Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 152–165
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.956.223
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-152-165
EDN: FOBXVK

ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОРТОТРОПНЫМИ СЖАТИЯМИ НА ГРАНИЦЕ СОСЕДНИХ ПОДОБЛАСТЕЙ

А. Л. Тасевич[1,2]

[1] *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
[2] *Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия*

Статья посвящена изучению гладкости обобщенных решений первой краевой задачи для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения, содержащего в старшей части преобразования ортотропного сжатия аргументов искомой функции. Задача рассматривается в круге, коэффициенты уравнения постоянные. Под ортотропным сжатием понимается различное сжатие по различным переменным. Найдены в явном виде условия сохранения гладкости на границах соседних подобластей, образованных действием группы преобразования сжатия на круг, при любой правой части из пространства Лебега.

Ключевые слова: сильно эллиптическое функционально-дифференциальное уравнение, ортотропное сжатие аргументов, гладкость обобщенных решений

Для цитирования: *А. Л. Тасевич.* Гладкость обобщенных решений задачи Дирихле для сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями на границе соседних подобластей// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 152–165. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-152-165

1. Введение

В работе рассматривается первая краевая задача для функционально-дифференциального уравнения

$$A_R u \equiv -\sum_{i,j=1}^{2} (R_{ijB} u_{x_i})_{x_j} = f(x), \quad x \in B, \tag{1.1}$$

$$u|_{\partial B} = 0 \tag{1.2}$$

в круге $B \subset \mathbb{R}^2$ некоторого радиуса r с центром в начале координат. Здесь оператор R_{ijB} является композицией операторов

$$R_{ijB} = P_B R_{ij} I_B,$$

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115).

где $I_B : L_2(B) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ — оператор продолжения функций из пространства Лебега $L_2(B)$ нулем в $\mathbb{R}^2 \setminus B$, $P_B : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(B)$ — оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^2)$ на B, а оператор $R_{ij} : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ определяется по формуле

$$R_{ij}v(x) = a_{ij0}v(x) + a_{ij1}v(q^{-1}x_1, px_2) + a_{ij,-1}v(qx_1, p^{-1}x_2).$$

В рассматриваемой задаче числа $p, q > 1$, коэффициенты уравнения $a_{ij0}, a_{ij,\pm 1} \in \mathbb{C}$ $(i, j = 1, 2)$, а функция $f \in L_2(B)$ является комплекснозначной.

Сформулируем определение сильной эллиптичности следующим образом.

Определение 1.1. Уравнение (1.1) будем называть *сильно эллиптическим уравнением*, а соответствующий оператор A_R — *сильно эллиптическим оператором*, если существуют такие постоянные $c_1 > 0, c_2 \geqslant 0$, что для любой финитной бесконечно гладкой функции $u \in C_0^\infty(B)$ выполняется неравенство типа Гординга

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(B)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{H^1(B)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(B)}. \tag{1.3}$$

Здесь и далее $H^1(B) = W_2^1(B)$ — гильбертово пространство Соболева первого порядка.

С задачей (1.1), (1.2) свяжем полуторалинейную форму, непрерывную на пространстве $\mathring{H}^1(B) = \{u \in H^1(B) : u(x) = 0 \text{ для } x \notin B\}$

$$a_R[u, v] = \sum_{i,j=1}^{2} (R_{ijB} u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(B)} \quad (u, v \in \mathring{H}^1(B)).$$

Очевидно, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|a_R[u, v]| \leqslant M \|u\|_{H^1(B)} \|v\|_{H^1(B)} \quad (u, v \in \mathring{H}^1(B)). \tag{1.4}$$

Кроме того, неравенство (1.3), левая часть которого совпадает на гладких финитных функциях с действительной частью формы $\operatorname{Re} a_R[u, u]$, обеспечивает оценку

$$\operatorname{Re} a_R[u, u] \geqslant c_1 \|u\|^2_{H^1(B)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(B)} \quad (u \in \mathring{H}^1(B)) \tag{1.5}$$

на всем пространстве $\mathring{H}^1(B)$.

Определение 1.2. Функция $u \in \mathring{H}^1(B)$ называется *обобщенным решением* задачи (1.1), (1.2), если интегральное тождество

$$a_R[u, v] = (f, v)_{L_2(B)} \tag{1.6}$$

выполнено для любой функции $v \in \mathring{H}^1(B)$.

Будем рассматривать также неограниченный оператор

$$\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(B) \to L_2(B),$$

область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ которого состоит из всевозможных обобщенных решений задачи (1.1), (1.2), когда f пробегает все пространство $L_2(B)$. Если u — обобщенное решение, отвечающее правой части f, то полагаем $\mathcal{A}_R u = f$ (оператор $\mathcal{A}_R$, очевидно, корректно определен на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$). Понятно, что $C_0^\infty(B) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset \mathring{H}^1(B)$ и $\mathcal{A}_R u = A_R u$, если $u \in C_0^\infty(B)$.

Данная статья посвящена гладкости обобщенных решений функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями в круге, при этом считается выполненным неравенство типа Гординга, которое рассматривается как аналог условия сильной эллиптичности. Для дифференциальных уравнений, включая системы дифференциальных уравнений, уравнения с переменными коэффициентами и уравнения высокого порядка, сильная эллиптичность начала изучаться в 50-х годах XX века с работ М. И. Вишика [1] и Л. Гординга [23]. Для дифференциально-разностных уравнений необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности были получены в [28, 29], а для функционально-дифференциальных уравнений с изотропными сжатиями — в работах [11–13]. Хорошо известно, что неравенство Гординга гарантирует фредгольмову разрешимость, дискретность и секториальную структуру спектра. Кроме того это неравенство связано с решением известной проблемы Т. Като о квадратном корне из m-аккретивного оператора [20–22, 24–26].

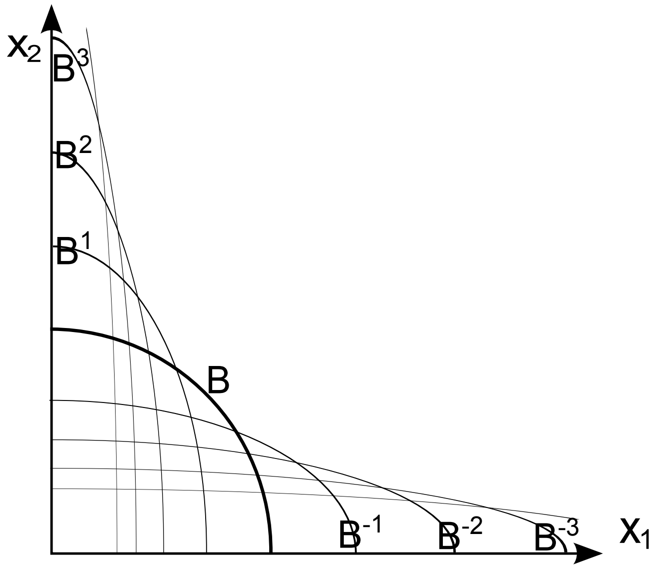


Рис. 1. Множества B^k, $k = \overline{-4, 4}$.
Fig. 1. Sets B^k, $k = \overline{-4, 4}$.

