Физика

УДК 621.378.826.535.8

Энергетический спектр заряженных скалярных частиц во вселенной Гёделя

Г. Н. Шикин*, Л. П. Ющенко†

* *Кафедра теоретической физики*

† *Кафедра общей физики*
Российский университет дружбы народов,
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Изучение решений классических волновых уравнений в искривлённом пространстве–времени представляет интерес по многим причинам, в частности, знание спектра частот классических полей необходимо для изучения квантовых свойств этих полей [1, 2]. Особый интерес представляет возможность наблюдения влияния космологической фоновой геометрии и различных внешних полей на волновые процессы во Вселенной [3].

Во Вселенной Гёделя рассмотрено уравнение комплексного массивного скалярного поля, взаимодействующего с электромагнитным полем. Поскольку Вселенная Гёделя является собой простейшую модель вселенной с космологическим вращением, представляет определённый физический интерес изучение влияния внешнего гравитационного поля такой модели на формирование и устойчивость спектров состояний различных физических полей. В работе рассмотрено влияние гравитационного поля Вселенной Гёделя на энергетический спектр скалярных частиц.

Ключевые слова: энергетический спектр, Вселенная Гёделя, скалярные частицы.

Метрика Вселенной Гёделя определяется выражением [4]

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 + \frac{1}{2}e^{2\sqrt{2}\Omega x}\mathrm{d}y^2 + 2e^{\sqrt{2}\Omega x}\mathrm{d}t\mathrm{d}y - \mathrm{d}z^2, \tag{1}$$

где Ω — положительная постоянная, являющаяся угловой скоростью вращения вектора потока V^α идеальной жидкости, заполняющей Вселенную Гёделя.

Для удобства выпишем контравариантные компоненты метрического тензора $g^{\mu\nu}(x)$:

$$g^{00} = -1, \quad g^{01} = 0, \quad g^{02} = 2e^{-\sqrt{2}\Omega x}, \quad g^{03} = 0;$$
$$g^{10} = 0, \quad g^{11} = -1, \quad g^{12} = 0, \quad g^{13} = 0;$$
$$g^{20} = 2e^{-\sqrt{2}\Omega x}, \quad g^{21} = 0, \quad g^{22} = -2e^{-2\sqrt{2}\Omega x}, \quad g^{23} = 0;$$
$$g^{30} = 0, \quad g^{31} = 0, \quad g^{32} = 0, \quad g^{33} = -1, \quad g = \det(g_{\mu\nu}) = -\frac{e^{2\sqrt{2}\Omega x}}{2}.$$

Лагранжиан скалярного поля, взаимодействующего с внешним электромагнитным полем, имеет вид [5]

$$L = \varphi_{,\alpha}\overset{*}{\varphi}{}^{,\alpha} - m^2\varphi\overset{*}{\varphi} + \mathrm{i}q\left(\varphi_{,\alpha}\overset{*}{\varphi} - \overset{*}{\varphi}_{,\alpha}\varphi\right)A^\alpha + q^2\varphi\overset{*}{\varphi}A_\alpha A^\alpha, \tag{2}$$

где q — заряд скалярной частицы, A^α — потенциал внешнего электромагнитного поля. Из лагранжиана (2) следует уравнение для поля φ:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}g^{\nu\mu}\varphi_{,\mu}\right) + m^2\varphi - 2\mathrm{i}q\varphi_{,\mu}g^{\mu\nu}A_\nu - q^2\varphi A_\nu A^\nu = 0. \tag{3}$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде

$$\varphi(x,y,z,t) = e^{\mathrm{i}(k_2 y + k_3 z - \omega t)} \upsilon(x). \tag{4}$$

Система уравнений электромагнитного поля имеет вид:

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\gamma\alpha;\beta} + F_{\beta\gamma;\alpha} = 0, \quad F^{\alpha\beta}_{;\alpha} = 0. \tag{5}$$

