Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 3 (2017). С. 437–454

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-437-454 УДК 517.98

МЕТОД МОНОТОННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ

© 2017 г. **В. ВОЛЬПЕРТ, В. ВУГАЛЬТЕР**

Аннотация. Методом Лере—Шаудера, основанном на топологической степени эллиптических операторов в неограниченных областях и на априорных оценках решений в весовых пространствах, изучается существование решений систем уравнений реакции-диффузии в неограниченных областях. Мы выделяем некоторые системы реакции-диффузии, для которых существуют два подкласса решений, отделенных друг от друга в функциональном пространстве: монотонные и немонотонные решения. Для монотонных решений получены априорные оценки, позволяющие доказать их существование методом Лере—Шаудера. Приводятся различные приложения этого метода.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В настоящей работе представлен метод изучения разрешимости уравнений реакции-диффузии в неограниченных областях. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u), \tag{1.1}$$

где $u = (u_1, ..., u_n)$, $F = (F_1, ..., F_n)$, D — диагональная матрица с положительными диагональными элементами d_i. Решением типа бегущей волны для этой системы является функция $u(x,t) = w(x - ct)$, удовлетворяющая уравнению второго порядка

$$Dw'' + cw' + F(w) = 0, \tag{1.2}$$

где скорость волны c — неизвестная постоянная, а x принадлежит $\mathbb{R}$. Будем искать решения, имеющие пределы на бесконечности, т. е., такие решения, для которых

$$w(\pm\infty) = w_\pm, \tag{1.3}$$

где $F(w_\pm) = 0$. Если $c = 0$, то имеем стационарное решение уравнения (1.1); такое решение называется *стоячей волной*. Если для стационарного решения, отличного от постоянной, справедливо соотношение $w_+ = w_-$, то такое решение называется *стационарным импульсом*.

Для исследования разрешимости задачи (1.2)-(1.3) будем использовать модификацию метода Лере—Шаудера. В своей классической формулировке (см. [39]) метод Лере—Шаудера использует топологическую степень эллиптических задач в ограниченных областях и априорные оценки решений. Для неограниченных областей эта степень строится по-другому; изменяются и априорные оценки решений. Мы используем степени фредгольмовых и собственных операторов нулевого

Работа выполнена при финансовой поддержке первого автора МОН РФ, соглашение № 02.a03.21.0008, и программой PICS CNRS 6583 Matbio.

индекса, рассматриваемых в некоторых специальных весовых пространствах. Априорные оценки решений в этих пространствах существенно отличаются от классических; в общей теории они не выполняются. Мы найдем классы эллиптических задач, обладающих решениями двух типов. Априорные оценки получены только для одного из этих типов. Чтобы применить к этим решениям метод Лере—Шаудера, мы покажем, что они отделены от решений другого типа. Таким образом, их построение требует нескольких шагов, изложенных ниже.

Фредгольмовость линейных эллиптических задач. Согласно классическим результатам для линейных эллиптических задач в ограниченных областях с достаточно гладкой границей, фредгольмовость имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условие эллиптичности, условие правильной эллиптичности и условие Лопатинского (см. $[2,3,7,8]$). В случае неограниченной области требуется наложить еще одно условие — условие обратимости предельных операторов (см. $[5,6,46,57,61]$). Оно гарантирует, что существенный спектр отделен от начала координат. В некоторых случаях можно вычислить индекс оператора (см. $[22,61]$). Степень строится таким образом, что существенный спектр лежит в левой полуплоскости комплексной плоскости (см. $[55]$). В этом случае индекс оператора равен нулю.

Условия разрешимости в неограниченных областях можно получить и для некоторых линейных эллиптических операторов, не являющихся фредгольмовыми (см. $[66,67]$). Однако они могут применены только для исследования некоторых специальных типов нелинейных операторов (см. $[68]$), и в данном случае теории степеней не существует.

В настоящей работе представлены некоторые приложения метода монотонных решений к нелокальным уравнениям реакции-диффузии и уравнениям реакции-диффузии с запаздыванием. Исследование этих уравнений основано на фредгольмовости соответствующих эллиптических задач (см. $[9,10]$). В $[43,44,47–49,51]$ исследуются условия разрешимости различных эллиптических функционально-дифференциальных уравнений.

Правильность эллиптических задач в неограниченных областях. Напомним, что оператор называется *правильным* на замкнутых ограниченных множествах, если пересечение прообраза любого компактного множества с любым замкнутым ограниченным множеством компактно. Важным свойством правильных операторов является то, что множество решений операторного уравнения (т. е. прообраз множества, состоящего из точки 0) компактно. Компактность множества решений играет важную роль при построении степени.

В общем случае эллиптические задачи не обладают свойством компактности множества решений. Проиллюстрируем это на следующем примере. На всей вещественной оси рассмотрим уравнение $w'' + F(w) = 0$, где $F(w) = -w + w^2$. Легко проверить, что у него есть положительное решение $w(x)$, обращающееся в нуль на бесконечности. Поскольку оно инвариантно относительно сдвигов аргумента, сдвинутая функция $w(x+h)$ тоже является решением при любом вещественном h. Следовательно, множество решений не является компактным ни в одном из традиционных гельдеровых или соболевских пространств, а значит, соответствующий оператор не является правильным.

Если исключить инвариантность (на бесконечности) решений, то операторы становятся правильными (см. $[45]$). Однако инвариантность относительно сдвигов присуща многим эллиптическим задачам (включая те, что рассматриваются в настоящей работе), и исключить это свойство невозможно. В неограниченных областях эллиптические операторы становятся правильными, если выбрать подходящим образом весовые пространства (см. $[55,61]$). Так, вернемся к предыдущему примеру и рассмотрим весовое гельдерово пространство $C_\mu^{2+\alpha}(\mathbb{R})$, где весовая функция $\mu(x) = 1 + x^2$ растет на бесконечности, а норма задается равенством $\|w(\cdot+h)\|_{C_\mu^{2+\alpha}(\mathbb{R})} = \|w(\cdot+h)\mu\|_{C^{2+\alpha}(\mathbb{R})}$. Тогда для любого замкнутого ограниченного множества D весового пространства существует лишь конечный интервал значений h, для которых решения $w(x+h)$ принадлежат этому множеству (поскольку норма стремится к бесконечности при возрастании $|h|$). Следовательно, множество решений компактно в D. Этот пример показывает, что операторы можно делать правильными, вводя весовые пространства. Как следствие, в весовых пространствах можно строить топологическую степень.

Построение топологической степени для эллиптических задач в неограниченных областях. К эллиптическим задачам в ограниченных областях применима степень Лере—Шаудера (см. [39]). Поскольку оператор, обратный к оператору Лапласа, компактен, в рассматриваемом случае эллиптический оператор можно представить в виде суммы тождественного и компактного операторов. Для эллиптических операторов в неограниченных областях такое представление невозможно, поскольку оператор, обратный к оператору Лапласа, уже не является компактным.

Для эллиптических задач в неограниченных областях можно построить степень, если оператор является фредгольмовым или правильным и его индекс равен нулю. Впервые степень для фредгольмовых или правильных операторов построена Каччиополи (см. библиографию в [42]), определившего степень по модулю 2. В [50] эта теория была существенно развита: лемма Сарда была обобщена на случай фредгольмовых операторов, а степень была определена как количество решений операторного уравнения $f(x) = y$ по модулю 2. Для почти всех y эти решения регулярны и их число конечно. В [25, 26] результаты Смейла использованы для определения ориентированной степени для фредгольмовых и правильных операторов нулевого индекса с гомотопическим инвариантом по модулю 2.

В [1, 16, 17, 31–35] построение степени для фредгольмовых и правильных операторов основано на понятии ориентации. В [23, 28, 38] предложен другой подход к определению ориентации. Полагая, что оператор $L + \lambda I$ является фредгольмовым для всех неотрицательных λ и имеет лишь конечное число ν положительных собственных значений (считая каждое с учетом его кратности), можно определить ориентацию как $(-1)^\nu$. Эта конструкция хорошо адаптируется к эллиптическим краевым задачам, поскольку она естественным образом связана со спектром линеаризованного оператора. Также как и для других способов построения степени, здесь требуется точно определить операторы и функциональные пространства (см. [55, 65]).

Таким образом, для эллиптических систем общего вида в неограниченных областях топологическая степень строится в весовых пространствах (см. [55, 61]). Для применения метода Лере—Шаудера требуются априорные оценки решений в этих пространствах.

Метод монотонных решений. Априорные оценки решений в весовых пространствах существенно отличаются от классического случая пространств, не содержащих весов. Для последнего (классического) случая априорные оценки обеспечиваются определенной регулярностью решений (для случая гельдеровых пространств) и скоростью их убывания на бесконечности (для случая соболевских пространств). В примере, рассмотренном выше, семейство решений $w(x + h)$ равномерно ограничено в таких пространствах, но в весовых пространствах эта равномерная ограниченность не имеет места. Значит, введение весовых пространств позволяет построить топологическую степень, однако для получения априорных оценок решений нужно накладывать некоторые дополнительные требования.

