

Расчет тонких упругих оболочек

**ДВА ВИДА РАСЧЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОБОЛОЧЕК  
В ПРОИЗВОЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ**

С.Н. КРИВОШАПКО, *д.т.н., профессор,*  
Российский университет дружбы народов,  
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6; *sn\_krivoshapko@mail.ru*

*Если за криволинейные координаты на срединной поверхности оболочек принимается сеть линий главных кривизн, то система 17 расчетных уравнений получается наиболее простой. В ряде случаев аналитическое задание поверхности в линиях кривизны является трудной задачей и приходится использовать систему 20 расчетных уравнений, предложенную А.Л. Гольденвейзером для косоугольной системы криволинейных координат при условии разложения векторов внутренних усилий, моментов и внешней поверхностной нагрузки по осям основного неортогонального триедра. Позже была введена в обращение система 20 расчетных уравнений, полученная автором, в которых внутренние силовые факторы и внешняя поверхностная нагрузка раскладывается по осям ортогонального триедра. В статье показывается, что с помощью формул перехода одна система уравнений переходит в другую, т.е. обе предложенные системы расчетных уравнений равнозначны.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** тонкая оболочка, дифференциальные уравнения равновесия, произвольная криволинейная система координат, геометрические уравнения теории оболочек, физические уравнения теории оболочек.

**Введение**

Приступая к расчету конструкции типа оболочки, первое, с чем приходится сталкиваться, – это выбор системы координат. Среди множества произвольных криволинейных координат  $u, v$  имеются некоторые, обладающие важными свойствами. К их числу относятся сети сопряженных линий ( $M = 0$ ), сети ортогональных линий ( $F = 0$ ), сеть линий главных кривизн ( $F = 0, M = 0$ ). Естественно, что уравнения теории оболочек получаются наиболее простыми, если в качестве координатных линий на срединной поверхности принята сеть линий главных кривизн, однако аналитически не всегда легко бывает найти линии кривизны данной поверхности. Гипотезы линейной теории тонких оболочек позволяют свести трехмерную задачу теории упругости к двумерной.

Под расчетными уравнениями моментной теории тонких оболочек будем подразумевать полную систему уравнений теории оболочек, которая включает в себя дифференциальные уравнения равновесия, геометрические уравнения (формулы «деформации – смещения») и физические уравнения (уравнения закона Гука, или уравнения состояния).

В 1953 году А.Л. Гольденвейзер в своей монографии [1] привел расчетные уравнения для тонких оболочек, срединная поверхность которых задана в произвольной системе криволинейных координат  $u, v$ .

Его 20 расчетных уравнений включают в себя 6 уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \chi} \frac{\partial}{\partial u} \left[ B(N_u^* + \cos \chi S_u^*) \right] - \frac{B^2}{A} \Gamma_{11}^2 \sin \chi S_u^* - \frac{1}{\sin \chi} \frac{\partial}{\partial v} \left[ A(S_v^* - \cos \chi N_v^*) \right] - \\ & - B \Gamma_{12}^2 \sin \chi N_v^* - \frac{AB}{\sin \chi} \left( \frac{Q_u^*}{R_u'} - \frac{Q_v^*}{R_{uv}'} \right) + AB(X + \cos \chi Y) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sin \chi} \frac{\partial}{\partial u} \left[ B(S_u^* + \cos \chi N_u^*) \right] - A\Gamma_{12}^1 \sin \chi N_u^* + \frac{1}{\sin \chi} \frac{\partial}{\partial v} \left[ A(N_v^* - \cos \chi S_v^*) \right] + \\
 & + \frac{A^2}{B} \Gamma_{22}^1 \sin \chi S_v^* - \frac{AB}{\sin \chi} \left( \frac{Q_v^*}{R'_v} - \frac{Q_u^*}{R_{uv}} \right) + AB(Y + \cos \chi X) = 0; \\
 & AB \left( \frac{N_u^*}{R'_u} + \frac{N_v^*}{R'_v} + \frac{S_v^* - S_u^*}{R_{uv}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} (BQ_u^*) + \frac{\partial}{\partial v} (AQ_v^*) + AB \sin \chi Z = 0; \\
 & \frac{1}{\sin \chi} \frac{\partial}{\partial u} \left[ B(M_{uv}^* + \cos \chi M_u^*) \right] - \frac{B^2}{A} \Gamma_{11}^2 \sin \chi M_u^* - \\
 & - \frac{1}{\sin \chi} \frac{\partial}{\partial v} \left[ A(M_v^* - \cos \chi M_{vu}^*) \right] - B\Gamma_{12}^2 \sin \chi M_{vu}^* + ABQ_v^* = 0; \\
 & \frac{1}{\sin \chi} \frac{\partial}{\partial u} \left[ B(M_u^* + \cos \chi M_{uv}^*) \right] - A\Gamma_{12}^1 \sin \chi M_{uv}^* + \\
 & + \frac{1}{\sin \chi} \frac{\partial}{\partial v} \left[ A(M_{vu}^* - \cos \chi M_v^*) \right] + \frac{A^2}{B} \Gamma_{22}^1 \sin \chi M_v^* - ABQ_u^* = 0; \\
 & \sin \chi (S_u^* + S_v^*) + \frac{M_{uv}^*}{R'_u} + \frac{M_{vu}^*}{R'_v} + \frac{M_v^* - M_u^*}{R_{uv}} = 0, \tag{1}
 \end{aligned}$$