Изучение гладкости обобщенных решений является естественным шагом при исследовании краевых задач. В отличие от эллиптических дифференциальных уравнений, гладкость обобщенных решений краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений может нарушаться в ограниченной области и сохраняться только в некоторых подобластях. Гладкость решений краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений была изучена А. Л. Скубачевским в работах [15, 17, 19, 29] и в обзоре [16]. Вторая краевая задача для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на интервале $(0, d)$ рассматривалась в [4–6]. Случай, когда правая часть дифференциально-разностного уравнения принадлежит пространству Гельдера, рассматривался в работе [9, 10]. Ряд результатов по гладкости для функционально-дифференциальных уравнений со сжатиями и растяжениями получен в [13]. В вышеперечисленных работах было показано возникновение степенных особенностей у решения в некоторых точках внутри области.

2. Некоторые геометрические конструкции

Опишем геометрические конструкции, связанные с отражением $(x_1, x_2) \to (q^{-1}x_1, px_2)$, $q, p > 1$, в круге B. Более подробные построения и доказательства приведенных ниже утверждений можно найти в [18]. Обозначим через B^k множество

$$B^k = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (q^{k-1}x_1, p^{1-k}x_2) \in B\},$$

а через B_r — открытую компоненту множества $B \setminus \left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \partial B^k \right)$.

Определение 2.1. Множество B_r будем называть *подобластью*, а множество $\mathcal{R}$ всех подобластей B_r назовем *разбиением* области B.

На рис. 1 мы видим разбиение $\mathcal{R}$ круга B, рассматриваемое в первой координатной четверти. Легко убедиться, что $\mathcal{R}$ счетно. Для круга B, а также и для более сложной по форме области, будут справедливы следующие леммы.

Лемма 2.1. $\overline{\bigcup\limits_r \partial B_r} = \left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \partial B^k \right) \bigcap \overline{B}$.

Лемма 2.2.
1. $\overline{\bigcup_r B_r} = \overline{B}$.
2. *Для любой подобласти* B_{r_1} *и* $k \in \mathbb{Z}$ *либо существует* B_{r_2} *такое, что* $B_{r_2} = (B_{r_1})^k$, *либо* $(B_{r_1})^k \subset \mathbb{R}^2 \setminus B$.

Мы можем разбить множество $\mathcal{R}$ на непересекающиеся классы следующим образом: подобласти $B_{r_1}, B_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если существует такое $k \in \mathbb{Z}$, что $(B_{r_1})^k = B_{r_2}$. Обозначим подобласти B_r через B_{sl}, где s является номером класса, а l — номером подобласти в s-ом классе, $l = \overline{1, N(s)}$. В силу ограниченности круга каждый класс состоит из конечного числа подобластей. Количество классов будет счетным, поскольку область B содержит начало координат — точку сгущения орбит оператора P.

Замечание 2.1. В каждой координатной четверти возможно упорядочить классы подобластей таким образом, что номер класса совпадет с числом его элементов, т. е. $N(s) = s$. В этом можно убедиться на рис. 2. Поэтому, без ограничения общности, везде далее считаем, что количество элементов класса совпадает с его номером.

Введем множество $\mathcal{K}$ по следующей формуле:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\ k_1 \neq k_2} \left\{ \overline{B} \cap \left(\partial B^{k_1} \right) \cap \left(\partial B^{k_2} \right) \right\}. \tag{2.1}$$

Сформулируем основное условие, накладываемое на область для дальнейших построений, справедливое для рассматриваемого случая круга и оператора ортотропного сжатия.

Условие 2.1. $\mu(\mathcal{K} \cap \partial B) = 0$.

Для элементов границы областей B_{sl} выполняются следующие утверждения.

Лемма 2.3. *Пусть* $x^0 \in \partial B_{sl} \cap \partial B$. *Предположим, что существует последовательность точек* $x^n \to x^0$ *при* $n \to \infty$ *такая, что* $x^n \in \overline{B}_{s_n l_n}$, $(s_n, l_n) \neq (s, l)$. *Тогда* $x^0 \in \mathcal{K}$.

Следствие 2.1. *Пусть* $x^0 \in \partial B \cap \partial B_{s_1 l_1} \cap \partial B_{s_2 l_2}$, $(s_1, l_1) \neq (s_2, l_2)$. *Тогда* $x^0 \in \mathcal{K}$.

Лемма 2.4. *Пусть* $x^0 \in B \cap \partial B_{sl} \cap \partial B_{rk}$, $(p, l) \neq (q, k)$. *Предположим, что существует последовательность точек* $x^n \to x^0$ *при* $n \to \infty$, *а также* $x^n \in \overline{B}_{s_n l_n}$, $(s_n, l_n) \neq (s, l), (r, k)$. *Тогда* $x^0 \in \mathcal{K}$.

Следствие 2.2. *Пусть* $x^0 \in \bigcap_i \partial B_{s_i l_i}$, *где* $(s_i, l_i) \neq (s_j, l_j)$ *для* $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$. *Тогда* $x^0 \in \mathcal{K}$.

Обозначим через Γ_p компоненты множества $\partial B \setminus \mathcal{K}$, являющиеся открытыми и связными в топологии ∂B.

Мы можем разбить множество $\{\Gamma_s^k : \Gamma_s^k \subset \overline{B}, s \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ на классы следующим образом. Множества $\Gamma_{s_1}^{k_1}$ и $\Gamma_{s_2}^{k_2}$ принадлежат одному классу, если существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $\Gamma_{s_1}^{k_1} = \left(\Gamma_{s_2}^{k_2}\right)^k$.

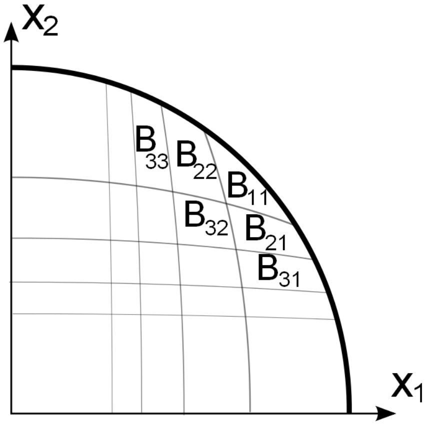
Очевидно, что множество Γ_s^k может содержаться только в одном классе. Обозначим множество Γ_s^k через Γ_{rj}, где r — это номер класса, а j — номер элемента в данном классе $(1 \leqslant j \leqslant J = J(r))$. Для круга B возможно упорядочить множества элементов класса так, чтобы $\Gamma_{r1} \subset \partial B, \Gamma_{r2}, \ldots, \Gamma_{rJ} \subset B$.

Приведем справедливые для элементов Γ_{rj} утверждения.