Проиллюстрируем ситуацию с оценками решений в весовых пространствах на следующем примере. Рассмотрим задачу (1.2)-(1.3) и соответствующую систему уравнений первого порядка

$$w' = p, \quad Dp' = -cp - F_\tau(w), \tag{1.4}$$

зависящую от параметра τ. Мы ищем траекторию γ, соединяющую стационарные точки $(w_-, 0)$ и $(w_+, 0)$. Если это — гиперболические точки, то существуют такие их (малые) окрестности $V_\pm$, что такая траектория экспоненциально приближается к этим точкам в этих окрестностях. Следовательно, решение $w(x)$ допускает априорные оценки в весовых пространствах с полиномиальным весом $\mu(x)$. Чтобы оценить решение на всей оси равномерно по τ, нужно оценить длину интервала L_τ, на котором траектория расположена вне окрестностей V_+ и V_-. Возможно существование такого τ_0, что $L_\tau \to \infty$ при $\tau \to \tau_0$ — в этом случае априорной оценки нет. Вообще говоря, L_τ может быть неограниченным, поэтому существование траектории, соединяющей две стационарные точки, не гарантировано.

Существуют некоторые классы задач, для которых можно получить равномерные оценки L_τ. Такие оценки можно получить не для всех решений, а лишь для некоторых их типов. Это означает, что существует два типа решений (назовем их *первый* и *второй* типы): если решение принадлежит одному из этих типов, то после любой непрерывной деформации оно будет принадлежать этому типу. Априорные оценки решений первого типа (но не второго типа) позволяют применить метод Лере—Шаудера и доказать существование решений.

Эти два типа решений — монотонные и немонотонные (по переменной x) решения. Для некоторых классов задач эти типы отделены друг от друга в том смысле, что монотонные решения допускают априорные оценки. В более общей постановке решения первого типа не обязательно монотонны, но они обладают некоторыми свойствами монотонности (например, функция имеет только один максимум).

Такое явление, как сохранение монотонности решения при непрерывных деформациях, впервые обнаружено в [37]. Указанный метод систематически развивался в [4,58]. Его дальнейшее развитие обусловлено некоторыми приложениями, возникшими в последнее время. В настоящей работе изложен сам метод и полученные с его помощью результаты о разрешимости.

2. Операторы и пространства

Чтобы поставить задачу в терминах функционального анализа, введем гельдерово пространство $C^{k+\alpha}(\mathbb{R})$, состоящее из таких вектор-функций класса C^k, что они непрерывны и ограничены на оси $\mathbb{R}$ вместе со своими производными порядка k, а их производные порядка k удовлетворяют условию Гельдера порядка α из $(0,1)$. Норма в этом пространстве — обычная гельдерова норма. Введем обозначения $E^1 = C^{2+\alpha}(\mathbb{R})$ и $E^2 = C^{\alpha}(\mathbb{R})$. Далее, введем весовые пространства E^1_μ и E^2_μ, где $\mu(x) = \sqrt{1+x^2}$. Эти пространства снабжены нормами

$$\|w\|_{E^i_\mu} = \|w\mu\|_{E^i}, \quad i = 1, 2.$$

Следуя [4,58], введем операторы, позволяющие изучать бегущие волны, т. е решения задачи (1.2)-(1.3). Рассмотрим такую бесконечно дифференцируемую вектор-функцию $\eta(x)$, что

$$\eta(x) = \begin{cases} w_-, & x \leqslant -1, \\ w_+, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

где $w_\pm = (v_\pm, c_\pm)$. Положим $w = u + \eta$ и рассмотрим оператор

$$A(u) = D(u+\eta)'' + c(u+\eta)' + F(u+\eta), \tag{2.1}$$

действующий из E^1_μ в E^2_μ.

Функционализация параметра. Решение $w(x)$ уравнения (1.2) инвариантно относительно сдвига в пространстве. Для любого решения $w(x)$ и любого вещественного h функция $w(x+h)$ тоже удовлетворяет этому уравнению. Это свойство решений автономных задач на всей оси влечет за собой существование нулевого собственного значения линеаризованного оператора A'. Следовательно, мы не можем найти индекс решения (под индексом здесь понимается значение степени относительно малого шара, содержащего решение). Более того, это семейство решений не является ограниченным по весовой норме. Следовательно, мы не можем применить метод Лере—Шаудера для исследования существования решений.

Чтобы преодолеть эти трудности, применим *функционализацию* параметра c (см. [58, Ch. 2]). Это означает, что вместо неизвестной постоянной c вводится некоторый заданный функционал $c(w)$, для которого $c(w(\cdot + h))$ — монотонная функция переменной h, множество значений которой — вся вещественная ось. Значит, для любой волновой скорости c уравнение $c(w(\cdot + h)) = c$ имеет единственное решение h. Таким образом, мы получаем эквивалентную задачу, которая уже не инвариантна относительно сдвигов в пространстве. Линеаризованный оператор A' не имеет нулевого собственного значения.

Гомотопия. Рассмотрим оператор

$$A_\tau(u) = D(u+\eta)'' + c(u+\eta)' + F_\tau(u+\eta), \tag{2.2}$$

действующий из E^1_μ в E^2_μ и зависящий от параметра τ из $[0,1]$. Предположим, что при $\tau = 0$ у нас есть исходный оператор (2.1), а при $\tau = 1$ — некоторый модельный оператор, степень которого отлична от нуля. Функция $F_\tau(w)$ и ее вторые производные по переменным w and τ ограничены и непрерывны.

Согласно методу Лере—Шаудера, нужно получить независимые от τ априорные оценки решений уравнения $A_\tau(u) = 0$. будем использовать модификацию этого метода для некоторых подклассов решений.

Топологическая степень. Оператор, линеаризованный в окрестности любой функции из E^1_μ, является фредгольмовым, и его индекс равен нулю. В замкнутых ограниченных областях нелинейный оператор является собственным. Значит, прообраз компактного множества компактен в любом замкнутом ограниченном множестве пространства E^1_μ. Для этого оператора можно определить топологическую степень. Все эти свойства можно найти в [53, 55, 58, 61, 65].

3. Метод Лере—Шаудера на подклассах решений

Рассмотрим операторное уравнение

$$A_\tau(u) = 0, \tag{3.1}$$

где оператор $A_\tau(u) : E^1_\mu \to E^2_\mu$ определен в разделе 2. Построим гомотопию так, чтобы $A_0(u)$ соответствовал исходной задаче (1.2)-(1.3), а $A_1(u)$ соответствовал модельной задаче. Чтобы применить метод Лере—Шаудера, нужно проверить выполнение двух условий: что априорные оценки решений уравнения (3.1) справедливы в пространстве E^1_μ и что значение топологической степени для модельного оператора отлично от нуля.

Предположим, что множество $\mathcal{K}$ решений уравнения (3.1) в пространстве E^1_μ можно представить в виде объединения двух подмножеств $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

(i) для любого u из $\mathcal{K}_1$ и любого v из $\mathcal{K}_2$ справедлива оценка

$$\|u - v\|_{E^1_\mu} \geqslant r \tag{3.2}$$

с положительной постоянной r, независимой от u и v (такое свойство называется *свойством разделения решений*);

(ii) для любого u из $\mathcal{K}_1$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{E^1_\mu} \leqslant R \tag{3.3}$$

с положительной постоянной R, независимой от u (это — априорная оценка решений из первого подмножества).

Таким, образом, имеем априорные оценки для решений принадлежащих классу $\mathcal{K}_1$, но не для всех возможных решений. Поэтому метод Лере—Шаудера нужно модифицировать следующим образом. Через B обозначим шар в пространстве E^1_μ, содержащий все решения из класса $\mathcal{K}_1$. Поскольку $A_\tau(u)$ — правильный оператор (см. [61]), т. е. прообраз компактного множества компактен в любом ограниченном замкнутом множестве, множество решений компактно в B. Для любого решения u из $\mathcal{K}_1$ рассмотрим шар $b_r(u)$ радиуса r с центром в u. Введем следующее обозначение:

$$\Omega_r = \bigcup_{u \in \mathcal{K}} b_r(u).$$

Выберем настолько малое r, что Ω_r содержит все решения из $\mathcal{K}_1$, но не содержит других решений. Рассмотрим топологическую степень $\gamma(A_\tau, \Omega_r)$. Она определена корректно, поскольку $A_\tau(u) \neq 0$ для u из $\partial\Omega_r$. Предположим, что для модельной задачи эта степень отлична от нуля, т. е. $\gamma(A_1, \Omega_r) \neq 0$. Тогда $\gamma(A_0, \Omega_r) \neq 0$, а значит, уравнение $A_0(u) = 0$ имеет решение в Ω_r.

Этот подход применим, если условия (i) и (ii) выполняются. Мы предъявим классы классы задач, обладающих этими свойствами. А именно, проиллюстрируем этот подход на локально монотонных системах [55, 58, 62], а затем приведем другие примеры.

3.1. Разделение решений. Два подкласса решений, отделенные друг от друга в функциональном пространстве — это монотонные и немонотонные решения. Укажем некоторые классы уравнений, обладающих свойствами (i)-(ii).

Определение 3.1. Система (1.2) называется *локально монотонной*, если для любых i и w из равенства $F_i(w) = 0$ следует неравенство

$$\frac{\partial F_i}{\partial w_j} > 0, \quad j = 1, ..., n, \quad j \neq i. \tag{3.4}$$

Если это неравенство выполняется для всех w, то указанная система называется *монотонной*.

