RUDN Journal of MIPh
Вестник РУДН. Серия МИФ
2018 Vol. 26 No. 4 321–330
http://journals.rudn.ru/miph

# Математическое моделирование

УДК 519.633.2
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-321-330

## О нормальных модах закрытого волновода с разрывным заполнением

**М. Д. Малых**

*Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей*
*Российский университет дружбы народов*
*ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Рассматривается волновод постоянного поперечного сечения $S$ с идеальным проведением стенками. Предполагается, что заполнение волновода не изменяется вдоль его оси и описывается кусочными непрерывными функциями $\epsilon$ и $\mu$ на поперечном сечении волновода. Показано, что возможно сделать замену переменных, которая позволяет работать только с непрерывными функциями.

Вместо разрывных поперечных компонент электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ мы предлагаем использовать четыре потенциала $u_e, u_h$ и $v_e, v_h$. Мы можем доказать как обобщение теоремы Тихонова–Самарского, что любое поле в волноводе допускает представление в такой форме, если мы рассматриваем потенциалы $u_e, u_h$ как элементы пространства Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(S)$, а потенциалы $v_e, v_h$, как элементы пространства Соболева $W_2^1(S)$.

Если $\epsilon$ и $\mu$ — кусочные постоянные функции, то уравнения Максвелла, записанные в четырёх потенциалах, сводятся к двум независимым системам. Это обстоятельство даёт нам новый подход к исследованию спектральных свойств волноводов. Во-первых, мы можем доказать полноту системы нормальных волн в закрытых волноводах, используя стандартные функциональные пространства. Во-вторых, мы можем предложить новую технику для вычисления нормальных волн, используя стандартные конечные элементы. В конце статьи представлена программа, написанная на языке FreeFem++, для вычисления дисперсионных линий волновода. Также рассмотрен вопрос о вычислении мод при больших значениях $k = \omega/c$.

**Ключевые слова:** волновод, уравнения Максвелла, пространства Соболева, метод конечных элементов, нормальные моды

## 1. Введение

Закрытые волноводы являются наиболее изученным объектом математической теории волноведущих систем. Ещё в середине прошлого века были предложены корректные модели распространения волн по таким системам, в частности была рассмотрена весьма сложная как для теоретического анализа, так и для применения численных методов векторная модель, в которой рассматриваются поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла. Наиболее изученными оказались волноводы, заполненные однородным веществом, исчерпывающая теория которых была построена в ставших уже классическими работах А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [1].

Тем не менее математическая сторона моделирования волноводов с сложным заполнением на основе уравнений Максвелла не развита в полной мере. Дело в том, что ключевым техническим моментом в теории полого волновода является использование потенциалов Герца или функции Боргниса [2, 3]. Этот приём не удалось обобщить на случай волноводов с переменным заполнением, и это заставляет работать с компонентами электромагнитных полей в специально конструируемых пространствах Соболева, для которых приходится в теории доказывать свои теоремы вложения [4–7], а на практике — использовать смешанные конечные элементы [8–

Статья поступила в редакцию 14 сентября 2018 г.

10]. Это, в частности, существенно осложняет использование свободных и хорошо отлаженных конечно элементных программ (FEA software) для расчёта волноводов со сложным заполнением.

Современное развитие волоконной оптики и создание мета-материалов вновь возвращает нас к модели закрытого волновода, заполнение которого описывается кусочно-постоянной функцией. Вероятно, наиболее очевидным примером являются многожильные оптические волокна (multicore fiber), которые активно исследуются в последнее время, поскольку пропускная способность обычных одноканальных волокон использована уже почти полностью [11] и, очевидно, недостаточна для перемещения огромных массивов данных, что является ключевым моментом на пути к мобильным сетям 5G. Следует также заметить, что распространение волноводных мод по открытым оптическим волноводам, равно как и взаимодействие нескольких таких волноводов, можно корректно моделировать, поместив всю волноведующую систему в ящик, на границе которого поставлены условия идеальной проводимости [12]. Не трудно заметить, что система «волокно + ящик» представляет собой ни что иное, как закрытый волновод со сложным заполнением.