Лемма 2.5. *Для любого множества* $\Gamma_{r1} \subset \partial B$ *существует подобласть* B_{sl} *такая, что* $\Gamma_{rj} \subset \partial B_{sl}$ *и* $\Gamma_{rj} \cap \partial B_{s_1 l_1} = \varnothing$, *если* $(s_1, l_1) \neq (s, l)$.

Также для каждого класса $r \in \mathbb{N}$ существует единственное число $s = s(r)$ такое, что $J(r) = s$, и после перенумерации $\Gamma_{rl} \subset \partial B_{sl}$ $(l = \overline{1, s})$.

Лемма 2.6. *Для каждого* $\Gamma_{rj} \subset B$ *существуют подобласти* $B_{s_1 l_1}$ *и* $B_{s_2 l_2}$ *такие, что* $B_{s_1 l_1} \neq B_{s_2 l_2}$, $\Gamma_{rj} \subset \partial B_{s_1 l_1} \cap \partial B_{s_2 l_2}$ *и* $\Gamma_{rj} \cap \partial B_{s_3 l_3} = \varnothing$, *если* $(s_3, l_3) \neq (s_1, l_1), (s_2, l_2)$.



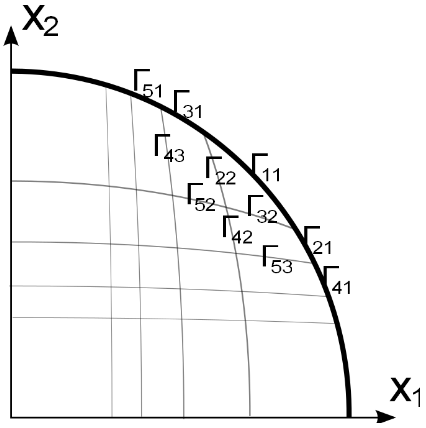


Рис. 2. Множества B_{sl} и Γ_{rj}.
Fig. 2. Sets B_{sl} and Γ_{rj}.

3. Условия сильной эллиптичности ФДУ с ортотропными сжатиями

Результаты данного пункта приводятся без доказательств. Необходимые доказательства можно найти в [18].

Для каждого $s \in \mathbb{N}$ и всякой функции $u \in L_2(B_s)$, $B_s = \bigcup\limits_{l=1}^{s} B_{sl}$ построим вектор-функцию $U = (u_1, \dots, u_s)^T \in L_2^s(B_{s1})$, где

$$u_k(x_1, x_2) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-k}{2}} u(q^{1-k}x_1, p^{k-1}x_2) \; (x \in B_{s1}, k = \overline{1, s}). \tag{3.1}$$

Отображение $u \to U$ унитарно, т. е. $(u, v)_{L_2(B_s)} = (U, V)_{L_2(B_{s1})}$.

Построим матрицу $\mathbf{R}_{ijs}\,(s \times s)$ с элементами

$$\rho_{kl}^{ijs} = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{l-k}{2}} a_{ij,l-k}, & |l-k| \leqslant 1; \\ 0, & |l-k| > 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Тогда если $v = R_{ij}u$ и $V = (v_1 \dots v_s)^T \in L_2^s\,(B_{s1})$ — соответствующая вектор-функция, то

$$v_k(x_1, x_2) = \rho_{kk}^{ijs} u_k(x_1, x_2) + \rho_{k,k+1}^{ijs} u_{k+1}(x_1, x_2) + \rho_{k,k-1}^{ijs} u_{k-1}(x_1, x_2).$$

Таким образом,

$$v = R_{ij}u \; (u, v \in L_2(B_s)) \Longleftrightarrow V = \mathbf{R}_{ijs}U \; (U, V \in L_2^s(B_{s1}))\,. \tag{3.3}$$

Заметим, что дифференциальный оператор не коммутирует с оператором сжатия и справедливы следующие отношения:

$$\left(u_{x_1}\right)_k (x_1, x_2) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-k}{2}} u_{x_1}\left(q^{1-k}x_1, p^{k-1}x_2\right) = \tag{3.4}$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-k}{2}} q^{k-1}\left(u(q^{1-k}x_1, p^{k-1}x_2)\right)_{x_1} = q^{k-1}\left(u_k(x_1, x_2)\right)_{x_1}.$$

Аналогично, $\left(u_{x_2}\right)_k (x) = p^{1-k}\left(u_k(x)\right)_{x_2}$.

Положим

$$\mathbf{Q}_s = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & q & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q^{s-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_s = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & p^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p^{1-s} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Тогда можно переписать неравенство (1.3) для функции $u \in C_0^\infty(B_s)$ в виде

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(B)} = \operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(B_s)} = \\ = ((\mathbf{R}_{11s} + \mathbf{R}_{11s}^*)\,\mathbf{Q}_s U_{x_1}, \mathbf{Q}_s U_{x_1})_{L_2^s(B_{s1})} + ((\mathbf{R}_{12s} + \mathbf{R}_{12s}^*)\,\mathbf{Q}_s U_{x_1}, \mathbf{P}_s U_{x_2})_{L_2^s(B_{s1})} + \\ ((\mathbf{R}_{21s} + \mathbf{R}_{21s}^*)\,\mathbf{P}_s U_{x_2}, \mathbf{Q}_s U_{x_1})_{L_2^s(B_{s1})} + ((\mathbf{R}_{22s} + \mathbf{R}_{22s}^*)\,\mathbf{P}_s U_{x_2}, \mathbf{P}_s U_{x_2})_{L_2^s(B_{s1})} \geqslant \\ \geqslant c_2 \int\limits_{B_{s1}} \left(|\mathbf{Q}_s U_{x_1}|^2 + |\mathbf{P}_s U_{x_2}|^2 + |U|^2\right) dx - c_1 \|U\|^2_{L_2^s(B_{s1})} \geqslant \\ \geqslant c_2 \int\limits_{B_{s1}} \left(|U_{x_1}|^2 + p^{2-2s}\,|U_{x_2}|^2 + |U|^2\right) dx - c_1 \|U\|^2_{L_2^s(B_{s1})} \geqslant c_2 p^{2-2s} \|U\|^2_{H^{1,s}(B_{s1})} - c_1 \|U\|^2_{L_2^s(B_{s1})}.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Данное неравенство выполняется для всех вектор-функций $U \in C_0^{\infty,s}(B_{s1})$ и означает сильную эллиптичность матричного дифференциального оператора второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{A}_s = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{Q}_s\mathbf{R}_{11s}\mathbf{Q}_s\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{P}_s\mathbf{R}_{12s}\mathbf{Q}_s\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{Q}_s\mathbf{R}_{21s}\mathbf{P}_s\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{P}_s\mathbf{R}_{22s}\mathbf{P}_s\frac{\partial}{\partial x_2}\right). \tag{3.7}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{11sPQ} &= \mathbf{Q}_s\,(\mathbf{R}_{11s} + \mathbf{R}_{11s}^*)\,\mathbf{Q}_s, \quad & \mathbf{R}_{12sPQ} &= \mathbf{P}_s\,(\mathbf{R}_{12s} + \mathbf{R}_{12s}^*)\,\mathbf{Q}_s, \\ \mathbf{R}_{21sPQ} &= \mathbf{Q}_s\,(\mathbf{R}_{21s} + \mathbf{R}_{21s}^*)\,\mathbf{P}_s, \quad & \mathbf{R}_{22sPQ} &= \mathbf{P}_s\,(\mathbf{R}_{22s} + \mathbf{R}_{22s}^*)\,\mathbf{P}_s.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Таким образом, из известных результатов по сильно эллиптическим системам [1] вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть уравнение* (1.1) *сильно эллиптическое в* $\overline{B}$. *Тогда матрицы*

$$\sum_{i,j=1}^{2} \mathbf{R}_{ijsPQ}\xi_i\xi_j \tag{3.9}$$

положительно определены для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$ *и* $s = 1, 2, \ldots$

