УДК 517.9

Индекс задач Соболева, ассоциированных с действием групп Ли

Д. А. Лощёнова

Кафедра прикладной математики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Относительная эллиптическая теория или, как её назвал в своих работах Б. Ю. Стернин, «проблема Соболева», состоит в том, что в категории гладких пар многообразий (M, X), одно из которых X гладко вложено в другое M, построить фредгольмову эллиптическую теорию и найти формулу индекса для неё. С точки зрения (псевдо)дифференциальных уравнений задача Соболева состоит в том, что рассматривается сравнение $Du \equiv f \,(\operatorname{mod} X)$, где D — псевдодифференциальный оператор, а символ «$\equiv$» означает равенство левой и правой части с точностью до распределений сосредоточенных на подмногообразии X.

Очевидно, в случае, когда размерность подмногообразия больше единицы, сравнение, о котором говорится выше, не определяет фредгольмов оператор, именно ядро этого сравнения является бесконечномерным. Оказывается, что если добавить к рассматриваемому сравнению ещё некоторые операторы B, определённые на подмногообразии X, связанные некоторым алгебраическим условием (типа коэрцитивности) с оператором D, то полученный оператор (D, B) уже будет фредгольмовым в соответствующих пространствах Соболева. Замечательным фактом при этом является то, что это условие может быть сформулировано инвариантным образом как условие эллиптичности некоторого оператора, индуцированного задачей на подмногообразии X и, таким образом, условия эллиптичности оператора D и оператора (D, B) вместе доставляют нам фредгольмов оператор. Эта теорема вместе с формулой индекса была в своё время доказана Б. Ю. Стерниным. Напомним, что все операторы, участвующие в построении указанной теории, были псевдодифференциальными. В частности, псевдодифференциальным был оператор (D, B), что, между прочим, и позволило дать определение его эллиптичности. Совершенно по другому обстоит дело в ситуации, когда на многообразии M имеется дополнительная структура, например, действие группы Ли. В этом случае оператор (D, B) уже не будет, вообще говоря, псевдодифферециальным оператором и, следовательно, вопрос о его эллиптичности, формально говоря, не может быть даже поставлен. Тем не менее, в нашей работе при определённых условиях мы можем изучить полученный оператор (D, B), дать определение его символа и доказать его фредгольмовость. Более того, мы предъявляем формулу индекса в этой более общей ситуации. Этому и посвящена настоящая работа.

Ключевые слова: эллиптические операторы, задачи Соболева, индекс, неподвижные точки действия группы Ли, операторы, сосредоточенные в точке.

Введение

Пусть M — замкнутое многообразие, X — подмногообразие в M. Рассматривается решение сравнения

$$Du \equiv f \,(\operatorname{mod} X),$$

где D — псевдодифференциальный оператор, и написанное выше сравнение означает, что равенство $Du = f$ выполняется всюду на многообразии M, за исключением точек подмногообразия X. Кроме этого сравнения, задаются ещё некоторые «граничные» условия на подмногообразии X, и проблема состоит, во-первых, в том, чтобы дать корректную постановку такой задачи в том смысле, чтобы указать условия, при которых она фредгольмова, и, во-вторых, вычислить её индекс. Общая постановка и исследование таких задач принадлежит Б.Ю. Стернину, который также и назвал их задачами Соболева (см. [1, 2]).

Статья поступила в редакцию 25 января 2015 г.

В работах Б.Ю. Стернина были даны условия фредгольмовости задач Соболева и получена формула индекса в случае, когда условия на подмногообразии X задаются с помощью псевдодифференциальных операторов на многообразии M. Тогда задаче Соболева отвечает некоторый оператор на подмногообразии X, названный *обратным образом*, который в случае псевдодифференциальных граничных условий является также псевдодифференциальным. Основной результат состоит в том, что фредгольмовость задачи Соболева эквивалентна эллиптичности оператора D и соответствующего обратного образа, а её индекс равен сумме индексов оператора D и обратного образа.