Предположим, что условие (i) не выполняется. Тогда существуют последовательности элементов u^i из $\mathcal{K}_1$ (монотонных решений) и v^i из $\mathcal{K}_2$ (немонотонных решений), для которых $\|u^i - v^i\|_{E^1_\mu} \to 0$ при $i \to \infty$. Покажем, что это предположение приводит к противоречию.

Если условие (ii) выполняется, то последовательность u^i ограничена. Из свойств оператора A_τ на замкнутых ограниченных множествах (см. [55, 61]) следует, что она содержит сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности можно считать, что $\|u^i - w\|_{E^1_\mu} \to 0$ для некоторой функции w из E^1_μ. Следовательно, $w'(x)$ неположительна (покомпонентно) для любого вещественного x. Покажем, что она строго отрицательна (покомпонентно).

Лемма 3.1. *Пусть $w(x)$ — решение локально монотонной системы* (1.2). *Если $w'(x) \leqslant 0$* (*покомпонентно*) *для всех вещественных x, то $w'(x) < 0$* (*покомпонентно*).

Доказательство. Предположим, что существуют такое i из $\{1, ..., n\}$ и такое вещественное x_0, что $w_i'(x_0) = 0$. Тогда $w_i''(x_0) = 0$. Следовательно, $F_i(w(x_0)) = 0$ в силу i-го уравнения системы (1.2). Положим $u_i(x) = -w_i'(x)$ и продифференцируем i-е уравнение (1.2). Получим, что

$$d_i u_i'' + c u_i' + \frac{\partial F_i}{\partial w_i}\, u_i - \sum_{j \neq i} \frac{\partial F_i}{\partial w_j}\, w_j' = 0. \tag{3.5}$$

Поскольку $\dfrac{\partial F_i}{\partial w_j} > 0$ (см. (3.4)) и $w_j'(x) \leqslant 0$, имеем соотношение

$$S(x_0) \equiv -\sum_{j \neq i} \frac{\partial F_i}{\partial w_j}\, w_j'(x_0) \geqslant 0.$$

Предположим, что $w_i'(x) \not\equiv 0$ в любом малом интервале $I(x_0)$ окрестности точки x_0. Если этот интервал достаточно мал, то $S(x) \geqslant 0$ в $I(x_0)$ в силу (3.4) и неравенств $w_j(x)' \leqslant 0$. Следовательно, получаем противоречие с принципом максимума для уравнения (3.5) в $I(x_0)$, поскольку $u_i(x) \geqslant 0$ в $I(x_0)$, $u_i(x_0) = 0$ и $u_i(x) \not\equiv 0$.

Если есть интервал I_0, в котором $w_i'(x) \equiv 0$, то повторяем предыдущее построение в несколько увеличенном интервале I и получаем такое же противоречие. □

Теперь рассмотрим последовательность немонотонных решений v^i. Для каждого из таких решений существует хотя бы одна точка x_i, в которой производная одной из компонент решения обращается в нуль. Предположим, что эта последовательность ограничена. Из сходимости $\|v^i - w\|_{E^1_\mu} \to 0$ при $i \to \infty$ следует, что производная предельной функции $w'(x)$ тоже обращается в нуль (для одной из ее компонент). Получаем противоречие с леммой 3.1. Поэтому последовательность $\{x_i\}$ не является ограниченной. Без ограничения общности можно считать, что $x_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Это противоречит следующей лемме.

Лемма 3.2. *Пусть $v(x)$ — такое решение системы* (1.2)*, что $v(x) \to 0$ при $x \to \infty$, а матрица $F'(0)$ имеет положительные внедиагональные элементы и отрицательное главное собственное значение* (*т. е. собственное значение с максимальной вещественной частью*). *Если существует такое достаточно большое x_0, что $v'(x_0) < 0$* (*покомпонентно*), *то $v'(x) < 0$* (*покомпонентно*) *для всех x, удовлетворяющих неравенству $x \geqslant x_0$.*

Доказательство. Положим $u(x) = -v'(x)$ и продифференцируем уравнение (1.2). Получим, что

$$Du'' + cu' + B(x)u = 0, \tag{3.6}$$

где $B(x) = F'(v(x))$, $u(x_0) > 0$ и $u(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Поскольку матрица $F'(0)$ имеет положительные внедиагональные элементы и отрицательное главное собственное значение, справедливо неравенство $F'(0)p < 0$, где p — главный собственный вектор. Поэтому можно выбрать настолько большое x_0, что $B(x)p < 0$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $x \geqslant x_0$.

Нам нужно доказать, что $u(x) > 0$ при $x \geqslant x_0$. Предположим, что это не так. Если $u(x) \geqslant 0$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $x \geqslant x_0$, и существуют такие j и x_1, что $u_j(x_1) = 0$, то это противоречит принципу максимума. Поэтому рассматриваем случай, когда из одна компонент функции $u(x)$ отрицательна. Тогда существует такое положительное t, что функция

$\hat{u}(x) = u(x) + tp$ удовлетворяет следующим условиям: $\hat{u} \geqslant 0$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $x \geqslant x_0$, $\hat{u}(x_0) > 0$, и существуют такие j и x_2, что $x_2 > x_0$ и $\hat{u}_j(x_2) = 0$. Такая функция удовлетворяет уравнению

$$D\hat{u}'' + c\hat{u}' + B(x)\hat{u} + f(x) = 0, \tag{3.7}$$

где $f(x) = -tB(x)p > 0$. Следовательно, и в этом случае мы приходим к противоречию с принципом максимума. Это противоречие завершает доказательство леммы. □

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть система*

$$Dw'' + c_\tau w' + F_\tau(w) = 0 \tag{3.8}$$

локально монотонна и существуют такие $w_\pm$, *что* $w_+ < w_-$ (*покомпонентно*), $F_\tau(w_\pm) = 0$ *и все собственные значения матрицы* $F'_\tau(w_\pm)$ *лежат в левой полуплоскости. Предположим, что любое монотонно убывающее решение* w_m *системы* (3.8), *удовлетворяющее условию*

$$w(\pm\infty) = w_\pm, \tag{3.9}$$

удовлетворяет и оценке

$$\|w_m - \eta\|_{E^1_\mu} \leqslant R, \tag{3.10}$$

где R — *положительная постоянная, не зависящая ни от решения, ни от значения* τ *из* $[0, 1]$. *Тогда существует такая положительная постоянная* r, *что*

$$\|w_m - w_n\|_{E^1_\mu} \geqslant r, \tag{3.11}$$

где w_n — *любое немонотонное решение задачи* (3.8)-(3.9) *для любого значения* τ, *а* r *не зависит ни от решений, ни от* τ.

Замечание 3.1. Из условия локальной монотонности следует, что матрицы $F'(w_\pm)$ имеют положительные внедиагональные элементы. Следовательно, по теореме Перрона—Фробениуса их главные собственные значения вещественны и просты, а соответствующие собственные вектора положительны. Эти свойства использованы в лемме 3.2.

Отметим, что монотонные системы удовлетворяют принципу максимума, а локально монотонные не удовлетворяют, однако свойство разделения решений имеет место и для них. В определении локальной монотонности неравенство (3.4) может быть нестрогим.

3.2. Оценки решений. В этом разделе мы получим априорные оценки монотонных решений в весовых гельдеровых пространствах. Поскольку главные собственные значения матриц $F'_\tau(w_\pm)$ отрицательны, решения экспоненциально стремятся к их предельным значениям на бесконечности. Иными словами, справедливы оценки

$$|w_m(x) - \eta(x)| \leqslant K_1 e^{-\mu_0 x}, \;\; x \geqslant N_+, \quad |w_m(x) - \eta(x)| \leqslant K_1 e^{\mu_0 x}, \;\; x \leqslant N_-, \tag{3.12}$$

где положительные постоянные K_1 и μ_0 не зависят ни от монотонного решения w_m, ни от значения τ, а значения N_+ и N_- могут зависеть от решения — они выбираются таким образом, чтобы оценки

$$|w_m(x) - \eta(x)| \leqslant \varepsilon, \;\; x \geqslant N_+, \quad \text{и} \quad |w_m(x) - \eta(x)| \leqslant \varepsilon, \;\; x \leqslant N_-,$$

выполнялись для некоторого малого положительного ε. Это означает, что оценки (3.12) справедливы в некоторых окрестностях точек $w_\pm$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ (w-пространстве). Это свойство следует из классических результатов о поведении решений соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вблизи стационарных точек.

Поскольку весовая функция $\mu(x)$ полиномиально растет на бесконечности, мы получаем оценку

$$|(w_m(x) - \eta(x))\mu(x)| \leqslant K_2 \tag{3.13}$$

при $x \geqslant N_+$ и $x \leqslant N_-$. Если N_+ и N_- равномерно ограничены для всех решений, то последняя оценка очевидным образом выполняется для всех вещественных x.