Конечной целью наших исследований [13–15] будет разработка численных методов исследования волноводов в стандартных функциональных пространствах и их реализация на высокоуровневых языках программирования, таких как FreeFem++ [16, 17], или в системах компьютерной алгебры. При этом мы стремимся использовать как можно более простые, а следовательно, и надёжные конструкции. На наш взгляд, ключевая проблема в исследовании волноводов с разрывным заполнением — необходимость работать с разрывными компонентами полей. Обычно потенциалы рассматривают как способ понижения системы уравнений в частных производных, то есть как способ интегрирования системы. Мы же хотим взглянуть на введение потенциалов как на замену переменных, при которой мы переходим от разрывных функций к гладким потенциалам. В этой статье мы опишем такую замену и покажем, как при её помощи вычислить дисперсионные кривые во FreeFem++.

## 2. Декомпозиция Гельмгольца

Рассмотрим закрытый волновод постоянного сечения $S$ с кусочно непрерывным заполнением $\epsilon$ и $\mu$, не меняющимся вдоль оси волновода. Линию разрыва заполнения обозначим как $\Gamma$. Направим ось $Oz$ декартовой системы координат по оси волновода.

Под электромагнитным полем в закрытом волноводе $S \times Z \times T$ с заполнением $\epsilon, \mu$ будем понимать векторные поля $\vec{E}, \vec{H}$, компоненты которых определены на $(S - \Gamma) \times Z \times T$, при условии, что сужение $\vec{E}, \vec{H}$ и их частных производных по $z$ и $t$ на сечение $S$ при любых значениях $z$ и $t$ являются кусочно гладкими функциями, удовлетворяющими

1. уравнениям Максвелла
$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\mu}{c}\partial_t\vec{H}, & \nabla \cdot \epsilon\vec{E} = 0, \\ \mathrm{rot}\vec{H} = +\dfrac{\epsilon}{c}\partial_t\vec{E}, & \nabla \cdot \mu\vec{H} = 0 \end{cases} \tag{1}$$
внутри волновода $S \times Z \times T$;
2. условиям идеальной проводимости стенок волновода
$$\vec{E} \times \vec{n} = 0, \quad \vec{H} \cdot \vec{n} = 0 \tag{2}$$
в регулярных точках границы $\partial S \times Z \times T$;

3. условиями сопряжения

$$\begin{cases} [\vec{E} \times \vec{n}] = \vec{0}, & [\epsilon \vec{E} \cdot \vec{n}] = 0 \\ [\vec{H} \times \vec{n}] = \vec{0}, & [\mu \vec{H} \cdot \vec{n}] = 0 \end{cases} \tag{3}$$

в регулярных точках границы разрыва заполнения $\Gamma \times Z \times T$.

Наконец, примем для краткости, что

$$\vec{A}_\perp = (A_x, A_y, 0)^T \quad \text{and} \quad \nabla = (\partial_x, \partial_y, 0)^T, \quad \nabla' = (-\partial_y, \partial_x, 0)^T.$$

Связь между полями и потенциалами зададим следующим образом:

$$\vec{E}_\perp = \nabla u_e + \frac{1}{\epsilon} \nabla' v_e, \quad \vec{H}_\perp = \nabla v_h + \frac{1}{\mu} \nabla' u_h. \tag{4}$$

Каждая из этих формул представляет собой двумерный аналог декомпозиции Гельмгольца, хорошо известной в теории упругости [18].

**Замечание 1.** В электродинамике для поля $\vec{H}_\perp$ такие потенциалы возникали при доказательстве полноты системы нормальных мод в качестве вспомогательной конструкции [5]. Все четыре потенциала были введены в нашей работе [14] для гладкого заполнения без коэффициентов $1/\epsilon$ и $1/\mu$, важных только для разрывного случая.