По иному обстоит дело, когда на многообразии M имеется дополнительная структура, например, на M действует группа Ли, так что в задаче Соболева граничные условия задаются уже не псевдодифференциальными операторами, а операторами, ассоциированными с действием группы Ли (см. [3]). Эта ситуация была изучена в нашей недавней работе. В ней показано, что соответствующий обратный образ *уже не является* псевдодифференциальным оператором. Тем не менее и в этом случае удаётся получить теорему конечности (фредгольмовости). После чего на повестке дня встал вопрос по предъявлении формулы индекса в этой новой ситуации. Получение этой формулы и составляет содержание данной статьи.

1. Постановка задачи

Пусть M — гладкое замкнутое многообразие размерности n, X — подмногообразие коразмерности $\nu = n/2$ и на многообразии M действует компактная группа Ли G. Действие группы G индуцирует представление группы в пространствах функций на M операторами сдвига T_g, действующими на функции u по формуле

$$(T_g u)(x) = u(g^{-1}x).$$

Рассматривается следующая задача Соболева с нелокальным граничным условием

$$\begin{cases} Du \equiv f \,(\operatorname{mod} X), & u \in H^s(M),\ f \in H^{s-m}(M) \\ i^* Bu = \varphi, & \varphi \in H^{s-b-\nu/2}(X), \end{cases} \tag{1}$$

где D — псевдодифференциальный оператор (далее ПДО) на M порядка m, $i^* : H^{s-b}(M) \longrightarrow H^{s-b-\frac{\nu}{2}}(X)$ — оператор сужения функций на подмногообразие, а сравнение понимается в том смысле, что функции Du и f совпадают вне X. Наконец, граничное условие в (1) определяется нелокальным оператором

$$Bu = B_0 u + \int\limits_G B_g T_g u \, \mathrm{d}g, \tag{2}$$

ассоциированным с группой G (ср. [4]). Здесь B_0 — ПДО на M порядка b, а B_g ($g \in G$) — семейство ПДО на M того же порядка b, гладко зависящее от g.

Будем считать, что действие группы G удовлетворяет специальным условиям трансверсальности по отношению к подмногообразию X. Сформулируем эти условия.

Обозначим через $X^G = \{x \in X \mid gx = x, \forall g \in G\}$ — множество неподвижных точек на X и через $G_X = \{g \in G \mid \exists x \in X \setminus X^G : gx \in X\}$ — множество элементов группы G, которые оставляют внутри X другие точки, кроме неподвижных.

Определение 1. Действие будем называть *допустимым*, если множества X^G и G_X состоят из конечного числа элементов и любой элемент из $G \setminus G_X$ не оставляет внутри X никаких точек из X, кроме неподвижных, а орбита Gx любой точки $x \in X \setminus X^G$ трансверсальна подмногообразию X.

Также будем считать, что особая точка только одна.

Известно (см. [1,2]), что задача Соболева (1) фредгольмова, если одновременно фредгольмовы оператор D и её *обратный образ* — оператор вида

$$i^*BD^{-1}i_* : H^{s-m+\frac{\nu}{2}}(X) \longrightarrow H^{s-b-\frac{\nu}{2}}(X), \tag{3}$$

а индекс задачи Соболева равен сумме индексов этих двух операторов.

Показывается, что для задачи Соболева, ассоциированной с действием группы G, удовлетворяющей условию допустимости, обратный образ представим в виде

$$i^*BD^{-1}i_* = i^*B_0D^{-1}i_*\left(1+A\right), \tag{4}$$

где $i^*B_0D^{-1}i_*$ — ПДО, а оператор $1+A$ с точностью до компактных операторов имеет вид

$$1+A = 1+\varphi(x)\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\psi(\xi)\mathcal{M}^{-1}_{p\to r_\xi}K(p)\mathcal{M}_{r_\xi\to p}\psi(\xi)\mathcal{F}_{\xi\to x}\varphi(x), \tag{5}$$

где $\mathcal{F}_{x\to\xi}$, $\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}$ — прямое и обратное преобразования Фурье, $\mathcal{M}_{r_\xi\to p}$, $\mathcal{M}^{-1}_{p\to r_\xi}$ — прямое и обратное преобразования Меллина [1], $\psi(\xi)$ — гладкая срезающая функция, равная 1 на бесконечности и 0 в окрестности нуля, $\varphi(x)$ — гладкая срезающая функция, равная 0 вне окрестности особой точки и равная 1 внутри несколько меньшей окрестности, а $K(p)$ — функция комплексной переменной p, принимающая значения в интегральных операторах на сфере $\mathbb{S}^{\dim X-1}$, аналитичная на своей области определения.