Рассмотрим случай, в котором эти значения не являются равномерно ограниченными. Предположим, что существует такая последовательность решений w^i, что $N^i_+ \to \infty$, а последовательностей значений N^i_- ограничена. Рассмотрим сдвинутые функции $v^i(x) = w^i(x - N^i_+)$. Имеет место равенство $|v^i(0) - \nu(0)| = \varepsilon$. Из последовательности функций $v^i(x)$ можно выделить локально сходящуюся подпоследовательность. Ее предельная функция $v^0(x)$ есть решение системы (3.8) для некоторого τ, она монотонно убывает и $|v^0(0) - \nu(0)| = \varepsilon$. Значит, $v^0(x) \to w_+$ при $x \to \infty$ и существует предел $v^* = v^0(-\infty)$. Понятно, что $F(v^*) = 0$. Поскольку $N_+^i - N_i^i \to \infty$, справедливо неравенство $|v^* - w_-| \geqslant \varepsilon$. Таким образом, построено решение со следующими пределами:

$$v^0(-\infty) = v^*, \;\; v^0(\infty) = w_+, \quad v^* \neq w_\pm. \tag{3.14}$$

Аналогично, для сдвинутых решений $u^i(x) = w^i(x - N_-^i)$ получено предельное решение $u^0(x)$ со следующими пределами:

$$u^0(-\infty) = w_-, \;\; u^0(\infty) = v_*, \quad v_* \neq w_\pm. \tag{3.15}$$

Теперь можно доказать следующую теорему.

Теорема 3.2. *Пусть система* (3.8) *локально монотонна и существуют такие* $w_\pm$, *что* $w_+ < w_-$, $F_\tau(w_\pm) = 0$ *и все собственные значения матриц* $F'_\tau(w_\pm)$ *лежат в левой полуплоскости. Предположим, что для любого другого нуля* w^0 *функции* $F(w)$, *удовлетворяющего неравенству* $w_+ \leqslant w^0 \leqslant w_-$, *главное собственное значение матрицы* $F'(w^0)$ *положительно. Тогда для любого монотонно убывающего решения* $w_m(x)$ *задачи* (3.8)-(3.9) *выполняется оценка*

$$\sup_x |(w_m(x) - \eta(x))\mu(x)| \leqslant K, \tag{3.16}$$

где постоянная K *не зависит от решения.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы не выполнено. Тогда, как показано выше, значения $N_\pm$ в (3.12) не являются равномерно ограниченными. Предположим, что существует последовательность решений w^i, для которой $N_+^i \to \infty$ при $i \to \infty$, а последовательность значений N_-^i ограничена. Тогда существуют решения $v^0(x)$ с пределами (3.14) и решения $u^0(x)$ с пределами (3.15). Из существования первых решений следует, что $c < 0$, а из существования вторых — что $c > 0$ (см. [4] и [58, Ch. 3, лемма 2.8, c. 165]). Это противоречие доказывает, что наше предположение относительно $N_\pm$ не может выполняться.

Аналогичным образом можно рассмотреть случай, в котором N_-^i стремится к $-\infty$, а последовательность значений N_+^i остается ограниченной, либо случай, в котором обе последовательности неограничены. Поскольку решения инварианты относительно пространственных сдвигов, все эти случаи можно свести к случаю, в котором последовательность значений N_-^i ограничена. Сдвиг остается ограниченным в силу априорных оценок скорости волны (см. [4, 58]). □

Следствие 3.1. *Пусть* $u = w_m - \eta$, *где* w_m — *монотонное решение задачи* (3.8)-(3.9). *Тогда* $\|u\|_{E^1_\mu} \leqslant K$, *где положительная постоянная* K *не зависит от решения.*

Таким образом, мы получаем априорные оценки монотонных решений.

4. Существование импульсов и волн

Этот раздел содержит обзор результатов о существовании решений, полученных изложенным выше методом. Начнем со скалярного уравнения, для которого существование решений может быть исследовано элементарными методами и которое позволяет объяснить взаимосвязь между существованием волн и импульсов. Некоторые из этих результатов можно методом монотонных решений обобщить на системы уравнений.

4.1. Импульсы и волны для скалярного уравнения. Рассмотрим задачу

$$w'' + cw' + F(w) = 0, \quad w(\pm\infty) = w_\pm, \tag{4.1}$$

где $w(x)$ — скалярная функция, c — постоянная (скорость волны), функция $F(w)$ ограничена и непрерывна вместе со своими вторыми производными, $F(w_\pm) = 0$, $F'(w_\pm) < 0$. Решения этой задачи называются *бегущими волнами*.

Теорема 4.1. *Предположим, что* $F(w) < 0$ *при* $w_+ < w < w_0$ *и* $F(w) > 0$ *при* $w_0 < w < w_-$. *Тогда существует единственное значение* c, *для которого задача* (4.1) *имеет решение* $w(x)$. *Это решение монотонно убывает и* $c \gtreqless 0$ *тогда и только тогда, когда* $\int\limits_{w_+}^{w_-} F(w)dw \gtreqless 0$.

Доказательство существования решений следует из простейшего анализа системы уравнений первого порядка

$$w' = p, \quad p' = -cp - F(w),$$

эквивалентной уравнению (4.1), на фазовой плоскости (см, например, [58]). Знак скорости волны можно определить, умножив уравнение (4.1) и проинтегрировав его по всей оси.

Теперь рассмотрим задачу

$$w'' + F(w) = 0, \quad w(\pm\infty) = w_+, \tag{4.2}$$

подобную задаче (4.1), в которой $c = 0$, а пределы на $+\infty$ и $-\infty$ равны друг другу. Нетривиальные решения этой задачи называются *импульсами*.

Теорема 4.2. *Предположим, что* $F(w) < 0$ *при* $w_+ < w < w_0$ *и* $F(w) > 0$ *при* $w_0 < w < w_-$. *Тогда задача* (4.2) *имеет импульс* $w(x)$, *превосходящий* w_+, *тогда и только тогда, когда* $\int\limits_{w_+}^{w_-} F(w)dw > 0$.

Для доказательства этой теоремы можно в явном виде построить решение соответствующей системы первого порядка.

Следствие 4.1. *Импульс, удовлетворяющий задаче* (4.2) *и превосходящий* w_+, *существует тогда и только тогда, когда скорость волны, удовлетворяющей задаче* (4.1), *положительна.*

4.2. Монотонные и локально монотонные системы. Результаты о разрешимости, сформулированные выше для скалярных уравнений, можно обобщить (с некоторыми ограничениями) на локально монотонные системы.

Теорема 4.3. *Пусть система* (1.2) *локально монотонна и существуют такие* $w_\pm$, *что* $w_+ < w_-$, $F(w_\pm) = 0$ *и все собственные значения матриц* $F'(w_\pm)$ *лежат в левой полуплоскости. Предположим, что для любого другого нуля* w^0 *функции* $F(w)$, *удовлетворяющего неравенству* $w_+ \leqslant w^0 \leqslant w_-$, *главное собственное значение матрицы* $F'(w^0)$ *положительно. Тогда существуют значения* c, *для которых система* (1.2)-(1.3) *имеет монотонно убывающие решения. Если система монотонна, то такое значение* c *единственно.*

Доказательство этой теоремы основано на вышеизложенном методе монотонных решений. Модельную систему и гомотопию можно найти в [4, 58]. Теорема 4.2 о существовании импульсов обобщается на монотонные системы двух уравнений следующим образом (см. [40, 41]).

Теорема 4.4. *Пусть система*

$$Dw'' + F(w) = 0 \tag{4.3}$$

монотонна, где $w = (w_1, w_2)$, $F = (F_1, F_2)$. *Пусть* $F(w_\pm) = 0$. *Пусть главные собственные значения матриц* $F'(w_\pm)$ *отрицательны. Пусть* w^0 — *единственный нуль функции* F, *для которого* $w_+ \leqslant w^0 \leqslant w_-$ *и главное собственное значение матрицы* $F'(w^0)$ *положительно. Пусть* $F_1(w) = 0$ $(F_2(w) = 0)$ *тогда и только тогда, когда* $w_1 = f_1(w_2)$ $(w_2 = f_2(w_1))$, *где* $f_i'(s) > 0$, $i = 1, 2$. *Тогда решение* $w(x)$ *системы* (4.3), *для которого* $w(\pm\infty) = w_+$ *и* $w(x) > w_+$ *при любом вещественном* x, *существует тогда и только тогда, когда скорость волны* (*см. теорему* 4.3) *положительна.*

Таким образом, существование импульсов доказано только для систем из двух уравнений при некоторых дополнительных условиях. Трудность доказательства подобных результатов для общих монотонных систем и для локально монотонных систем заключается в выборе модельной задачи и в построении гомотопии с априорными оценками решений. Кроме того, существование импульсов доказано для неавтономного скалярного уравнения (см. [27]) и для системы уравнений, описывающей свертывание крови (см. [36]).

Система конкуренции видов. Система конкуренции видов состоит из двух следующих уравнений:

$$F_1(w_1, w_2) = w_1(1 - w_1 - aw_2), \quad F_2(w_1, w_2) = w_2(1 - bw_1 - w_2).$$

На ее примере хорошо иллюстрируется существование волн и импульсов. Функция $F(w)$ имеет до четырех неотрицательных нулей — $P_0 = (0, 0), P_1 = (1, 0), P_2 = (0, 1), P_3 = (w_1^0, w_2^0)$; здесь значения

w_1^0, w_2^0 определяются как решение системы уравнений $w_1 + aw_2 = 1$, $bw_1 + w_2 = 1$. Точка P_0 неустойчива, точки P_1 и P_2 устойчивы при $a > 1, b > 1$. В этом случае точка P_3 неустойчива. Положим $w_+ = P_1, w_- = P_2$.