***Теорема 1.*** *Для любого электромагнитного поля $\vec{E}, \vec{H}$ в волноводе найдутся такие функции $u_e, u_h$ переменных $z, t$ со значениями в пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(S)$ и такие функции $v_e, v_h$ переменных $z, t$ со значениями в пространстве Соболева $W_2^1(S)$, что справедливо равенство (4). Указанное представление единственно с точностью до аддитивных констант.*

Теорема 1 означает, что при переходе от переменных $\vec{E}$, $\vec{H}$ к четырём потенциалам и двум компонентам $E_z$, $H_z$ по формулам (4) не теряются решения уравнений Максвелла. При этом условия

$$u_e,\, u_h,\, E_z \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(S) \quad \text{and} \quad v_e,\, v_h,\, H_z \in W_2^1(S)$$

заменяют нам условия на разрывах заполнения, равно как и граничные условия. Поскольку потенциалы являются элементами пространств Соболева, далее естественно рассматривать уравнения Максвелла в слабой форме [19].

Обратимся теперь к случаю, когда заполнение волновода является кусочно постоянным. Уравнения Максвелла дают, что потенциалы $u_e$, $u_h$ и $E_z$ — элементы $\overset{\circ}{W}{}_2^1(S)$, связанные уравнениями

$$\begin{cases} \iint\limits_S \epsilon (\nabla u, \nabla u_e) dx dy = \partial_z \iint\limits_S \epsilon u E_z dx dy, \\ \iint\limits_S \frac{c}{\mu} (\nabla u, \nabla u_h) dx dy = -\partial_t \iint\limits_S \epsilon u E_z dx dy \end{cases} \tag{5}$$

для любой $u$ из $C_0^\infty(S)$, где $E_z = \partial_z u_e + \partial_t u_h$, потенциалы $v_e$, $v_h$ и $H_z$ — элементы $W_2^1(S)$, связанные уравнениями

$$\begin{cases} \iint\limits_S \frac{c}{\epsilon}(\nabla v, \nabla v_e)dxdy = \partial_t \iint\limits_S \mu v H_z dxdy, \\ \iint\limits_S \mu(\nabla v, \nabla v_h)dxdy = \partial_z \iint\limits_S \mu v H_z dxdy, \end{cases} \tag{6}$$

для любой $v$ из $C^\infty(S)$, где $H_z = \partial_z v_h - \partial_t v_e$.

Уравнения (5) и (6) можно использовать и для конструирования полей в волноводе. Если $u_e$, $u_h$ и $E_z$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(S)$ удовлетворяют уравнениям (5), а $v_e$, $v_h$ и $H_z$ из $W_2^1(S)$ удовлетворяют уравнениям (6), то поле $\vec{E}, \vec{H}$, вычисленное по формулам (4), удовлетворяет уравнениям Максвелла в обобщённом смысле. Более того, если это поле имеет вне разрывов заполнения непрерывные частные производные 1-го порядка по всем переменным, а на разрывах заполнения — разрывы 1-го рода, то это поле вне разрывов заполнения соответствует уравнениям Максвелла (1), условиям сопряжения (3) на разрывах заполнения и краевым условиям идеальной проводимости (2).

Поскольку система уравнений Максвелла распалась на две независимые системы, электромагнитное поле $\vec{E}, \vec{H}$ в волноводе, заполнение которого описывается кусочно постоянными функциями $\epsilon$ и $\mu$, представляет собой суперпозицию TE- и TM- полей.

## 3. Нормальные TM-моды

Покажем, как развитую теорию можно применить к отысканию нормальных мод волновода. Напомним, что под нормальной модой волновода будем понимать нетривиальное поле вида

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y)e^{i\gamma z - i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}(x, y)e^{i\gamma z - i\omega t},$$

где $\omega$ — положительное число (круговая частота моды), а $\gamma$, вообще говоря, число комплексное (волновое число). Моды с вещественным волновым числом называют нормальными волнами, распространяющимися вдоль или против оси волновода.

