УДК 532.5.031

Исследование потенциального течения жидкости в пористой среде с учётом закона Дарси и переменного коэффициента диффузии

Ю. П. Рыбаков, О. Д. Свиридова, Г. Н. Шикин

Кафедра теоретической физики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Рассмотрено потенциальное течение жидкости в пористой среде с учётом закона Дарси и различных видов коэффициента поперечной диффузии в трубе радиуса a. Течение предполагается стационарным и аксиально симметричным, при этом считается, что сила Дарси является линейной функцией скорости. Установлено, что следствием потенциальности течения является тождество $\partial^2 P/\partial r\partial z \equiv \partial^2 P/\partial z\partial r$, где $\partial P/\partial r$ и $\partial P/\partial z$ определяются из уравнений Эйлера для двух компонент скорости: $v_r = \partial\Phi/\partial r$ и $v_z = \partial\Phi/\partial z$, где $\Phi(r, z)$ — потенциал скорости. Это значит, что система уравнений Эйлера является вполне совместной и вполне интегрируемой и решение задачи сводится к решению уравнения непрерывности. Уравнение непрерывности является линейным дифференциальным уравнением для потенциала $\Phi(r, z)$ и допускает решение в разделённых переменных: $\Phi(r, z) = U(r)W(z)$. Для $U(z)$ получено уравнение Бесселя нулевого порядка. Его решение зависит от аргумента kr, где постоянная k определяется радиусом трубы a. Для $W(z)$ получено три различных уравнения в зависимости от выбора коэффициента диффузии в уравнении непрерывности. Во всех случаях получено точное решение и установлено, что компонента скорости $v_z(r, z)$ экспоненциально убывает при возрастании z.

Ключевые слова: потенциальное течение, стационарное течение, пористая среда, диффузия, закон Дарси.

Основная система уравнений гидродинамики для стационарного течения жидкости в поле тяжести имеет вид:

$$\rho(\vec{v}\vec{\nabla})v = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} - \vec{f}_D, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\vec{j} = 0, \tag{2}$$

где $\vec{v}$ — скорость, ρ — плотность, P — давление, $\vec{g}$ — ускорение силы тяжести, а $\vec{f}_D$ — сила Дарси, имеющая вид:

$$\vec{f}_D = -\alpha\vec{v}. \tag{3}$$

В (3) α — обратный коэффициент проницаемости Дарси, который считается постоянным: $\alpha = 10^9 {K_D}^{-1}$. Здесь α измеряется в единицах СИ, K_D — в Дарси [1]. В уравнениях (1)–(2) $\rho = \mathrm{const}$, а P и $\vec{v}$ зависят от радиальной r и продольной z цилиндрических координат и не зависят от угловой координаты φ.

В уравнении (2) вектор плотности потока жидкости $\vec{j}$ имеет следующие компоненты в цилиндрических координатах [2]: $j_r = \rho(v_r - D(z)\partial_r v_z)$, $j_z = \rho v_z$. При этом считаем, что в силу аксиальной симметрии течения существуют две компоненты скорости: $\vec{v} = (v_r, 0, v_z)$.

Запишем систему уравнений (1)–(2) [3]:

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \alpha v_r, \tag{4}$$

$$v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - \alpha v_z + g, \tag{5}$$

Статья поступила в редакцию 27 мая 2013 г.

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}v_r + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{r}D(z)\frac{\partial v_z}{\partial r} + D(z)\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}. \tag{6}$$

При потенциальном течении $\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$, $\vec{v} = (v_r, 0, v_z) = (\partial\Phi/\partial r, 0, \partial\Phi/\partial z)$, где $\Phi(r, z)$ — потенциал скорости.

Из (4) и (5) следует равенство:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} + \alpha v_r\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} + \alpha v_z\right). \tag{7}$$

Отметим, что для потенциального течения равенство (7) выполняется тождественно. Поэтому система уравнений Эйлера (4)–(5) является вполне интегрируемой и при заданных скоростях определяет давление $P(r, z)$.