Выберем компоненты вектор-потенциала A_ν электромагнитного поля во Вселенной Гёделя, зависящие от одной пространственной переменной $x = x^1$: $A_0(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$. В этом случае мы имеем следующие компоненты тензора электромагнитного поля:

$$F_{10} = \frac{\partial A_0}{\partial x^1}, \quad F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1}, \quad F_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial x^1}. \tag{6}$$

Найдём связь между ковариантными и контравариантными компонентами тензора электромагнитного поля:

$$F_{10} = g_{11} g_{00} F^{10} + g_{11} g_{02} F^{12}, \tag{7}$$

$$F_{12} = g_{11} g_{20} F^{10} + g_{11} g_{22} F^{12}, \tag{8}$$

$$F_{13} = g_{11} g_{33} F^{13}. \tag{9}$$

1. Рассмотрим случай, когда $F_{10} = \dfrac{\partial A_0}{\partial x} \neq 0$, $F_{13} = \dfrac{\partial A_3}{\partial x} \neq 0$, $A_2(x) \equiv 0$, $F_{12}(x) \equiv 0$. В этом случае из (8) имеем

$$F^{12} = -\frac{g_{20}}{g_{22}} F^{10}. \tag{10}$$

Равенство (10) показывает, что магнитная компонента поля $F^{12}(x)$ индуцируется электрической компонентой поля F^{10} за счёт вращения Вселенной.

Из уравнения (5) определяем $F^{10}(x)$ и $F^{13}(x)$:

$$F^{10} = \frac{c_0}{\sqrt{-g}} = c_0 \sqrt{2} e^{-\sqrt{2}\Omega x}, \tag{11}$$

$$F^{13} = \frac{c_3}{\sqrt{-g}} = c_3 \sqrt{2} e^{-\sqrt{2}\Omega x}. \tag{12}$$

Постоянные интегрирования c_0 и c_3 выражаются через напряжённости полей E_x и H_y в плоском пространстве-времени, переход к метрике которого можно получить из (1), полагая $\Omega = 0$ и введя новые координаты $t' = t + y$, $x' = x$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} y$, $z' = z$. В этом случае имеем:

$$F^{10} = c_0 \sqrt{2} = E_x, \quad F^{13} = c_3 \sqrt{2} = -H_y. \tag{13}$$

Из (7) с учётом (10) получаем $F_{10}(x)$:

$$F_{10} = g_{11} \left[g_{00} - \frac{1}{g_{22}} (g_{20})^2 \right] F^{10} = E_x e^{-\sqrt{2}\Omega x}. \tag{14}$$

Из (9) получаем F_{13}:

$$F_{13} = -H_y e^{-\sqrt{2}\Omega x}. \tag{15}$$

Из (14) находим $A_0(x)$:

$$A_0(x) = \frac{E_x}{\sqrt{2}\Omega}\left(1 - e^{-\sqrt{2}\Omega x}\right). \quad (16)$$

Из (15) находим $A_3(x)$:

$$A_3(x) = \frac{H_y}{\sqrt{2}\Omega}\left(e^{-\sqrt{2}\Omega x} - 1\right). \quad (17)$$

В (16) и (17) постоянные интегрирования выбраны так, чтобы при $\Omega \to 0$ был переход к выражению для потенциалов в плоском пространстве-времени (в старых координатах).

Рассмотрим движение заряженной скалярной частицы во внешнем электромагнитном поле, описываемом потенциалами $A_0(x)$ и $A_3(x)$. Подставляя в уравнение (3) $\varphi(x, y, z, t)$ из (4), $A_0(x)$ из (16) и $A_3(x)$ из (17), получаем уравнение для $v(x)$:

$$\begin{gathered} v_{xx} + \sqrt{2}\Omega v_x - \left\{\omega^2 + k_3^2 + m^2 + 2q\frac{E_x\omega + H_y k_3}{\sqrt{2}\Omega} + q^2\frac{(E_x)^2 + (H_y)^2}{2\Omega^2}\right\} v - \\ - e^{-\sqrt{2}\Omega x}\left\{2k_2\omega + 2q\frac{E_x k_2 - E_x\omega - H_y k_3}{\sqrt{2}\Omega} - 2q^2\frac{(E_x)^2 + (H_y)^2}{2\Omega^2}\right\} v - \\ - e^{-2\sqrt{2}\Omega x}\left\{2\sqrt{2}k_2\omega + 2k_2^2 - \frac{2E_x k_2}{\sqrt{2}\Omega}q + q^2\frac{(E_x)^2 + (H_y)^2}{2\Omega^2}\right\} v = 0 \end{gathered} \quad (18)$$