6 геометрических уравнений [1, 2] и восемь формул (физические уравнения), связывающих между собой «псевдоусилия» ( $N_u^*$ ,  $N_v^*$ ,  $S_u^*$ ,  $S_v^*$ ,  $Q_u^*$ ,  $Q_v^*$ ), «псевдомоменты» ( $M_u^*$ ,  $M_v^*$ ,  $M_{uv}^*$ ,  $M_{vu}^*$ ) и компоненты тангенциальной и изгибной деформаций ( $\varepsilon_u$ ,  $\varepsilon_v$ ,  $\varepsilon_{uv}$ ,  $\kappa_u$ ,  $\kappa_v$ ,  $\kappa_{uv}$ ):

$$\begin{aligned}
 N_u^* &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\varepsilon_u - \operatorname{ctg} \chi \omega + \nu \varepsilon_v}{\sin \chi}; & N_v^* &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\varepsilon_v - \operatorname{ctg} \chi \omega + \nu \varepsilon_u}{\sin \chi}; \\
 S_u^* = -S_v^* &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1+\cos^2 \chi}{\sin^2 \chi} \varepsilon_{uv} - \operatorname{ctg} \chi (\varepsilon_u + \varepsilon_v) - \nu [\varepsilon_{uv} + \operatorname{ctg} \chi (\varepsilon_u + \varepsilon_v)] \right\}; \\
 M_u^* &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\kappa_u + \nu \kappa_v}{\sin \chi}; & M_v^* &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\kappa_v + \nu \kappa_u}{\sin \chi}; \\
 M_{uv}^* &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{\kappa_{uv} - \cos \chi \kappa_v}{\sin \chi}; & M_{vu}^* &= -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{\kappa_{uv} - \cos \chi \kappa_u}{\sin \chi}. \tag{2}
 \end{aligned}$$

В уравнениях равновесия (1) и в геометрических уравнениях [1] содержатся символы Кристоффеля  $\Gamma_{ik}^l$ . Векторы внутренних усилий и моментов, а также внешних поверхностных сил  $X^*$ ,  $Y^*$ ,  $Z^*$  раскладываются по осям основного триэдра  $\mathbf{r}_u/A$ ,  $\mathbf{r}_v/B$ ,  $\mathbf{n}$  поверхности  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ . Положительные направления усилий и моментов показаны на рис. 1.

В уравнениях равновесия (1) встречаются также обозначения:

$$\frac{1}{R'_u} = -\frac{L}{A^2}, \quad \frac{1}{R'_v} = -\frac{N}{B^2}, \quad \frac{1}{R_{uv}} = \frac{M}{AB} = \kappa_{uv}, \tag{3}$$

$\chi$  – угол между координатными линиями  $u$ ,  $v$ , для определения которого имеем формулу:

$$\cos \chi = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{F}{AB}; \tag{4}$$

где  $R'_u, R'_v$  – радиусы кривизны нормальных сечений поверхности, проведенных вдоль соответствующих координатных линий.