Для каждого $s = 1, 2, \ldots$ из матриц $\mathbf{Q}_s\mathbf{R}_{11s}\mathbf{Q}_s, \mathbf{P}_s\mathbf{R}_{12s}\mathbf{Q}_s, \mathbf{Q}_s\mathbf{R}_{21s}\mathbf{P}_s, \mathbf{P}_s\mathbf{R}_{22s}\mathbf{P}_s$ составим блочную матрицу $\mathbf{R}_s$ порядка $2s \times 2s$.

Введем матричный оператор $R : L_2^2(B) \to L_2^2(B)$, элементами которого являются разностные операторы $R_{ijB} : L_2(B) \to L_2(B)$ $(i, j = 1, 2)$. Сопряженному оператору R^*, состоящему из операторов $R_{jiB}^* : L_2(B) \to L_2(B)$, отвечают эрмитово сопряженные матрицы $\mathbf{R}_s^*$.

Лемма 3.2. *Оператор* $R + R^*$ *положительно определен тогда и только тогда, когда все матрицы* $\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_s^*$ $(s = 1, 2, \ldots)$ *положительно определены.*

Доказательство. Пусть имеется вектор-функция $w \in L_2^2(B)$. Для каждой ее компоненты w_i и каждого s по правилу (3.1) построим вектор-функцию $W_{is} \in L_2^s(B_{s1})$. Затем из W_{1s}, W_{2s} составим вектор W_s длины $2s$. Таким образом, для каждого s имеем вектор-функцию $W_s \in L_2^{2s}(B_{s1})$. Теперь неравенство

$$((R + R^*)\,w, w)_{L_2^2(B)} = \sum_{i,j=1}^{2} \left((R_{ij} + R_{ji}^*)\,w_j, w_i\right)_{L_2(B)} \geqslant c\|w\|^2_{L_2^2(B)} = c\sum_{i=1}^{2} \|w_i\|^2_{L_2(B)} \tag{3.10}$$

для любой вектор-функции $w \in L_2^2(B)$ может быть записано в виде

$$\sum_s \sum_{i,j=1}^{2} ((\mathbf{R}_{ijsPQ})\,W_{js}, W_{is})_{L_2^s(B_{s1})} \geqslant c\sum_s \sum_{i=1}^{2} \|W_{is}\|^2_{L_2^s(B_{s1})}, \tag{3.11}$$

или

$$\sum_s ((\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_s^*)\,W_{js}, W_{is})_{L_2^{2s}(B_{s1})} \geqslant c\sum_s \|W_s\|^2_{L_2^{2s}(B_{s1})} \tag{3.12}$$

Если все матрицы $\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_s^*$ положительно определены, то найдется такая константа $c > 0$, что выполнено неравенство (3.12). Если же, зафиксировав $s = s_0$, подставлять в неравенство (3.11) функции, равные постоянным в подобластях s_0-го класса и нулю вне этих подобластей, то (3.12) становится условием положительной определенности матрицы $\mathbf{R}_{s_0} + \mathbf{R}_{s_0}^*$. Лемма доказана. $\square$

4. Гладкость обобщенных решений на границе подобластей

В дальнейшем предполагаем, что для оператора $\mathcal{A}_R$ выполняется условие сильной эллиптичности. В статье [14] приведены явные, как необходимые, так и достаточные условия сильной эллиптичности на коэффициенты уравнения (1.1).

Справедливы следующие теоремы о гладкости обобщенных решений (см. статью [18]).

Теорема 4.1. *Пусть уравнение* (1.1) *является сильно эллиптическим в* $\overline{B}$. *Предположим, что функция* u *является обобщенным решением краевой задачи* (1.1), (1.2), *а функция* f *принадлежит* $L_2(B) \cap H^k_{loc}(B_{sl})$ $(s \in \mathbb{N}, l = \overline{1,s})$. *Тогда* $u \in H^{k+2}_{loc}(B_{sl})$ *для всех* s, l.

Теорема 4.2. *Пусть уравнение* (1.1) *является сильно эллиптическим в* $\overline{B}$. *Предположим, что функция* u *является обобщенным решением краевой задачи* (1.1), (1.2), *а функция* f *принадлежит* $L_2(B)$. *Тогда* $u \in H^2(B_{sl} \setminus \overline{\mathcal{K}^\varepsilon})$ *для всех* $\varepsilon > 0$ $(s \in \mathbb{N},\ l = \overline{1,s})$, *где* $\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x,\mathcal{K}) < \varepsilon\}$.

Перейдем к выводу основного результата статьи о гладкости обобщенных решений на границе соседних подобластей. Пусть, как и прежде, функционально-дифференциальный оператор $\mathcal{A}_R$ является сильно эллиптическим, и область B удовлетворяет условию 2.1. Предположим, что $u(x)$ является обобщенным решением краевой задачи (1.1), (1.2), где $f \in L_2(B)$. Зафиксируем класс s и рассмотрим точку $y^1 = (y_1^1, y_2^1) \in B \cap (\partial B_{s1} \setminus \mathcal{K})$. Пусть $y^l = (q^{l-1}y_1^1, p^{1-l}y_2^1) \in \partial B_{sl} \setminus \mathcal{K}$ $(l = 1,\dots,s)$. При этом возможны три случая: $y^l \in B$ $(l = 1,\dots,s-1)$, $y^s \in \partial B$, или $y^1 \in \partial B$, $y^l \in B$ $(l = 2,\dots,s)$, или $y^l \in B$ $(l = 1,\dots,s)$. Без ограничения общности, которое будет пояснено ниже, рассмотрим третий случай. Будем искать условия, при которых для заданного $1 \leqslant l \leqslant s$ существует $a > 0$ такое, что $u \in H^2(S_a(y^l))$ для всех $f \in L_2(B)$, т. е. решение имеет соответствующую гладкость в некоторой окрестности $S_a(y^l)$.

