Математика

УДК 517.977

Исследование некоторых квазилинейных сингулярно возмущённых модельных задач

Ю. А. Коняев*, В. И. Безяев†

* *Кафедра высшей математики*
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д.6, г. Москва, 117198, Россия

† *Кафедра дифференциальных уравнений и математической физики*
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д.6, г. Москва, 117198, Россия

С помощью нового вычислительного алгоритма, основанного на методе расщепления, изучены сингулярно возмущённые биологические модельные задачи.

Ключевые слова: сингулярно возмущённые квазилинейные системы, устойчивость, метод расщепления, спектр.

1. Введение

Исследование некоторых классов прикладных задач с быстрыми и медленными переменными может быть сведено к анализу сингулярно возмущённых (с/в) квазилинейных систем вида

$$\varepsilon\dot{x} = A(t,\varepsilon)x + \varepsilon f(x,t), \quad x(0,\varepsilon) = x^0, \quad x, f \in R^n, \tag{1}$$

где матричный ряд $A(t,\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(t)\varepsilon^k$ сходится абсолютно по некоторой норме при $|\varepsilon| < 1$ и $t \geqslant 0$.

Термин «сингулярность» указывает на возможность появления так называемого погранслоя в окрестности $t = 0$ [1, 2]. Для с/в задач вида (1) предлагается эффективный вычислительный алгоритм их решения, в основе которого лежит метод расщепления [2, 3].

2. Вычислительный алгоритм

Теорема 1. *Собственные значения* $\{\lambda_j(\varepsilon)\}_1^n$ *и собственные векторы* $\{s_j(\varepsilon)\}_1^n$ *регулярно возмущённой матрицы* $A(\varepsilon)$ *при наличии простого спектра* $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ $(\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq 0, \quad j \neq k\ , \quad j,k = \overline{1,n})$ *матрицы* A_0 *могут быть вычислены одновременно и с любой точностью*

$$\lambda_j(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \lambda_{kj}\varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}), \quad s_j(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} s_{kj}\varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}) \quad (\varepsilon \to 0) \tag{2}$$

с помощью простого конструктивного итерационного алгоритма метода расщепления [2, 3].

Доказательство. Запишем соотношения $A(\varepsilon)s_j(\varepsilon) = \lambda_j(\varepsilon)s_j(\varepsilon)$ в матричной форме $A(\varepsilon)S(\varepsilon) = S(\varepsilon)\Lambda(\varepsilon)$, где диагональная матрица $\Lambda(\varepsilon) = \mathrm{diag}\{\lambda_1(\varepsilon), \ldots, \lambda_n(\varepsilon)\}$

Статья поступила в редакцию 11 декабря 2009 г.

состоит из искомых собственных значений $\lambda_j(\varepsilon)$, а матрица $S(\varepsilon)$ состоит из собственных вектор-столбцов $s_j(\varepsilon) \quad (j = \overline{1,n})$. В условиях теоремы 1 всегда существует невырожденная матрица S_0 такая, что $S_0^{-1}A_0S_0 = \Lambda_0 = \mathrm{diag}\{\lambda_{01},\dots,\lambda_{0n}\}$. После замены $S(\varepsilon) = S_0H(\varepsilon)$ получим матричное уравнение $B(\varepsilon)H(\varepsilon) = H(\varepsilon)\Lambda(\varepsilon)$ $(B(\varepsilon) = S_0^{-1}A(\varepsilon)S_0, \quad B(0) = \Lambda_0)$. Для произвольной квадратной матрицы A введём обозначения для её диагональной $\bar{A} = \mathrm{diag}\{a_{11},\dots,a_{nn}\}$ и «бездиагональной» $\bar{\bar{A}} = A - \bar{A}$ частей.

Асимптотическое решение спектральной задачи для матрицы $A(\varepsilon)$ будем искать (с использованием аппарата диагональных и «бездиагональных» матриц) в виде $\Lambda(\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{N}\Lambda_k\varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}), \quad H_{(N)}(\varepsilon) = E + \sum\limits_{k=1}^{N}\bar{\bar{H}}_k\varepsilon^k$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим набор простых однотипных матричных уравнений:

$$\Lambda_0\bar{\bar{H}}_k - \bar{\bar{H}}_k\Lambda_0 = \Lambda_k - P_k \quad (k = \overline{1,N}),$$

$$P_1 = B_1, \quad P_k = B_k + \sum_{j=1}^{k-1}(B_j\bar{\bar{H}}_{k-j} - \bar{\bar{H}}_{k-j}\Lambda_j) = \{p_{ij}\}_k \quad (k \geqslant 2),$$

при последовательном решении которых однозначно определяются все диагональные Λ_k и «бездиагональные» $\bar{\bar{H}}_k \quad (k = \overline{1,N})$ матрицы:

$$\Lambda_k = \bar{P}_k, \quad \bar{\bar{H}}_k = \{h_{ij}\}_k, \quad (h_{ij})_k = \sigma_{ij}^{-1}(p_{ij})_k \quad (i,j = \overline{1,n}, \quad k \geqslant 1).$$

Справедливость представлений (2) следует из сходимости матричного ряда $A(\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k\varepsilon^k$ и указанного итерационного процесса, что и завершает доказательство теоремы 1. □

Теорема 2. *Если для системы* $\varepsilon\dot{x} = A(\varepsilon)x+\varepsilon f(x,t), \quad x(0,\varepsilon) = x^0$, $f(0,t) \equiv 0$, *матрица* $A(0)$ *имеет простой спектр, а усечённый спектр матрицы* $A(\varepsilon)$ *удовлетворяет неравенствам* $\mathrm{Re}\,(\lambda_{0j}+\varepsilon\lambda_{1j}) < -\varepsilon^q\sigma_0 < 0$ $(j = \overline{1,n}; q = 0,1)$ *и для достаточно гладкой функции* $f(x,t)$ *справедлива оценка* $|f(x,t)| \leqslant C|x|^{1+\alpha}$ $(\alpha, C > 0;$ $t \geqslant 0;$ $|x| \leqslant \delta)$, *тогда тривиальное решение данной системы асимптотически устойчиво.*

Замечание. Аналогичное утверждение имеет место и для неавтономных систем вида (1) [4].