Определение 2. Операторно-значную функцию $1+K(p)$ будем называть *символом* оператора $1+A$ и обозначать $1+\sigma(A)(p)$. Если оператор $1+A$ действует на многообразии X в пространствах Соболева порядка ς[2], то его символ $1+\sigma(A)(p)$ есть функция переменной $p\in\Gamma_{\varsigma+\dim X/2}$, где $\Gamma_\gamma = \{p\in\mathbb{C} \mid \Re(p)=\gamma\}$ — прямая, которую мы будем называть *весовой прямой*.

Отметим, что из равенства Парсеваля для преобразования Меллина (см. [5]) нетрудно получить, что преобразование Меллина действует унитарно в пространствах

$$\mathcal{M}_{r_x\to p} : L^2(\mathbb{R}^n_x) \longrightarrow L^2(\Gamma_{n/2}, L^2(\mathbb{S}^{n-1})).$$

В частности, функция $K(p)$ принимает значения в операторах на $L^2(\mathbb{S}^{\dim X-1})$.

Оператор $1+A$ называется *эллиптическим*, когда его символ $1+\sigma(A)(p)$ обратим. Соответствующая теорема конечности утверждает, что оператор $1+A$ фредгольмов, когда он эллиптичен. В настоящей работе мы получим формулу индекса оператора $1+A$.

2. Индекс

Пусть функция $K(p)$, $p\in\Gamma_\gamma$, определена, как выше, причём функция $1+K(p)$ обратима. Тогда функции $K(p)$ однозначно сопоставлено отображение:

$$\mathbb{S}^1 \longrightarrow GL_K, \tag{6}$$

где GL_K — это пространство обратимых операторов в гильбертовом пространстве вида $1+K$, где K — компактный оператор. Отображение (6) определяет элемент фундаментальной группы $\pi_1(GL_K)$ пространства G_K, которая изоморфна $\mathbb{Z}$

---

[1] Под преобразованием Меллина функции на $\mathbb{R}^n$ мы будем понимать преобразование Меллина этой функции по радиальной переменной после перехода к сферическим координатам.

[2] Для случая обратного образа задачи (1) имеем: $\varsigma = s-m+n/4$.

(см. [6]). С другой стороны, хорошо известно, что $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$. Поэтому отображение (6) индуцирует гомоморфизм группы $\mathbb{Z}$ в себя, т.е. является умножением на некоторое целое число. Это число называется *числом вращения* функции $1+K(p)$ и обозначается как $w_\gamma[1 + K(p)]$.

Аналогично определяется число вращения функции $Q(z)$, $z \in \mathbb{S}^1$, со значениями в GL_K которое будем обозначать $w_{\mathbb{S}^1}[Q(z)]$.

Пусть X — гладкое многообразие размерности n с отмеченной особой точкой, и пусть $1+A$ — оператор вида (5), действующий в пространствах Соболева $H^s(X)$.

Теорема 1. *Пусть оператор $1 + A$ эллиптический. Тогда его индекс*

$$\mathrm{ind}_s(1 + A) = w_{s+n/2}[\sigma(1 + A)]. \tag{7}$$

Доказательство. Основная идея — показать, что оператор $1 + A$ сводится к оператору Теплица, а индекс последнего хорошо известен.