По лемме 2.6 существует единственная подобласть $B_{rj} \neq B_{s1}$ такая, что $y^1 \in \partial B_{rj}$. При этом в рассматриваемом случае $r = s+1$. Введем дополнительный набор точек $z^1,\dots,z^{s+1} \in \overline{B}$ такой, что $z^l = (q^{l-j}z_1^j, p^{j-l}z_2^j) \in \partial B_{rl} \setminus \mathcal{K}$ $(l = 1,\dots,s+1)$, $z^j = y^1$. Без ограничения общности можно положить $y^l = z^l$ $(l = 1,\dots,s)$, $z^{s+1} \in \partial B$. В противном случае $y^l = z^{l+1}$ $(l = 1,\dots,s)$, $z^1 \in \partial B$. При этом для случаев, когда одна из точек y^l лежит на границе, мы получаем, что соседним классом подобластей является класс B_{rj}, где $r = s-1$. Таким образом, для различных случаев расположения точек y^l дальнейшие построения и рассуждения будут действительными.

В силу лемм 2.3, 2.4 можно выбрать $a > 0$ достаточно малым, чтобы выполнялись следующие условия:

- множества $\partial B_{sl} \cap S_a(y^l)$ являются связанными и принадлежат классу C^∞ $(l = 1,\dots,s)$;
- $a < \min\limits_{t,l} \rho(x^{tl},\mathcal{K})$, где $t = s, s+1$; $x^{sl} = y^l$, $x^{s+1,l} = z^l$;
- $S_a(x^{s+1,l}) \subset B$ при $l = 1,\dots,s$; $S_a(x^{s+1,s+1}) \cap B = S_a(x^{s+1,s+1}) \cap B_{sl}$;
- $S_a(x^{sl}) \cap B_{s_1l_1} = \varnothing$, $((s_1,l_1) \neq (s,l))$.

Пусть u — обобщенное решение задачи (1.1), (1.2). Будем рассматривать его поведение вблизи точки y^l, $l = 1,\dots,s$. Умножим уравнение (1.1) на функцию

$$\xi(x_1,x_2) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{l-1}{2}} \eta(q^{l-1}x_1, p^{1-l}x_2),$$

где $\eta \in \dot{C}^\infty(S_a(y^1))$. Тогда будет справедливо следующее равенство:

$$-\int\limits_{S_a(y^l)} \sum_{i,j=1}^{2} (R_{ijB}u_{x_i}(x))_{x_j}\overline{\xi}(x)dx = \int\limits_{S_a(y^l)} f(x)\overline{\xi}(x)dx. \tag{4.1}$$

При помощи замены переменных перейдем в (4.1) к интегралу по множеству $S_a(y^1)$:

$$-\int\limits_{S_a(y^1)} \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{l-1}{2}} (R_{ijB}u_{x_i}(q^{-l+1}x_1, p^{l-1}x_2))_{x_j}\overline{\eta}(x)dx = \int\limits_{S_a(y^1)} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{l-1}{2}} f(q^{-l+1}x_1, p^{l-1}x_2)\overline{\eta}(x)dx. \tag{4.2}$$

В силу определения (3.1) вектор-функции U получаем

$$\begin{aligned} R_{1jB}u_{x_1}(q^{1-l}x_1, p^{l-1}x_2) &= a_{1j,-1}u_{x_1}(q^{2-l}x_1, p^{l-2}x_2) + a_{1j0}u_{x_1}(q^{1-l}x_1, p^{l-1}x_2) + a_{1j1}u_{x_1}(q^{-l}x_1, p^{l}x_2) = \\ &= \Big(a_{1j,-1}q^{l-2}u(q^{2-l}x_1, p^{l-2}x_2) + a_{1j0}q^{l-1}u(q^{1-l}x_1, p^{l-1}x_2) + a_{1j1}q^{l}u(q^{-l}x_1, p^{l}x_2)\Big)_{x_1} = \\ &= \left(a_{1j,-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{2-l}{2}} q^{l-2}u_{l-1}(x) + a_{1j0}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1-l}{2}} q^{l-1}u_l(x) + a_{1j1}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{-l}{2}} q^{l}u_{l+1}(x)\right)_{x_1} = \\ &= \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1-l}{2}} \left(\sqrt{\frac{p}{q}}a_{1j,-1}q^{l-2}u_{l-1}(x) + a_{1j0}q^{l-1}u_l(x) + \sqrt{\frac{q}{p}}a_{1j1}q^{l}u_{l+1}(x)\right)_{x_1}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Обратим внимание на то, что в скобках полученного выражения стоит l-ый элемент вектор-столбца $\mathbf{R}_{1js}\mathbf{Q}_sU$. Аналогичным (4.3) образом, получим

$$R_{2jB}u_{x_2}(q^{1-l}x_1, p^{l-1}x_2) = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1-l}{2}} \left(\sqrt{\frac{p}{q}}a_{2j,-1}p^{2-l}u_{l-1}(x) + a_{2j0}p^{1-l}u_l(x) + \sqrt{\frac{q}{p}}a_{2j1}p^{-l}u_{l+1}(x)\right)_{x_2}.$$

Тогда каждому $l = 1, \dots, s$ будет соответствовать уравнение из системы

$$-\sum_{r=s,s+1}\int\limits_{\omega_r}(\mathbf{R}_{11r}\mathbf{Q}_rU_{x_1x_1} + \mathbf{R}_{12r}\mathbf{Q}_rU_{x_1x_2} + \mathbf{R}_{21r}\mathbf{P}_rU_{x_2x_1} + \mathbf{R}_{22r}\mathbf{P}_rU_{x_2x_2})\,\overline{\eta}(x)dx = \int\limits_{S_a(y^1)}F\overline{\eta}(x)dx, \tag{4.4}$$

где $\omega_r = B_{r1} \cap S_a(y^1)$ $(r = s, s+1)$, а вектор-функция $F \in L_{2,s}(S_a(y^1))$ имеет элементы $f_l = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{l-1}{2}} f(q^{-l+1}x_1, p^{l-1}x_2)$.

Теперь можно, не ограничивая общности, считать, что $y^1 = 0$,

$$\omega_s = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\} \cap S_a(0), \quad \omega_{s+1} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\} \cap S_a(0),$$

$$\gamma_r = \partial B_{r1} \cap S_a(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}, \quad r = s, s+1.$$

В силу теоремы 4.2 имеем $u \in H^2(\omega_r)$. Поэтому мы можем проинтегрировать по частям уравнение по областям $\omega_r, r = s, s+1$. Тогда слева в (4.4) получим

$$i\sum_{r=s,s+1}(-1)^{\mu(r)+1}\int\limits_{\gamma_r}(\mathbf{R}_{12r}\mathbf{Q}_rU_{x_1} + \mathbf{R}_{22r}\mathbf{P}_rU_{x_2})|_{\gamma_r}\overline{\eta}|_{\gamma_r}dx_1 + \sum_{r=s,s+1}\int\limits_{\omega_r}\sum_{j=1}^{2}(\mathbf{R}_{1jr}\mathbf{Q}_rU_{x_1} + \mathbf{R}_{2jr}\mathbf{P}_rU_{x_2})\,\overline{\eta}_{x_j}(x)dx.$$

Здесь $v|_{\gamma_r}$ — след функции v, определенной в области B_{r1}, на границе γ_r. При этом $\mu(s) = 1$, $\mu(s+1) = 2$.