Нормальная TM-мода волновода описывается потенциалами

$$u_e = \tilde{u}_e e^{i\gamma z - i\omega t}, \quad u_h = \tilde{u}_h e^{i\gamma z - i\omega t},$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \iint\limits_S \epsilon(\nabla u, \nabla \tilde{u}_e)dxdy = -\gamma^2 \iint\limits_S \epsilon u \tilde{u}_e dxdy + k\gamma \iint\limits_S \epsilon u \tilde{u}_h dxdy, \\ \iint\limits_S \frac{1}{\mu}(\nabla u, \nabla \tilde{u}_h)dxdy = -k\gamma \iint\limits_S \epsilon u \tilde{u}_e dxdy + k^2 \iint\limits_S \epsilon u \tilde{u}_h dxdy, \end{cases} \tag{7}$$

для любой $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(S)$; здесь для краткости используется обозначение $k = \omega/c$. Перепишем эту систему уравнений в операторном виде, используя стандартную технику теории пространств Соболева [20],

$$\begin{cases} A_\epsilon \tilde{u}_e = -\gamma^2 B_\epsilon \tilde{u}_e + k\gamma B_\epsilon \tilde{u}_h, \\ A_{\frac{1}{\mu}} \tilde{u}_h = -k\gamma B_\epsilon \tilde{u}_e + k^2 B_\epsilon \tilde{u}_h, \end{cases} \tag{8}$$

где $A_\epsilon, A_{\frac{1}{\mu}}, B_\epsilon$ — ограниченные самосопряжённые операторы, а $B_\epsilon$ ко всему прочему ещё и вполне непрерывный.

Для теоретического анализа удобно исключить $\tilde{u}_h$ и оставить одно уравнение

$$A_\epsilon \tilde{u}_e = -\gamma^2 \left( B_\epsilon + B_\epsilon \left( \frac{1}{k^2} A_{\frac{1}{\mu}} - B_\epsilon \right)^{-1} B_\epsilon \right) \tilde{u}_e. \tag{9}$$

Поэтому задачу об отыскании всех нормальных ТМ-мод при заданной частоте $\omega$ можно рассматривать как задачу на собственные значения для операторного пучка, в которой $\lambda = \gamma^2$ рассматривается как спектральный параметр. В силу самосопряжённости операторов и полной непрерывности оператора $B_\epsilon$ собственные функции этой задачи образуют базис пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_2(S)$. Отсюда нетрудно вывести, что любое ТМ-поле в волноводе можно представить в виде суперпозиции нормальных ТМ-полей.

**Замечание 2.** Следует подчеркнуть, что мы установили именно базисность системы нормальных мод, полнота системы нормальных мод для волноводов со сложным заполнением была установлена в работах А.Л. Делицына [6, 7]. Этот результат является естественным обобщением теоремы о базисности системы нормальных мод полого волновода, установленной ещё в 1940-х годах А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским [1, 3, 21].

При фиксированной частоте $\omega$ имеется бесконечное число нормальных мод, из них лишь конечное число представляют собой бегущие волны. Прочие моды имеют чисто мнимые значения $\gamma$. Наши вычисления мод волновода, заполненного веществом, основанные на неполном методе Галёркина [15], приводили в высших модах к волновым числам, имеющим как вещественную, так и мнимую части, одна из которых была очень мала. Теперь ясно, что это был чисто численный эффект.

Чтобы описать параметры распространяющихся нормальных волн, удобно использовать дисперсионную кривую. Все точки $k\gamma$-плоскости, где эта задача на собственные значения имеет нетривиальное решение, образуют кривую, которую будем называть дисперсионной кривой волновода. Для её построения естественно использовать метод усечения: мы будем использовать пространство конечных элементов вместо пространства Соболева и изменим операторами разреженными матрицам, порождёнными теми же самыми билинейными формами.

