Расчет тонких упругих оболочек

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ОБОЛОЧЕК ПРИ ЗАМЕНЕ ПЕРЕМЕНОЙ

В.Н. ИВАНОВ, *д-р техн. наук, профессор*
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва,ул. Миклухо-Маклая, 6.

В статье рассматриваются вопросы преобразования системы уравнений и функций внутренних усилий, деформаций и перемещений в оболочке при замене переменных по одной из координат Рассмотрен пример преобразований уравнений оболочки в форме пологого прямого геликоида.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: пологие оболочки, несопряженная ортогональная система координат, коэффициенты квадратичных форм, дифференциальные уравнения типа Эйлера, прямой геликоид, безразмерные координаты.

При использовании уравнений оболочек в произвольной криволинейной системе координат [1] часто затем проводят замену переменных, для придания системе уравнений более удобной для решения формы

В работе [2] В.Г. Рекач рассмотрел задачу о расчете оболочки в форме прямого пологого геликоида. Подробно алгоритмы расчета оболочек в форме пологого прямого геликоида отражены в работах [3, 4].

Обратив внимание, что расчетные уравнения пологого геликоида являются уравнениями типа Эйлера и проведя замену переменной $u = e^t$, $t = \ln u$, u - координата прямолинейной образующей прямого геликоида, В.Г. Рекач приводит исходную систему уравнений с переменными коэффициентами к системе уравнений с постоянными коэффициентами. За основу взяты уравнения пологих оболочек В.З. Власова в ортогональной несопряженной системе координат. При замене переменных использовались формулы преобразования производных

$$\frac{d^k ..}{du^k} = \frac{1}{u^k}\sum_{m=1}^{k} c_m^k \frac{d^m ..}{dt^m}, \quad c_k^k = 1 \; ; \quad \frac{d^{k+1} ..}{du^{k+1}} = \frac{1}{u^{k+1}}\left(\sum_{m=1}^{k} c_m^{k+1} \frac{d^m ..}{dt^m} + \frac{d^{k+1} ..}{dt^{k+1}}\right),$$

$$c_m^{k+1} = c_{m-1}^k - k c_m^k \; . \qquad (1)$$

Последовательность вычисления коэффициентов c_m^k, отражена в табл. 1.

Таблица 1. Значения коэффициентов c_m^k

k \ m	0	1	2	3	4	5	6
1	0	1					
2	0	-1	1				
3	0	2	-3	1			
4	0	-6	11	-6	1		
5	0	24	-50	35	-10	1	
6	0	-120	274	-225	85	-15	1

В результате будем иметь: $\frac{d..}{du} = \frac{1}{u}\frac{d..}{dt}$; $\frac{d^2 ..}{du^2} = \frac{1}{u^2}\left(-\frac{d..}{dt} + \frac{d^2 ..}{dt^2}\right)$;

$$\frac{d^3 ..}{du^3} = \frac{1}{u^3}\left(2\frac{d..}{dt} - 3\frac{d^2 ..}{dt^2} + \frac{d^3 ..}{dt^3}\right); \quad \frac{d^4 ..}{du^4} = \frac{1}{u^3}\left(-6\frac{d..}{dt} + 11\frac{d^2 ..}{dt^2} - 6\frac{d^3 ..}{dt^3} + \frac{d^4 ..}{dt^4}\right). \qquad (2)$$

При таком подходе преобразования уравнений и дальнейшего преобразования функций внутренних усилий, деформаций и перемещений, все формулы должны быть раскрыты - расписаны для каждой порядковой производной по координате u , а в дальнейшем сгруппированы по производным по координате t. Такой подход приводит к элементарным, но довольно громоздким преобразованиям при выводе необходимых формул, в которых можно допустить и элементарные ошибки, описки. Однако, обратим внимание, что замена переменной $u = u(t)$ (обратная функция $t = t(u)$) не изменяет характера координатной системы - ортогональная система координат остается ортогональной. Изменяются только функции геометрических характеристик срединной поверхности – коэффициенты квадратичных форм и радиусов кривизны. Поэтому, если система уравнений оболочки и все функции записаны для произвольной системы координат, нет необходимости записывать эти уравнения в первоначальной системе координат u,v, проводить преобразования системы с учетом формул (1, 2). Необходимо вычислить нужные геометрические характеристики в координатной системе t, v , а в формулах системы уравнений и функций провести формальную замены производных по u на производные по t и заменив формулы геометрических характеристик полученных в координатной системе u,v на характеристике в координатной системе t, v. Аналогичные выводы можно сделать и при замене координаты $v = v(\omega)$, и при одновременной замене $u = u(t)$ и $v = v(\omega)$. Пусть геометрия поверхности задана в координатной системе u,v: $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u,v)$ - радиус-вектор поверхности, тогда согласно уравнениям дифференциальной геометрии имеем:

$$A(u,v) = \left|\frac{\partial \boldsymbol{\rho}(u,v)}{\partial u}\right|;\ \frac{\partial \boldsymbol{\rho}(u,v)}{\partial u} = A(u,v)\boldsymbol{e}_u;\ B(u,v) = \left|\frac{\partial \boldsymbol{\rho}(u,v)}{\partial v}\right|;\ \frac{\partial \boldsymbol{\rho}(u,v)}{\partial v} = B((u,v))\boldsymbol{e}_v;$$

$$L(u,v) = \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\rho}(u,v)}{\partial u^2}\boldsymbol{m}\right);\ N(u,v) = \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\rho}(u,v)}{\partial v^2}\boldsymbol{m}\right);\ M(u,v) = \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\rho}(u,v)}{\partial u \partial v}\boldsymbol{m}\right);\boldsymbol{m} = \boldsymbol{e}_u \times \boldsymbol{e}_v$$

$$k_u(u,v) = \frac{L(u,v)}{A^2(u,v)};\quad k_v(u,v) = \frac{N(u,v)}{B^2(u,v)};\quad k_{\alpha\beta}(u,v) = \frac{M(u,v)}{A(u,v)B(u,v)}. \qquad (3)$$

При замене переменной $\alpha = \alpha(t)$; $t = t(\alpha)$, получим

$$\frac{\partial ..}{\partial u} = \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial ..}{\partial t} = \left(1/\frac{\partial t(u)}{\partial u}\right)\frac{\partial ..}{\partial t};\quad \frac{\partial t(u)}{\partial u} = 1/\frac{\partial u(t)}{\partial t};\ \frac{\partial u}{\partial t} = 1/\frac{\partial t(u)}{\partial u};$$

$$\frac{\partial^2 ..}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial ..}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 ..}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial u^2}\frac{\partial ..}{\partial t};$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}(u(t),\beta)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}(u(t),v)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{\partial t}{\partial u}A(t,v)\boldsymbol{e}_t = A(\alpha,\beta)\boldsymbol{e}_u;\ \boldsymbol{e}_u = \boldsymbol{e}_t;$$

$$A(t,v) = \frac{\partial t}{\partial \alpha}A(u(t),v)/\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{\partial u(t)}{\partial t}A(u(t),v);\qquad B(t,v) = B(u(t),v);$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\rho}(u(t),\beta)}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial t(u)}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 \boldsymbol{\rho}(u(t),\beta)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 t(u)}{\partial u^2}\frac{\partial \boldsymbol{\rho}(u(t),\beta)}{\partial t};$$

$$L(u(t),v) = \left(\frac{\partial t(u)}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\rho}(u(t),v)}{\partial t^2}\boldsymbol{m}\right) = \left(\frac{\partial t(u)}{\partial u}\right)^2 L(t,v);\quad L(t,v) = \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right)^2 L(u(t),v);$$

$$N(t,v) = N(u(t),v);\quad M(t,v) = \frac{\partial u(t)}{\partial t}M(u(t),v);$$

$$k_\alpha(t,v) = \frac{L(t,v)}{A^2(t,v)} = \frac{L(u(t),v)}{A^2(u(t),v)};\ k_\beta(t,v) = \frac{N(t,v)}{B^2(t,v)} = \frac{N(u(t),v)}{B^2(u(t),v)};$$

$$k_{\alpha\beta}(t,\beta) = \frac{M(t,\beta)}{A(t,\beta)B(t,\beta)} = \frac{M(\alpha(t),\beta)}{A(\alpha(t),\beta)B(\alpha(t),\beta)}. \qquad (4)$$

Из формул (4) следует, что во всех формулах геометрических характеристик, полученных в координатной системе u,v, проводится замена координаты u на $u(t)$, и характеристики, связанные с координатной линией v=const - A, L, M домножаются на $\partial t(u)/\partial u$ или $(\partial t(u)/\partial u)^2$.

Рассмотрим эти преобразования на примере прямого пологого геликоида.

Прямой геликоид образуется движением прямой образующей нормальной к винтовой линии. Для пологого прямого геликоида геометрические характеристики получены в виде [3,4]:

A=1, $B = u$, F=0, $M = -c/u$, L=N= 0, $k_u = k_v = 0$, $k_{uv} = c/u^2$, $k_{uv} = -c/u^2$,

u – расстояние по образующей прямой от оси вращения ($r \le u \le R$), v – полярный угол; $c = H/(2\pi)$, H – шаг винтовой линии. При замене переменной $u = e^t$, $t = \ln u$; $\partial u/\partial t = e^t$ получаем по формулам (4)

$$A(t,v) = B(t,v) = e^t; \quad M(t,v) = -c; \quad k_{uv}(t,v) = -ce^{-2t}. \tag{5}$$