Таким образом А.Л. Гольденвейзер [1] ввел в обращение 20 расчетных уравнений для определения 19 двумерных параметров:

$$N_u^*, N_v^*, S_u^*, S_v^*, Q_u^*, Q_v^*, M_u^*, M_v^*, M_{uv}^*, M_{vu}^*; \varepsilon_u, \varepsilon_v, \varepsilon_{uv}, \kappa_u, \kappa_v, \kappa_{uv}$$

и  $u_w, u_v, u_z$  – компоненты смещения.

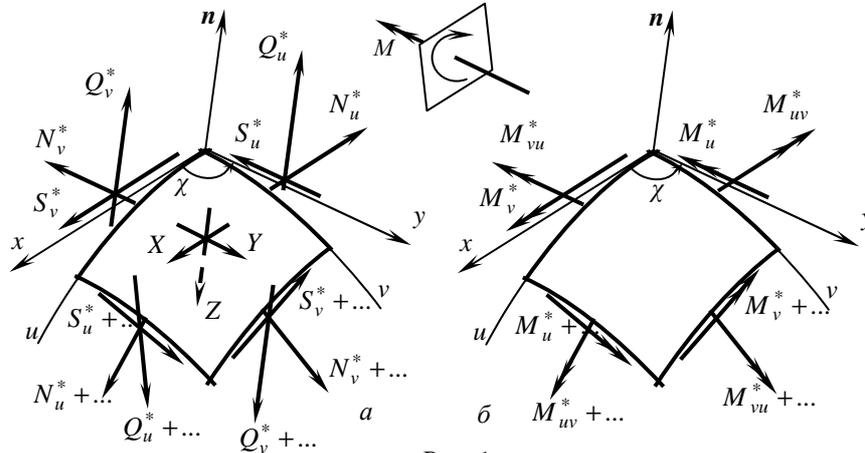


Рис. 1

В 1977 году С.Н. Кривошапко [2, 3] предложил другой вариант составления системы расчетных уравнений для расчета тонких оболочек, заданных в произвольных криволинейных координатах ( $\chi \neq 0$ ):

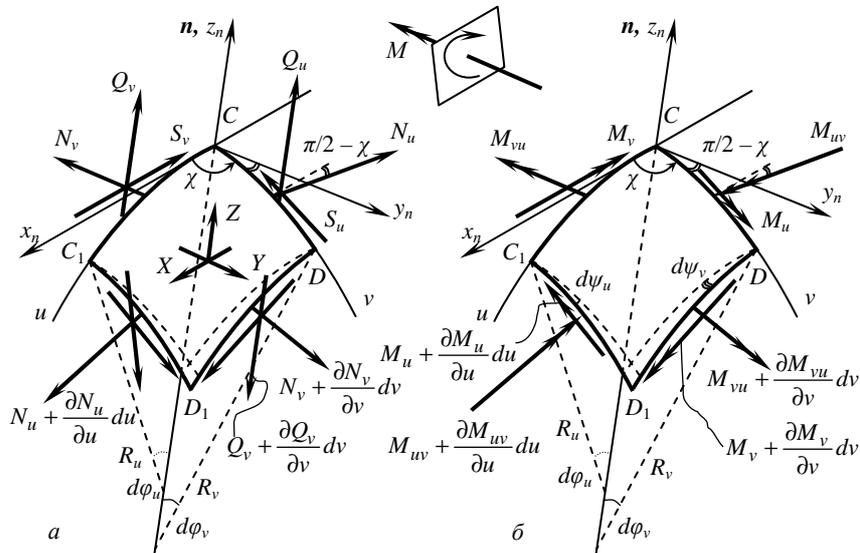


Рис. 2

6 уравнений равновесия (рис. 2):