Для вычисления этих матриц и дальнейших манипуляций с блочными разреженными матрицами мы использовали свободное программное обеспечение FreeFem ++ [17]. На этом языке, не опускаясь на уровень матриц и чисел, можно задать пространство конечных элементов и матрицы операторов $A_\epsilon$, $A_{\frac{1}{\mu}}$, $B_\epsilon$. Однако вычисление обратной матрицы приведёт к задаче на собственные значения с неразреженными матрицами, что существенно усложнит её решение. Поэтому для вычислений удобнее пользоваться исходной системой (8). Подставляя $\gamma = k\beta$, мы можем переписать нашу задачу на собственные значения (8) в блочно-разреженном виде:

$$\begin{pmatrix} A_\epsilon & 0 \\ 0 & A_{\frac{1}{\mu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_e \\ \tilde{u}_h \end{pmatrix} = k^2 \begin{pmatrix} -\beta^2 B_\epsilon & \beta B_\epsilon \\ -\beta B_\epsilon & B_\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_e \\ \tilde{u}_h \end{pmatrix}.$$

Эту задачу можно решить стандартными средствами, если рассматривать $k^2$ как собственное значение, а $\beta$ — как параметр. Для построения дисперсионной кривой волновода теперь достаточно решать эту стандартную задачу, меняя значения $\beta$ с некоторым шагом. Это позволяет нам работать во FreeFem++ со всеми волноводами, границы которых могут быть описаны параметрически с помощью элементарных функций, а заполнение — с помощью алгебраических неравенств.

Вычислительные возможности этой программы проиллюстрируем примером.

**Пример 1.** На рис. 1 представлена дисперсионная кривая для волновода с сечением

$$S = \{0 < x < 1\} \times \{0 < y < 1\}$$

и кусочно постоянным заполнением

$$\epsilon = \begin{cases} 1,2, & (x-0,5)^2 + (y-0,3)^2 < 0,5, \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \mu = 1. \tag{10}$$

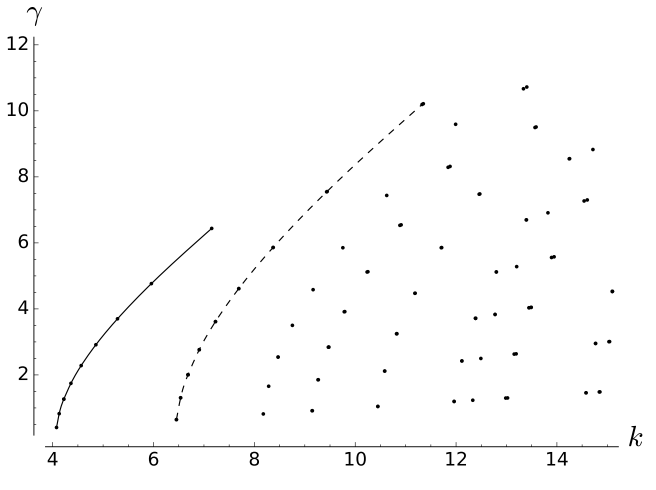


**Рис. 1. Дисперсионная кривая для примера 1. Сплошной линией отмечена ветвь $\gamma_1(k)$, пунктиром — ветвь $\gamma_2(k)$, которая с графической точностью совпадает с третьей ветвью**

Мы использовали 2120 треугольников для построения пространства конечных элементов и меняли значения $\beta$ с шагом $\Delta\beta = 0.1$. Чтобы проверить сходимость, мы сделали ряд числовых экспериментов для полого волновода.

## 4. Высокочастотный предел

В оптических задачах величина $k = \frac{\omega}{c}$ весьма велика, поэтому весьма полезно взглянуть на высокочастотный предел [22]. Мы не можем перейти к пределу $k \to \infty$ непосредственно в (9), но мы можем сделать это после усечения. Дело в том, что оператор $B_\epsilon$ является вполне непрерывным и поэтому необратим. Однако МКЭ вносит некоторую регуляризацию: матрица $B_\epsilon$ становится обратимой, причём норму обратной матрицы можно оценить через характерный линейный размер $h$ используемой сетки как

$$\|B_\epsilon^{-1}\| \simeq h^{-2}.$$

Это обстоятельство позволяет применить формулу Неймана к задаче (9) после её дискретизации. В результате получится, что

$$B_\epsilon \left( \frac{1}{k^2} A_{\frac{1}{\mu}} - B_\epsilon \right)^{-1} B_\epsilon = -B_\epsilon \left( B_\epsilon^{-1} + \frac{1}{k^2} B_\epsilon^{-1} A_{\frac{1}{\mu}} B_\epsilon^{-1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right) \right) B_\epsilon$$

