RUDN Journal of MIPh
Вестник РУДН. Серия МИФ
2018 Vol. 26 No. 3 285–291
http://journals.rudn.ru/miph

Компьютерные и информационные науки

УДК 517.9
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-3-285-291

Методика отыскания алгебраических интегралов дифференциальных уравнений первого порядка

М. Д. Малых, Юй Ин

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Статья посвящена отысканию алгебраических интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений в системах компьютерной алгебры, основной акцент сделан на выработку практических указаний по работе с оригинальным пакетом Lagutinski for Sage.

В начале статьи формулируется задача Дебона: для заданного дифференциального уравнения $p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y = 0$, где p, q — многочлены из кольца $\mathbb{Q}[x, y]$, выяснить, имеет ли оно рациональный интеграл, и в случае утвердительного ответа предъявить этот интеграл. Обсуждена проблема отыскания верхней грани для порядка интеграла и её значение для решения дифференциальных уравнений на практике, сформулирована ограниченная задача Дебона. В основу решения задачи положен метод М. Н. Лагутинского и его реализация в системе компьютерной алгебры Sage. Теория и её реализация протестированы на примерах из задачника А. Ф. Филиппова. Проделанные численные эксперименты свидетельствуют, что метода позволяет на практике без особых затрат ресурсов и времени идентифицировать наличие рационального интеграла, однако является весьма затратной как метод вычисления этого интеграла. В заключении даны рекомендации по оптимальному использованию метода М. Н. Лагутинского.

Все вычисления выполнены в системе компьютерной алгебры Sage.

Ключевые слова: метод Лагутинского, задача Дебона, интегральные алгебраические кривые, алгебраические интегралы, Sage

1. Введение

При решении системы дифференциальных уравнений чрезвычайно важно найти все алгебраические интегралы. Авторы XIX века видели в их отыскании первый шаг к построению решения в конечном виде, однако даже в том случае, когда система не допускает решения в символьном виде и поэтому будет решаться приближённо по методу конечных разностей, всегда стремятся строить схемы консервативные, то есть сохраняющие алгебраические интегралы [1]. Применительно к уравнению 1-го порядка её можно сформулировать в следующем виде.

Задача 1 (Дебон). Для заданного дифференциального уравнения

$$p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y] \tag{1}$$

выяснить, имеет ли оно интеграл вида

$$r(x, y) = \mathrm{const}, \quad r \in \mathbb{C}(x, y),$$

и в случае утвердительного ответа предъявить этот интеграл.

Статья поступила в редакцию 18 мая 2018 г.
Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100», «Key Project of Science Foundation of Kai Li University (Z1602)» и при поддержки РФФИ, гранты №№ 18-07-00567 и 18-51-18005. Авторы признательны проф. Л. А. Севастьянову за постоянное внимание и плодотворные обсуждения.

Эта задача, пусть и в других терминах, была предложена Дебоном (Florimond de Beaune, 1601–1652) Декарту ещё в 1640-х годах [2], однако она до сих пор в такой постановке не решена: пользователь любого пакета, ищущего рациональный интеграл, должен задавать верхнюю границу для порядка искомого интеграла [3]. Возникающее тут затруднение можно проиллюстрировать очень простым примером.

Пример 1. Пусть дано уравнение $\mathrm{d}y = y\mathrm{d}x$. Вслед за Декартом зададимся большим числом N и будем искать его интеграл вида

$$\sum_{n+m\leqslant N} a_{n,m}x^n y^m$$

по методу неопределённых коэффициентов. Увеличивая N, скажем, от 2 до 10, мы получим несовместную систему для коэффициентов, однако из этого не следует, что так будет проходить при всех N. Несовместность систем при всех N означает, что e^x не является алгебраической функцией. Мы, в отличие от Декарта, можем доказать отсутствие алгебраического интеграла очень просто, сославшись на теорему Сохоцкого–Вейерштрасса или любой другой вариант описания существенной особенности при $x = \infty$. Однако это доказательство не является алгебраическим и существенно использует тот факт, что уравнение $\mathrm{d}y = y\mathrm{d}x$ допускает решение в целых функциях.

