образуя равнобедренный треугольный план. При этом контурная кривая (синусоида) между точками 3—4 входит в уравнение поверхности, что отражается на форме поверхности. Опорная кривая в совмещенной точке вырождается в сдвоенную вертикальную прямую линию. На рисунке 5а опорные эллипсы отклонены во внешнюю область треугольного плана, отклонение одного опорного эллипса проведено во внутреннюю другого во внешнюю сторону треугольного плана.



**Рис. 5.** Модифицированные поверхности Кунса на треугольном плане

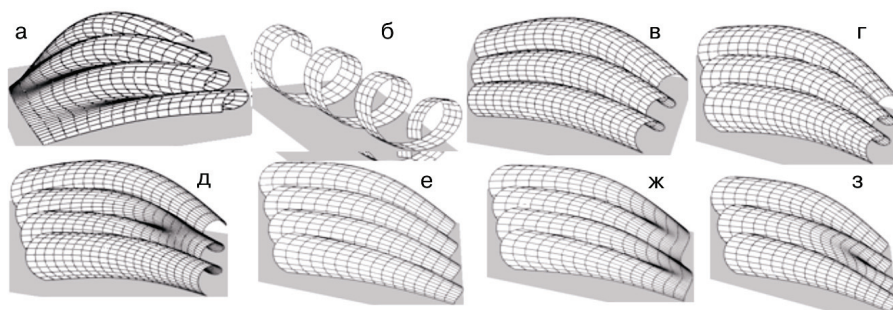
Совмещение всех точек 4-угольного плана на одной прямой для канонических поверхностей Кунса (с вертикальными плоскими опорными кривыми) приводит к вырождению поверхности в плоскую (сдвоенную) фигуру. Для модифицированных поверхностей Кунса с наклонными плоскими кривыми сведение всех точек 4-угольного плана на одну прямую приводит к созданию новых форм поверхностей. Варианты поверхностей с угловыми точками на одной прямой представлены на рис. 6.



**Рис. 6.** Модифицированные поверхности Кунса с угловыми точками на одной прямой

На рисунке 6а 1-я и 2-я точки совмещены в точке с координатой (0; 0), 3-я и 4-я — в точке (0; 3). 1-я опорная кривая — парабола и 3-я опорная кривая — синусоида вырождаются в вертикальные линии. На рисунке 6б—г опорные точки размещены на прямой  $x = 0$ , координаты опорных точек на оси  $y$  не изменялись. На рисунке 6б наклоны 1-й опорной кривой — параболы и 3-й опорной кривой — синусоиды от вертикали равны  $30^\circ$ . На рисунке 6в синусоида горизонтальна.

Рассмотрим теперь построение модифицированных поверхностей Кунса с вариантами пространственных и наклонных плоских опорных кривых (рис. 7).



**Рис. 7.** Модифицированные поверхности Кунса с плоскими наклонными и спиральными пространственными опорными кривыми

На рисунке 7а приведена модифицированная поверхность Кунса на равнобедренном трапециевидном плане с координатами угловых точек угловыми  $p_1(-1,5; 0; 0)$ ;  $p_2(1,5; 0; 0)$ ;  $p_3(2,5; 5; 0)$ ;  $p_4(-2,5; 5; 0)$  с тремя плоскими наклонными (параболой и двумя полуэллипсами) и одной спиральной опорными кривыми. На рисунке 7б показан элемент поверхности в зоне опорной спирали в четыре витка радиусом  $a = 0,25$ . На рисунке 7в опорные кривые являются спиралями одинакового радиуса  $a = 0,25$  с тремя витками.

На рисунке 7г радиус одной опорной спирали  $a = 0,5$ , у второй опорной спирали радиус  $a = 0,25$ . Число витков опорных спиралей равно 3. На рисунке 7д число витков опорных спиралей 4 и 3 соответственно. На рисунке 7е 1-я опорная кривая спираль радиусом  $a = 0,5$  на 4 витка, 3-я опорная кривая синусоида на 4 волны амплитудой 0,25. На рисунке 7ж 3-я кривая синусоида на 2 волны. На рисунке 7з опорная спираль на 3 витка, опорная синусоида на 4 волны. На всех вариантах рис. 7 2-я и 4-я кривые — полуэллипсы с полуосями 2,5 и 1.

На рисунке 8а, б представлена модифицированная поверхность Кунса на равнобочном трапециевидном плане с угловыми координатами  $p_1(-2; 0; 0)$ ;  $p_2(2; 0; 0)$ ;  $p_3(4; 7; 0)$ ;  $p_4(-4; 7; 0)$  и пространственными опорными кривыми. Проекции опорных кривых на горизонтальную плоскость: 1 — парабола подъемом 0,5 с вершиной внутрь плана; 2, 4 — синусоиды на 3 полуволны амплитудой 0,25; 3 — синусоида на 7 полуволн амплитудой 0,25. Вертикальные функции опорных кривых: 1 — синусоида на 3 полуволны амплитудой 0,5; 2, 4 — полуэллипсы с полуосями 3,5 и 1,5; 3 — синусоида на 5 полуволн амплитудой 0,5.