В уравнении (18) перейдём к новой функции $u(\xi) = v(x)$, $\xi = e^{-\sqrt{2}\Omega x}$, для которой получаем уравнение

$$u'' - \frac{1}{\xi^2}\left(A_1 + B_1\xi + D_1\xi^2\right) u = 0, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \infty, \quad (19)$$

где

$$A_1 = \frac{\omega^2 + k_3^2 + m^2 + 2q\frac{E_x\omega + H_y k_3}{\sqrt{2}\Omega} + q^2\frac{(E_x)^2 + (H_y)^2}{2\Omega^2}}{2\Omega^2}, \quad (20)$$

$$B_1 = \frac{2k_2\omega + 2q\frac{E_x k_2 - E_x\omega - H_y k_3}{\sqrt{2}\Omega} - 2q^2\frac{(E_x)^2 + (H_y)^2}{2\Omega^2}}{2\Omega^2}, \quad (21)$$

$$D_1 = \frac{2\sqrt{2}k_2\omega + 2k_2^2 - 2q\frac{E_x k_2}{\sqrt{2}\Omega} + q^2\frac{(E_x)^2 + (H_y)^2}{2\Omega^2}}{2\Omega^2}. \quad (22)$$

Уравнение (19) является уравнением обобщённого гипергеометрического типа [6].

2. Рассмотрим случай, когда $A_0 \equiv 0$, $F_{10} \equiv 0$, $F_{12} \neq 0$, $F_{13} \neq 0$. Имеем чисто магнитное поле, содержащее компоненты $F_{12}(x)$ и $F_{13}(x)$.

В этом случае из (7) имеем:

$$F^{10} = -\frac{g_{02}}{g_{00}}F^{12}. \quad (23)$$

Как и в предыдущем случае, равенство (23) показывает, что электрическая компонента поля F^{10} индуцируется магнитной компонентой поля $F^{12}(x)$ за счёт вращения Вселенной. Из уравнения (5) определяем $F^{12}(x)$:

$$F^{12}(x) = \frac{c_2}{\sqrt{-g}} = c_2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}\Omega x}. \quad (24)$$

Постоянная интегрирования c_2 выражается через напряжённость поля H_z в плоском пространстве-времени при $\Omega = 0$ и переходе к новым координатам t', x', y', z'.

$$F^{12} = c_2\sqrt{2} = -H_z. \tag{25}$$

Из (8) с учётом (23) получаем $F_{12}(x)$:

$$F_{12} = g_{11}F^{12}\left[-\frac{(g_{20})^2}{g_{00}} + g_{22}\right] = -\frac{H_z}{2}e^{\sqrt{2}\Omega x}. \tag{26}$$

Из (26) находим $A_2(x)$:

$$A_2(x) = \frac{H_z}{2\sqrt{2}\Omega}\left(1 - e^{\sqrt{2}\Omega x}\right). \tag{27}$$

Постоянная интегрирования выбрана так, чтобы при $\Omega \to 0$ выражение $A_2(x)$ переходило в соответствующее выражение в плоском пространстве-времени (в старых координатах).