Аналитики XIX века ожидали, что анализ особенностей должен указать на существование или несуществование алгебраического интеграла. Однако в силу теоремы Пенлеве все подвижные особенности являются алгебраическими [4], и поэтому по поведению решения в подвижных особых точках нельзя ничего сказать о существовании интеграла. Исследование же поведения решения в неподвижной особой точке представляет само по себе большие трудности. По этой причине мы обратимся к более простой задаче.

Задача 2. Для заданного дифференциального уравнения (1) и числа N выяснить, имеет ли оно рациональный интеграл, порядок которого не превосходит N, и в случае утвердительного ответа предъявить этот интеграл.

Эта задача может быть решена методом неопределённых коэффициентов, однако на практике такое решение приводит к большим системам нелинейных уравнений на коэффициенты, решение которой приводит к большим вычислительным затруднениям. Накануне Первой мировой войны М. Н. Лагутинский [5–7] разработал метод решения «ограниченной» задачи Дебона. Его метод был надолго забыт и открыт вновь в недавних работах по компьютерной алгебре [8]. Современное изложение метода Лагутинского представлено в работах [3, 8, 9]. Метод Лагутинского хорошо ложится на язык теории колец. Здесь мы хотим обсудить вопросы применения его реализации — пакета Lagutinski для Sage [10] — к решению наиболее часто встречающихся задач.

Согласно основной теореме Лагутинского дифференциальное уравнение (1) имеет рациональный интеграл порядка N тогда и только тогда, когда определитель Лагутинского соответствующего порядка равен нулю, а сам интеграл можно записать как отношение миноров этого определителя. Эта теорема сводит решение ограниченной задачи Дебона к вычислению определителей Лагутинского.

Замечание 1. Теорема Лагутинского позволяет менять числовые поля в исходной задаче. Если дифференциальное уравнение допускает интеграл в поле $\mathbb{C}(x, y)$, то его определитель Лагутинского достаточно большого порядка равен нулю, а поэтому это уравнение допускает интеграл, который представляет собой отношение миноров названного определителя. По предположению коэффициенты дифференциального уравнения — числа целые, поэтому эти миноры принадлежат $\mathbb{Q}(x, y)$, а следовательно, этому полю принадлежит интеграл. Поэтому всегда можно ограничивать рассмотрение интегралами из поля $\mathbb{Q}(x, y)$. Это замечание увязывает решение задачи Дебона с вопросами теории чисел. Если дифференциальное уравнение допускает решение, которое при целом x принимает трансцендентное значение, то оно не допускает алгебраических интегралов. Например, из трансцендентности числа e сразу следует, что уравнение $\mathrm{d}y = y\mathrm{d}x$ не допускает интеграл в поле $\mathbb{C}(x, y)$.

На практике обычно имеют дело с большими выборками дифференциальных уравнений, будь то задачи из того или иного задачника, или возможные модели для одного и того же явления. Требуется выявить из них те, которые допускают рациональный интеграл. Число N, конечно, не дано, однако очень большие значения N не интересны, поскольку с интегралом 100-го порядка едва ли работать легче, чем со степенными рядами. Вообще говоря, не ясно, как провести эту черту, и вероятно, она зависит от самой задачи. Для дифференциальных уравнений, предлагаемых студентам в курсе «Дифференциальных уравнений», в статье [10] была предложена следующая процедура отыскания алгебраических интегральных кривых:

1. Вычислить Δ_{55} в случайно выбранной точке. Если $\Delta_{55} \neq 0$, то интегральные кривые имеют 10-й порядок и более или вовсе являются трансцендентными. Если $\Delta_{55} = 0$, то интегральные кривые вероятно имеют порядок, не превышающий 9.
2. Если $\Delta_{55} = 0$, вычислить Δ_{10} как функцию x и y. Если Δ_{10} тождественно равен нулю, то интегральные кривые имеют порядок, не превышающий 3, и они находятся по методу Лагутинского без существенных затрат.
3. Если Δ_{10} не равно тождественно нулю, пытаться вычислить Δ_N, постепенно повышая N до тех пор, пока не получится нуль или исчерпаются ресурсы.

