ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ И ПРОЧНОСТИ ПРЯМЫХ ГЕЛИКОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

М.И. РЫНКОВСКАЯ, *к.т.н., доцент*
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
marine_step@mail.ru

Прямые геликоидальные оболочки нашли широкое применение в машиностроении и строительстве в конструкциях винтовых конвейеров, шнеков, винтовых лестниц, пандусов и др. Геометрия прямых геликоидов достаточно хорошо изучена, что позволяет активно применять их на практике. Расчет на прочность производится в основном с помощью расчетных программных комплексов, основанных на численных методах, что не всегда позволяет проводить углубленный анализ напряженно-деформированного состояния оболочки. Предлагается один из вариантов аналитического расчета НДС прямого геликоида с разложением решения в тригонометрические ряды, а также готовая программа по расчету прямого геликоида, которая позволяет анализировать напряженно-деформированное состояние оболочки.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: геликоидальные оболочки, прямой геликоид, аналитический метод, напряженно-деформированное состояние, винтовой конвейер, пандус.

Геликоидальные оболочки нашли широкое применение в строительстве и машиностроении. Особое распространение получили прямые геликоиды, например, в конструкциях винтовых конвейеров, шнеках, строительных машинах. Классическими примерами применения прямого геликоида в архитектуре и строительстве служат винтовые лестницы и пандусы автостоянок [1]. Реже встречаются элементы зданий в форме прямого геликоида, например, башни. Известны примеры, когда конструкция всего здания или сооружения выполнена в форме прямого геликоида. Самым известным примером такого здания является музей современного искусства имени Гугенхайма в Нью-Йорке (США), построенный еще в 1959 году.

Прямым геликоидом называется винтовая линейчатая поверхность, образующаяся прямой, которая пересекает ось геликоида под прямым углом, вращается с постоянной угловой скоростью вокруг этой оси и одновременно перемещается поступательно с постоянной скоростью вдоль той же оси, причем скорости этих движений пропорциональны. В случае если подъем сопутствует вращению вокруг оси против часовой стрелки, прямой геликоид называется правосторонним, если по часовой стрелке – левосторонним.

В качестве простого примера винтового движения можно привести накручивание гайки на резьбу винта, при котором происходит поступательное и одновременно вращательное движение каждой точки поверхности гайки (по кругу и в то же время вдоль оси винта). Интересным примером получения винтовой линии может служить траектория перемещения точки винта вертолета при его взлете. В области строительства можно привести пример прямого геликоида в виде винтовой лестницы, так как каждая следующая ступень расположена со смещением одновременно по кругу и по высоте и в то же время расположена горизонтально, то есть под прямым углом к вертикальной оси лестницы.

Классификация и формы задания геликоидальных поверхностей, вопросы изгибания винтовых поверхностей и их визуализация (рис. 1) представлены в [2], там же в частности показано, что виток прямого геликоида может быть приближенно изогнут на поверхность катеноида, и его можно отнести к семейству коноидов и называть прямым винтовым коноидом, а также подтверждены выводы Ю. Дини, Д.Л. Рябинова и С.Н. Кривошапко [3].

Впервые прямой геликоид был открыт Ж. Менье в 1776г., а в 1842г. Е. Каталан доказал, что прямой геликоид является единственной линейчатой минимальной поверхностью, то есть поверхностью, у которой средняя кривизна равна нулю во всех точках, или поверхностью отрицательной гауссовой кривизны, или поверхностью наименьшей площади, натянутой на заданный контур. Прямой геликоид также можно назвать винтовым цилиндроидом, а при определенных условиях в него вырождаются такие поверхности как эллиптический геликоид, винтообразная закрученная полоса с прямыми образующими в области пучка, винтообразная предварительно закрученная полоса, трансцендентная афинно-минимальная поверхность [3].

Уравнения геликоида в параметрической форме

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = cv, \quad (1)$$

где c – смещение образующей AB при повороте ее на 1 рад или отношение скорости поступательного движения к круговой скорости, u, v – криволинейные координаты точки C геликоида – ее расстояние до оси z геликоида и угол поворота образующей AB, отсчитываемой от плоскости zOx.

Существует еще одна параметрическая форма задания поверхности прямого геликоида:

$$x = x(u, v) = cshu\cos v,\ y = y(u, v) = cshu\sin v,\ z = z(v) = cv, \quad (2)$$

108

при которой координатные линии u, v становятся изотермическими.