Шаг 1. *Сведение к оператору в пространствах* L^2. Путь Δ — оператор Лапласа. Тогда имеют место следующие равенства:

$$1)\ \mathrm{ind}_s(1 + A) = \mathrm{ind}_0(\Delta^{s/2}(1 + A)\Delta^{-s/2}).$$
$$2)\ w_{s+n/2}[\sigma(1 + A)] = w_{n/2}[\sigma(\Delta^{s/2}(1 + A)\Delta^{-s/2})].$$

Действительно, первое равенство следует из логарифмического свойства индекса и тривиальности индекса оператора Лапласа, а второе следует из соотношений $\mathrm{ord}\,\Delta^{-s/2} = -s$ и $\mathrm{ord}\,\Delta^{s/2} = s$.

Таким образом, нам достаточно рассмотреть оператор, действующий в пространствах L^2, а не в пространствах Соболева.

Шаг 2. *Сведение к оператору вида свёртки Меллина.* Будем считать, что оператор $1 + A$ действует в пространствах $L^2(X)$. С точностью до компактных операторов он имеет вид

$$1 + A = 1 + \varphi(x)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{M}^{-1}K(p)\mathcal{M}\mathcal{F}\varphi(x), \tag{8}$$

где $\varphi \in C^\infty(X)$ и $\varphi \equiv 1$ в (малой) окрестности особой точки и $\varphi \equiv 0$ вне большей окрестности.

Теперь введём координаты в окрестности особой точки и будем считать, что оператор $1 + A$ действует на $\mathbb{R}^n$. Далее нам понадобится

Лемма 1 (см. [7]). *Существует такой унитарный оператор $\mathcal{E}$, действующий из пространства $L^2(\Gamma_{n/2}, L^2(\mathbb{S}^{n-1}))$ в себя, что выполняется коммутационное соотношение:*

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}\mathcal{M}_{r_\xi\to p} = \mathcal{M}_{r_x\to p}\mathcal{E}. \tag{9}$$

Пользуясь соотношением (9), мы можем представить оператор $1 + A$ в следующем виде:

$$1 + A = 1 + \varphi(x)\mathcal{M}^{-1}L(p)\mathcal{M}\varphi(x), \tag{10}$$

где $L(p) = \mathcal{E}(p)^{-1}K(p)\mathcal{E}(p)$ — функция переменной $p \in \Gamma_{n/2}$ со значениями в компактных операторах на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$.

Шаг 3. *Сведение к оператору Теплица.* Покажем, что оператор (10) сводится к оператору Теплица. Это сведение даётся в следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} \Pi L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\Pi\left(1+\mathcal{M}^{-1}L(p)\mathcal{M}\right)} & \Pi L^2(\mathbb{R}^n) \\ \mathcal{M}\big\downarrow & & \big\downarrow\mathcal{M} \\ \widehat{\Pi}L^2(\Gamma_{n/2}, L^2(\mathbb{S}^{n-1})) & \xrightarrow{\widehat{\Pi}(1+L(p))} & \widehat{\Pi}L^2(\Gamma_{n/2}, L^2(\mathbb{S}^{n-1})) \\ Q\big\downarrow & & \big\downarrow Q \\ \widehat{\Pi}'L^2(\mathbb{S}^1_z, L^2(\mathbb{S}^{n-1})) & \xrightarrow{\widehat{\Pi}'N(z)} & \widehat{\Pi}'L^2(\mathbb{S}^1_z, L^2(\mathbb{S}^{n-1})) \end{array} \tag{11}$$

Здесь оператор в нижней строке является искомым оператором Теплица. Посмотрим, что здесь происходит, более подробно.

1) *Определение диаграммы* (11). Перед нами оператор (10). Возьмём функцию $\varphi(x)$ вида

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| < 1, \\ 0, & \text{при } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Тогда можно считать, что оператор $1 + A$ действует в подпространстве функций с носителями в единичном шаре:

$$1 + A = \Pi\left(1 + \mathcal{M}^{-1}L(p)\mathcal{M}\right) : L^2(\mathbb{B}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{B}^n). \tag{12}$$

Здесь $\mathbb{B}^n$ — единичный шар размерности n, Π — проектор из $L^2(\mathbb{R}^n)$ на подпространство $L^2(\mathbb{B}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. Мы находимся на первой строчке диаграммы (11).