Рассмотрим движение заряженной скалярной частицы во внешнем магнитном поле, описываемом потенциалами $A_2(x)$ и $A_3(x)$. Подставляем в уравнение (3) $\varphi(x,y,z,t)$ из (4), $A_2(x)$ из (27) и $A_3(x)$ из (17) и получаем уравнение для $v(x)$:

$$\begin{aligned} v_{xx} + \sqrt{2}\Omega v_x - \left\{\omega^2 + k_3^2 + m^2 + 2q\frac{H_z\omega + H_yk_3}{\sqrt{2}\Omega} + q^2\left[\frac{(H_z)^2}{4\Omega^2} + \frac{(H_y)^2}{2\Omega^2}\right]\right\}v- \\ - e^{-\sqrt{2}\Omega x}\left\{2k_2\omega + 2q\frac{H_zk_2 - H_z\omega - H_yk_3}{\sqrt{2}\Omega} - q^2\left[\frac{(H_z)^2}{2\Omega^2} + \frac{(H_y)^2}{\Omega^2}\right]\right\}v- \\ - e^{-2\sqrt{2}\Omega x}\left\{2\sqrt{2}k_2\omega + 2k_2^2 - \frac{H_zk_2}{\sqrt{2}\Omega}2q + q^2\left[\frac{(H_z)^2}{4\Omega^2} + \frac{(H_y)^2}{2\Omega^2}\right]\right\}v = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

В уравнении (28) перейдём к новой функции $u(\xi) = v(x)$, $\xi = e^{-\sqrt{2}\Omega x}$, для которой получаем уравнение:

$$u'' - \frac{1}{\xi^2}\left(A_2 + B_2\xi + D_2\xi^2\right)u = 0, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \infty, \tag{29}$$

где

$$A_2 = \frac{\omega^2 + k_3^2 + m^2 + 2q\frac{H_z\omega + H_yk_3}{\sqrt{2}\Omega} + q^2\left[\frac{(H_z)^2}{4\Omega^2} + \frac{(H_y)^2}{2\Omega^2}\right]}{2\Omega^2}, \tag{30}$$

$$B_2 = \frac{2k_2\omega + 2q\frac{H_zk_2 - H_z\omega - H_yk_3}{\sqrt{2}\Omega} - q^2\left[\frac{(H_z)^2}{2\Omega^2} + \frac{(H_y)^2}{\Omega^2}\right]}{2\Omega^2}, \tag{31}$$

$$D_2 = \frac{2\sqrt{2}k_2\omega + 2k_2^2 - 2q\frac{H_zk_2}{\sqrt{2}\Omega} + q^2\left[\frac{(H_z)^2}{4\Omega^2} + \frac{(H_y)^2}{2\Omega^2}\right]}{2\Omega^2}. \tag{32}$$

Уравнение (29) так же как и уравнение (19) является уравнением обобщённого гипергеометрического типа [6]. Свойства решений этих уравнений определяются величинами и знаками постоянных $A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $D_{1,2}$. Физический интерес представляют ограниченные решения, монотонно убывающие при $\xi \to \infty$. При этом полученные решения можно нормировать таким образом, что полная энергия E будет равна частоте ω:

$$\omega = E = \int T_0^0\sqrt{-{}^3g}\mathrm{d}V \tag{33}$$

(в (33) интеграл берётся в конечных пределах по y и z).

Проверим возможность существования ограниченных, убывающих, квадратично интегрируемых решений уравнений (19), (29).

При $\xi \to \infty$ имеем:

$$u'' - D_{1,2}u = 0, \quad u(\xi) \approx e^{-\sqrt{D_{1,2}}\xi}, \quad D_{1,2} > 0, \tag{34}$$

при $\xi \ll 1$ имеем:

$$u''\xi^2 - A_{1,2}u = 0, \quad u(\xi) \approx \frac{A_{1,2}}{2}\xi^2. \tag{35}$$

Из (34) и (35) следует, что представляющие физический интерес решения существуют.

В общем виде уравнения (19) и (29) запишутся так:

$$u'' - \frac{1}{\xi^2}\left(A + B\xi + D\xi^2\right)u = 0, \tag{36}$$

где A, B, $D = A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $D_{1,2}$.