Поскольку вычисление определителя 55-го порядка может занять весьма много времени, на первом шаге его значение вычисляется только в одной точке. Если получается ненулевое значение, то в силу теоремы Лагутинского рационального интеграла 9-го порядка точно не существует. Если же получается нулевое значения, нельзя быть вполне уверенным в том, что определитель равен нулю и во всех других точках, однако вероятность того, что при случайном выборе точки вероятность отыскания нуля многочлена весьма мала. Поэтому в этом случае вероятно имеется интеграл 9-го порядка.

Разумеется, на первом шаге теряются дифференциальные уравнения, интегральные кривые которых имеют 10-й порядок и более. На третьем шаге могут возникнуть трудности с вычислением определителя Лагутинского, обычно при $N > 10$ работа с ним становиться очень ресурсоёмкой. Поэтому представляется важным понять, работает ли предложенный метод в наиболее часто встречающихся в учебном процессе дифференциальных уравнений. В настоящей работе в качестве собрания таких уравнений использован сборник задач, предлагаемых студентам в курсе «Дифференциальных уравнений». Ниже будет дан отчёт об использовании этой процедуры для интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка в символьном виде и тестирования названного в его честь пакета на уравнениях, взятых из задачника А. Ф. Филиппова [11].

2. Результаты апробации

На основе задач №№ 301–420 из задачника А. Ф. Филиппова [11] был выделен список из 50 дифференциальных уравнений вида

$$p(x, y)\mathrm{d}x + q(x, y)\mathrm{d}y = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y],$$

20 из которых имеют рациональные интегралы, а остальные интегрируются в элементарных функциях.

Прежде всего, следует заметить, что вычисление Δ_{55} в случайной точке позволило быстро выделить все 20 номеров, вероятно допускающих рациональные интегралы. При этом про оставшиеся 30 номеров можно с уверенностью сказать, что их интегральные кривые или являются трансцендентными, или имеют порядок, больший 9-го.

Во-вторых, вычисление Δ_n в случайной точке позволило быстро подобрать n во всех номерах.

Вычисление определителя как многочлена относительно x, y заняло более часа в двух примерах: №№ 395 и 418. Вычисление интеграла заняло более часа в задаче № 361 и было остановлено. Во всех остальных 17 случаях вычисление интеграла было успешным во всех случаях, ответы совпадали с ответами из задачника после упрощений.

Рассмотрим проблемные номера.

Пример 2. Интегральные кривые уравнения № 395

$$(x^3 - 2xy^2)\mathrm{d}x + 3x^2y\mathrm{d}y = x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

образуют семейство кривых $x(y^2 + x^2)^3 - 2/5y^5 - 4/3x^2y^3 - 2x^4y + cx^5 = 0$ 6-го порядка. Вычисление определителей в случайной точке однозначно указали на то, что вероятно $\Delta_{36} = 0$, однако вычислить этот определитель за час не удалось.

Пример 3. Интегральные кривые уравнения № 418

$$(3xy + x + y)y\mathrm{d}x + (4xy + x + 2y)x\mathrm{d}y = 0$$

образуют семейство кривых $6x^3y^4 + 2x^3y^3 + 3x^2y^4 = c$ 7-го порядка. Вычисление определителей в случайной точке однозначно указали на то, что вероятно $\Delta_{31} = 0$, однако вычислить этот определитель за час не удалось.

Пример 4. Интегральные кривые уравнения № 361

$$(2x^2y - 3y^2)y' = 6x^2 - 2xy + 1$$

образуют семейство $2x^3 - x^2y^2 + y^3 + x = c$ 4-го порядка. Мы вычислили $\Delta_{13} = 0$, $\Delta_{12} \neq 0$, поэтому точно существует рациональный интеграл порядка $N = 13$. Вычислить его не удалось.

