УДК 517.925.51

О квазилинейных неавтономных системах ОДУ с нормальной матрицей

Ю. А. Коняев*, **В. И. Безяев**†

* *Кафедра высшей математики*
Российский Университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д.6, г. Москва, 117198, Россия

† *Кафедра дифференциальных уравнений и математической физики*
Российский Университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д.6, г. Москва, 117198, Россия

С помощью нового вычислительного алгоритма изучены спектральные условия устойчивости решений квазилинейных неавтономных систем с нормальной матрицей.

Ключевые слова: устойчивость, спектральные условия, нормальная матрица.

1. Введение

Анализ неавтономных линейных и особенно квазилинейных систем ОДУ известными методами [1–4] часто сопряжён с большими трудностями. Для некоторых классов таких систем разработан вычислительный алгоритм построения точных оценок модулей их решений, приведены конструктивные спектральные критерии устойчивости решений и существования устойчивых предельных множеств, аналог принципа суперпозиции для квазилинейных систем. Полученные без использования аппарата функций Ляпунова результаты дополняют или уточняют ранее известные [1–5].

2. Вычислительный алгоритм

Теорема 1. *Если для квазилинейной системы*

$$\dot{x} = A(x,t)x, \quad x(0) = x^0, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

с нормальной в области $\Omega = \{|x| < \delta,\ t \geqslant 0\}$ *матрицей (т.е. при выполнении в области* Ω *тождества* $A(x,t)A^*(x,t) \equiv A^*(x,t)A(x,t)$ *[6]) её спектр* $\{\lambda_j(x,t)\}$ *удовлетворяет в* Ω *условиям*

$$\sigma_1(x,t) \leqslant \operatorname{Re}\lambda_j(x,t) \leqslant \sigma_2(x,t) \quad (j = \overline{1,n}), \tag{2}$$

тогда для квадрата модуля решения задачи Коши (1) *имеют место дифференциальные неравенства*

$$2\sigma_1(x,t)|x|^2 \leqslant \frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} \leqslant 2\sigma_2(x,t)|x|^2. \tag{3}$$

Доказательство. В силу нормальности матрицы $A(x,t)$ существует унитарная подстановка $x = U(x,t)y$ такая, что

$$U^*(x,t)A(x,t)U(x,t) \equiv \operatorname{diag}\{\lambda_1(x,t),\ldots,\lambda_n(x,t)\},$$

$$U^*(x,t)U(x,t) \equiv E, \quad |x| \equiv |y|.$$

Это даёт возможность преобразовать известное [5] дифференциальное равенство для квадрата нормы решения системы (1):

Статья поступила в редакцию 11 декабря 2009 г.

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} = \mathrm{Re}\,(x^*A(x,t)x) = \mathrm{Re}\,(y^*U^*(x,t)A(x,t)U(x,t)y) = \mathrm{Re}\,(y^*\Lambda(x,t)y) = \\ = \mathrm{Re}\sum_1^n \lambda_j(x,t)|y_j|^2,$$

и с учётом (2) получить нужный результат (3). □

Следствие 1. Если в условиях теоремы 1 $\mathrm{Re}\,\lambda_j(x,t) \equiv \varphi(t)|x|^\alpha$, $j=\overline{1,n}$, $\alpha > 0$, тогда модуль решения задачи (1) определяется выражением

$$|x(t)| = (-\alpha b(t) + |x^0|^{-\alpha})^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (x^0 \neq 0),$$

а в случае $\alpha = 0$ имеем

$$|x(t)| = |x^0|\exp(b(t)), \quad \text{где} \quad b(t) = \int\limits_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s.$$

При $b(t) \to -\infty \quad (t \to +\infty)$ тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво, при $b(t) \leqslant C \quad (t \geqslant 0)$ — устойчиво, а в случае $b(t) \to +\infty \quad (t \to +\infty)$ — неустойчиво.

Следствие 2. Тривиальное решение системы (1) с кососимметрической или косоэрмитовой матрицей $A(x,t)$ будет устойчивым, так как такая матрица, являясь нормальной, имеет чисто мнимый спектр.