С помощью подстановки

$$u(\xi) = \xi^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4A}\right)} \cdot e^{-\sqrt{D}\xi}y(z), \quad z = 2\sqrt{D}\xi, \tag{37}$$

перейдём от уравнения (36) к уравнению для $y(z)$:

$$zy''(z) + (b - z)y'(z) - ay(z), \tag{38}$$

где

$$b = 1 + \sqrt{1+4A}, \quad a = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left[\sqrt{D}\left(\sqrt{1+4A}+1\right) + B\right].$$

Уравнение (38) является вырожденным гипергеометрическим уравнением. Его решение представляется в виде

$$y(z) = c_1F(a,b,z) + c_2z^{1-b}F(a-b+1, 2-b, z),$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, а $F(a,b,z)$ есть функция Похгаммера, ограниченная при всех значениях z. Уравнение (38) с краевыми условиями, требующими ограниченности решения при $z \to 0$ и его возрастания не быстрее некоторой конечной степени z, приводит к задаче на собственные значения. При этом оно имеет дискретный спектр собственных значений $a = -n$ и набор собственных функций, являющихся обобщёнными полиномами Лагерра

$$y_n(z) = B_nL_n^{\alpha}(z), \quad \alpha = b - 1, \tag{39}$$

где B_n — нормировочная постоянная. Функции

$$u_n(\xi) = B_n\xi^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4A}\right)} \cdot e^{-\sqrt{D}\xi}L_n^{\alpha}(2\sqrt{D}\xi)$$

образуют ортонормированную систему на интервале $0 \leqslant \xi \leqslant \infty$.

Выпишем энергетический спектр полученных решений в случае, когда $k_2 = 0$. Для этого заменим α на $-n$ в выражении (38). Тогда, учитывая явный вид выражений (19)–(21), в случае уравнения (18) для ω получим следующее выражение:

$$\omega = \left\{K \cdot (2n+1) - L \pm \left[\frac{8}{\Omega^2}(2n+1)^2 + M(2n+1) + N\right]^{\frac{1}{2}}\right\}P, \tag{40}$$

где

$$K = \frac{2\sqrt{2}E_x}{\Omega\sqrt{E_x^2 + H_y^2}}, \quad L = \frac{4E_x H_y k_3}{\Omega^2\left(E_x^2 + H_y^2\right)},$$

$$M = \frac{16qE_x^2}{\Omega^4\sqrt{E_x^2 + H_y^2}} - \frac{16q\sqrt{E_x^2 + H_y^2}}{\Omega^4} - \frac{16\sqrt{2}H_y k_3}{\Omega^3\sqrt{E_x^2 + H_y^2}},$$

$$N = \frac{8E_x^2}{\Omega^2\left(E_x^2 + H_y^2\right)} + \frac{16H_y^2 k_3^2 + 8E_x^2\left(2k_3^2 + 2m^2\right)}{\Omega^4\left(E_x^2 + H_y^2\right)} - \frac{8}{\Omega^2}\left(1 + 2k_3^2 + 2m^2\right),$$

$$P = \left(\frac{4E_x^2}{\Omega^2\left(E_x^2 + H_y^2\right)} - \frac{4}{\Omega^2}\right)^{-1}.$$

В случае уравнения (28), с учётом выражений (30)–(32), для ω получается (в предположении $k_2 = 0$) выражение, совпадающее с выражением (40), в котором нужно заменить E_x на H_z, а скобку $\left(E_x^2 + H_y^2\right)$ — на $\left(\frac{1}{2}H_z^2 + H_y^2\right)$.

Рассмотрим спектр (40) при $\Omega \to 0$. Тогда выражение для ω принимает вид:

$$\omega = \frac{E_x k_3}{H_y} \pm \frac{1}{H_y^2}\Big\{k_3^2\left(E_x^2 + H_y^2\right)^2 + m^2E_x^2\left(E_x^2 + H_y^2\right) + \\ + (2n+1)qH_y^2\left(E_x^2 + H_y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big\}^{\frac{1}{2}}. \quad (41)$$

Требование $\omega > 0$ приводит к ограничению на n

$$n \leqslant \frac{k_3^2\left(E_x^2 + H_y^2\right) + m^2E_x^2}{2qH_y^2\sqrt{E_x^2 + H_y^2}} - \frac{1}{2}. \quad (42)$$

Из (42) следует, что при малых Ω значение n ограничено сверху.