Разрешающие уравнения пологих оболочек получены В.З Власовым для системе координат в линиях кривизны

$$D\nabla^2\nabla^2 u_z - \nabla_k^2 \varphi = Z; \quad \nabla^2\nabla^2\varphi + Eh\nabla_k^2 u_z = 0, \tag{6}$$

$$\nabla^2 .. = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial ..}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial ..}{\partial v}\right)\right]$$ - оператор Лапласа;

$$\nabla_k^2 .. = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B}{A}k_v\frac{\partial ..}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A}{B}k_u\frac{\partial ..}{\partial v}\right) + \underline{\frac{\partial}{\partial u}\left(k_{uv}\frac{\partial ..}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(k_{uv}\frac{\partial ..}{\partial u}\right)}\right];$$

D – изгибная жесткость оболочки, E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки; h – толщина оболочки. Для несопряженной ортогональной системы координат форма разрешающих уравнений (6) не меняется, а в операторе $\nabla_k^2 ..$ добавляются подчеркнутые слагаемые [4]. Подставляя геометрические характеристики (5) пологого прямого геликоида в системе координат t, v и заменяя производные по u на производные по t, получаем разрешающие уравнения для пологого прямого геликоида, преобразовав предварительно операторы в уравнениях (6):

$$\nabla_{tv}^2 .. = e^{-2t}\left(\frac{\partial^2 ..}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 ..}{\partial v^2}\right) = e^{-2t}\tilde{\nabla}_{tv}^2 ..; \qquad \frac{\partial^2 e^{-2t} ..}{\partial t^2} = e^{-2t}\left(\frac{\partial^2 ..}{\partial t^2} - 4\frac{\partial ..}{\partial t} + 4..\right);$$

$$\nabla_{tv}^2 . \nabla_{tv}^2 . = e^{-2t}\tilde{\nabla}_{tv}^2\left(e^{-2t}\tilde{\nabla}_{tv}^2 ..\right) = e^{-4t}\left[\frac{\partial^2\tilde{\nabla}_{tv}^2 ..}{\partial t^2} - 4\frac{\partial\tilde{\nabla}_{tv}^2 ..}{\partial t} + 4\tilde{\nabla}_{tv}^2 .. + \frac{\partial^2\tilde{\nabla}_{tv}^2 ..}{\partial v^2}\right] =$$

$$= e^{-4t}\left[\tilde{\nabla}_{tv}^4 .. - 4\frac{\partial\tilde{\nabla}_{tv}^2 ..}{\partial t} + 4\tilde{\nabla}_{tv}^2 ..\right] = e^{-4t}\hat{\nabla}_{tv}^4 .;$$

$$\nabla_{k(tv)}^2 .. = -ce^{-2t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-2t}\frac{\partial ..}{\partial v}\right) + e^{-2t}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial ..}{\partial t}\right] = -2ce^{-4t}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial ..}{\partial t} - ..\right) = -\frac{H}{\pi}e^{-4t}\hat{\nabla}_{k(t,\beta)}^2 ... \tag{7}$$

Уравнения (6) получаем в виде:

$$D\hat{\nabla}_{tv}^4 u_z(t,v) - \frac{H}{\pi}\hat{\nabla}_{k(tv)}^2\varphi(t,v) = e^{4t}Z; \quad \tilde{\nabla}_{tv}^4\varphi(t,\beta) + \frac{EhH}{\pi}\hat{\nabla}_{k(tv)}^2 u_z(t,v) = 0. \tag{8}$$

Так как в правой части уравнений (8) получены операторы с постоянными коэффициентами, система может быть приведена к одному разрешающему уравнению. Введем обобщенную функцию $\Phi(t,\beta)$:

$$u_z(t,v) = \hat{\nabla}_{tv}^4\Phi(t,v); \quad \varphi(t,v) = -\frac{EhH}{\pi}\hat{\nabla}_{k(tv)}^2\Phi(t,v). \tag{9}$$

Разрешающее уравнение получаем в виде

$$\hat{\nabla}_{tv}^4\hat{\nabla}_{tv}^4\Phi(t,v) + p^2\hat{\nabla}_{k(tv)}^4\Phi(t,v) = e^{4t}\frac{Z}{D}, \quad p^2 = \frac{EhH^2}{\pi^2 D}; \quad p = 2\sqrt{3\left(1-\nu^2\right)}\frac{H}{h}. \tag{10}$$

Разрешающее уравнение (10) пологого прямого геликоида совпадает с соответствующим уравнением В.Г. Рекача [3]. Однако, приведенные здесь подход менее трудоемок и легче контролируем. Это относится и к другим преобразованиям при замене переменной, в частности к выводу формул внутренних усилий.

Для решения разрешающих уравнений с постоянными коэффициентами (9) можно использовать ряды Фурье [4].