В явном виде уравнение прямого геликоида записывается в виде

$$z = c \operatorname{arctg}\left(y / x\right),$$

где c – смещение образующей прямой при повороте ее на 1 рад.

Векторная форма задания поверхности прямого геликоида имеет вид:

$$r(u, v) = re_r + cve_z ,$$

где величина c связана с шагом L винтовой поверхности соотношением

$$L = 2\square c .$$

Первая квадратичная форма поверхности характеризует внутреннюю геометрию поверхности – длины линий на поверхности, углы между ними, площадь отсеков поверхности, а вторая квадратичная форма поверхности характеризует ее внешнюю геометрию – радиусы нормальной кривизны линий на поверхности. Для прямого геликоида, заданного в параметрической форме (1), коэффициенты квадратичных форм запишутся в виде:

$$A = 1 , B^2 = r^2 + c^2 , F = 0 , \square = \square / 2 , \cos \square = 0 ,$$

$$L = 0 , M = -c / B , N = 0 .$$

Для параметрической формы задания поверхности прямого геликоида (2) коэффициенты квадратичных форм будут иметь вид:

$$A = B = cchu , F = L = N = 0 , M = 1/\left(cchu^2 u\right)$$

$$\left(u, v\right) = -\bar{d}r\bar{d}n = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 .$$

Как уже было сказано выше, прямой геликоид является минимальной поверхностью, причем единственной линейчатой минимальной поверхностью.

Первыми известными работами, посвященными аналитическому расчету на прочность геликоидов, были статья Д. Тейлора (США, 1933г.) и книга Д.Ю. Панова (Россия, 1937г.). В 1944г. В. Розинг предложил свою формулу для подсчета максимального напряжения, возникающего в поперечном сечении гребного винта в форме прямого геликоида, а в 1945г. вышла работа Г.Биезена, также посвященная расчету гребных винтов. В 1951г. Дж. Ромсомом был предложен способ расчета, основанный на методе Тейлора. В дальнейшем в 50-60-х годах расчетом прямых геликоидов занимались такие инженеры и ученые, как Л.И. Соломон, Дж. Кохен, Е. Рейсснер, В.Г. Рекач, О’Масуна, К.Ф. Черных, позже в 1975г. Е.И. Михайловский и С.Я. Колтунов.

В 1980-х годах на территории бывшего Советского Союза и зарубежных стран появился ряд работ, связанных с геликоидальными

109

оболочками. Так Я. Пличка (Чехословакия) в 1980г. применил для расчета прямых геликоидов метод сил, а Б.М. Меерсон рассматривал тонкостенную изотропную оболочку, образованную винтовым перемещением плоской кривой относительно прямой оси. Для решения задачи об упруго-пластическом нагружении оболочки им составлена разрешающая система восьми дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных. Е. Мансфилд рассматривал поведение цилиндрической винтовой оболочки под действием сосредоточенной силы и крутящего момента. В 1982г. И.А. Биргер рассматривал пространственное напряженное состояние лопаток турбомашин. В 1984г. С.П. Гавель и Д.И. Шарапова предложили специальную параметризацию, обеспечивающую разделение переменных, и рассмотрели частный случай прямого геликоида.

В. Недельчев в 1989г. рассматривал плитчатую винтовую лестницу с заделкой на одной опоре и с шарнирно подвижным опиранием на другой стороне, и получил формулы, пригодные для практического использования, с помощью которых можно определить изгибающие и крутящие моменты, поперечные и нормальные усилия в любом сечении по длине лестницы.

Таким образом, из анализа истории развития исследований в области аналитических методов расчета геликоидальных оболочек видно, что активное их изучение началось в 50-х годах, потом в 60-х годах прервалось почти на 20 лет, и только в 80-х годах на какое-то время возобновилось. Это можно объяснить тем фактом, что в 70-х годах началось развитие численных методов расчета, которые продолжают активно внедряться и в настоящее время, что обусловлено также постоянным развитием компьютерных технологий, увеличением мощности и доступности вычислительных систем, позволяющих достаточно оперативно проводить громоздкие расчеты. Однако исследования в области аналитических методов расчета ведутся, и, возможно, смогут составить определенную конкуренцию численным методам, так как позволяют проводить более углубленный анализ.