и

$$A_\epsilon \tilde{u}_e = \frac{\gamma^2}{k^2} \left( A_{\frac{1}{\mu}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) \tilde{u}_e.$$

Если обозначить собственные значения пучка $A_\epsilon - \beta^2 A_{\frac{1}{\mu}}$ как $\beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то собственные значения задачи (9) асимптотически равны

$$\gamma_n = \beta_n k + \ldots .$$

Таким образом, нормальные моды имеют вид

$$\vec{E}(x, y) e^{ik\beta_n z - i\omega t}, \quad \vec{H}(x, y) e^{ik\beta_n z - i\omega t}.$$

Условие применимости формулы Неймана состоят в том, что $h^{-2} k^{-2} \ll 1$, т. е. шаг сети $h$, должен быть меньше длины волны в вакууме. Мы полагаем, что найденная формула может быть полезна для управления величиной отношения $\gamma/k$ волноводных мод путём изменения заполнения волновода.

## 5. Заключение

В настоящей статье мы хотели показать, что теоретические и численные исследования электромагнитных полей в закрытых волноводах, заполнения которых описываются кусочно-постоянными функциями $\epsilon$ и $\mu$, возможно вести в стандартных пространствах Соболева и при помощи обычных конечных элементов. От разрывных компонент полей мы предлагаем перейти к четырём непрерывным скалярным функциям — потенциалам. Этот приём позволяет в теории легко обосновать базисность системы нормальных мод такого волновода, а на практике предложить способ приближенного вычисления нормальных мод, использующий стандартные средства численного анализа, разработанные для скалярных краевых задач математической физики. Для подтверждения этого проделаны численные эксперименты в среде FreeFem++.

## Благодарности

Автор признателен профессору А. Н. Боголюбову (МГУ), профессору Л. А. Севастьянову (РУДН) и доценту К. П. Ловецкому (РУДН) за обсуждение работы и весьма интересные замечания.

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при частичной поддержке грантов РФФИ №№ 18-07-00567 и 18-51-18005.

## Литература

1. *Самарский А. А., Тихонов А. Н.* О представлении поля в волноводе в виде суммы полей TE и TM // Журнал технической физики. — 1948. — Т. 18, № 7. — С. 959–970.
2. *Zhang K., Li D.* Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics. — 2 edition. — Berlin: Springer, 2008.