Внедиагональные элементы матрицы $F'(w)$ отрицательны. Заменой переменных $u_1 = w_1, u_2 = 1 - w_2$ систему можно свести к монотонной системе. Существование волн и импульсов следует из теорем 4.3-4.4 с некоторыми техническими дополнениями, которые можно найти в $[4, 58]$.

Если рассмотреть нелинейности более общего вида

$$F_1(w_1, w_2) = w_1\phi_1(w_1, w_2)(1 - w_1 - aw_2), \quad F_2(w_1, w_2) = w_2\phi_2(w_1, w_2)(1 - bw_1 - w_2),$$

где функции $\phi_i(w_1, w_2)$, $i = 1, 2$, положительны и достаточно гладки, то после замены переменных система остается локально монотонной, но уже не является монотонной. Существование волн по-прежнему вытекает из теоремы 4.3, однако теорема 4.4 неприменима, поэтому существование импульсов не доказано.

Аналогичная система из трех и более уравнений может быть сведена к монотонной системе при некоторых дополнительных условиях. Например, рассмотрим систему из трех уравнений с нелинейностями

$$F_1(w) = w_1(1 - w_1 - a_2w_2 + a_3w_3), \;\; F_2(w) = w_2(1 - b_1w_1 - w_2 - b_3w_3), \tag{4.4}$$
$$F_3(w) = w_3(1 + c_1w_1 - c_2w_2 - w_3),$$

где $w = (w_1, w_2, w_3)$, а a_i, b_i, c_i — некоторые положительные постоянные. После замены переменных $u_1 = w_1$, $u_2 = 1 - w_2$, $u_3 = w_3$ получаем систему

$$Du'' + cu' + G(u) = 0, \tag{4.5}$$

где

$$G_1(u) = u_1(1 - u_1 - a_2(1 - u_2) + a_3u_3), \;\; G_2(u) = (1 - u_2)(b_1u_1 - u_2 + b_3u_3),$$
$$G_3(u) = u_3(1 + c_1u_1 - c_2(1 - u_2) - u_3).$$

Эта система удовлетворяет условиям монотонности при $u_1, u_3 > 0$, $u_2 < 1$. Рассмотрим точки $w_+ = (0, 0, 0)$ и $w_- = (w_1^0, w_2^0, w_3^0)$, где w_1^0, w_2^0, w_3^0 — решение линейной алгебраической системы уравнений $Au = q$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & -1 & b_3 \\ c_1 & c_2 & -1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 - a_2 \\ 0 \\ 1 - c_2 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что точка w_+ устойчива при $a_2 > 1$, $c_2 > 1$. Если главное собственное значение матрицы A отрицательно, то w_- положительно и эта точка тоже устойчива. В этом случае существование волн следует из теоремы 4.3, однако мы не можем утверждать, что существуют импульсы, поскольку теорема 4.4 применима только к системам из двух уравнений. Из вида нелинейности (4.4) вытекает, что первый и третий вид сотрудничают, а каждый из них конкурирует со вторым видом.

4.3. Многомерные уравнения и системы. Если распространение волн в неограниченных цилиндрах, то вместо уравнения (1.2) имеем уравнение

$$D\Delta w + c\frac{\partial w}{\partial x_1} + F(w, x') = 0, \tag{4.6}$$

где переменная x_1 изменяется на оси цилиндра, а переменная x' — в его поперечном сечении. Это уравнение дополняется краевым условием Дирихле или Неймана на границе цилиндра. Будем считать, что задача в поперечном сечении цилиндра, т. е.

$$D\Delta' w + F(w, x') = 0, \tag{4.7}$$

имеет два решения $w_\pm(x')$ и они таковы, что все собственные значения соответствующего линеаризованного оператора лежат в левой полуплоскости. Это — бистабильный случай, и мы ищем решение уравнения (4.6) со следующими пределами:

$$\lim_{x_1 \to \pm\infty} w(x) = w_\pm(x'). \tag{4.8}$$

В многомерном случае разделение решений возможно для монотонных систем, но невозможно для локально монотонных систем. Поэтому существование волн доказано для скалярных уравнений и для монотонных систем (см. [54]). Задачи с нелинейными краевыми условиями, возникающие в некоторых биомедицинских приложениях, исследуются в [11, 14, 15].

4.4. Нелокальные уравнения и уравнения с запаздыванием. В этом разделе для нелокальных уравнений реакции-диффузии и уравнений реакции-диффузии с запаздыванием представлены результаты о разрешимости, полученные методом монотонных решений. Применяется тот же подход, что и к локально монотонным системам (как описано выше), однако некоторые технические подробности могут отличаться.

Нелокальные уравнения. Чтобы ввести нелокальные уравнения, рассмотрим скалярное уравнение (1.1) с нелинейностью вида

$$F(u) = u^2(1 - au) - \sigma u. \tag{4.9}$$

В популяционной динамике первое слагаемое в правой части соответствует половому размножению популяции, а второе — ее смертности. У функции $F(u)$ может быть от одного до трех неотрицательных нулей. В последнем случае применимы результаты раздела 4.1. Слагаемое, соответствующее размножению, пропорционально доступным ресурсам $(1 - au)$, где линейное слагаемое описывает потребление ресурсов. В случае нелокального или глобального потребления ресурсов нелинейность вместо вида (4.9) принимает вид

$$F(u, I(u)) = u^2(1 - aI(u)) - \sigma u, \tag{4.10}$$

где

$$I(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(x - u)u(y, t)dy,$$

а $\phi(x)$ является финитной функцией в случае нелокального потребления и тождественной единицей в случае глобального потребления (см. [20]). В качестве примера рассмотрим функцию $\phi(x) = \psi(x)/(2N)$, где

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant N, \\ 0, & |x| > N. \end{cases}$$

В пределе (при малых N) нелокальное потребление (4.10) формально сводится к локальному потреблению (4.9). Для малых N существование волн и импульсов можно доказать методами возмущений (см. [69]). Если $\phi(x) \equiv \psi(x)$, то в пределе (при больших N, т. е. при $\phi(x) \equiv 1$), волны не существуют, а существование импульсов легко проверить аналитически. Это позволяет нам доказать их разрешимость для достаточно больших N. Переход от волн при малых N к импульсам при больших N происходит через периодические волны и нелокальные бифуркации (см. [63]).

Система с глобальным потреблением. В стационарном случае система с глобальным потреблением, состоящая из двух уравнений, записывается следующим образом:

$$d_1u'' + uv(1 - aI(u) - bI(v)) = 0, \quad d_2v'' + uv(1 - cI(u) - dI(v)) = 0. \tag{4.11}$$

Существование импульсов, т. е. положительных решений этой системы, обладающих нулевыми пределами на бесконечности, доказывается методом монотонных решений (см. [64]). Если коэффициенты двух уравнений равны друг другу, то систему (4.11) можно свести к одному уравнению (ср. (4.10)), для которого существование импульсов очевидно. Если же коэффициенты различны, то доказательство становится гораздо более сложным и для него требуются некоторые изощренные априорные оценки.

Скалярное уравнение с нелокальным потреблением. Теперь рассмотрим другое обобщение уравнения (4.9) — уравнение

$$F(u, I(u)) = uI(u)(1 - au) - \sigma u, \tag{4.12}$$

где ядро интеграла $I(u)$ — неотрицательная финитная функция. В этом случае можно применить метод монотонных решений, и существование волн доказывается в [13, 24].

Уравнение с запаздыванием. Уравнение реакции-диффузии с запаздыванием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, u_\tau), \tag{4.13}$$

где $u_\tau(x,t) = u(x, t-\tau)$ и

$$F(u, u_\tau) = u(1-u) - f(u_\tau)u,$$

описывает распространение вирусной инфекции в ткани (см. [21]). Первое нелинейное слагаемое описывает ее размножение, а второе — ее смертность в результате иммунной реакции. Плотность иммунных клеток $f(u_\tau)$ определяется концентрацией вируса в момент $t-\tau$.

Решение в виде бегущей волны $u(x,t) = w(x-ct)$ удовлетворяет уравнению второго порядка с запаздыванием

$$Dw'' + cw' + w(1 - w - f(w(x + c\tau))) = 0. \tag{4.14}$$

Поскольку это — уравнение с запаздыванием, нелинейность содержит и неизвестную постоянную c, являющуюся скоростью волны. Если $f(u)$ — монотонно убывающая функция, к этому уравнению применим принцип максимума и его можно использовать для доказательства существования волны. Однако, если эта функция не является убывающей, а именно это имеет место в модели иммунной реакции, то этот подход использовать нельзя, и в этом случае существование волн доказывается методом монотонных решений (см. [52]).

5. Обсуждение

Бистабильность и существенный спектр. Топологическая степень строится таким образом, что существенный спектр лежит в левой полуплоскости комплексной плоскости. Поэтому нам нужно исходить из предположения, что вещественные части всех собственных значений матриц $F'(w_\pm)$ отрицательны. Это — так называемый *бистабильный случай* или случай с двумя устойчивыми состояниями. В *моностабильном случае* (случай с одним устойчивым состоянием) у одной из этих матриц есть собственные значения с положительной вещественной частью. Тогда часть существенного спектра лежит в правой полуплоскости, и значит, указанный выше способ построения степени неприменим. Чтобы определить степень в моностабильном случае, можно ввести экспоненциальный вес, перемещающий существенный спектр в левую полуплоскость. Для исследования существования волн этот подход не применялся.