Глядя в ответы, полученные, разумеется, другими методами, нетрудно понять, что предложенный подход позволил легко и быстро выявить все уравнения, допускающие алгебраические интегралы, но не для всех из них позволил найти явное выражение для интеграла. Наиболее проблемным, таким образом, является третий шаг.

3. Заключение

Проделанные численные эксперименты свидетельствуют, что метод Лагутинского позволяет на практике быстро и без особых затрат ресурсов и времени идентифицировать наличие рационального интеграла, однако является весьма затратным как метод вычисления этого интеграла. Следует заметить, что проблема отыскания границы для порядка интеграла, всегда обсуждаемая в теории, на практике оказалась не важной, в задачнике нет дифференциальных уравнений, интегральные кривые которых имели бы 10 порядок или более.

Вычисление определителей в случайных точках позволяет быстро выяснить, какие мономы должны фигурировать в выражении для интеграла, поэтому естественное направление оптимизации — предварительный подбор базиса по данным в случайных точках. В частности, наиболее интересны те интегралы, которые можно записать как отношение малочленов. В частности, в пакете Lagutinski [10] можно делать перебор по всевозможным тройкам, составленных из первых N мономов кольца $\mathbb{Q}[x, y]$. Двигаясь в этом направлении, можно пытаться увеличить число элементов в кортеже, заменив затратное вычисление определителей Лагутинского вычислением их значения в случайной точке.

Литература

1. *Hairer E., Wanner G., Lubich C.* Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. — Berlin Heidelberg New York: Springer, 2000.
2. *Декарт Р.* Геометрия с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. — Москва-Ленинград: ГОНТИ НКТП СССР, 1938. — Перевод, примечание и статья А. П. Юшкевича.
3. *Chéze G.* Computation of Darboux Polynomials and Rational First Integrals with Bounded Degree in Polynomial Time // Journal of Complexity. — 2011. — Vol. 27, issue 2. — Pp. 246–262. — DOI: 10.1016/j.jco.2010.10.004.
4. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — Москва–Ленинград: ГТТЛ, 1950.
5. *Лагутинский М. Н.* Приложение полярных операций к интегрировананию обыкновенных дифференциальных уравнений в конечном виде // Сообщения Харьковского математического общества. Вторая серия. — 1911. — Т. 12. — С. 111–243.
6. *Лагутинский М. Н.* О некоторых полиномах и связи их с алгебраическим интегрированием обыкновенных дифференциальньных алгебраических уравнений // Сообщения Харьковского математического общества. Вторая серия. — 1912. — Т. 13. — С. 200–224.
7. *Добровольский В. А., Стрельцын Ж., Локоть Н. В.* Михаил Николаевич Лагутинский (1871–1915) // Историко-математические исследования. — Москва: Янус-К, 2001. — Т. 41, вып. 6. — С. 111–127.
8. *Christopher C., Llibre J., Vitório Pereira J.* Multiplicity of Invariant Algebraic Curves in Polynomial Vector Fields // Pacific Journal of Mathematics. — 2007. — Vol. 229, No 1. — Pp. 63–117. — DOI: 10.2140/pjm.2007.229.63.
9. *Малых М. Д.* Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу М. Н. Лагутинского // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». — 2016. — Т. 5, № 4. — С. 327–336. — DOI: 10.1134/S2304487X16030068.
10. *Малых М. Д.* О применении метода М.Н. Лагутинского к интегрированию дифференциальных уравнений 1-го порядка. Часть 1. Отыскание алгебраических интегралов // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 2. — С. 103–112. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-103-112.
11. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

UDC 517.9
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-3-285-291

The Method of Finding Algebraic Integral for First-order Differential Equations

M. D. Malykh, Yu Ying

Department of Applied Probability and Informatics
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Article is devoted to search of algebraic integrals of the ordinary differential equations in the systems of computer algebra. The main attention is paid to development of practical instructions for work with an original package for Sage called in honor of M. N. Lagutinski.