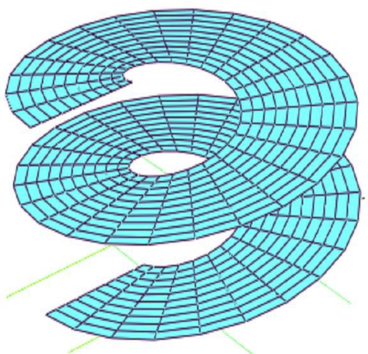

Рис. 1. Прямой геликоид

Примером может служить метод разложения решения в тригонометрические ряды, предложенный еще в 1957г. профессором В.Г. Рекачом в общем виде без численных результатов, и получивший усовершенствование и реализацию в 2013г. в работе [4].

Метод заключается в том, что два известных уравнения Рейсснера $D\nabla^2\nabla^2 u_z \pm \nabla_k^2 \square = Z$, $\nabla^2\nabla^2 \square \ \square\ Eh\nabla_k^2 u_z = 0$ сводятся к одному уравнению восьмого порядка $\nabla^8(t,v)\Phi(t,v) + p^2\nabla_k^4(t,v)\Phi(t,v) = -e^{4t}Z(t,v)/D$, а их решение раскладывается в тригонометрические ряды Фурье:

$$\Phi(t, v) = \sum_{m=1}^{\infty}\Phi_m(t)\sin mv \cdot$$

При этом необходимо пренебречь квадратом величины шага винта по сравнению с квадратом радиуса геликоида. При *m=0* получается известное полярно-симметричное решение для круглой пластинки $u_z = A_{01} + A_{02}\ln u + A_{03}u^2 + A_{04}u^2 \ln u$, а при *m≥1* нужно искать корни двух уравнений четвертой степени и получить восемь корней для каждого *m*-го члена, что дает решение для прямой геликоидальной оболочки. При исследовании данной методики были выявлены некоторые неточности в формулах, которые оказывали существенное влияние на результат решения, а также введен прямой подход к определению тангенциальных перемещений, что подробно рассмотрено в работе [4]. Усовершенствование метода позволило упростить вычисления, получить достаточно компактные формулы, удобные для реализации в MathCAD, и получить результаты, сопоставимые с результатами, полученными численными методами, в то время как в первоначальном виде данная методика приводила к неверным результатам.

Заключение:

Для дальнейшего расширения перспектив применения прямых геликоидов целесообразно совершенствовать аналитические методы расчета, позволяющие проводить углубленный анализ НДС оболочки. Одним из примеров совершенствования можно назвать модернизацию и автоматизацию метода В.Г. Рекача. Полученные результаты дают хорошее соответствие результатам, полученным численными методами, время расчета при этом сокращается. Следующим этапом планируется рассмотрение новых граничных условий и учет динамической нагрузки, что особенно целесообразно в связи с активным применением прямых геликоидов в конструкции автомобильных пандусов.

111

Литература

1. *Рынковская М.И.* Применение и расчет геликоидальных оболочек в архитектуре и строительстве. Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2012. №4. С. 84-90.
2. *Марина Рынковская*. Геликоиды в строительстве и машиностроении. Аналитический расчет прямого геликоида: Монография. – Saarbrucken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. – 144с.
3. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Энциклопедия аналитических поверхностей. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 560с.
4. *Рынковская М.И.* Изгибание и задачи расчета тонких упругих оболочек в форме прямого и развертывающегося геликоидов на распределенную нагрузку и осадку одной из криволинейных опор: дисс. … канд. техн. наук: 05.23.17 / Рынковская Марина Игоревна. – М., 2013. – 192с.

RESEARCH OF RIGHT HELICOIDAL SHELL GEOMETRY AND STRENGTH

M.I. RYNKOVSKAYA, *PhD., associate professor*
Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
marine_step@mail.ru

Right helicoids are widely used in mechanical and civil engineering in such structures as helical conveyor, screw, spiral stairs, ramps etc. The geometry of right shell is well known that's why there are a lot of examples of it's usage. Strength analysis is often carried by computer programs based on the numerical methods but it is not very easy to make a deep analysis of the shell mode of deformation. The analytical method of deflected mode calculation which is based on expansion in to trigonometric rows and the author program which is based on this method and which lets to make an analysis of deflected mode of the shell is presented.

KEYWORDS: helicoidal shells, right helicoid, analytical method, deflected mode, helical conveyor, ramp.

 112