Отметим также, что в бистабильном случае либо существует единственная волна, либо волны образуют дискретное множество решений. В моностабильном же случае есть непрерывные семейства решений. Это связано с индексом соответствующих операторов.

Другие подходы к доказательству существования волн. Изложенный метод использует топологическую степень для эллиптических операторов в неограниченных областях, поэтому необходимо строить эту степень и получать априорные оценки решений в подходящих весовых пространствах. Другой подход к доказательству существования бегущих волн для скалярного уравнения реакции-диффузии развивается в [18, 19]: чтобы доказать существование решений в неограниченном цилиндре, оно вначале доказывается (с использованием степени Лере—Шаудера) для ограниченной части цилиндра, а затем равномерные оценки решений позволяют перейти к пределу при стремлении этой ограниченной части к бесконечности.

Системы волн. Вышеизложенные результаты о существовании волн получены при предположении, что все нули вектор-функции $F(w)$, лежащие в прямоугольнике $w_+ \leqslant w \leqslant w_-$, кроме нулей w_+ и w_-, неустойчивы. Теперь предположим, что существует устойчивый нуль w^0, $w_+ < w^0 < w_-$. Тогда согласно теореме 4.3 существуют $[w_+, w^0]$-волна и $[w^0, w_-]$-волна, т. е. волна с пределами $w(\infty) = w_+, w(-\infty) = w^0$ и волна с пределами $w(\infty) = w^0, w(-\infty) = w_-$ (соответственно). Обозначим их скорости через c_+ и c_-. Тогда $[w_+, w_-]$-волна существует тогда и только тогда, когда $c_- > c_+$. Этот результат получен для скалярного уравнения (см. [29, 30, 59, 60]) и для монотонных систем (см. [62]). Если $c_- \leqslant c_+$, то такой общей волны не существует, а есть две волны, распространяющиеся одна за другой с разными скоростями.

Ограничения и дальнейшее развитие. Метод монотонных решений основан на двух свойствах: разделение монотонных и немонотонных решений и априорные оценки монотонных решений. Эти свойства можно доказать для некоторых классов задач, но в общем случае они не имеют места. То же самое справедливо и для других методов доказательства существования волн и импульсов — они разработаны лишь для некоторых конкретных моделей. В частности, метод монотонных решений применим к монотонным и локально монотонным системам, имеющим многочисленные приложения. Некоторые из них представлены в настоящей работе, некоторые другие могут быть найдены в [58,62]. Недавно полученные результаты о приложениях к уравнениям с запаздыванием, для которых принцип максимума не имеет места, были изложены в [52].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И.* Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере—Шаудера// Усп. мат. наук. — 1977. — *32*, № 4. — С. 3–54.
2. *Вишик М. И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений// Мат. сб. — 1951. — *29*. — С. 615–676.
3. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем// Мат. сб. — 1965. — *68*. — С. 373–416.
4. *Вольперт А. И., Вольперт В. А.* Применение теории вращения векторных полей к исследованию волновых решений параболических уравнений// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1989. — *52*. — С. 58–109.
5. *Рабинович В. С.* Псевдодифференциальные операторы в неограниченных областях, с конической структурой на бесконечности// Мат. сб. — 1969. — *80*. — С. 77–96.
6. *Рабинович В. С.* Фредгольмовость общих краевых задач на некомпактных многообразиях и предельные операторы// Докл. РАН. — 1992. — *325*, № 2. — С. 237–241.
7. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial diffrential equations satisfying general boundary conditions// Comm. Pure Appl. Math. — 1959. — *12*. — С. 623–727.
8. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial diffrential equations satisfying general boundary conditions II// Commun. Pure Appl. Math. — 1964. — *17*. — С. 35–92.
9. *Apreutesei N., Ducrot A., Volpert V.* Competition of species with intra-specific competition// Math. Model. Nat. Phenom. — 2008. — *3*, № 4. — С. 1–27.
10. *Apreutesei N., Ducrot A., Volpert V.* Travelling waves for integro-differential equations in population dynamics// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2009. — *11*, № 3. — С. 541–561.
11. *Apreutesei N., Tosenberger A., Volpert V.* Existence of reaction–diffusion waves with nonlinear boundary conditions// Math. Model. Nat. Phenom. — 2013. — *8*, № 4. — С. 2–17.
12. *Apreutesei N., Volpert V.* Properness and topological degree for nonlocal reaction–diffusion operators// Abstr. Appl. Anal. — 2011. — ID 629692.
13. *Apreutesei N., Volpert V.* Existence of travelling waves for a class of integro-differential equations from population dynamics// Int. Electron. J. Pure Appl. Math. — 2012. — *5*, № 2. — С. 53–67.
14. *Apreutesei N., Volpert V.* Reaction–diffusion waves with nonlinear boundary conditions// Nonlinear Heterog. Medium. — 2013. — *8*, № 2. — С. 23–35.
15. *Apreutesei N., Volpert V.* Travelling waves for reaction–diffusion problems with nonlinear boundary conditions. Application to a model of atherosclerosis// Pure Appl. Funct. Anal. — 2017 (в печати).
16. *Benevieri P., Furi M.* A simple notion of orientability for Fredholm maps of index zero between Banach manifolds and degree theory// Ann. Sci. Math. Québec — 1998. — *22*. — С. 131–148.
17. *Benevieri P., Furi M.* On the concept of orientability for Fredholm maps between real Banach manifolds// Topol. Methods Nonlinear Anal. — 2000. — *16*, № 2. — С. 279–306.
18. *Berestycki H., Larrouturou B., Lions P. L.* Multidimensional traveling wave solutions of a flame propagation model// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1990. — *111*. — С. 97–117.
19. *Berestycki H., Nirenberg L.* Travelling fronts in cylinders// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire — 1992. — *9*, № 5. — С. 497–572.
20. *Bessonov N., Reinberg N., Volpert V.* Mathematics of Darwin's diagram// Math. Model. Nat. Phenom. — 2014. — *9*, № 3. — С. 5–25.
21. *Bocharov G., Meyerhans A., Bessonov N., Trofimchuk S., Volpert V.* Spatiotemporal dynamics of virus infection spreading in tissues// Plos ONE. — 2016. — DOI:10.1371/journal.pone.0168576.
22. *Collet J. F., Volpert V.* Computation of the index of linear elliptic operators in unbounded cylinders// J. Funct. Anal. — 1999. — *164*. — С. 34–59.

23. *Dancer E. N.* Boundary value problems for ordinary differential equations on infinite intervals// Proc. Lond. Math. Soc. — 1975. — *30*, № 3. — С. 76–94.
24. *Demin I., Volpert V.* Existence of waves for a nonlocal reaction–diffusion equation// Math. Model. Nat. Phenom. — 2010. — *5*, № 5. — С. 80–101.
25. *Elworthy K. D., Tromba A. J.* Degree theory on Banach manifolds// В сб. «Nonlinear Functional Analysis». — Providence: Amer. Math. Soc., 1970. — С. 86–94.
26. *Elworthy K. D., Tromba A. J.* Differential structures and Fredholm maps on Banach manifolds// В сб. «Global Analysis». — Providence: Amer. Math. Soc., 1970. — С. 45–94.
27. *Eymard N., Volpert V., Vougalter V.* Existence of pulses for local and nonlocal reaction–diffusion equations// J. Dynam. Differ. Equ. — 2017. — *29*, № 3. — С. 1145–1158.
28. *Fenske C.* Analytische Theorie des Abbildungrades fur Abbildungen in Banachraumen// Math. Nachr. — 1971. — *48*. — С. 279–290.
29. *Fife P. C., McLeod J. B.* The approach to solutions of nonlinear diffusion equations to traveling front solutions// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1977. — *65*. — С. 335–361.
30. *Fife P. C., McLeod J. B.* A phase plane discussion of convergence to travelling fronts for nonlinear diffusion// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1981. — *75*. — С. 281–314.
31. *Fitzpatrick P. M.* The parity as an invariant for detecting bifurcaton of the zeroes of one parameter families of nonlinear Fredholm maps// Lecture Notes in Math. — 1993. — *1537*. — С. 1–31.
32. *Fitzpatrick P. M., Pejsachowicz J.* Parity and generalized multiplicity// Trans. Am. Math. Soc. — 1991. — *326*. — С. 281–305.
33. *Fitzpatrick P. M., Pejsachowicz J.* Orientation and the Leray–Schauder degree for fully nonlinear elliptic boundary value problems// Mem. Am. Math. Soc. — 1993. — *101*, № 483. — С. 1–131.
34. *Fitzpatrick P. M., Pejsachowicz J., Rabier P. J.* The degree of proper C^2 Fredholm mappings// J. Reine Angew. Math. — 1992. — *427*. — С. 1–33.
35. *Fitzpatrick P. M., Pejsachowicz J., Rabier P. J.* Orientability of Fredholm families and topological degree for orientable nonlinear Fredholm mappings// J. Funct. Anal. — 1994. — *124*. — С. 1–39.
36. *Galochkina T., Marion M., Volpert V.* Initiation of reaction–diffusion waves of blood coagulation// в печати.
37. *Gardner R. A.* Existence and stability of traveling wave solution of competition models: a degree theoretic approach// J. Differ. Equ. — 1982. — *44*. — С. 343–364.
38. *Isnard C. A.* Orientation and degree in infinite dimensions// Notices Am. Math. Soc. — 1972. — *19*. — A-514.
39. *Leray J., Schauder J.* Topologie et équations fonctionnelles// Ann. Sci. Éc. Norm. Supér (3). — 1934. — *51*. — С. 45–78.
40. *Marion M., Volpert V.* Existence of pulses for a monotone reaction–diffusion system// Pure Appl. Funct. Anal. — 2016. — *1*, № 1. — С. 97–122.
41. *Marion M., Volpert V.* Existence of pulses for the system of competition of species// J. Dyn. Differ. Equ. — 2017. — в печати.
42. *Miranda C.* Equazioni alle Derivate Parziale di Tipo Elliptico. — Berlin: Springer-Verlag, 1955.
43. *Muravnik A.* On the half-plane Dirichlet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*, № 6. — в печати.
44. *Onanov G. G., Skubachevskii A. L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*, № 6. — в печати.
45. *Rabier P. J., Stuart C. A.* Fredholm and properness properties of quasilinear elliptic operators on R^N// Math. Nachr. — 2001. — *231*. — С. 29–168.
46. *Rabinovich V., Roch S., Silbermann B.* Limit operators and their applications in operator theory// Oper. Theory Adv. Appl. — 2004. — *150*. — С. 1–392.
47. *Rossovskii L.* Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*, № 6. — в печати.
48. *Skubachevskii A. L.* Nonlocal elliptic problems and multidimensional diffusion processes// Russ. J. Math. Phys. — 1995. — *3*, № 3. — С. 327–360.
49. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel: Birkhäuser, 1997.
50. *Smale S.* An infinite dimensional version of Sard's theorem// Am. J. Math. — 1965. — *87*. — С. 861–866.
51. *Tasevich A.* Analysis of functional-differential equation with orthotropic contractions// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*, № 6. — в печати.
52. *Trofimchuk S., Volpert V.* Travelling waves for a bistable reaction–diffusion equation with delay// Arxiv. — 2017. — 1701.08560v1.