At the beginning of article Beaune's problem is formulated: for a given differential equation, we need to identify whether it is in the form of rational integral, and if the answer is true, we need to quadrature it. The difficulties of finding the upper bound of the integral order and its value for solving differential equations practically are discussed, bounded Beaune's problem is formulated. Our work is based on the method of M. N. Lagutinski. The theory and its realization are tested on the problems from Text-Book on Differential Equations by A. F. Filippov. The numerical experiments, which were carried out, show that the method makes it possible to identify the existence of the rational integral without taking much resources and time. However, using the method to calculate integrals is very time-consuming. In conclusion, recommendations on the optimal use of the method of Lagutinski are given. All calculations are executed in the computer algebra system Sage.

Key words and phrases: Lagutinski method, problem of Florimond de Beaune, integrated algebraic curves, algebraic integrals, Sage

References

1. E. Hairer, G. Wanner, C. Lubich, Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2000.
2. R. Descartes, Geometry with the Appendix of Selected Works of P. Fermat and Descartes' Correspondence, GONTI NKTP SSSR, Moscow-Leningrad, 1938, in Russian.
3. G. Chéze, Computation of Darboux Polynomials and Rational First Integrals with Bounded Degree in Polynomial Time, Journal of Complexity 27 (2011) 246–262. doi:10.1016/j.jco.2010.10.004.
4. W. W. Golubev, Vorlesungen über Differentialgleichungen im Komplexen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958.
5. M. N. Lagutinski, The Application of Polar Operations to Integration of the Ordinary Differential Equations in Finite Terms, Communications of the Kharkov Mathematical Society. The second series 12 (1911) 111–243, in Russian.
6. M. N. Lagutinski, On Some Polynoms and Their Aplication for Algebraic Integration of Ordinary Differential Algebraic Equations, Communications of the Kharkov Mathematical Society. The second series 13 (1912) 200–224, in Russian.
7. V. A. Dobrovolsky, J. Strelcyn, N. V. Lokot', Mihail Nikolaevich Lagutinsky (1871–1915), Istoriko-matematicheskie issledovaniya 6 (2001) 111–127, in Russian.
8. C. Christopher, J. Llibre, J. Vitório Pereira, Multiplicity of Invariant Algebraic Curves in Polynomial Vector Fields, Pacific Journal of Mathematics 229 (1) (2007) 63–117. doi:10.2140/pjm.2007.229.63.
9. M. D. Malykh, On M. N. Lagutinsky's Method for Computation of Rational Integrals of Ordinary Differential Equations Systems, Vestnik natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI" 5 (4) (2016) 327–336, in Russian. doi:10.1134/S2304487X16030068.
10. M. D. Malykh, On application of m. n. lagutinski method to differential equations in symbolic form. part 1, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (2) (2017) 103–112, in Russian. doi:10.22363/2312-9735-2017-25-2-103-112.
11. A. F. Filippov, Text-Book on Differential Equations, R&C Dynamics, Izhevsk, 2000, in Russian.

Для цитирования:
Малых М. Д., Юй Ин Методика отыскания алгебраических интегралов дифференциальных уравнений первого порядка // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 3. — С. 285–291. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-3-285-291.

For citation:
Malykh M. D., Yu Ying The Method of Finding Algebraic Integral for First-order Differential Equations, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (3) (2018) 285–291. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-3-285-291. In Russian.

Сведения об авторах:
Малых Михаил Дмитриевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: malykh_md@rudn.university, тел.: +7(495)9522572)
Юй Ин (Китайская Народная Республика) — аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: yingy6165@gmail.com, тел.: +7(495)9522572)

Information about the authors:
Malykh M. D. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: malykh_md@rudn.university, phone: +7(495)9522572)
Yu Ying (People's Republic of China) — graduate student of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: yingy6165@gmail.com, phone: +7(495)9522572)