Тангенциальные усилия определяются по формулам [4]:

$$N_u = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + \frac{1}{A^2 B}\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\ ; \quad N_v = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\ ;$$

$$S = -\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right). \tag{11}$$

Для пологого прямого геликоида в системе координат t, v, получаем

$$N_u(t,v) = -e^{-2t}\left(\frac{\partial ..}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\varphi(t,v) = \frac{EhH}{\pi}e^{-2t}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial ..}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial ..}{\partial t} - ..\right)\Phi(t,v);$$

$$N_v(t,v) = -e^{-2t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial ..}{\partial t} - ..\right)\varphi(t,v) = \frac{EhH}{\pi}e^{-2t}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial ..}{\partial t} - ..\right)^2\Phi(t,v);$$

$$S(t,v) = -e^{-2t}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial ..}{\partial t} - ..\right)\varphi(t,v) = \frac{EhH}{\pi}e^{-2t}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{\partial ..}{\partial t} - ..\right)^2\Phi(t,v). \tag{12}$$

После получения решения разрешающего уравнения, и получения формул внутренних усилий и перемещений в координатной системе t, v , расчеты проводится в исходной координатной системе u, v . Этот переход производится простой заменой функций $e^{\alpha t}$ на функции u^{α} и t на $\ln u$, так как все дифференциальные операции были уже проведены (в координатной системе t, v).

Решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами обычно получается в виде $A_{mi}e^{\alpha_{mi}t}$ (здесь показано только одно слагаемое решения для m-го члена ряда и одного корня характеристического уравнения) или в координатной системе u, v - $A_{mi}u^{\alpha_{mi}}$. При этом при различных значениях корней характеристического уравнения α_{mi} функции $u^{\alpha_{mi}}$ получаются различной размерности. Размерность регулируется коэффициентами A_{mi}, которые вычисляются при удовлетворении граничных условий. Однако контролировать размерность слагаемых в этом случае затруднительно. Поэтому желательно перейти к безразмерным координатам. Полярная координата v является безразмерной. Безразмерную координату вдоль образующей кривой можно ввести по формуле $\eta = u / r$ $(r \le u \le R)$, $1 \le \eta \le R / r$ или $\eta = u / r$, $r / R \le \eta \le 1$, тогда

$$\eta = u / r = e^t,\ t = \ln\eta;\ \frac{\partial ..}{\partial u} = \frac{1}{r}\frac{\partial ..}{\partial \eta};\ \frac{\partial u}{\partial u} = re^t.$$

Из полученных формул перехода к безразмерной координате все предыдущие преобразования остаются в силе, только везде, где имеется множитель e^{kt} добавляется множитель r^k при замене $\eta = u/r$ или R^k при $\eta = u/R$. Именно эти множители наряду с другими размерными коэффициентами позволяют контролировать размерности всех вычисляемых функций и, соответственно корректность получаемых формул.

Литература

1. *Andreoiu-Banica*, G. Justification of the Marguerre-von Karman equations in curvilinear coordinates, *Asymptotic Analysis,* 1999, 19, 35–55.

2. *Рекач В.Г.* Расчет пологих винтовых (геликоидальных) оболочек// Труды МИСИ. М.: 1957. - № 27. – С. 113-132.

3. *Krivoshapko S.N.* Geometry and strength of general helicoidal shells// Applied Mechanics Reviews (USA). – Vol. 52. – No 5. – May 1999. – P. 161-175.

4. *Иванов В.Н., Кривошапко С.Н.* Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы: Монография. – М.: Изд-во РУДН, 2010. – 540 с.

References

1. *Andreoiu-Banica*, G. (1999). Justification of the Marguerre-von Karman equations in curvilinear coordinates, *Asymptotic Analysis,* 19, 35–55.

2. *Rekatch, V.G.* (1957). Raschet pologih vintovih obolochek, Trudi MISI, M., № 27, pp. 113-132.

3. *Krivoshapko, S.N.* (1999). Geometry and strength of general helicoidal shells, *Applied Mechanics Reviews* (USA), Vol. 52, No 5, pp. 161-175.

4. *Ivanov, V.N., Krivoshapko, S.N.* (2010). *Analiticheskie metodi rascheta obolochek nekanonicheskoy formi:* Monograph, Moscow: Izd-vo RUDN, 540 p.

TRANSFORMATION OF THE SHELL EQUATIONS WHEN A VARIABLE CHANGES

Ivanov V.N.

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow

The questions of the transformation of equations of the shell theory are studied when it's necessary to change initial variables. This method was applied for a shallow shell in the form of right helicoid.

KEY WORDS: shallow shell, arbitrary coordinate system, coefficients of the fundamental forms of surface, Euler type of the equation, right helicoid.