53. *Volpert A., Volpert V.* The construction of the Leray—Schauder degree for elliptic operators in unbounded domains// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire — 1994. — *11*, № 3. — С. 245–273.
54. *Volpert A., Volpert V.* Existence of multidimensional travelling waves and systems of waves// Commun. Part. Differ. Equ. — 2001. — *26*, № 3-4. — С. 76–85.
55. *Volpert A., Volpert V.* Properness and topological degree for general elliptic operators// Abstr. Appl. Anal. — 2003. — № 3. — С. 129–181.
56. *Volpert A., Volpert V.* Formally adjoint problems and solvability conditions for elliptic operators// Russ. J. Math. Phys. — 2004. — *11*, № 4. — С. 474–497.
57. *Volpert A., Volpert V.* Fredholm property of elliptic operators in unbounded domains// Trans. Moscow Math. Soc. — 2006. — *67*. — С. 127–197.
58. *Volpert A., Volpert Vit., Volpert Vl.* Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems. — Providence: Amer. Math. Soc., 1994.
59. *Volpert V.* Asymptotic behavior of solutions of a nonlinear diffusion equation with a source term of general form// Sib. Math. J. — 1989. — *30*, № 1. — С. 25–36.
60. *Volpert V.* Convergence to a wave of solutions of a nonlinear diffusion equation with source of general type// Sib. Math. J. — 1989. — *30*, № 2. — С. 203–210.
61. *Volpert V.* Elliptic Partial Differential Equations. Vol. 1. Fredholm Theory of Elliptic Problems in Unbounded Domains. — Basel: Birkhäuser, 2011.
62. *Volpert V.* Elliptic Partial Differential Equations. Vol. 2. Reaction–Diffusion Equations. — Basel: Birkhäuser, 2014.
63. *Volpert V.* Pulses and waves for a bistable nonlocal reaction–diffusion equation// Appl. Math. Lett. — 2015. — *44*. — С. 21–25.
64. *Volpert V., Reinberg N., Benmir M., Boujena S.* On pulse solutions of a reaction–diffusion system in population dynamics// Nonlinear Anal. — 2015. — *120*. — С. 76–85.
65. *Volpert V., Volpert A., Collet J. F.* Topological degree for elliptic operators in unbounded cylinders// Adv. Differ. Equ. — 1999. — *4*, № 6. — С. 777–812.
66. *Vougalter V., Volpert V.* Solvability relations for some non Fredholm operators// Int. Electron. J. Pure Appl. Math. — 2010. — *2*, № 1. — С. 75–83.
67. *Vougalter V., Volpert V.* Solvability conditions for some non-Fredholm operators// Proc. Edinb. Math. Soc. (2). — 2011. — *54*, № 1. — С. 249–271.
68. *Vougalter V., Volpert V.* On the existence of stationary solutions for some non Fredholm integro-differential equations// Doc. Math. — 2011. — *16*. — С. 561–580.
69. *Vougalter V., Volpert V.* Existence of stationary pulses for nonlocal reaction–diffusion equations// Doc. Math. — 2014. — *19*. — С. 1141–1153.

V. Volpert
Institut Camille Jordan, UMR 5208 CNRS, University Lyon 1, 69622 Villeurbanne, France
INRIA Team Dracula, INRIA Lyon La Doua, 69603 Villeurbanne, France
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: volpert@math.univ-lyon1.fr

V. Vougalter
Department of Mathematics, University of Toronto, Toronto, M5S 2E4 Ontario, Canada

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-437-454 UDC 517.98

Method of Monotone Solutions for Reaction-Diffusion Equations

© 2017 **V. Volpert, V. Vougalter**

Abstract. Existence of solutions of reaction-diffusion systems of equations in unbounded domains is studied by the Leray–Schauder (LS) method based on the topological degree for elliptic operators in unbounded domains and on a priori estimates of solutions in weighted spaces. We identify some reaction-diffusion systems for which there exist two subclasses of solutions separated in the function space, monotone and non-monotone solutions. A priori estimates and existence of solutions are obtained for monotone solutions allowing to prove their existence by the LS method. Various applications of this method are given.

REFERENCES

1. Borisovich Yu. G., Zvyagin V. G., Sapronov Yu. I., "Nelineynye fredgol'movy otobrazheniya i teoriya Lere—Shaudera" [Nonlinear Fredholm mappings and the Leray–Schauder theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1977, *32*, № 4, 3–54 (in Russian).
2. Vishik M. I., "O sil'no ellipticheskikh sistemakh differentsial'nykh uravneniy" [On strongly elliptic systems of differential equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1951, *29*, 615–676 (in Russian).
3. Volevich L. R., "Razreshimost' kraevykh zadach dlya obshchikh ellipticheskikh sistem" [Solvability of boundary-value problems for general elliptic systems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1965, *68*, 373–416 (in Russian).
4. Volpert A. I., Volpert V. A., "Primenenie teorii vrashcheniya vektornykh poley k issledovaniyu volnovykh resheniy parabolicheskikh uravneniy" [Application of the theory of rotation of vector fields to investigation of wave solutions of parabolic equations], *Tr. Mosk. Mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1989, *52*, 58–109 (in Russian).
5. Rabinovich V. S., "Psevdodifferentsial'nye operatory v neogranichennykh oblastyakh, s konicheskoy strukturoy na beskonechnosti" [Pseudodifferential operators in unbounded domains, with conical structure at infinity], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1969, *80*, 77–96 (in Russian).
6. Rabinovich V. S., "Fredgol'movost' obshchikh kraevykh zadach na nekompaktnykh mnogoobraziyakh i predel'nye operatory" [Fredholm property of general boundary-value problems on noncompact manifolds and limiting operators], *Dokl. RAN* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1992, *325*, № 2, 237–241 (in Russian).
7. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L., "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial diffrential equations satisfying general boundary conditions," *Comm. Pure Appl. Math.*, 1959, *12*, 623–727.
8. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L., "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial diffrential equations satisfying general boundary conditions II," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1964, *17*, 35–92.
9. Apreutesei N., Ducrot A., Volpert V., "Competition of species with intra-specific competition," *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2008, *3*, № 4, 1–27.
10. Apreutesei N., Ducrot A., Volpert V., "Travelling waves for integro-differential equations in population dynamics," *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2009, *11*, № 3, 541–561.
11. Apreutesei N., Tosenberger A., Volpert V., "Existence of reaction–diffusion waves with nonlinear boundary conditions," *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2013, *8*, № 4, 2–17.
12. Apreutesei N., Volpert V., "Properness and topological degree for nonlocal reaction–diffusion operators," *Abstr. Appl. Anal.* , 2011, ID 629692.
13. Apreutesei N., Volpert V., "Existence of travelling waves for a class of integro-differential equations from population dynamics," *Int. Electron. J. Pure Appl. Math.*, 2012, *5*, № 2, 53–67.
14. Apreutesei N., Volpert V., "Reaction–diffusion waves with nonlinear boundary conditions," *Nonlinear Heterog. Medium*, 2013, *8*, № 2, 23–35.
15. Apreutesei N., Volpert V., "Travelling waves for reaction–diffusion problems with nonlinear boundary conditions. Application to a model of atherosclerosis," *Pure Appl. Funct. Anal.*, 2017, submitted.
16. Benevieri P., Furi M., "A simple notion of orientability for Fredholm maps of index zero between Banach manifolds and degree theory," *Ann. Sci. Math. Québec*, 1998, *22*, 131–148.