Запишем уравнение (6) для потенциала $\Phi(r, z)$:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = D(z)\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial z\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial r}\right). \tag{8}$$

Рассмотрим решение уравнения (8) в разделённых переменных, когда $\Phi(r, z) = U(r)W(z)$. Тогда из (8) получаем:

$$\frac{U''}{U} + \frac{1}{r}\frac{U'}{U} + \frac{W_{zz}}{W} = D(z)\frac{W_z}{W}\left(\frac{U''}{U} + \frac{1}{r}\frac{U'}{U}\right), \tag{9}$$

где $U'(r) = \mathrm{d}U/\mathrm{d}r$, $W_z = \mathrm{d}W/\mathrm{d}z$.

Уравнение (9) можно представить в виде

$$\frac{U''}{U} + \frac{1}{r}\frac{U'}{U} = -\frac{\frac{W_{zz}}{W}}{1 - D(z)\frac{W_z}{W}} = -k^2, \quad k = \mathrm{const}. \tag{10}$$

Из (10) получаем уравнения для $U(r)$ и $W(z)$:

$$U'' + \frac{1}{r}U' + k^2 U = 0, \tag{11}$$

$$W_{zz} + k^2 D(z)W_z - k^2 W = 0. \tag{12}$$

При этом (11) является уравнением Бесселя нулевого порядка и имеет решение вида

$$U(r) = -U_0 J_0(kr), \quad U_0 = \mathrm{const}. \tag{13}$$

Поскольку $v_r = \dfrac{\partial\Phi}{\partial r}$, то из (13) получаем $v_r = U'(r)W(z) = U_0 k J_1(kr)W(z)$. Функция $v_r(r, z)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям на оси цилиндра $(r = 0)$ и на его границе $(r = a) : v_r(0, z) = 0$, $v_r(a, z) = 0$. Первый нуль функции $J_1(kr)$ соответствует значению $r = 0$, а второй нуль $J_1(kr)$ — значению $ka = 3,83$. Ограничившись этими нулями, получаем единственное значение для $k : k = 3,83/a$.

Итак, с учётом (13)

$$\Phi(r, z) = -U_0 J_0(kr)W(z). \tag{14}$$

Поскольку $v_z = \partial\Phi/\partial z > 0$, то из (14) следует, что $W(z) > 0$, $\partial W/\partial z < 0$.

Рассмотрим уравнение (12) при разных видах $D(z)$.

1. $D(z) = D_0 = \mathrm{const}$.

Из (12) следует уравнение

$$W_{zz} + k^2 D_0 W_z - k^2 W = 0. \tag{15}$$

Убывающее решение уравнения (15) имеет вид

$$W(z) = W_0 e^{-\alpha z}, \quad W_0 = \text{const}, \quad \alpha = \sqrt{\left(\frac{k^2 D_o}{2}\right)^2 + k^2} + \frac{k^2 D_0}{2} \tag{16}$$

при $D_0 = 0$, $\alpha = k$, т.е.

$$W(z) = W_0 e^{-kz}, \quad 0 \leqslant z < \infty. \tag{17}$$

Из (17) и (16) следует, что при $D_0 \neq 0$ $W(z)$ уменьшается быстрее, чем при $D_0 = 0$. Окончательно, для потенциала скорости получаем выражение:

$$\Phi(r, z) = -\Phi_0 J_0(kr) e^{-\alpha z}, \quad \Phi_0 = \text{const}. \tag{18}$$

Из (18) получаем компоненты скорости: $v_r = \Phi_0 k J_1(kr) e^{-\alpha z}$, $v_z = \Phi_0 \alpha J_0 e^{-\alpha z}$.