Пример 1. Исследование системы [3, с. 68] $\dot{x} = (E\sin t + B(x,t))x \equiv A(x,t)x$, $x \in R^n$ ($B(x,t)$-кососимметрическая матрица) с помощью функции Ляпунова в стандартной форме $v(x) \equiv |x|^2$ не даёт результата, так как её производная в силу системы $\dot{v} = 2v\sin t$ знакопеременна. Но по следствию 1 с учётом того, что матрица $A(x,t)$ нормальная с $\mathrm{Re}\,\lambda_{A_j}(t) \equiv \sin t$ ($j=\overline{1,n}$), мы имеем устойчивое решение, так как

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} = |x|^2\sin t \quad \text{и} \quad \int\limits_0^t \sin\tau\mathrm{d}\tau \leqslant 2.$$

Пример 2. Предложенный алгоритм упрощает исследование устойчивости системы уравнений малых колебаний пространственного гирогоризонтокомпаса [7]:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & 0 & \Omega(t) \\ -\omega_0 & 0 & \Omega(t) & 0 \\ 0 & -\Omega(t) & 0 & -\omega_0 \\ -\Omega(t) & 0 & \omega_0 & 0 \end{pmatrix} x \equiv A(t)x,$$

$$x_1 = \delta_1\frac{v(t)}{\sqrt{gR}}, \quad x_2 = \delta_2, \quad x_3 = \delta_3, \quad x_4 = 2B\delta_4\frac{\sin\varepsilon_0}{(ml\sqrt{gR})},$$

$v(t)$ — абсолютная скорость точки подвеса, R — радиус Земли (при этом $v^2 \ll g/R$), $\Omega(t)$ — проекция абсолютной угловой скорости чувствительного элемента гирогоризонтокомпаса на направление геоцентрической вертикали, $\omega_0 = \sqrt{g/R}$, $2B\cos\varepsilon = mlv$, B, m, l, ε_0 — величины, определяемые конструкцией гироскопа, δ_j $(j = \overline{1,4})$ — углы ориентации осей чувствительного элемента в неподвижной системе координат.

В работе [7] эта система исследуется с помощью достаточно громоздкого метода. Но в силу следствия 2 тривиальное решение этой системы с кососимметрической матрицей $A(t)$ всегда устойчиво.

Теорема 2. *Если для системы*

$$\dot{x} = A(x,t)x + f(x,t), \quad x(0) = x^0, \quad f(0,t) \equiv 0, \tag{4}$$

спектр нормальной в Ω *матрицы* $A(x,t)$ *удовлетворяет неравенствам* $\operatorname{Re}\lambda_j(x,t) \leqslant -C_1|x|^\alpha$ $(j = \overline{1,n},\ C_1 > 0,\ \alpha \geqslant 0)$ *и для достаточно гладкой функции* $f(x,t)$ *справедлива оценка* $|f(x,t)| \leqslant C_2|x|^{1+\beta}$ $\quad (C_2 > 0,\ \beta > \alpha)$, *тогда тривиальное решение системы* (4)) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Доказательство следует (с учётом теоремы 1) из дифференциального неравенства [5]

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} = \operatorname{Re}(x^*A(x,t)x) + \operatorname{Re}(x^*f(x,t)) \leqslant \operatorname{Re}(y^*\Lambda(x,t)y) + C_2|x|^{2+\beta} \leqslant$$
$$\leqslant -C_1|x|^{2+\alpha}(1 - C_2/C_1|x|^{\beta-\alpha}) \leqslant -C_3|x|^{2+\alpha} \quad (0 < C_3 < C_1)$$

и соответствующей оценки $(\alpha > 0, x(0) \neq 0)$ $|x(t)| \leqslant (\alpha C_3 t + x(0)^{-\alpha})^{-1/\alpha} \to 0$ $(\ t \to +\infty)$ или (при $\alpha = 0$) $|x(t)| = |x(0)|\exp(-C_3t) \to -\infty\,(t \to +\infty)$, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 3. *Если для системы*

$$\dot{x} = (A(x,t) + B(x,t))x,\ \ x(0) = x^0,\ x \in R^n$$

с нормальными в области Ω *матрицами* $A(x,t)$ *и* $B(x,t)$ *(сумма нормальных матриц в общем случае не является нормальной матрицей [6]) спектр этих матриц удовлетворяют в* Ω *тождествам* $\operatorname{Re}\lambda_{A_j}(x,t) \equiv \sigma_A(x,t), \quad \operatorname{Re}\lambda_{B_j}(x,t) \equiv \sigma_B(x,t) \quad (j = \overline{1,n})$, *то справедливо дифференциальное равенство*

