СРАВНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА

Шарапова А.А.

Российский университет дружбы народов, asharapovarudn@gmail.com

В данной работе сравниваются некоторые методы решения уравнения эйконала.

Ключевые слова: численные методы, геометрическая оптика, уравнение эйконала.

Введение

Целью данной работы является сравнение некоторых методов решения уравнения эйконала в контексте задачи о моделировании линзы Люнеберга из кубиков. Решается подзадача определения расстояния от заданной точки до границы сложной формы. Составление полной модели, однако, выходит за рамки данной работы. Рассматриваются такие методы, как метод характеристик, fast sweeping method и метод замены переменных.

Линза Люнеберга и ее применение

Линзой Люнеберга называется сферическая либо цилиндрическая линза из неоднородного диэлектрика, коэффициент преломления в которой определяется как следующая функция от расстояния до ее центра.

$$n = \sqrt{2 - \frac{r^2}{R^2}} \tag{1}$$

Где R - радиус сферы, r – расстояние до центра [1]. Особенностью данной линзы является способность собирать параллельный пучок лучей, исходящий из точки в бесконечности, в точку на поверхности линзы. Несмотря на то, что данная конструкция известна давно, изготовление таких линз является технологически сложным, а затраты на производство материалов с непрерывно изменяющимся коэффициентом преломления подчас оказываются слишком высоки. Благодаря тому, что линза Люнеберга допускает качание диафрагмы направленности в широком спектре углов и большой эффективной площади рассеивания, она вызывает закономерный интерес. Данная линза используется в качестве антенн и радиолокационных отражателей, которые находят применение во многих военных и гражданских сферах. В связи с этим встает задача нахождения способов упрощения изготовления такой линзы.

Одним из вариантов является изготовление линзы из небольших кубиков с разнообразными коэффициентами преломления. Следует заметить, что фокусирующее свойство идеальной линзы Люнеберга для случая линзы из дискретных частей может не сохраняться. Определить оптические пути лучей сквозь линзу можно как исходя из чистой геометрии, как это было сделано в [1], так и другими способами, одним из которых является решение уравнения эйконала. В самом деле, в настоящее время все большее внимание уделяется методам решения геометрических задач основанные на решении дифференциальных уравнений с краевыми условиями [4].

Некоторые численные методы решения уравнения эйконала

Уравнение эйконала

$$\left(grad\varphi\right)^2 = \frac{1}{v^2\left(x,y\right)} \tag{2}$$

определяет оптическую длину пути луча от излучающей точки на границе до некоторой точки пространства [4]. Положив граничные условия $\varphi(x_0,y_0)=0$, где x_0, y_0 — координаты точки возмущения, получим дифференциальное уравнение с краевым условием, в котором φ имеет смысл расстояния между двумя точками.

Помимо геометрической оптики, уравнение эйконала применяется также в акустике, электронике, геофизике и так далее.

Существует достаточно большое количество численных методов решения уравнения эйконала. Это связано с тем, что количество явных решений этого уравнения достаточно мало.

Метод характеристик предложен в [2]. Суть его состоит в преобразовании уравнения эйконала к системе ОДУ первого порядка (3) при помощи замены и затем метода характеристик.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = p_1 \dfrac{1}{b^2}, \quad \dfrac{dy}{dt} = p_2 \dfrac{1}{b^2} \\ \dfrac{dp_1}{dt} = \dfrac{b_x}{b}, \quad \dfrac{dp_2}{dt} = \dfrac{b_y}{b} \\ (x, y)\big|_{t=0} = (x_0, y_0), \quad p\big|_{t=0} = b(x_0, y_0)v^0 \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $b(x,y) = 1/v(x,y)$ и $p = (p_1, p_2) = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$.

Полученную систему можно решить любым подходящим численным методом, например методом Рунге-Кутты как это и предложено в [2]. В результате находится пара характеристик характеризующих луч.

Fast sweeping method метод подробно рассмотрен в [3].

$$\left[\left(\phi_{i,j} - \phi_{xmin}\right)^{+}\right]^2 + \left[\left(\phi_{i,j} - \phi_{ymin}\right)^{+}\right]^2 = \frac{h^2}{v^2} \tag{4}$$

$$\phi_{xmin} = min\left(\phi_{i-1,j}, \phi_{i+1,j}\right) \quad \phi_{ymin} = min\left(\phi_{i,j-1}, \phi_{i,j+1}\right)$$

Этот метод использует противопоточную разностную схему Годунова (4) для дискретизации системы на сетке и модифицированный метод Гаусса-Зейделя для ее решения.

Метод замены переменных, как следует из названия, подразумевает замену искомого переменного. Это делается для того, чтобы избежать бесконечного возрастания функции φ в случае, когда область не ограничена стенками со всех сторон. В [4] предлагается следующая замена:

$$L = Ae^{k\varphi} \tag{5}$$

После расчетов производится обратная замена.

Выводы

Рассмотрены численные методы решения уравнения эйконала. Изучена литература по теме.

Литература

1. *Каценеленбаум Б. З., Голубятников А. В.* Линза Люнеберга из кубиков. Геометрооптический расчет.-*Письма в ЖТФ.-1998.-Т.24. №15-С. 69-72*

2.*Кабанихин С. И., Криворотько О.И.* Численное решение уравнения эйконала. -*Сибирские электронные математические известия.-2013.- Т.10.С.28-34*

3. *Zhao H.* A fast sweeping method for eikonal equations.-*Mathemathics of computation -2004.-Т 74. №250.С.603-627*

4. *Иванов Д. И., Иванов И. Э., Крюков И.А.* Алгоритмы приближенного решения некоторых задач прикладной геометрии, основанные на уравнении типа Гамильтона-Якоби.-*Журнал вычислительной математики и математической физики.-2005.-Т.45 №8 -С.1345-1358*

CAMPARISON OF SEVERAL NUMERICAL METHODS FOR SOLVING EIKONAL EQUATIONS

Sharapova A.A.

Peoples' Friendship University of Russia,asharapova@gmail.com

In this paper several numerical methods of solving eikonal equations are compared.

Key words: *numerical methods, geometrical optics***,** *eikonal equation*