2. $D(z) = D_0 e^{\xi x}, \quad D_0 = \text{const}, \quad \xi = \text{const}.$

Из (12) получаем уравнение

$$W_{zz} + k^2 D_0 e^{\xi z} W_z - k^2 W = 0. \tag{19}$$

В уравнении (19) перейдём к новой функции от нового аргумента:

$$W(z) = \Psi(x), \quad x = \frac{k^2 D_0}{\xi} e^{\xi z}, \quad \frac{k^2 D_0}{\xi} \leqslant x < \infty. \tag{20}$$

Для $\Psi(x)$ из (19) получаем уравнение:

$$\Psi'' + \frac{1+x}{x}\Psi' - \frac{R^2}{x^2}\Psi = 0, \quad R^2 = \frac{k^2}{\xi^2}. \tag{21}$$

Уравнение (21) является обобщённым уравнением вырожденного гипергеометрического типа и с помощью подстановки $\Psi(x) = \varphi(x) y(x)$ сводится к канонической форме для функции $y(x)$ [4]:

$$x y''(x) + \tau(x) y'(x) + \lambda y(x) = 0, \tag{22}$$

где $\tau(x)$ — полином первой степени, $\lambda = \text{const}$.

Существует 4 типа уравнений (22) для различных видов $\varphi(x)$, $\tau(x)$ и λ. Из них только один тип определяет возможный реальный режим течения жидкости.

При выборе $\varphi(x) = x^{-R} e^{-x}$ уравнение (22) приводится к виду:

$$x y''(x) + (1 - 2R - x) y'(x) + (R - 1) y(x) = 0. \tag{23}$$

Уравнение (23) имеет общее решение, представляющее собой сумму двух линейно независимых вырожденных гипергеометрических функций:

$$y(x) = C_1 f(\alpha, \gamma, x) + C_2 x^{1-\gamma} f(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, x),$$

где $\gamma = 1 - 2R$, $\alpha = 1 - R$.

Кроме того, уравнение (23) имеет набор частных решений в виде полиномов Лагерра

$$y_n(x) = L_n^l(x) = B_n x^l e^{-x} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(e^{-x} x^{-l+n} \right), \quad l = 2R, \quad B_n = \mathrm{const}, \tag{24}$$

с соответствующим спектром собственных значений $\lambda_n = R - 1 = n$, $R = n + 1$, $n = 0, 1, 2 \ldots$, откуда следует:

$$R = \frac{k}{\xi} = n + 1, \quad \xi_n = \frac{k}{n+1}, \quad k = \frac{3,83}{a}. \tag{25}$$

Отметим, что решение (24) существует только в том случае, когда ξ принимает значения (25).

Окончательно решение уравнения (19) запишется таким образом:

$$W(z) = \Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) y_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{-(n+1)} e^{-x} L_n^l(x). \tag{26}$$

Из (26) следует, что $W(z)$ — убывающая функция, что обеспечивает $W_z < 0$. При этом потенциал скоростей имеет вид:

$$\Phi(r, z) = -U_0 J_0(kr) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) y_n(x),$$

где x определяется равенством (20).

3. $D(z) = \dfrac{D_0}{1 + \xi z}$, $\quad D_0 = \mathrm{const}, \quad \xi = \mathrm{const}.$

Из (12) получаем уравнение

$$W_{zz} + \frac{k^2 D_0}{1 + \xi z} W_z - k^2 W = 0. \tag{27}$$

В уравнении (27) перейдём к новой функции от нового аргумента: $W(z) = \Psi(x)$, $x = 1 + \xi z$, $1 \leqslant x < \infty$. Для $\Psi(x)$ из (27) получаем уравнение:

$$\Psi'' + \frac{k^2 D_0}{\xi} \frac{\Psi'}{x} - \frac{k^2}{\xi^2} \Psi = 0. \tag{28}$$