Сделаем в операторе (12) переход к координатам Меллина. Имеем:

$$\mathcal{M}(1 + A)\mathcal{M}^{-1} = \widehat{\Pi}\,(1 + L(p)) : \widehat{\Pi}L^2(\Gamma_{n/2}, L^2(\mathbb{S}^{n-1})) \to \widehat{\Pi}L^2(\Gamma_{n/2}, L^2(\mathbb{S}^{n-1})), \tag{13}$$

где $\widehat{\Pi} = \mathcal{M}\Pi\mathcal{M}^{-1}$ — некоторый проектор в пространстве $L^2(\Gamma_{n/2}, L^2(\mathbb{S}^{n-1}))$. Мы пришли ко второй строчке диаграммы (11).

Теперь функции на весовой прямой $\Gamma_{n/2}$ переведём в функции на единичной окружности с помощью изоморфного отображения

$$Q : \widehat{u}(p, \omega) \longmapsto \widehat{v}(z, \omega) = \frac{\sqrt{2}}{z-1}\widehat{u}(z, \omega), \quad z = \frac{\left(p - \frac{n}{2}\right) - 1}{\left(p - \frac{n}{2}\right) + 1}. \tag{14}$$

Здесь замена $z \to p$ переводит весовую прямую $\Gamma_{n/2}$ в окружность $\mathbb{S}^1_z = \{|z| = 1\}$, а отображение Q подобрано так, чтобы в пространствах L^2 оно действовало унитарно.

Полагая теперь $\widehat{\Pi}' = Q\widehat{\Pi}Q^{-1}$, $N(z) = Q[1 + L(p)]Q^{-1}$, приходим к третьей строчке диаграммы (11). Заметим, что по построению выполняется соотношение:

$$w_{n/2}[1 + L(p)] = -w_{\mathbb{S}^1}\left[1 + L\left(\frac{n}{2} + \frac{1+z}{1-z}\right)\right]. \tag{15}$$

2) *Исследование оператора* $\widehat{\Pi}'$. Покажем, что оператор $\widehat{\Pi}'$ является проектором Харди в пространстве $L^2(\mathbb{S}^1_z, L^2(\mathbb{S}^{n-1}))$. А именно, покажем, что его образ порождён линейными комбинациями степенных функций z^k при $k \geqslant 0$:

$$\operatorname{Im}\widehat{\Pi}' = \operatorname{span}\left[\left\{a_k(\omega)z^k\right\}_{k\geqslant 0}\right], \text{ где } a_k(\omega) \in L^2(\mathbb{S}^1) \tag{16}$$

где символом span обозначено замыкание множества линейных комбинаций.

По построению равенство множеств (16) равенство эквивалентно равенству

$$\Phi L^2(\mathbb{B}^n, L^2(\mathbb{S}^{n-1})) = \operatorname{span}\left[\left\{a_k(\omega)z^k\right\}_{k\geqslant 0}\right], \tag{17}$$

где $\Phi = Q\mathcal{M}$ — изоморфизм.

Искомое равенство (17) вытекает из следующих утверждений:

1. Линейные комбинации функций $a_k(\omega)z^k$, $k \in \mathbb{Z}$, $a_k(\omega) \in L^2(\mathbb{S}^1)$ плотны в $L^2(\mathbb{S}^1_z, L^2(\mathbb{S}^{n-1}))$ (это хорошо известно).
2. Φ — унитарный оператор (это было установлено выше).
3. a) $\Phi^{-1}(a_k(\omega)z^k) \in L^2(\mathbb{B}^n, L^2(\mathbb{S}^{n-1})) \subset L^2(\mathbb{R}^n, L^2(\mathbb{S}^{n-1}))$, если $k \geqslant 0$.
   b) $\Phi^{-1}(a_k(\omega)z^k) \in L^2(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}^n, L^2(\mathbb{S}^{n-1}))$, если $k < 0$.

Таким образом, для доказательства равенства (17) нам осталось установить соотношения a) и b). Для определённости установим первое из них (второе доказывается аналогично).