3. *Могилевский И. Е., Свешников А. Г.* Математические задачи теории дифракции. — Москва: Физический факультет МГУ, 2010.
4. *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Свешников А. Г.* О полноте системы собственных и присоединённых функций волновода // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 38, № 11. — С. 1891–1899.
5. *Делицын А. Л.* Об одном подходе к вопросу о полноте нормальных волн волновода с магнитодиэлектрическим заполнением // Дифференциальные уравнения. — 2000. — Т. 36, № 5. — С. 629–633.
6. *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Малых М. Д.* О корневых векторах цилиндрического волновода // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2001. — Т. 41, № 1. — С. 126–129.
7. *Делицын А. Л.* О полноте системы собственных векторов электромагнитных волноводов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2011. — Т. 51, № 10. — С. 1883–1888.
8. *Делицын А. Л.* О проблеме применения метода конечных элементов к задаче вычисления мод волноводов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 39, № 2. — С. 315–322.
9. *Делицын А. Л., Круглов С. И.* Применение метода смешанных конечных элементов для вычисления мод цилиндрических волноводов с переменным показателем преломления // Журнал радиоэлектроники. — 2012. — № 4.
10. *Lezar E., Davidson D. B.* Electromagnetic Waveguide Analysis // Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method. — The FEniCS Project, 2011. — Pp. 629–643.
11. *Coffey V. C.* Novel Fibers Use Space to Extend Capacity Limits // Photonics Spectra. — 2013. — Vol. 4, No 7.
12. Моделирование распространения поляризованного света в тонкоплёночной волноводной линзе / Д. В. Диваков, М. Д. Малых, А. Л. Севастьянов и др. // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 1. — С. 56–68.
13. On the Representation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides Using Four Scalar Potentials / M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, A. A. Tiutiunnik, N. E. Nikolaev // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2018. — Vol. 32, No 7. — Pp. 886–898.
14. О сведении уравнений Максвелла в волноводах к системе связанных уравнений Гельмгольца / М. Д. Малых, А. Л. Севастьянов, Л. А. Севастьянов, А. А. Тютюнник // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 39–48.
15. *Тютюнник А. А.* О вычислении электромагнитных полей в закрытых волноводах с неоднородным заполнением // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 2. — С. 129–139.
16. *Hecht F.* New Development in FreeFem++ // J. Numer. Math. — 2012. — Vol. 20, No 3–4. — Pp. 251–265. — ISSN 1570-2820.
17. *Hecht F.*, 2018. — Freefem++. — Laboratoire Jacques-Louis Lions, Universitè Pierre et Marie Curie, Paris, 3 edition. — `www.freefem.org`.
18. *Ляв Д.* Теория упругости. — Москва, Ленинград: ГТТИ, 1939.
19. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. — Москва: Наука, 1980.
20. *Stummel F.* Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1969.
21. *Chew W. C.* Lectures on Theory of Microwave and Optical Waveguides. — 2012. — `http://wcchew.ece.illinois.edu/chew/course/tgwAll20121211.pdf`.
22. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — Москва: Наука, 1972.

UDC 519.633.2
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-321-330

# On Normal Modes of the Closed Waveguide with Discontinuous Filling

**Mikhail D. Malykh**

*Department of Applied Probability and Informatics*
*Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)*
*6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation*

We consider a waveguide of a constant cross-section $S$ with ideally conducting walls. We assume that the filling of waveguide doesn't change along its axis and is described by the piecewise continuous functions $\epsilon$ and $\mu$ defined on waveguide cross-section. We show that it is possible to make substitution which allows to work only with continuous functions.

Instead of noncontinuous cross-components of an electromagnetic field $\vec{E}$ and $\vec{H}$ we offer to use four potentials $u_e, u_h$ and $v_e, v_h$. We can prove as the generalization of Tikhonov–Samarskii theorem that any field in the waveguide allows representation in such form if we consider the potentials $u_e, u_h$ as elements of Sobolev space $\overset{\circ}{W}{}_2^1(S)$ and the potentials $v_e, v_h$ as elements of Sobolev space $W_2^1(S)$.

If $\epsilon$ and $\mu$ are the piecewise constant functions then Maxwell's equations written in four potentials reduce to a pair of independent systems. This statement give us new approach to the investigation of spectral properties of waveguides. First, we can prove the completeness of the system of the normal waves in closed waveguides using standard functional spaces. Secondly, we can offer new technique for calculation of the normal waves using standard finite elements. FreeFem++ program for calculation of disperse lines of waveguides is presented. The question of calculation of modes at great values of $k = \omega/c$ is also considered.

