∨ ∨ ∨

О ФОРМООБРАЗОВАНИИ ОСНОВНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Е.Н. ГУБИНА**,** *студент*

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

В статье представлен обзор наиболее распространенных циклических поверхностей, применяемых в строительстве. Рассмотрено формообразование поверхностей, основные квадратичные формы и приведены рисунки, выполненные в системе MathCAD.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: циклические поверхности, формообразование, круговая винтовая поверхность, циклическая поверхность вращения, трубчатая поверхность с произвольной линией центров, коэффициенты основных квадратичных форм.

Циклическая поверхность образуется движением окружности переменного или постоянного радиуса по некоторому закону в пространстве. Классификация циклических поверхностей достаточно широка, однако в строительстве в основном применяется только несколько видов. Возможно, это связано с тем, что точный аналитический расчет циклических оболочек стал доступен только с середины XX века.

Циклические поверхности подразделяются на несколько классов, каждый из которых имеет множество частных случаев. Ниже перечислены основные классы циклических поверхностей [1, 2].

Циклические поверхности вращения образуются вращением окружности, произвольно расположенной относительно оси вращения.

Нормальные циклические поверхности образуются движением окружности переменного или постоянного радиуса по произвольной направляющей.

Каналовые поверхности образуются семейством окружностей, являющихся линиями кривизны.

Циклические поверхности с окружностями в плоскостях пучка образуются окружностями постоянного или переменного радиуса, центры которых движутся по заданной кривой, а сами окружности лежат в плоскостях пучка.

320

Круговая винтовая поверхность с образующей окружностью получается при винтовом движении образующей окружности, произвольно расположенной относительно винтовой оси.

Окружность – основу циклической поверхности, можно задать определяющим вектором окружности **n**(u), начало которого будет в центре этой окружности, направление совпадет с направлением нормали к плоскости, в которой лежит окружность, а длина будет равна радиусу окружности [3].

Чтобы получить уравнение циклической поверхности необходимо:

Задать уравнение направляющей кривой **ρ**(u) – линии центров образующих окружностей: плоской или пространственной.

Задать функцию радиуса образующих окружностей **R**(u).

Определить положение плоскости образующей окружности, задаваемой вектором единичной нормали **n**(u).

Таким образом, векторное уравнение любой циклической поверхности можно записать [1, 2]:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = \boldsymbol{\rho}(u) + \mathbf{R}(u)\,\mathbf{e}(u,v)$,

где **r**(u,v) – радиус-вектор циклической поверхности,

e(u,v) – уравнение окружности единичного радиуса в плоскости с нормалью **n**(u): $\mathbf{e}(u,v) = \mathbf{e}_o(u)\cos v + \mathbf{g}_o(u)\sin v$,

$\mathbf{e}_o(u)$ – единичный вектор в плоскости с нормалью **n**(u), от которого ведется отсчет координаты v ($0 < v < 2\pi$);

$\mathbf{g}_o(u)$ – единичный вектор в плоскости с нормалью **n**(u), ортогональный вектору $\mathbf{e}_o(u)$.

Ниже будут рассмотрены наиболее распространенные в строительстве поверхности: циклические поверхности вращения, круговые винтовые поверхности и трубчатые поверхности с произвольной линией центров.

Циклические поверхности вращения образуются вращением произвольно расположенной окружности относительно оси вращения [2].

Векторное уравнение может быть представлено в виде:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = b\mathbf{h}(u)+a\mathbf{e}(u,v)$,

где $b\mathbf{h}(u)$ – векторное уравнение линии центров образующих окружностей:

$b\mathbf{h}(u) = b(\mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\sin u)$,

b – радиус линии центров, a – радиус образующей окружности,

i, **j** – орты прямоугольной системы координат,

$\mathbf{e}(u,v) = \mathbf{h}(\cos\theta\cos v - \sin\theta\sin\omega\sin v) + \mathbf{p}(\sin\theta\cos v + \cos\theta\sin\omega\sin v) + \mathbf{k}(\cos\omega\sin v)$,

ω – угол между плоскостью образующей окружности и осью вращения,

θ – угол между вектором **h**(u) и следом пересечения плоскости с образующей окружностью; **p**, **k** – единичные векторы.

Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности [1]:

$E = A^2 = b^2+2ab(\cos\theta\cos v - \sin\theta\sin\omega\sin v) + a^2(1-\cos^2\omega\sin^2 v)$,

$G = B^2 = b^2$, $F = -ab(\sin\theta\sin v - \cos\theta\sin\omega\cos v) + a^2\sin\omega$.

Коэффициенты второй квадратичной формы поверхности:

$L = [b(\sin\theta \cos v + \cos\theta \sin\omega \sin v)T_1 + (b \cos\theta + a \cos v)\cos \omega] / \text{б}$,

$N = -a(b \cos\theta + a \cos v) \cos\omega / \text{б}$,

$M = a[-(b\cos\theta + a\cos v)\sin\omega + b(\sin\theta \cos v + \cos\theta \sin\omega \sin v)\sin v]\cos\omega / \text{б}$,

где $T_1 = - (b \sin\theta + a(\cos\omega - 2 \sin\omega)\sin v)\cos\omega$;

$\text{б}^2 = b^2(\sin\theta \cos v + \cos\theta \sin\omega \sin v)^2 + (b \cos\theta + a \cos v)^2 \cos^2\omega$.

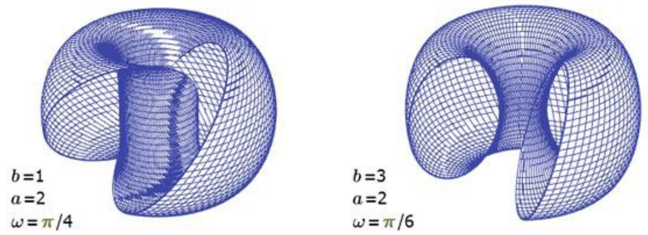

Рис.1. Циклическая поверхность вращения при $\theta = 0$ [2],
$0 \le u \le 1.5\pi$, $0 \le v \le 2\pi$ и различных параметрах b, ω. Слева a>b, справа a<b

<u>Трубчатые поверхности</u> являются частным случаем нормальных циклических поверхностей. Они образуются движением окружности постоянного радиуса вдоль произвольной направляющей кривой при этом плоскость образующей окружности должна оставаться перпендикулярной к направляющей.

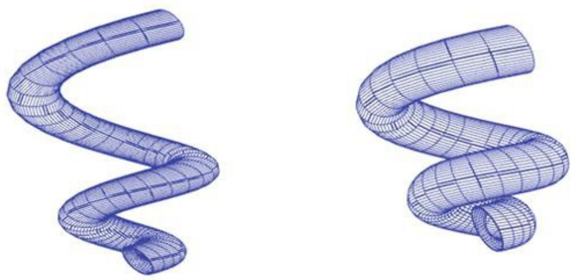

Рис.2. Трубчатая спиральная поверхность [2] с линией центров в виде конической спирали при различных значениях угла λ между направляющей линией и осью: слева λ = 4, справа λ = 2.

Векторное уравнение трубчатой поверхности может быть представлено в виде [1, 2]:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = \boldsymbol{\rho}(u)+R\mathbf{e}(u,v)$,

где $\mathbf{r}(u,v)$ – радиус-вектор циклической поверхности;

$\boldsymbol{\rho}(u)$ – радиус-вектор линии центров образующих окружностей;

R – радиус образующей окружности, R = const;

$\mathbf{e}(u,v)$ – вектор-функция окружности единичного радиуса.