$$\frac{\partial}{\partial v} (AS_v) + \frac{N_u - N_v}{\sin \chi} \left( \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \cos \chi \right) + \frac{\partial A}{\partial v} S_u + B \frac{\partial S_u}{\partial u} \cos \chi + B \frac{\partial N_u}{\partial u} \sin \chi - \frac{AB}{R_u} Q_u + ABX \sin \chi = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} (AN_v) + \frac{S_u + S_v}{\sin \chi} \left( \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \cos \chi \right) - \frac{\partial A}{\partial v} N_u + B \frac{\partial S_u}{\partial u} \sin \chi - B \frac{\partial N_u}{\partial u} \cos \chi -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{AB}{\sin \chi} \left( \frac{Q_v}{R_v} - \frac{Q_u}{R_u} \cos \chi \right) + ABY \sin \chi = 0, \\
 & \frac{N_u}{R_u \sin \chi} + \frac{N_v}{R_v \sin \chi} + \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (BQ_u) + \frac{\partial}{\partial v} (AQ_v) \right] - Z \sin \chi = 0, \\
 & -\frac{\partial}{\partial v} (AM_v) + \frac{M_{uv} + M_{vu}}{\sin \chi} \left( \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \cos \chi \right) + \frac{\partial A}{\partial v} M_u + B \frac{\partial M_u}{\partial u} \cos \chi + B \frac{\partial M_{uv}}{\partial u} \sin \chi + \\
 & \quad + ABQ_v \sin \chi = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial v} (AM_{vu}) + \frac{M_v - M_u}{\sin \chi} \left( \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \cos \chi \right) + \frac{\partial A}{\partial v} M_{uv} - B \frac{\partial M_u}{\partial u} \sin \chi + B \frac{\partial M_{uv}}{\partial u} \cos \chi + \\
 & \quad + AB(Q_u + Q_v \cos \chi) = 0, \\
 & (S_u - S_v) \sin \chi + (N_v - N_u) \cos \chi + \frac{M_{uv}}{R_u \sin \chi} - \frac{M_{vu}}{R_v \sin \chi} = 0, \tag{5}
 \end{aligned}$$

6 геометрических уравнений [1, 2] и восемь формул (физические уравнения), связывающих между собой внутренние усилия ( $N_u, N_v, S_u, S_v, Q_u, Q_v$ ), моменты ( $M_u, M_v, M_{uv}, M_{vu}$ ) и компоненты тангенциальной и изгибной деформаций ( $\varepsilon_u, \varepsilon_v, \varepsilon_{uv}, \kappa_u, \kappa_v, \kappa_{uv}$ ):

$$\begin{aligned}
 N_v &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_v - \varepsilon_{uv} \operatorname{ctg} \chi + \nu \varepsilon_u), \quad N_u = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_u - \varepsilon_{uv} \operatorname{ctg} \chi + \nu \varepsilon_v), \\
 S_v &= \frac{1-\nu}{2} C [\varepsilon_{uv} + (\varepsilon_v - \varepsilon_u) \operatorname{ctg} \chi], \quad S_u = \frac{1-\nu}{2} C [\varepsilon_{uv} + (\varepsilon_u - \varepsilon_v) \operatorname{ctg} \chi], \\
 M_{vu} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} (\kappa_{vu} - \kappa_u \cos \chi), \quad M_{uv} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} (\kappa_{vu} - \kappa_v \cos \chi), \\
 M_v &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\kappa_u + \kappa_v}{\sin \chi} - (1-\nu)(\kappa_u \sin \chi + \kappa_{uv} \operatorname{ctg} \chi) \right], \\
 M_u &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\kappa_u + \kappa_v}{\sin \chi} - (1-\nu)(\kappa_v \sin \chi + \kappa_{uv} \operatorname{ctg} \chi) \right]. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Получилось 20 расчетных уравнений для определения 19 двумерных параметров. Дифференциальные уравнения равновесия (5) отличаются от уравнений равновесия А.Л. Гольденвейзера (1), так как уравнения (1) включают в себя «псевдоусилия» (рис. 1, векторы со звездочками) вместо усилий, общепринятых в инженерной практике (рис. 2, векторы без звездочек).