**Key words and phrases:** waveguide, Maxwell's equations, Sobolev's spaces, finite element method, normal modes

## References

1. A. A. Samarskiy, A. N. Tikhonov, On the Representation of a Field in a Waveguide in the Form of a Sum of Fields TE and TM, Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics [Zhurnal tekhnicheskoy fiziki] 18 (7) (1948) 959–970, in Russian.
2. K. Zhang, D. Li, Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics. 2nd ed., Springer, Berlin, 2008.
3. I. E. Mogilevskii, A. G. Sveshnikov, Mathematical Problems of the Theory of Diffraction, Faculty of Physics MSU, Moscow, 2010, in Russian.
4. A. N. Bogolyubov, A. L. Delicyn, A. G. Sveshnikov, On the problem of the Excitation of a Waveguide with an Inhomogeneous Medium, Computational Mathematics and Mathematical Physics 38 (11) (1999) 1815–1823.
5. A. L. Delicyn, On One Approach to the Question of the Completeness of Normal Waves of a Waveguide with a Magnetodielectric Filling, Differentsialnye Uravneniya 36 (5) (2000) 629–633, in Russian.
6. A. N. Bogolyubov, A. L. Delicyn, M. D. Malykh, On the Root Vectors of a Cylindrical Waveguide, Computational Mathematics and Mathematical Physics 41 (1) (2001) 121–124, in Russian.
7. A. L. Delicyn, On the Completeness of the System of Eigenvectors of Electromagnetic Waveguides, Computational Mathematics and Mathematical Physics 51 (10) (2011) 1771–1776.
8. A. L. Delicyn, Application of the Finite Element Method to the Calculation of Modes of Dielectric Waveguides, Computational Mathematics and Mathematical Physics 39 (2) (1999) 298–304, in Russian.
9. A. L. Delicyn, S. I. Kruglov, Application of a Method of the Mixed Finite Elements for Calculation of Modes of Cylindrical Waveguides with Variable Index of Refraction, Journal of radio electronics (4), in Russian.

10. E. Lezar, D. B. Davidson, Electromagnetic Waveguide Analysis, in: Automated solution of differential equations by the finite element method, The FEniCS Project, 2011, pp. 629–643, in Russian.
11. V. C. Coffey, Novel Fibers Use Space to Extend Capacity Limits, Photonics Spectra 4 (7), in Russian.
12. D. V. Divakov, M. D. Malykh, A. L. Sevastianov, L. A. Sevastianov, Simulation of Polarized Light Propagation in the Thin-Film Waveguide Lens, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (1) (2017) 56–68, in Russian.
13. M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, A. A. Tiutiunnik, N. E. Nikolaev, On the Representation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides Using Four Scalar Potentials, Journal of Electromagnetic Waves and Applications 32 (7) (2018) 886–898.
14. M. D. Malykh, A. L. Sevastianov, L. A. Sevastianov, A. A. Tyutyunnik, On the Reduction of Maxwell's Equations in Waveguidesto the System of Coupled Helmholtz Equations, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (1) (2018) 39–48, in Russian.
15. A. A. Tyutyunnik, On the Calculation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides with Inhomogeneous Filling, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (2) (2018) 129–139, in Russian.
16. F. Hecht, New Development in FreeFem++, J. Numer. Math. 20 (3–4) (2012) 251–265.
17. J. Love, Theory of Elasticity, GTTI, 1939, in Russian.
18. G. Duvaut, J.-L. Lions, Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972.
19. F. Stummel, Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.
20. W. C. Chew, Lectures on Theory of Microwave and Optical Waveguides (2012). URL `http://wcchew.ece.illinois.edu/chew/course/tgwAll20121211.pdf`
21. V. M. Babich, V. S. Buldyrev, Short-Wavelength Diffraction Theory: Asymptotic Methods, Springer, Berlin, 1991.



**Для цитирования:**
*Малых М. Д.* О нормальных модах закрытого волновода с разрывным заполнением // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 4. — С. 321–330. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-321-330.

**For citation:**
Malykh M. D. On Normal Modes of the Closed Waveguide with Discontinuous Filling, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (4) (2018) 321–330. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-321-330. In Russian.

**Сведения об авторах**:
**Малых Михаил Дмитриевич** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: `malykh-md@rudn.ru`, тел.: +7(495)9522572)

**Information about the authors**:
**Malykh Mikhail D.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: `malykh-md@rudn.ru`, phone: +7(495)9522572)