Итак, зафиксируем $k > 0$ и возьмём какую-нибудь функцию $a_k(\omega)z^k$. Положим

$$\widehat{f}(p,\omega) = Q^{-1}\left[a_k(\omega)z^k\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\left(p-\frac{n}{2}\right)-1}{\left(p-\frac{n}{2}\right)+1} - 1\right]\left[\frac{\left(p-\frac{n}{2}\right)-1}{\left(p-\frac{n}{2}\right)+1}\right]^k a_k(\omega).$$

Тогда носитель функции $f(r,\omega) = \mathcal{M}^{-1}_{p\to r}\widehat{f}(p,\omega)$ заключён в единичном шаре $\mathbb{B}^n$. Действительно, с одной стороны, функция $\widehat{f}(p,\omega)$ голоморфно продолжается вправо по переменной p, т.е. при $\Re(p) \geqslant n/2$. С другой стороны, имеем:

$$f(r,\omega) = \int\limits_{\Re(p)=n/2} r^{-p}\widehat{f}(p,\omega)\,p.$$

Однако в силу того, что $\widehat{f}(p,\omega)$ голоморфна при всех p, $\Re(p) > n/2$, обратное преобразование Меллина можно брать не только на прямой $\Re(p) = n/2$, но и на любой прямой $\{p \in \mathbb{C} \mid \Re(p) = \gamma\}$, где $\gamma > n/2$. Возьмём какое-нибудь такое γ. Получим

$$f(r,\omega) = p^{-\gamma}\int\limits_{\Re(p)=\gamma} r^{-(p-\gamma)}\widehat{f}(p,\omega)\,p. \tag{18}$$

Пусть теперь $r > 1$. Тогда при $\gamma \to \infty$, правая часть равенства (18) будет стремиться к нулю. Однако функция $f(r,\omega)$ от γ не зависит. Поэтому $f(r,\omega) = 0$ при $r > 1$.

Итак, равенства (16) и (17) установлены.

3) *Оператор* $\widehat{\Pi}'N(z)$. Итак, мы показали, что оператор $\widehat{\Pi}'$ представляет собой проектор Харди в пространстве $L^2(\mathbb{S}^1_z, L^2(\mathbb{S}^{n-1}))$. Это означает, что оператор $\widehat{\Pi}'N(z)$ есть оператор Теплица в этом пространстве, отвечающий функции $N(z)$.

Шаг 4. *Индекс оператора Теплица* хорошо известен: это в точности число вращения отвечающей ему функции, взятое со знаком «минус». Поэтому из формулы (15) имеем:

$$\operatorname{ind}\left[\widehat{\Pi}'\left(1+L(p)\right)\right] = -w_{\mathbb{S}^1}N(z) = w_{n/2}(1+L(p)) = w_{s+n/2}(1+K(p)).$$

Поскольку все преобразования, которые привели нас к оператору $\widehat{\Pi}'\left(1+N(z)\right)$ суть изоморфизмы, мы получаем утверждение теоремы. □

2.1. Индекс задачи Соболева

Применяя теорему 1 к обратному образу (4), имеем

Следствие 1. Индекс задачи Соболева (1) S, ассоциированной с действием группы G, удовлетворяющим условию допустимости 1, равен

$$\operatorname{ind} S = \operatorname{ind}\left(i^* B_0 D^{-1} i_*\right) + \operatorname{ind} D + w_{s-m+n/2}[\sigma(1+A)],$$

где индексы псевдодифференциальных операторов $i^* B_0 D^{-1} i_*$ и D вычисляются по формуле Атьи–Зингера.

Заключение

Таким образом, для случая, когда на многообразии M имеется дополнительная структура (например, действие группы Ли), при определённых условиях изучен полученный в работе оператор (D, B), дано определение его символа и доказана его фредгольмовость.