**Преобразованные уравнения равновесия А.Л. Гольденвейзера, не содержащие символы Кристоффеля**

Подставим значения символов Кристоффеля  $\Gamma_{ik}^l$ , взятые из монографии [1], в уравнения равновесия (1). После некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial (BN_u^*)}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial u} N_v^* + B \cos \chi \frac{\partial S_u^*}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial v} (S_u^* + \cos \chi N_v^*) + \frac{\partial}{\partial v} [A(\cos \chi N_v^* - S_v^*)] - \\
 & - AB \left( \frac{Q_u^*}{R_u^*} - \frac{Q_v^*}{R_{uv}^*} \right) + AB \sin \chi (X^* + \cos \chi Y^*) = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(AN_v^*)}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial v} N_u^* - A \cos \chi \frac{\partial S_v^*}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u} (S_v^* - \cos \chi N_u^*) + \frac{\partial}{\partial u} [B(\cos \chi N_u^* + S_u^*)] - \\ & - AB \left( \frac{Q_v^*}{R_v'} - \frac{Q_u^*}{R_{uv}'} \right) + AB \sin \chi (Y^* + \cos \chi X^*) = 0; \\ & AB \left( \frac{N_u^*}{R_u'} + \frac{N_v^*}{R_v'} + \frac{S_v^* - S_u^*}{R_{uv}'} \right) + \frac{\partial}{\partial u} (BQ_u^*) + \frac{\partial}{\partial v} (AQ_v^*) + AB \sin \chi Z^* = 0; \\ & \frac{\partial(BM_{uv}^*)}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial u} M_{vu}^* + B \cos \chi \frac{\partial M_u^*}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial v} (M_u^* + \cos \chi M_{vu}^*) + \frac{\partial}{\partial v} [A(\cos \chi M_{vu}^* - M_v^*)] + \\ & + AB \sin \chi Q_v^* = 0; \\ & \frac{\partial(AM_{vu}^*)}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial v} M_{uv}^* - A \cos \chi \frac{\partial M_v^*}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u} (M_v^* - \cos \chi M_{uv}^*) + \frac{\partial}{\partial u} [B(\cos \chi M_{uv}^* + M_u^*)] - \\ & - AB \sin \chi Q_u^* = 0; \\ & \sin \chi (S_u^* + S_v^*) + \frac{M_{uv}^*}{R_u'} + \frac{M_{vu}^*}{R_v'} + \frac{M_v^* - M_u^*}{R_{uv}'} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения равновесия (1), записанные в форме (7), более привычны для восприятия инженером.

**Формулы, связывающие внутренние усилия и моменты с внутренними «псевдоусилиями» и «псевдомоментами»**

Между силовыми факторами, входящими в формулы (5) и «псевдоусилиями», входящими в формулы (7), существуют отношения (рис. 3):

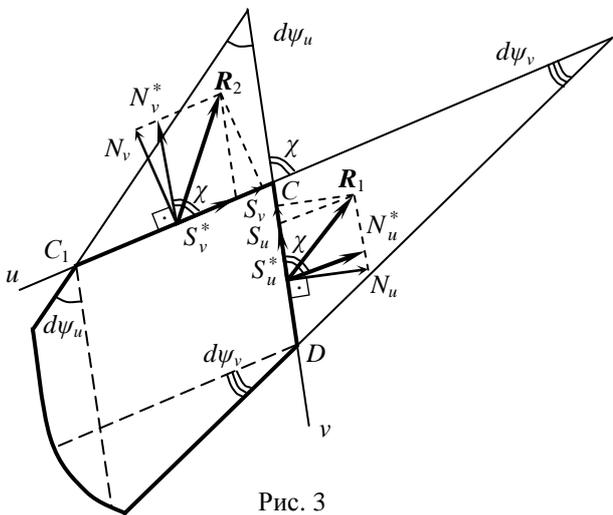


Рис. 3

$$\begin{aligned} N_v &= N_v^* \sin \chi, \\ N_u &= N_u^* \sin \chi, \\ S_v &= -S_v^* + N_v^* \cos \chi, \\ S_u &= S_u^* + N_u^* \cos \chi, \\ M_{vu} &= M_{vu}^* \sin \chi, \\ M_{uv} &= -M_{uv}^* \sin \chi, \\ M_v &= -M_v^* + M_{vu}^* \cos \chi, \\ M_u &= -M_u^* - M_{uv}^* \cos \chi. \end{aligned}$$

В формулах (5):

$$S_u \neq S_v \text{ и } M_{uv} \neq M_{vu},$$

так как  $\chi \neq \pi/2$ , а в уравнени-

ях (1) и (7), согласно физическим уравнениям (2), имеем  $S_u^* = -S_v^*$  даже если  $\chi \neq \pi/2$ .