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} = (\sigma_A(x,t) + \sigma_B(x,t))|x|^2.$$

Доказательство. С учётом теоремы 1 и унитарных подстановок $x = U_A(x,t)y$ и $x = U_B(x,t)z$ $\ (|x| \equiv |y| \equiv |z|)$ имеем:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} = \operatorname{Re}(x^*A(x,t)x) + \operatorname{Re}(x^*B(x,t)x) =$$
$$= \operatorname{Re}(y^*\Lambda_A(x,t)y) + \operatorname{Re}(z^*\Lambda_B(x,t)z) =$$
$$= \operatorname{Re}\sum_1^n \lambda_{A_j}(x,t)|y_j|^2 + \operatorname{Re}\sum_1^n \lambda_{B_j}(x,t)|z_j|^2 = (\sigma_A(x,t) + \sigma_B(x,t))|x|^2,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание. Теорема 3 имеет место и в случае, когда матрица квазилинейной системы равна сумме конечного числа нормальных матриц.

Пример 3. В работе [3, с. 156] с помощью достаточно громоздкого алгоритма доказана неустойчивость при $0 < a < 2b$ линейной неавтономной системы $\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = \{a_{jk}(t)\}_1^2$,

$$a_{11}(t) = -b + a\cos^2(bt), \quad a_{12} = b - 0,5a\sin(2bt),$$
$$a_{21}(t) = -b - 0,5a\sin(2bt), \quad a_{22} = -b + a\sin^2(bt),$$

хотя спектр матрицы $A(t)$ лежит в этом случае в левой полуплоскости: $\lambda_{1,2} = 0,5(a - 2b \pm \sqrt{a^2 - 4b^2})$. Если матрицу $A(t)$ представить (после замены $\tau = bt$) в виде суммы двух нормальных матриц:

$$A(\tau) = A_0 + B(\tau),\ A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\tau) = \begin{pmatrix} -1 + C_0 \cos^2 \tau & -0,5C_0 \sin 2\tau \\ -0,5C_0 \sin 2\tau & -1 + C_0 \sin^2 \tau \end{pmatrix},$$

тогда из теоремы 3 и структуры спектра матриц A_0 и $B(\tau):\ \lambda_{A_{0_{1,2}}} = \pm i,\ \lambda_{B_1} = -1,\ \lambda_{B_2} = C_0 - 1 \quad (C_0 = a/b)$ имеем асимптотическую устойчивость при $0 < a < b$, устойчивость при $0 < a = b$ и неустойчивость в случае $a > b > 0$.

Пример 4. Для системы [4, с. 23]

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta(r) & -1 \\ 1 & \alpha - \beta(r) \end{pmatrix} x, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \beta(r) = r^{2k-1} \sin(1/r)$$

с учётом дифференциального равенства $\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} = (\alpha - \beta(r))|x|^2$, существует при $0 < \alpha < 1$ конечное число устойчивых предельных циклов, а в случае $\alpha = 0$ их число бесконечно.

Литература

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — С. 472.
2. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1990.
3. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. — М.: Мир, 1980.
4. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн Ч.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. — М.: Мир, 1985.
5. *Коняев Ю. А.* Метод унитарных преобразований в теории устойчивости // Изв. вузов. Математика. — 2002. — Т. 2. — С. 41–45.
6. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1971.
7. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. — М.: Наука, 1976.

UDC 517.925.51

On Quasilinear Nonautonomous Systems with Normal Matrix

Yu. A. Konyaev[*], **V. I. Bezyaev**[†]

[*] *Department of Mathematics*
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

[†] *Department of Differential Equations and Mahtematical Physics*
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

Spectral criterions for solutions of quasilinear nonautonomous systems with normal matrix research by new calculated algorithm.

Key words and phrases: stability, spectral criterions, normal matrix.