17. Benevieri P., Furi M., “On the concept of orientability for Fredholm maps between real Banach manifolds,” *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 2000, *16*, № 2, 279–306.
18. Berestycki H., Larrouturou B., Lions P.L., “Multidimensional traveling wave solutions of a flame propagation model,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1990, *111*, 97–117.
19. Berestycki H., Nirenberg L., “Travelling fronts in cylinders,” *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1992, *9*, № 5, 497–572.
20. Bessonov N., Reinberg N., Volpert V., “Mathematics of Darwin’s diagram,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2014, *9*, № 3, 5–25.
21. Bocharov G., Meyerhans A., Bessonov N., Trofimchuk S., Volpert V., “Spatiotemporal dynamics of virus infection spreading in tissues,” *Plos ONE*, 2016, DOI: 10.1371/journal.pone.0168576.
22. Collet J.F., Volpert V., “Computation of the index of linear elliptic operators in unbounded cylinders,” *J. Funct. Anal.*, 1999, *164*, 34–59.
23. Dancer E.N., “Boundary value problems for ordinary differential equations on infinite intervals,” *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1975, *30*, № 3, 76–94.
24. Demin I., Volpert V., “Existence of waves for a nonlocal reaction–diffusion equation,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2010, *5*, № 5, 80–101.
25. *Elworthy K.D., Tromba A.J.* Degree theory on Banach manifolds// В сб. «Nonlinear Functional Analysis». — Providence: Amer. Math. Soc., 1970. — С. 86–94.
26. Elworthy K.D., Tromba A.J., “Differential structures and Fredholm maps on Banach manifolds,” In: *Global Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, 1970, 45–94.
27. Eymard N., Volpert V., Vougalter V., “Existence of pulses for local and nonlocal reaction–diffusion equations,” *J. Dynam. Differ. Equ.*, 2017, *29*, № 3, 1145–1158.
28. Fenske C., “Analytische Theorie des Abbildungrades fur Abbildungen in Banachraumen,” *Math. Nachr.*, 1971, *48*, 279–290.
29. Fife P.C., McLeod J.B., “The approach to solutions of nonlinear diffusion equations to traveling front solutions,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1977, *65*, 335–361.
30. Fife P.C., McLeod J.B., “A phase plane discussion of convergence to travelling fronts for nonlinear diffusion,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1981, *75*, 281–314.
31. Fitzpatrick P.M., “The parity as an invariant for detecting bifurcaton of the zeroes of one parameter families of nonlinear Fredholm maps,” *Lecture Notes in Math.*, 1993, *1537*, 1–31.
32. Fitzpatrick P.M., Pejsachowicz J., “Parity and generalized multiplicity,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1991, *326*, 281–305.
33. Fitzpatrick P.M., Pejsachowicz J., “Orientation and the Leray–Schauder degree for fully nonlinear elliptic boundary value problems,” *Mem. Am. Math. Soc.*, 1993, *101*, № 483, 1–131.
34. Fitzpatrick P.M., Pejsachowicz J., Rabier P.J., “The degree of proper C^2 Fredholm mappings,” *J. Reine Angew. Math.*, 1992, *427*, 1–33.
35. Fitzpatrick P.M., Pejsachowicz J., Rabier P.J., “Orientability of Fredholm families and topological degree for orientable nonlinear Fredholm mappings,” *J. Funct. Anal.*, 1994, *124*, 1–39.
36. Galochkina T., Marion M., Volpert V. “Initiation of reaction–diffusion waves of blood coagulation,” to be published.
37. Gardner R.A., “Existence and stability of traveling wave solution of competition models: a degree theoretic approach,” *J. Differ. Equ.*, 1982, *44*, 343–364.
38. Isnard C.A., “Orientation and degree in infinite dimensions,” *Notices Am. Math. Soc.*, 1972, *19*, A-514.
39. Leray J., Schauder J., “Topologie et équations fonctionnelles,” *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér* (3), 1934, *51*, 45–78.
40. Marion M., Volpert V., “Existence of pulses for a monotone reaction–diffusion system,” *Pure Appl. Funct. Anal.*, 2016, *1*, № 1, 97–122.
41. Marion M., Volpert V., “Existence of pulses for the system of competition of species,” *J. Dyn. Differ. Equ.*, 2017, to be published.
42. Miranda C., *Equazioni alle Derivate Parziale di Tipo Elliptico*, Springer-Verlag, Berlin, 1955.
43. Muravnik A., “On the half-plane Dirichlet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, *12*, № 6, to be published.
44. Onanov G.G., Skubachevskii A.L., “Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, *12*, № 6, to be published.
45. Rabier P.J., Stuart C.A., “Fredholm and properness properties of quasilinear elliptic operators on R^N,” *Math. Nachr.*, 2001, *231*, 29–168.

46. Rabinovich V., Roch S., Silbermann B., “Limit operators and their applications in operator theory,” *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2004, *150*, 1–392.
47. Rossovskii L., “Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, *12*, № 6, to be published.
48. Skubachevskii A. L., “Nonlocal elliptic problems and multidimensional diffusion processes,” *Russ. J. Math. Phys.*, 1995, *3*, № 3, 327–360.
49. Skubachevskii A. L., *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel, 1997.
50. Smale S., “An infinite dimensional version of Sard’s theorem,” *Am. J. Math.*, 1965, *87*, 861–866.
51. Tasevich A., “Analysis of functional-differential equation with orthotropic contractions,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, *12*, № 6, to be published.
52. Trofimchuk S., Volpert V., “Travelling waves for a bistable reaction–diffusion equation with delay,” *Arxiv*, 2017, 1701.08560v1.
53. Volpert A., Volpert V., “The construction of the Leray—Schauder degree for elliptic operators in unbounded domains,” *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1994, *11*, № 3, 245–273.
54. Volpert A., Volpert V., “Existence of multidimensional travelling waves and systems of waves,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 2001, *26*, № 3-4, 76–85.
55. Volpert A., Volpert V., “Properness and topological degree for general elliptic operators,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2003, № 3, 129–181.
56. Volpert A., Volpert V., “Formally adjoint problems and solvability conditions for elliptic operators,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2004, *11*, № 4, 474–497.
57. Volpert A., Volpert V., “Fredholm property of elliptic operators in unbounded domains,” *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2006, *67*, 127–197.
58. Volpert A., Volpert Vit., Volpert Vl., *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.
59. Volpert V., “Asymptotic behavior of solutions of a nonlinear diffusion equation with a source term of general form,” *Sib. Math. J.*, 1989, *30*, № 1, 25–36.
60. Volpert V., “Convergence to a wave of solutions of a nonlinear diffusion equation with source of general type,” *Sib. Math. J.*, 1989, *30*, № 2, 203–210.
61. Volpert V., *Elliptic Partial Differential Equations. Vol. 1. Fredholm Theory of Elliptic Problems in Unbounded Domains*, Birkhäuser, Basel, 2011.
62. Volpert V., *Elliptic Partial Differential Equations. Vol. 2. Reaction–Diffusion Equations*, Birkhäuser, Basel, 2014.
63. Volpert V., “Pulses and waves for a bistable nonlocal reaction–diffusion equation,” *Appl. Math. Lett.*, 2015, *44*, 21–25.
64. Volpert V., Reinberg N., Benmir M., Boujena S., “On pulse solutions of a reaction–diffusion system in population dynamics,” *Nonlinear Anal.*, 2015, *120*, 76–85.
65. Volpert V., Volpert A., Collet J. F., “Topological degree for elliptic operators in unbounded cylinders,” *Adv. Differ. Equ.*, 1999, *4*, № 6, 777–812.
66. Vougalter V., Volpert V., “Solvability relations for some non Fredholm operators,” *Int. Electron. J. Pure Appl. Math.*, 2010, *2*, № 1, 75–83.
67. Vougalter V., Volpert V., “Solvability conditions for some non-Fredholm operators,” *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), 2011, *54*, № 1, 249–271.
68. Vougalter V., Volpert V., “On the existence of stationary solutions for some non Fredholm integro-differential equations,” *Doc. Math.*, 2011, *16*, 561–580.
69. Vougalter V., Volpert V., “Existence of stationary pulses for nonlocal reaction–diffusion equations,” *Doc. Math.*, 2014, *19*, 1141–1153.

V. Volpert
Institut Camille Jordan, UMR 5208 CNRS, University Lyon 1, 69622 Villeurbanne, France;
INRIA Team Dracula, INRIA Lyon La Doua, 69603 Villeurbanne, France;
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
E-mail: `volpert@math.univ-lyon1.fr`

V. Vougalter
Department of Mathematics, University of Toronto, Toronto, M5S 2E4 Ontario, Canada