**Переход от уравнений равновесия (5) к уравнениям равновесия (7)**

Подставляя значения усилий и моментов (8), общепринятые в инженерной практике, а также  $Z = -Z^*$  в уравнения равновесия (5), после довольно сложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial(BN_u^*)}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial u} N_v^* + B \cos \chi \frac{\partial S_u^*}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial v} (S_u^* + \cos \chi N_v^*) + \frac{\partial}{\partial v} [A(\cos \chi N_v^* - S_v^*)] - \\
 & - AB \left( \frac{Q_u^*}{R_u'} \right) + AB \sin \chi (X^* + \cos \chi Y^*) = 0; \\
 & \frac{\partial(AN_v^*)}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial v} N_u^* - A \cos \chi \frac{\partial S_v^*}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u} (S_v^* - \cos \chi N_u^*) + \frac{\partial}{\partial u} [B(\cos \chi N_u^* + S_u^*)] - \\
 & - AB \left( \frac{Q_v^*}{R_v'} \right) + AB \sin \chi (Y^* + \cos \chi X^*) = 0; \\
 & AB \left( \frac{N_u^*}{R_u'} + \frac{N_v^*}{R_v'} \right) + \frac{\partial}{\partial u} (BQ_u^*) + \frac{\partial}{\partial v} (AQ_v^*) + AB \sin \chi Z^* = 0; \\
 & \frac{\partial(BM_{uv}^*)}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial u} M_{vu}^* + B \cos \chi \frac{\partial M_u^*}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial v} (M_u^* + \cos \chi M_{vu}^*) + \frac{\partial}{\partial v} [A(\cos \chi M_{vu}^* - M_v^*)] + \\
 & - AB \sin \chi Q_v^* = 0; \\
 & \frac{\partial(AM_{vu}^*)}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial v} M_{uv}^* - A \cos \chi \frac{\partial M_v^*}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u} (M_v^* - \cos \chi M_{uv}^*) + \frac{\partial}{\partial u} [B(\cos \chi M_{uv}^* + M_u^*)] - \\
 & - AB \sin \chi Q_u^* = 0; \\
 & \sin \chi (S_u^* + S_v^*) - \frac{M_{uv}^*}{R_u'} - \frac{M_{vu}^*}{R_v'} = 0. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Сравнивая системы уравнений (7) и (9), замечаем, что в первом уравнении системы (9) отсутствует слагаемое  $ABQ_v/R_{uv}$ , во втором уравнении системы (9) отсутствует слагаемое  $ABQ_u/R_{uv}$ . Если используется сопряженная система криволинейных координат, то  $M = 0$ , следовательно,  $1/R_{uv} = 0$ , и это различие не играет роли. Кроме того в четвертом уравнении равновесия системы (9) перед поперечной силой стоит знак (-), а в соответствующем уравнении А.Л. Гольденвейзера (7) стоит знак (+).

Второе уравнение равновесия системы (9) получено сложением 2-го уравнения равновесия системы (5) после подстановки в него значений (8) и умножения его на  $\sin \chi$  с 1-ым уравнением равновесия системы (9) после умножения последнего на  $\cos \chi$ .

Аналогично, пятое уравнение равновесия системы (9) получено сложением 5-го уравнения равновесия системы (5) после подстановки в него значений (8) и умножения его на  $\sin \chi$  с 4-м уравнением равновесия системы (9) после умножения последнего на  $\cos \chi$ .

И наконец, последнее уравнение системы (9) отличается от аналогичного уравнения системы (7) отсутствием слагаемого  $(M_v^* - M_u^*)/R_{uv}$ . Если используется сопряженная система криволинейных координат, то  $M = 0$ , следовательно,  $1/R_{uv} = 0$ , и это различие не играет роли.