Пример 1. В работе [5] рассмотрена модельная с/в система колебаний сердца

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = x - x^3 - y, \\ \dot{y} = x - x_0, \end{cases} \tag{3}$$

(x — относительная длина мышечного волокна, y — отражает наличие электрохимического воздействия) с неустойчивой точкой покоя $P_0(0,0)$ при $x_0 = 0$. В случае $x_0 > 0$ система имеет точку покоя $P_1(x_0,\, y_0)$, где $y_0 = x_0 - x_0^3$. После замены $z_1 = x - x_0$, $z_2 = y - y_0$ аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 1, система (3) сводится к системе с почти диагональной матрицей:

$$\varepsilon\dot{z} = (\Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1 + O(\varepsilon^2))z + \varepsilon^2a(z),$$

где

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = b^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = 1 - 3x_0^2.$$

Структура усечённого спектра соответствующей матрицы $\lambda_1(\varepsilon) = \varepsilon/b,\ \lambda_2(\varepsilon) = b - \varepsilon/b$ при $b = 1 - 3x_0^2 < 0$ гарантирует (в силу теоремы 2) асимптотическую устойчивость точки покоя $P_1(x_0,\ y_0)$.

Легко проверить, что при $b \geqslant 0$ в системе (3) возникает бифуркация Хопфа.

Пример 2. Полученные результаты позволяют также изучить модельную с/в квазилинейную задачу о прохождении нервного импульса [6, с. 202]:

$$\varepsilon\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + \varepsilon f(x), \quad x(0,\varepsilon) = x^0,$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = ((-3\varepsilon x_1^2 - \varepsilon x_1 x_2 - \varepsilon^2 x_1^3), 0, 0)^\top,$$

которая после невырожденной замены

$$x = S_0 y, \quad S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad {S_0}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

приводится к виду:

$$\varepsilon\dot{y} = B(\varepsilon)y + \varepsilon h(y), \quad B(\varepsilon) = \Lambda_0 + \varepsilon B_1,$$

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix},$$

$$h(y) = (-6\varepsilon y_1 y_2 - \varepsilon y_1 y_3 - \varepsilon y_2 y_3 - (\varepsilon^2 + 3\varepsilon)y_1^2 - 3\varepsilon y_2^2, 0, 0)^T.$$

Последующее невырожденное при достаточно малых $0 < \varepsilon < 1$ преобразование $y = H(\varepsilon)z \quad (H(\varepsilon) = E + \varepsilon\bar{\bar{H}}_1)$ приводит к задаче с почти блочно-диагональной системой:

$$\varepsilon\dot{z} = (\Lambda_0 + \varepsilon N_1 + O(\varepsilon^2))z + \varepsilon b(z),\ z(0,\varepsilon) = z^0,$$

где матрица

$$N_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & N_{10} \end{pmatrix}$$

имеет блочно-диагональную структуру, причём матрица

$$N_{10} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

имеет простой спектр $\nu_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$, что позволяет пользоваться аналогом теоремы 1 и после невырожденной замены

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_{10} \end{pmatrix}\nu, \quad S_{10}^{-1} N_{10} S_{10} = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}$$

перейти к с/в системе с почти диагональной матрицей $\varepsilon\dot{\nu} = (\Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1 + O(\varepsilon^2))\nu + \varepsilon h(\nu)$ и с учётом теоремы 2 сделать вывод об асимптотической устойчивости решения в окрестности точки $P_0(0,0,0)$, так как спектр усечённой матрицы

$$\Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\{\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon), \lambda_3(\varepsilon)\},$$

$\lambda_1 = -2 - \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \lambda_{2,3} = \frac{\varepsilon}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}) + O(\varepsilon^2)$ лежит в левой полуплоскости при достаточно малых $0 < \varepsilon < 1$.

Литература

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотичсекие методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
2. *Коняев Ю. А.* Общий подход к асимптотическому интегрированию сингулярно возмущенных начальных и краевых задач для систем линейных ОДУ // Дифференциальные уравнения. — 1984. — Т. 20, № 11. — С. 1999–2003.
3. *Коняев Ю. А.* Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений // Математический сборник. — 1993. — Т. 18, № 12. — С. 133–144.
4. *Коняев Ю. А.* О некоторых методах исследования устойчивости // Математический сборник. — 2001. — Т. 192, № 3. — С. 65–82.
5. *Zeeman E. C.* Differential Equations for the Heartbeat and Nerve Impulse // Salvador Symposium on Dynamical Systems. — Academic Press, 1973. — Pp. 683–741.
6. *Arrowsmith D. K., Place C. M.* Dynamical Systems. Differential Equations, Maps and Chaotic Behavior. — London. Chapman&Hall, 1992.

UDC 517.977

Research of Some Quasilinear Singular Perturbated Model Problems

Yu. A. Konyaev[*], **V. I. Bezyaev**[†]

[*] *Department of Mathematics*
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

[†] *Department of Differential Equations and Mathematical Physics*
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

Some quasilinear singular perturbated biological model problems were investigated by a new computation algorithm based on the splitting method.

Key words and phrases: quasilinear singular perturbated system, stability, splitting method, spectrum.