Литература

1. *Стернин Б. Ю.* Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности // Труды московского математического общества. — 1966. — Т. 15. — С. 346–382.
2. *Стернин Б. Ю.* Относительная эллиптическая теория и проблема С. Л. Соболева // Доклады АН СССР. — 1976. — Т. 230, № 2. — С. 287–290.
3. *Лощенова Д. А.* О задаче Соболева, ассоциированной с компактной группой Ли // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Тезисы докладов. — Москва: 2014.
4. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Нелокальные эллиптические операторы для компактных групп Ли // Доклады АН СССР. — 2010. — Т. 431, № 4. — С. 457–460.
5. *Стернин Б. Ю. и Шаталов В. Е.* Относительная эллиптическая теория и задача Соболева // Математический сборник. — 1996. — Т. 187, № 11. — С. 115–144.
6. *Wojciechowski K.* A Note on the Space of Pseudodifferential Projections with the Same Principal Symbol // J. Operator Theory. — 1986. — Т. 15, № 2. — С. 207–216.
7. *Пламеневский Б. А.* Алгебры псевдодифференциальных операторов. — Москва: Наука, 1986.

UDC 517.9

Index of Sobolev Problems Associated with Lie Group Action

D. A. Loshhenova

Department of Applied Mathematics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

In relative elliptic theory or "Sobolev" problem as B. Yu. Sternin named it in his works one is required to construct a Fredholm elliptic theory and find an index formula in the category of smooth pairs of manifolds (M, X), where X is a submanifold in M. From the point of view of (pseudo)differential equations the Sobolev problem deals with the comparison $Du \equiv f \,(\operatorname{mod} X)$, where D is a pseudodifferential operator, while the sign "$\equiv$" means that the left and right hand sides are equal modulo distributions supported on X.

Obviously, if the dimension of the submanifold is greater than one, the comparison written above does not define a Fredholm operator, since its kernel is infinite-dimensional. It turns

out, that if we add to the comparison some operators B defined on X, which are related by an algebraic condition (of coercitivity type) with operator D, then the obtained operator (D, B) is already Fredholm in appropriate Sobolev spaces. Remarkably, this condition can be formulated invariantly as an ellipticity condition of some operator, which is induced by the problem on the submanifold X. Hence, the ellipticity conditions of operators D and (D, B) together give us a Fredholm operator. This theorem and the corresponding index formula were proved by B.Yu. Sternin. Note that all operators appearing in this theory are pseudodifferential. In particular, (D, B) is a pseudodifferential operator, meanwhile, this enabled one to define its ellipticity. We have a quite different situation, if the manifold M is endowed with an additional structure, for example, if it carries a Lie group action. In this case, (D, B) is in general no longer a pseudodifferential operator and, hence, the question of its ellipticity, formally speaking, can not even be rised. However, in our work, under certain conditions, we can examine the resulting operator (D, B), define its symbol and prove its Fredholm property. Moreover, we give an index formula in this more general situation. This is the subject of this work.

Key words and phrases: elliptic operators, Sobolev problems, index, fixed points of Lie group action, operators concentrated at a point.

References

1. B. Y. Sternin, Elliptic and Parabolic Problems on Manifolds with Boundary Consisting of Components of Different Dimension, Trudy Mosk. Mat. Obsh-va 15 (1966) 346–382, in Russian.
2. B. Y. Sternin, Relative Elliptic Theory and the Sobolev Problem, DAN SSSR 230 (2) (1976) 287–290, in Russian.
3. D. A. Loshhenova, On the Sobolev Problem Associated with Compact Lie Group, in: Infinite-Dimensional Analysis, Stochastics, Mathematical Simulation: New Problems and Methods. Problems of Mathematical and Scientific Education. Abstracts of Talks, Moskva, 2014.
4. A. Y. Savin, B. Y. Sternin, Nonlocal Elliptic Operators for Compact Lie Groups, DAN SSSR 431 (4) (2010) 457–460, in Russian.
5. B. Y. Sternin, V. E. Shatalov, Relative Elliptic Theory and Sobolev Problems, Matem. Sbornik 187 (11) (1996) 115–144, in Russian.
6. K. Wojciechowski, A Note on the Space of Pseudodifferential Projections with the Same Principal Symbol, J. Operator Theory 15 (2) (1986) 207–216, in Russian.
7. B. A. Plamenevskij, Algebras of Pseudodifferantial Operators, Nauka, Moscow, 1986, in Russian.