С другой стороны, для обобщенного решения u справедливо интегральное тождество (1.6), из которого следует, что

$$\sum_{r=s,s+1}\int\limits_{\omega_r}\sum_{j=1}^{2}(\mathbf{R}_{1jr}\mathbf{Q}_rU_{x_1} + \mathbf{R}_{2jr}\mathbf{P}_rU_{x_2})\,\overline{\eta}_{x_j}(x)dx = \int\limits_{S_a(y^1)}F\overline{\eta}(x)dx.$$

Таким образом, получаем условие

$$\sum_{r=s,s+1}(-1)^{\mu(r)+1}(\mathbf{R}_{12r}\mathbf{Q}_rU_{1r} + \mathbf{R}_{22r}\mathbf{P}_rU_{2r})|_{\gamma_r} = 0, \tag{4.5}$$

где U_{ir}, $r = s, s+1$, $i = 1, 2$ — производная по x_i вектор-столбца U длины r.

Запишем матрицу $\mathbf{R}_{ij,s+1}$, определенную формулой (3.2), следующим образом:

$$\mathbf{R}_{ij,s+1} = \begin{pmatrix} A_{ij,s+1} \\ B_{ij,s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_{ij,s+1} & A''_{ij,s+1} \\ B'_{ij,s+1} & B''_{ij,s+1} \end{pmatrix},$$

где матрица $A_{ij,s+1}$ имеет размер $(s \times s+1)$, $B_{ij,s+1}$ — $(1 \times s+1)$, $A'_{ij,s+1}$ — $(s \times s)$, $A''_{ij,s+1}$ — $(s \times 1)$, $B'_{ij,s+1}$ — $(1 \times s)$, $B''_{ij,s+1}$ — (1×1). При этом данные матрицы имеют четкий геометрический смысл: матрица $A'_{ij,s+1}$ соответствует отображению внутренней точки области во внутреннюю, матрица $A''_{ij,s+1}$ — внутренней точки в граничную, матрица $B'_{ij,s+1}$ — граничной точки во внутреннюю, матрица $B''_{ij,s+1}$ — граничной точки в граничную. Обратим внимание на то, что матрица $A'_{ij,s+1}$ равна матрице $\mathbf{R}_{ijs}$.

Введем также дополнительные обозначения для вектор-функции $U_{i,s+1}$:

$$U_{i,s+1} = \begin{pmatrix} U'_{i,s+1} \\ U''_{i,s+1} \end{pmatrix}.$$

Здесь вектор-функции $U'_{i,s+1}$ получены из вектор-функций $U_{i,s+1}$ вычеркиванием последней строки, а вектор-функции $U''_{i,s+1}$ получены из вектор-функций $U_{i,s+1}$ вычеркиванием первых s строк.

В силу того, что $u \in \mathring{H}^1(B)$ является обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), из теоремы 4.2 получаем следующие соотношения:

$$U'_{s+1} = U_s, \quad U''_{s+1} = 0, \quad U'_{1,s+1} = U_{1s}, \quad U''_{1,s+1} = 0. \tag{4.6}$$

Перепишем (4.5) для $l = 1, \dots, s$, используя новые обозначения:

$$A'_{22,s+1}\mathbf{P}_s(U_{2s} - U'_{2,s+1}) = A''_{22,s+1}p^{-s}U''_{2,s+1}. \tag{4.7}$$

Умножив (4.7) слева на $\mathbf{P}_s$, перепишем уравнение, используя новые обозначения:

$$E_sY(x_1) = F(x_1) \quad (x_1, 0) \in \gamma, \tag{4.8}$$

где $E_s = \mathbf{R}_{22sPQ}$, $Y(x_1) = U_{2s} - U'_{2,s+1}$, $F(x_1) = E_0U''_{2,s+1}$, $E_0 = \mathbf{P}_sA''_{22,s+1}p^{-s}$.

По лемме 3.1 матрица $\mathbf{R}_{22sPQ} + \mathbf{R}^*_{22sPQ}$ положительно определена. Тогда существует обратная матрица $\mathbf{R}^{-1}_{22sPQ}$, и из уравнения (4.7) вытекает

$$U_{2s} - U'_{2,s+1} = \mathbf{R}^{-1}_{22sPQ}\mathbf{P}_sA''_{22,s+1}p^{-s}U''_{2,s+1} = \mathbf{P}_s^{-1}A'^{-1}_{22,s+1}A''_{22,s+1}p^{-s}U''_{2,s+1}.$$

Обозначим через E_{sl} матрицу порядка $s \times (s-1)$, полученную из матрицы E_s вычеркиванием l-го столбца.

Теорема 4.3. *Пусть уравнение* (1.1) *является сильно эллиптическим в* $\overline{B}$. *Тогда для данного* l $(1 \leqslant l \leqslant s)$ *обобщенное решение* $u(x)$ *краевой задачи* (1.1), (1.2) *принадлежит пространству* $H^2(S_a(y^l))$ *для всех* $f \in L_2(B)$ *в том и только том случае, когда для любого* $(x_1, 0) \in \gamma$ *вектор-столбец* E_0 *является линейной комбинацией столбцов матрицы* E_{sl}.

Доказательство.

1. Достаточность. По теореме 4.2 решение $u(x)$ краевой задачи (1.1), (1.2) принадлежит пространству $H^2(S_a(y^l))$ тогда и только тогда, когда равны l-ые компоненты векторов U_{2s} и $U_{2,s+1}$:

$$U^l_{2s} - U''^l_{2,s+1} = 0. \tag{4.9}$$

Выше было показано, что решение $u(x)$ удовлетворяет уравнениям (4.8). Поскольку $\det \mathbf{R}_{22sPQ} \neq 0$ для всех $(x_1, 0) \in \gamma$, существует единственное решение $Y(x)$ системы (4.8). Предположим, что вектор-столбец E_0 является линейной комбинацией столбцов матрицы E_{sl} для всех $(x_1, 0) \in \gamma$. Тогда матрица системы (4.8), (4.9) и расширенная матрица этой системы имеют один и тот же ранг s. Следовательно решение $Y(x)$ системы (4.8) удовлетворяет уравнению (4.9). Поэтому $u \in H^2(S_a(y^l))$.

2. Необходимость. Предположим, что вектор-столбец E_0 не является линейной комбинацией столбцов матрицы E_{sl}. Покажем, что тогда существует функция $u \in \mathcal{D}(A_R)$ такая, что $u \notin H^2(S_a(y^l))$. Введем функцию $\xi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) : \xi(x) = 1$ при $x \in S_\varepsilon(y^1)$; $\xi(x) = 0$ при $x \notin S_{2\varepsilon}(y^1)$. Положим $W^s(x) = 0$ $(x \in \omega_s)$, $W^{s+1}(x) = ix_2\xi$ $(x \in \omega_{s+1})$. Очевидно, что $W^{s+1}(x)|_{x_2=0} = 0$.