 322

Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности [1, 2]:

$E = A^2 = s^2 (1 - kR \cos(v + \theta))^2$, $F = 0$, $G = B^2 = R^2$,

где θ – угол между вектором $\mathbf{e}_o$ и нормалью линии центров; k – кривизна линии центров; $s = |\boldsymbol{\rho}\Gamma|$.

Коэффициенты второй квадратичной формы данной поверхности:

$L = -s^2 k (1 - kR \cos(v + \theta))\cos(v + \theta)$, $M = 0$, $N = R$.

Круговая винтовая поверхность является классом циклических поверхностей, а также входит в отдельный класс «Винтовые поверхности» [2]. Поверхность образуется винтовым движением образующей окружности с постоянным радиусом r относительно винтовой оси.

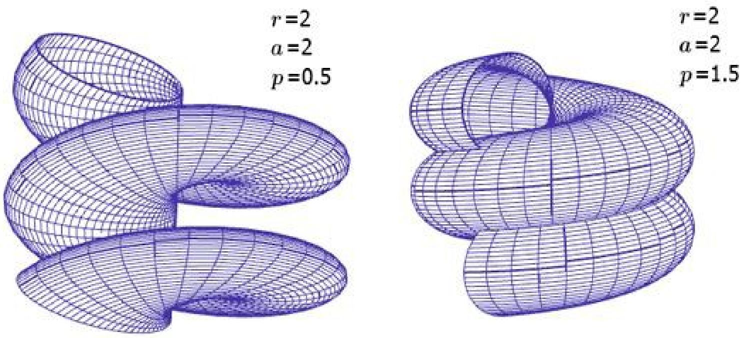

Рис.3. Круговая винтовая поверхность [2] при a = r, $0 \le \vartheta \le 4\pi$, $0 \le v \le 2\pi$ и различном параметре p

Векторная форма задания на примере трубчатой винтовой поверхности [2]:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\vartheta, v) = (a + r\cos\vartheta)\mathbf{e}(v) + r\sin\vartheta\sin\beta\,\mathbf{g}(v) + (pv - r\sin\vartheta\cos\beta)\mathbf{k},$

где $\mathbf{e}(v)$, $\mathbf{g}(v)$ – единичные круговые вектор-функции;

ϑ – центральный угол образующей окружности ($0 \le \vartheta \le 2\pi$);

a – расстояние от центра образующей окружности до винтовой оси;

r – радиус образующей окружности; β – угол между бинормалью винтовой линии центров и плоскостью z = 0; p – параметр винтового движения.

Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности [2]:

$E = A^2 = r^2$, $F = r^2 \sin\beta$, $G = B^2 = r^2 \sin^2\vartheta \sin^2\beta + (a + r\cos\vartheta)^2 + p^2$,

Коэффициенты второй квадратичной формы поверхности:

$L = -r$, $M = -\frac{rp}{\sqrt{a^2+p^2}}$, $N = \frac{rp^2 + a\cos B(a^2+p^2+ar\cos B)}{(a^2+p^2)}$

Рассмотренные выше поверхности широко используются в строительстве и архитектуре в качестве элементов или самостоятельных конструкций.

Литература

1. *Иванов В.Н.* Теория поверхностей. Циклические поверхности (Сайт РУДН, Инженерный факультет, Иванов В.Н).
2. *Кривошапко С.Н.,Иванов В.Н.*Энциклопедия аналитических по-верх-ностей. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 560 с.
3. *Котов И.И.* Об одном методе исследования циклических поверх-ностей. Труды ВЗЭИ. – Вып.13.- М.:1958. – С. 36-42.

ABOUT THE FORMATION OF MOST COMMON CYCLIC SURFACES

E.N. GUBINA, student
Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

This review article is devoted to an analysis the most common cyclic surfaces, applied in construction. The article contains the description of surfaces, basic fundamental forms and computer graphics in MathCAD.

KEYWORDS: cyclic surfaces, cyclic surfaces of rotation, tubular surfaces with random line of centers, cyclic helical surfaces, first fundamental form, second fundamental form, computer graphics.