### Геометрические уравнения

Геометрические уравнения для оболочки в произвольной криволинейной системе координат  $u, v$  были получены А.Л. Гольденвейзером [1]. Их можно применять в обоих рассмотренных случаях (рис. 1, 2). Только необходимо помнить, что перемещения  $u_z$  направлено в сторону, обратную единичному вектору  $\mathbf{n}$ , т.е. применяется следующее разложение:

$$\mathbf{U} = u_u \frac{\mathbf{r}_u}{A} + u_v \frac{\mathbf{r}_v}{B} - u_z \mathbf{n}.$$

После подстановки значений символов Кристоффеля в первую тройку геометрических уравнений, они принимают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_u &= \frac{1}{A} \left[ \frac{\partial u_u}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial v} \left( \frac{u_v}{B} \right) + B \cos \chi \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{u_v}{B} \right) \right] - \frac{u_z}{R'_u}, \\ \varepsilon_v &= \frac{1}{B} \left[ \frac{\partial u_v}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} \left( \frac{u_u}{A} \right) + A \cos \chi \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{u_u}{A} \right) \right] - \frac{u_z}{R'_v}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\varepsilon_{uv} = \sin \chi \left[ \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{u_v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{u_u}{A} \right) \right] - \frac{1}{A} \frac{\partial \chi}{\partial u} u_u - \frac{1}{B} \frac{\partial \chi}{\partial v} u_v + \frac{u_z}{\sin \chi} \left( \frac{2}{R_{12}} + \frac{\cos \chi}{R'_u} + \frac{\cos \chi}{R'_v} \right).$$

Далее необходимо подставить символы Кристоффеля в оставшиеся три уравнения для определения изменения кривизн  $\kappa_u$  и  $\kappa_v$  и кручения  $\kappa_{uv}$ .

Например, для пологих оболочек эти формулы принимают вид:

$$\begin{aligned} \kappa_u &= \frac{1}{A} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{A \sin \chi} \frac{\partial u_z}{\partial u} \right) - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\cos \chi}{\sin \chi} \frac{\partial u_z}{\partial v} \right) + \frac{1}{B^2 \sin \chi} \frac{\partial A}{\partial v} \frac{\partial u_z}{\partial v} \right], \\ \kappa_v &= \frac{1}{B} \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{B \sin \chi} \frac{\partial u_z}{\partial v} \right) - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\cos \chi}{\sin \chi} \frac{\partial u_z}{\partial u} \right) + \frac{1}{A^2 \sin \chi} \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial u_z}{\partial u} \right], \\ \kappa_{uv} &= \frac{1}{AB \sin \chi} \left[ \frac{B^2}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{B^2} \frac{\partial u_z}{\partial v} \right) + \frac{A^2}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{A^2} \frac{\partial u_z}{\partial u} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \cos^2 \chi \frac{\partial^2 u_z}{\partial u \partial v} + \frac{\cos \chi}{A} \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial u_z}{\partial u} + \frac{\cos \chi}{B} \frac{\partial A}{\partial v} \frac{\partial u_z}{\partial v} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Для непологих оболочек формулы для  $\kappa_u$ ,  $\kappa_v$ ,  $\kappa_{uv}$  будут намного сложнее.

### Заключение

Если требуется рассчитать тонкую оболочку со срединной поверхностью, заданной в косоугольных криволинейных сопряженных координатах, то можно использовать систему 20 расчетных уравнений А.Л. Гольденвейзера, включающих в себя уравнения (7), (10) и (2) или систему 20 расчетных уравнений, предложенных автором, включающих в себя уравнения (5), (10) и (6).

Отметим также, что уравнения (1), (10) и (2) были применены для расчета прямых длинных геликоидов [4], а уравнения (5), (10), (6) – для расчета длинных торсов-геликоидов [5].

Помимо рассмотренных двух вариантов представления расчетных уравнений линейной теории тонких оболочек, в литературе представлены нелинейные уравнения теории тонких оболочек в косоугольных координатах [6]. Статическая задача теории упругости в криволинейной неортогональной системе координат изучается в работе [7]. А Р.А. Римский [8] исследовал напряженно-деформированное состояние поперечно нагруженной пластинки в форме параллелограмма, отнесенной к косоугольной системе координат.

### Л и т е р а т у р а

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: ГТТИ, 1953. – 544 с.
2. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы: Монография. – М.: Изд-во РУДН, 2010. – 542 с.