При $\Omega \to \infty$ выражение (40) принимает вид

$$\omega = \frac{\Omega}{2H_y^2}\Big(-\sqrt{2}(2n+1)\sqrt{(E_x)^2 + (H_y)^2} \pm \\ \pm \Big[2E_x^2\left(E_x^2 + H_y^2\right) + 2(2n+1)^2\left(E_x^2 + H_y^2\right)^2 - \\ - 4\left(1 + 2k_3^2 + 2m^2\right)H_y^2\left(E_x^2 + H_y^2\right)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\Big).$$

Отсюда получаем неравенство для n (с учётом $\omega > 0$)

$$n > \frac{1}{2}\left[2H_y^2\left(1 + 2k_3^2 + 2m^2\right) - \frac{E_x^2}{\left(E_x^2 + H_y^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}, \quad (43)$$

т.е. n ограничено снизу.

В случае, когда внешнее электромагнитное поле отсутствует, т.е. $A^\alpha = 0$, уравнение скалярного поля имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}g^{\nu\mu}\varphi_{,\mu}\right) + m^2\varphi = 0. \quad (44)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде (4), при условии $k_2 = 0$. Тогда после перехода к новой функции $u(\xi) = v(x)$, $\xi = e^{-\sqrt{2}\Omega x}$, уравнение (44) сводится к уравнению

$$u'' - \frac{A}{\xi^2}u = 0, \tag{45}$$

с решением

$$u = M\xi^{\alpha}, \tag{46}$$

где $\alpha \geqslant 0$: $\alpha = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + A}$, $A = \omega^2 + k^3 + m^2$, M — произвольная постоянная, приводящая к непрерывному спектру по ω.

Таким образом, вращение Вселенной Гёделя играет определяющую роль в формировании электрической или магнитной компоненты внешнего электромагнитного поля, наличие которого, в свою очередь, приводит к существованию дискретного энергетического спектра скалярных частиц.

Литература

1. *Hiscock W. A.* // Phys. Rev. D. — 1978. — Vol. 17, No 6. — Pp. 1497–1500.
2. *Leohy D. A.* // Intern. Journ. of Theoret. Phys. — 1982. — Vol. 21, No 8/9. — Pp. 703–753.
3. *Novello M., Damião Soares I.* // Phys. Rev. D. — 1983. — Vol. 27, No 4. — Pp. 779–788.
4. *Gödel K.* // Rev. Mod. Phys. — 1949. — Vol. 21. — Pp. 447–450.
5. *Шикин Г. Н.* 1985. — // Проблемы теории гравитации и электромагнитных частиц, Т. 15. М.: Энергоатомиздат, С. 98–102. [*Shikin G. N.* 1985. — // Problemih teorii gravitacii i ehlektromagnitnihkh chastic, T. 15. M.: Ehnergoatomizdat, S. 98–102.]
6. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1978. — С. 320. [*Nikiforov A. F., Uvarov V. B.* Specialjnihe funkcii matematicheskoyj fiziki. — M.: Nauka, 1978. — C. 320.]

UDC 621.378.826.535.8

Energy Spectrum of the Charged Scalar Particles in the Gödel Universe

G. N. Shikin*, L. P. Yuschenko†

* *Department of Theoretical Physics*

† *Department of General Physics*

Peoples' Friendship University of Russia

6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

In the Gödel Universe we considered equation of the complex massive scalar field interacting with the electromagnetic field. Since the Gödel Universe is a simplest model of the Universe with the cosmological rotation, interest presents the study of the influence of the outer gravitational field of such model on the formation and stability of the energy spectrum of the different physical fields. In this paper we have investigated the influence of the gravitational field of the Gödel Universe on the energy spectrum of the scalar particles.

Key words and phrases: energy spectrum, Gödel Universe, scalar particles.