Уравнение (28) является уравнением Бесселя мнимого аргумента. Его убывающим решением является функция Макдональда

$$\Psi(x) = \Psi_0 x^{\frac{1-A}{2}} K_\nu \left(\frac{k}{\xi} x \right), \quad \nu = \frac{1}{2}(1 - A), \quad A = \frac{k^2 D_0}{\xi}.$$

Окончательно, потенциал $\Phi(r, z)$ запишется так:

$$\Phi(r, z) = -U_0 J_0(kr) x^{\frac{1-A}{2}} K_\nu \left(\frac{k}{\xi} x \right). \tag{29}$$

Из (29) получаем выражения для компонент скорости:

$$v_r = U_0 J_1 x^{\frac{1-A}{2}} K_\nu \left(\frac{k}{\xi} x \right), \tag{30}$$

$$v_z = U_0 J_0(kr) \left[\frac{A-1}{2} \xi x^{\frac{-(A+1)}{2}} K_\nu \left(\frac{k}{\xi} x \right) + x^{\frac{1-A}{2}} \frac{K_{\nu-1}\left(\frac{k}{\xi}x\right) + K_{\nu+1}\left(\frac{k}{\xi}x\right)}{2} k \right]. \quad (31)$$

Таким образом, для всех рассмотренных случаев течения жидкости установлено, что продольная компонента скорости v_z экспоненциально убывает с возрастанием z.

Литература

1. *Шейдеггер А. Э.* Физика течения жидкостей через пористые среды. — М.: Институт компьютерных исследований. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. [Sheydegger A. E. Physics of Fluid Flow in Porous Medium. — Moscow: Institute of Computer Analysis. NIC Regular and Perturbation Dynamics, 2008. — (in russian).]
2. *Рыбаков Ю. П., Шикин Г. Н.* Течение в трубе с зернистой загрузкой: пристеночный эффект // XVI Межд. научн. конф «Мат. методы в технике и технологиях». — 2003. — С. 138–139. [Rybakov Yu. P., Shikin G. N. Flow in a Tube with Granular Loading: Near Wall Effect // XVI International Scientific Conference of Mathematical Methods in Technics and Technology. — 2003. — P. 138–139. — (in russian).]
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1988. [Landau L. D., Liphshyz E. M. Hydrodynamics. — Moscow: Nauka, 1988. — (in russian).]
4. *Никифоров А. Ф., Уваров В. В.* Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1978. [Nikiforov A. F., Uvarov V. V. Special Functions of Mathematical Physics. — Moscow: Nauka, 1978. — (in russian).]

UDC 532.5.031

Investigation of Potential Flow of Fluid in Porous Medium Taking Account of Darcy Law and Variable Diffusion Coefficient

Yu. P. Rybakov, O. D. Sviridova, G. N. Shikin

Department of Theoretical Physics
Peoples' Friendship University of Russian
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

We have considered the potential flow of the fluid in the porous medium taking into account Darcy low and different types of the diffusion coefficient in a tube with radius a. The flow is supposed to be stationary and cylindrically-symmetric and the Darcy force is a linear function of the velocity. We have established that a result of the potential flow is identity $\partial^2 P/\partial r \partial z \equiv \partial^2 P/\partial z \partial r$, where $\partial P/\partial r$ and $v_z = \partial \Phi/\partial z$ are defined from Euler equation for two components of the velocity: $v_r = \partial\Phi/\partial r$ and $v_z = \partial\Phi/\partial z$, where $\Phi(r, z)$ is velocity potential. It means that Euler equation system is compatible and integrable, and the solution is reduced to the solution of the continuity equation. Continuity equation is linear differential equation for the potential $\Phi(r, z)$ and one assumes solution in divided variable: $\Phi(r, z) = U(r)W(z)$. For $U(z)$ we have Bessel equation of zero order. This solution depends on the choice of the diffusion coefficient in the continuity equation. In all the occasions we have exact solution and established that component of the velocity v_z descreases like exponent with increase of z.

Key words and phrases: potential flow, stationary flow, porous medium, diffusion, Darcy low.