Рассмотрим систему уравнений (4.8). Эта система имеет единственное решение $Y(x_1) \in C_0^{\infty,s}(\gamma)$. Очевидно, что существует вектор-функция $Z \in C_0^{2,s}(S_a(0))$ такая, что

$$Z(x)|_{x_2=0} = 0, \quad (x_1,0) \in \gamma,$$
$$Z_{x_2}(x)|_{x_2=0} = Y(x_1), \quad (x_1,0) \in \gamma.$$

Пусть

$$u(x) = U_t^1(q^{1-t}x_1, p^{t-1}x_2), \quad x \in B_{s+1,t} \cap S_a(y^t), \quad (t = 1,\dots,s+1);$$
$$u(x) = 0, \quad x \in B \setminus \left\{ \bigcup_t (B_{s+1,t} \cap S_a(y^t)) \right\},$$

где $U^1 = (Z_1,\dots,Z_s,W^{s+1})$. В силу (4.8) имеем $u \in \mathcal{D}(A_R)$. Докажем, что $u \notin H^2(S_a(y^l))$. Учитывая вид функции W^{s+1}, перепишем уравнение (4.8):

$$E_s Y(x_1) = E_0 \quad (x_1,0) \in \gamma \cap S_\varepsilon(y^1). \tag{4.10}$$

Если $u \in H^2(S_a(y^l))$, то

$$U_{2s}(x_1) - U'_{2,s+1}(x_1) = 0 \quad ((x_1,0) \in \gamma \cap S_\varepsilon(y^1)). \tag{4.11}$$

По предположению E_0 не является линейной комбинацией столбцов матрицы E_{sl}. Поэтому матрица и расширенная матрица системы (4.10), (4.11) имеют ранги s и $s+1$, соответственно. Таким образом, функция $u(x)$ не удовлетворяет уравнению (4.11). Следовательно, построенная функция $u \in \mathcal{D}(A_R)$ не принадлежит пространству $H^2(S_a(y^l))$. Теорема доказана. $\square$

Проиллюстрируем полученные результаты на первых классах подмножеств.

Пусть $s = 1$. В первом классе содержится одна подобласть B_{11}, тогда $y^1 \in B_{11} \cap B_{21}$. Запишем уравнение (4.7):

$$a_{220}(u_{21} - u'_{22}) = \sqrt{\frac{q}{p}} a_{221} p^{-1} u''_{22}.$$

Для сохранения гладкости решения в окрестности точки y^1 для любой правой части требуется, чтобы $a_{221} = 0$.

Перейдем ко второму классу подобластей. Уравнение (4.7) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} a_{220} & \sqrt{\frac{q}{p}} p^{-1} a_{221} \\ \sqrt{\frac{p}{q}} a_{22,-1} & p^{-1} a_{220} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21}^1 - u_{22}^1 \\ u_{21}^2 - u_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{q}{p}} p^{-2} a_{221} u_{22}^3 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы $u \in H^2(y^i), i = 1, 2$, необходимо, чтобы обнулялись следующие определители:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{\frac{q}{p}} p^{-1} a_{221} \\ \sqrt{\frac{q}{p}} p^{-2} a_{221} & p^{-1} a_{220} \end{vmatrix} \quad \text{для } i = 1, \qquad \begin{vmatrix} a_{220} & 0 \\ \sqrt{\frac{p}{q}} a_{22,-1} & \sqrt{\frac{q}{p}} p^{-2} a_{221} \end{vmatrix} \quad \text{для } i = 2.$$

Учитывая сильную эллиптичность, получаем условие равенства нулю коэффициента a_{221}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишик М. И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений// Мат. сб. — 1951. — *29*, № 3. — С. 615–676.
2. *Гусева О. В.* О краевых задачах для сильно эллиптических систем// Докл. АН СССР. — 1955. — *102*, № 6. — С. 1069–1072.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 2. — М.: Мир, 1966.
4. *Иванов Н. О., Скубачевский А. Л.* Вторая краевая задача для дифференциально-разностных уравнений// Докл. РАН. — 2021. — *500*. — С. 74–77.
5. *Иванов Н. О., Скубачевский А. Л.* Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — *67*, № 3. — С. 576–595.

6. *Иванов Н. О., Скубачевский А. Л.* Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами на интервале нецелой длины// Мат. заметки. — 2022. — *111*, № 6. — С. 873–886.
7. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.:Наука, 1973.
8. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.:Наука, 1976.
9. *Неверова Д. А.* Гладкость обобщенных решений второй и третьей краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2019. — *65*, № 4. — С. 655–671.
10. *Неверова Д. А.* Гладкость обобщенных решений задачи Неймана для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения на границе соседних подобластей// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2020. — *66*, № 2. — С. 272–291.
11. *Россовский Л. Е.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений// Мат. заметки. — 1996. — *59*, № 1. — С. 103–113.
12. *Россовский Л. Е.* К вопросу о коэрцитивности функционально-дифференциальных уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *45*. — С. 122–131.
13. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргумертов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 3–138.
14. *Россовский Л. Е., Тасевич А. Л.* Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями// Мат. заметки. — 2015. — *97*, № 5. — С. 733–748.
15. *Скубачевский А. Л.* Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения// Мат. заметки. — 1983. — *34*, № 1. — С. 105–112.
16. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
17. *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 10. — С. 1766–1776.
18. *Тасевич А. Л.* Гладкость обобщенных решений задачи Дирихле для сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58*. — С. 153–165.
19. *Цветков Е. Л.* О гладкости обобщенных решений третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения// Укр. мат. ж. — 1993. — *45*, № 8. — С. 1140–1150.
20. *Шамин Р. В.* О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах// Мат. сб. — 2003. — *194*, № 9. — С. 141–156.
21. *Auscher P., Hofmann S., McIntosh A., Tchamitchian P.* The Kato square root problem for higher order elliptic operators and systems on $\mathbb{R}^n$// J. Evol. Equ. — 2001. — *1*, № 4. — С. 361–385.
22. *Axelsson A., Keith S., McIntosh A.* The Kato square root problem for mixed boundary value problems// J. Lond. Math. Soc. — 2006. — *74*. — С. 113–130.
23. *Gårding L.* Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations// Math. Scand. — 1953. — *1*. — С. 55–72.
24. *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators// J. Math. Soc. Japan. — 1961. — *13*, № 3. — С. 246–274.
25. *Lions J. L.* Espaces d'interpolation et domaines de puissance fractionnaires d'operateurs// J. Math. Soc. Japan. — 1962. — *14*, № 2. — С. 233–241.
26. *McIntosh A.* On the comparability of $A^{1/2}$ and $A*^{1/2}$// Proc. Am. Math. Soc. — 1972. — *32*, № 2. — С. 430–434.
27. *Morrey C. B.* Multiple integrals in the calculus of variations. — Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1966.
28. *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differ. Equ. — 1986. — *63*. — С. 332–361.
29. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

А. Л. Тасевич
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия;
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
E-mail: `tasevich-al@rudn.ru`

UDC 517.956.223
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-152-165
EDN: FOBXVK

Smoothness of generalized solutions to the Dirichlet problem for strongly elliptic functional differential equations with orthotropic contractions on the boundary of adjacent subdomains

A. L. Tasevich[1,2]

[1] *RUDN University, Moscow, Russia*
[2] *Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

The paper is devoted to the study of the smoothness of generalized solutions of the first boundary-value problem for a strongly elliptic functional differential equation containing orthotropic contraction transformations of the arguments of the unknown function in the leading part. The problem is considered in a circle, the coefficients of the equation are constant. Orthotropic contraction is understood as different contraction in different variables. Conditions for the conservation of smoothness on the boundaries of neighboring subdomains formed by the action of the contraction transformation group on a circle are found in explicit form for any right-hand side from the Lebesgue space.