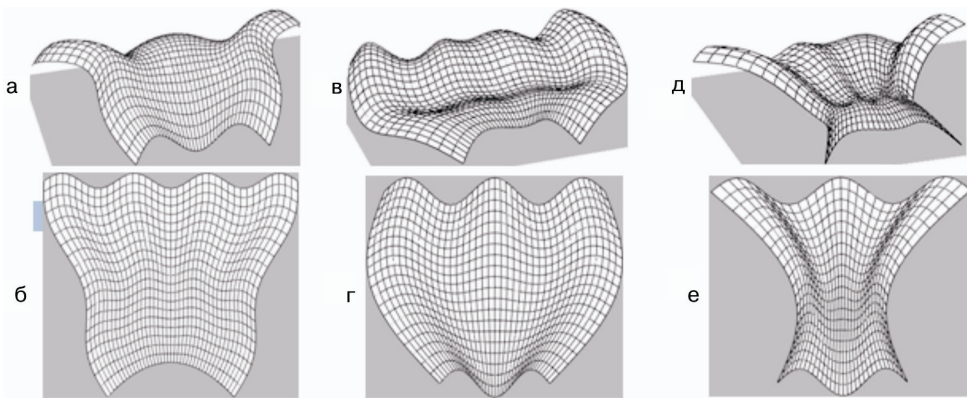


Рис. 8. Модифицированные поверхности Кунса с пространственными опорными кривыми

На рисунке 8в, г представлен общий вид и вид сверху модифицированной поверхности Кунса, в которой в горизонтальной плоскости используются функции вертикальной координаты поверхности, представленной на рис. 8а, б, а в качестве функции вертикальной координаты — функции контура горизонтальной плоскости этой поверхности. Контурные полуэллипсы на рис. 8в, г расположены на внешней стороне трапециевидного плана. На рисунке 8д, е используются опорные кривые идентичные контурным кривым рис. 8в, г с отклонением полуэллипсов внутрь трапециевидного плана.

Таким образом, использование плоских наклонных и пространственных опорных кривых значительно расширяет возможности создания разнообразных типов поверхностей, в том числе поверхностей на заданном четырехугольном или треугольном криволинейном плане.

В заключение отметим особенности поверхностной системы координатных линий. В канонической поверхности Кунса с плоскими вертикальными опорными

кривыми поверхность системы координат состоит из системы плоских координатных кривых. Для модифицированных поверхностей Кунса с плоскими наклонными опорными кривыми поверхность системы координатных линий также представляет систему плоских линий переменного наклона. В случае пространственных опорных кривых координатные линии поверхности также являются пространственными кривыми.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Денискин Ю.И.* Особенности аппроксимации обводов параметрическими полиномами в форме Бернштейна // Прикладная геометрия. — 2009. — Вып. 2. — № 2.
- [2] *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Энциклопедия аналитических поверхностей. — М.: Либроком, 2010.
- [3] *Иванов В.Н., Тхома Анамария.* Архитектура тонкостенных конструкций на основе поверхностей Кунса // Современные проблемы геометрического моделирования: Материалы украинско-российской научно-практической конференции, Харьков, 24—27 апреля 2007 г. — Харьков, 2007. — С. 151—157.
- [4] *Иванов В.Н.* Архитектурные композиции на основе поверхностей Кунса. Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2007. — № 4. — С. 5—10.
- [5] *Иванов В.Н.* Архитектурные композиции тонкостенных пространственных конструкций // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник: За напрямом «Інженерна механіка». — Вип. 223. Частина 2. — Луцьк, 2008. — С. 131—137.
- [6] *Иванов В.Н.* О расширении класса поверхностей Кунса // Прикладна геометрія та інженерна графіка: Міжвідомчий науково-технічний збірник. — Вип. 84: Труды VII международной научно-практической конференции «Геометрическое моделирование и дизайн», Украина, Одесса, 21—25 апреля 2010 г. — Киев: КНУБА, 2010. — С. 197—201.

## FORMING THE SURFACES ON FOURANGLE CURVED PLAN

V.N. Ivanov

Peoples' Friendship University of Russia  
Ordshonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

The article concerns the questions of forming of the modified Coon's surfaces with inclined plane or space curved support lines on four angle plan. Using the inclined curved lines as support lines for construction of modified Coon's surfaces allows to receive many new forms of space constructions. There regards questions of erecting of the space lines on given curved four angle plan. There shown drawings of modified Coon's surfaces made with the help of 'MathCad' system.

**Key words:** four angle curved plan, parameterization of the curved lines, Coon's surfaces, modified Coon's surfaces.