3. Рекач В.Г., Кривошапко С.Н. К вопросу расчета упругих тонких оболочек в неортогональных криволинейных координатах// Расчет оболочек строительных конструкций: Сб. статей. – М.: УДН, 1977. – С. 3-14.
4. Рынковская М.И. К вопросу о расчете на прочность тонких линейчатых винтовых оболочек// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – № 6. – С. 13-15.
5. Баджория Г.Ч. Расчет длинного развертывающегося геликоида по моментной теории в перемещениях// Строительная механика и расчет сооружений. – 1985. – № 3. – С. 22-24.
6. Шевелев Л.П., Исаев Б.В. Нелинейные уравнения теории тонких оболочек в косоугольных координатах. – 3-д ВТУЗ при ПО турбостр. Ленинград. метал. з-да. – Л., 1988. – 25 с. – Деп. в ВИНТИ 24.10.88, № 7604-B88.
7. Коновалов А.Н. Численные методы в статических задачах теории упругости// Сибирский математический журнал. – 1995. – Том 36: 3. – С. 573-579.
8. Римский Р.А. Исследование косоугольных пластин методом Канторовича – Власова// Исследования по теории сооружений. – М.: Стройиздат, 1970. – С. 64-68.

#### References

1. Goldenweiser, A.L. (1953). *Theory of Elastic Thin Shells*, Moscow: GTTI, 544 с.
2. Ivanov, V.N., Krivoshapko, S.N. (2010). *Analytical Methods of Analysis of Shells of Complex Form: Monograph*, Moscow: Izd-vo RUDN, 542 p.
3. Rekach, V.G., Krivoshapko, S.N. (1977). On the problem of analysis of elastic thin shells given in non-orthogonal curvilinear coordinates, *Raschet Obolochek Stroitel'nyh Konstruktsiy*: Sb. statey, Moscow: UDN, p. 3-14.
4. Rynkovskaya, M.I. (2015). On the problem of strength analysis of thin ruled helical shells, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 6, pp. 13-15.
5. Bajoriya, G.Ch. (1985). An analysis of a long developable open helicoid with using of a moment theory in displacements, *Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzheniy*, № 3, pp. 22-24.
6. Shevelev, L.P., Isaev, B.V. (1988). Non-linear equations of a theory of thin shells given in arbitrary coordinates, *Zavod VTUZ pti PO turbostr. Leningrad. metal. z-da*, 25 p., *Dep. v VINITI 24.10.88, № 7604-B88*.
7. Konovalov, A.N. (1995). Numerical methods in static problems of theory of elasticity, *Siberian Mathematical Journal*, 36: 3, pp. 491-505.
8. Rimskiy, R.A. (1970). *Issledovaniya Kosougol'nyh Plastin Metodom Kantorovicha – Vlasova, Issledovaniya po Teorii Sooruzheniy*, Moscow: Stroyizdat, pp. 64-68.

## TWO TYPES OF GOVERNING EQUATIONS FOR SHELLS WITH THE MIDDLE SURFACES GIVEN IN ARBITRARY CURVILINEAR COORDINATES

S.N. Krivoshapko

*RUDN University, Moscow, Russia*

Having taken curvilinear coordinates on the middle surface of shells in the lines of principle curvatures, we can determine the simplest system of 17 governing equations of the linear theory of shells. But sometimes, the problem of analytical determination of the equation of the middle surface in lines of principle curvatures is very difficult task and that is why it is necessary to use the system of 20 governing equations, derived by A.L. Goldenweiser for an arbitrary system of curvilinear coordinates with taking into account the condition of decomposition of the vectors of internal forces and moments and external surface load along the axes of the basic non-orthogonal moving trihedral. Later, the system of 20 governing equations, derived by the author, was published. These equations contain internal force factors and external surface load decomposed along the axes of the basic orthogonal moving trihedral. His paper shows that these both systems of governing equation can transform one into other with the help of the equations of translation, i.e. the both systems of governing equations are equivalent.

**KEYWORDS:** thin-walled shell, the linear theory of shells, differential equilibrium equations, arbitrary curvilinear system of coordinates, geometrical equations of the shell theory, physical equations of the shell theory.