Keywords: strongly elliptic functional differential equation, orthotropic contraction of arguments, smoothness of generalized solutions

For citation: A. L. Tasevich, "Smoothness of generalized solutions to the Dirichlet problem for strongly elliptic functional differential equations with orthotropic contractions on the boundary of adjacent subdomains," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 152–165. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-152-165`

REFERENCES

1. M. I. Vishik, "O sil'no ellipticheskikh sistemakh differentsial'nykh uravneniy" [On strongly elliptic systems of differential equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1951, **29**, No. 3, 615–676 (in Russian).
2. O. V. Guseva, "O kraevykh zadachakh dlya sil'no ellipticheskikh sistem" [On boundary-value problems for strongly elliptic systems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1955, **102**, No. 6, 1069–1072 (in Russian).
3. N. Dunford and J. Schwartz, *Lineynye operatory. T. II. Spektral'naya teoriya. Samosopryazhennye operatory v gil'bertovom prostranstve* [Linear Operators. Part II: Spectral Theory. Self-Adjoint Operators in Hilbert Space], Mir, Moscow, 1966 (Russian translation).
4. N. O. Ivanov and A. L. Skubachevskiy, "Vtoraya kraevaya zadacha dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [The second boundary-value problem for differential-difference equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2021, **500**, 74–77 (in Russian).
5. N. O. Ivanov and A. L. Skubachevskii, "Ob obobshchennykh resheniyakh vtoroy kraevoy zadachi dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami" [On generalized solutions of the second boundary-value problem for differential-difference equations with variable coefficients], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, **67**, No. 3, 576–595 (in Russian).
6. N. O. Ivanov and A. L. Skubachevskii, "Ob obobshchennykh resheniyakh vtoroy kraevoy zadachi dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami na intervale netseloy dliny" [On generalized solutions of the second boundary-value problem for differential-difference equations with

variable coefficients on an interval of noninteger length], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2022, **111**, No. 6, 873–886 (in Russian).

7. O. A. Ladyzhenskaya, *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary-Value Problems of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
8. V. P. Mikhaylov, *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
9. D. A. Neverova, "Gladkost' obobshchennykh resheniy vtoroy i tret'ey kraevykh zadach dlya sil'no ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [Smoothness of generalized solutions of the second and third boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2019, **65**, No. 4, 655–671 (in Russian).
10. D. A. Neverova, "Gladkost' obobshchennykh resheniy zadachi Neymana dlya sil'no ellipticheskogo differentsial'no-raznostnogo uravneniya na granitse sosednikh podoblastey" [Smoothness of generalized solutions of the Neumann problem for a strongly elliptic differential-difference equation on the boundary of adjacent subdomains], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2020, **66**, No. 2, 272–291 (in Russian).
11. L. E. Rossovskii, "Koertsitivnost' funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy" [Coercivity of functional differential equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1996, **59**, No. 1, 103–113 (in Russian).
12. L. E. Rossovskii, "K voprosu o koertsitivnosti funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy" [The coercivity of functional differential equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **45**, 122–131 (in Russian).
13. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumertov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
14. L. E. Rossovskii and A. L. Tasevich, "Pervaya kraevaya zadacha dlya sil'no ellipticheskogo funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya s ortotropnymi szhatiyami" [The first boundary-value problem for a strongly elliptic functional differential equation with orthotropic contractions], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2015, **97**, No. 5, 733–748 (in Russian).
15. A. L. Skubachevskii, "Gladkost' obobshchennykh resheniy pervoy kraevoy zadachi dlya ellipticheskogo differentsial'no-raznostnogo uravneniya" [Smoothness of generalized solutions of the first boundary-value problem for an elliptic differential-difference equation], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1983, **34**, No. 1, 105–112 (in Russian).
16. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
17. A. L. Skubachevskii and E. L. Tsvetkov, "Vtoraya kraevaya zadacha dlya ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [The second boundary-value problem for elliptic differential-difference equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 10, 1766–1776 (in Russian).
18. A. L. Tasevich, "Gladkost' obobshchennykh resheniy zadachi Dirikhle dlya sil'no ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy s ortotropnymi szhatiyami" [Smoothness of generalized solutions of the Dirichlet problem for strongly elliptic functional differential equations with orthotropic contractions], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 153–165 (in Russian).
19. E. L. Tsvetkov, "O gladkosti obobshchennykh resheniy tret'ey kraevoy zadachi dlya ellipticheskogo differentsial'no-raznostnogo uravneniya" [On the smoothness of generalized solutions of the third boundary-value problem for an elliptic differential-difference equation], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1993, **45**, No. 8, 1140–1150 (in Russian).
20. R. V. Shamin, "O prostranstvakh nachal'nykh dannykh dlya differentsial'nykh uravneniy v gil'bertovykh prostranstvakh" [On spaces of initial data for differential equations in Hilbert spaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2003, **194**, No. 9, 141–156 (in Russian).
21. P. Auscher, S. Hofmann, A. McIntosh, and P. Tchamitchian, "The Kato square root problem for higher order elliptic operators and systems on $\mathbb{R}^n$," *J. Evol. Equ.*, 2001, **1**, No. 4, 361–385.
22. A. Axelsson, S. Keith, and A. McIntosh, "The Kato square root problem for mixed boundary value problems," *J. Lond. Math. Soc.*, 2006, **74**, 113–130.
23. L. Gårding, "Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations," *Math. Scand.*, 1953, **1**, 55–72.
24. T. Kato, "Fractional powers of dissipative operators," *J. Math. Soc. Japan*, 1961, **13**, No. 3, 246–274.
25. J. L. Lions, "Espaces d'interpolation et domaines de puissance fractionnaires d'operateurs," *J. Math. Soc. Japan*, 1962, **14**, No. 2, 233–241.

26. A. McIntosh, “On the comparability of $A^{1/2}$ and $A*^{1/2}$,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 1972, **32**, No. 2, 430–434.
27. C. B. Morrey, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1966.
28. A. L. Skubachevskii, “The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations,” *J. Differ. Equ.*, 1986, **63**, 332–361.
29. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

A. L. Tasevich
RUDN University, Moscow, Russia;
Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: `tasevich-al@rudn.ru`