УДК 53.082

Система массового обслуживания с отрицательными заявками, бесконечным накопителем и конечным бункером для вытесненных заявок в непрерывном времени

Р. В. Разумчик

Кафедра теории вероятностей и математической статистики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, 117198, Москва, Россия

Рассматривается система массового обслуживания, в которую поступают пуассоновские потоки обычных и отрицательных заявок. Для обычных заявок имеется накопитель неограниченной ёмкости. Отрицательная заявка при поступлении в систему вытесняет одну обычную заявку из очереди в накопителе и перемещает её в бункер ограниченной ёмкости. Если в момент вытеснения заявки бункер полностью заполнен, то вытесненная заявка теряется.

Если в момент прихода отрицательной заявки накопитель пуст, она покидает систему, не оказывая на неё никакого воздействия. После окончания обслуживания очередной заявки на прибор поступает заявка из накопителя или, если накопитель пуст, из бункера. Длительности обслуживания заявок, как из накопителя, так и из бункера имеют экспоненциальное распределение с одним и тем же параметром. Получены формулы для расчёта совместного стационарного распределения числа заявок в накопителе и бункере и основных вероятностных характеристик системы.

Ключевые слова: система массового обслуживания, отрицательная заявка, бункер.

1. Введение

В последние несколько лет значительное внимание уделяется изучению систем и сетей с отрицательными заявками, что во многом мотивировано их практической ценностью. Впервые введённая в работе [1] отрицательная заявка при поступлении в систему «убивает» (разрушает) одну или несколько обычных заявок, ожидающих в очереди, после чего мгновенно покидает систему вместе с «убитыми» заявками. С помощью подобных систем можно моделировать такие эффекты как потери информации в инфотелекоммуникационных системах в связи с проникновением вирусов, сбоем программного обеспечения или внезапным выходом их строя оборудования в распределённых базах данных и др.

Одной из интересных задач является исследование систем с отрицательными заявками несколько иного типа, по сравнению с тем, который был предложен в [1]. Новый тип предполагает, что отрицательная заявка в момент поступления в систему не «убивает», а вытесняет одну из заявок в основной очереди и помещает её в дополнительную очередь, заявки из которой могут обслуживаются, но только с относительным приоритетом.

В работах [2] и [3] были исследованы подобные системы с бесконечным числом ожиданий мест в обеих очередях и функционирующие как в непрерывном, так и в дискретном времени. Были получены формулы для расчёта совместного стационарного распределения числа заявок в очередях и основных вероятностных характеристик.

Настоящее исследование является развитием работы [2] на случай, когда одна из очередей, а именно дополнительная очередь, имеет ограниченную ёмкость.

Итак, рассматривается однолинейная СМО, в которую поступает пуассоновский поток заявок интенсивности λ. Заявки этого потока будем называть положительными. Для положительных заявок имеется накопитель положительных заявок (далее просто накопитель) неограниченной ёмкости.

Статья поступила в редакцию 31 октября 2010 г.
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 09-07-12032).

Помимо положительных заявок, в систему поступает пуассоновский поток отрицательных заявок интенсивности λ^-. Отрицательная заявка, поступающая в систему, вытесняет одну (положительную) заявку из конца очереди в накопителе и перемещает её в накопитель для вытесненных заявок или бункер, который имеет ёмкость r $(r < \infty)$.

Если в момент вытеснения заявки из очереди в накопителе бункер полностью заполнен, то вытесненная заявка теряется.

Если в момент поступления отрицательной заявки в накопителе нет положительных заявок, а на приборе обслуживается заявка, то отрицательная заявка, не прерывая обслуживание на приборе, покидает систему, не оказывая на неё никакого воздействия. То же самое происходит и в случае, когда в момент поступления отрицательной заявки накопитель и обслуживающий прибор пусты.

Выбор заявок на обслуживание производится следующим образом. После окончания обслуживания очередной заявки на прибор становится заявка из накопителя. Если же накопитель пуст, на прибор поступает заявка из бункера. Обслуживание заявок не прерывается новыми как положительными, так и отрицательными заявками.

Длительности обслуживания заявок как из накопителя, так и из бункера имеют экспоненциальное распределение с одним и тем же параметром μ.

2. Система уравнений равновесия

Обозначим через $\nu(t)$ число заявок, находящихся в накопителе в момент времени t, а через $\eta(t)$ — число заявок в бункере. Положим $X(t) = (\nu(t), \eta(t))$. Случайный процесс $\{X(t),\ t \geqslant 0\}$, описывающий стохастическое поведение рассматриваемой СМО во времени, является марковским процессом (МП) с непрерывным временем и дискретным счётным множеством состояний. Множество состояний процесса $\{X(t),\ t \geqslant 0\}$ является объединением $\mathcal{X} = \cup_{i=0}^{\infty}\mathcal{X}_i$ непересекающихся подмножеств $\mathcal{X}_i$, которые далее мы будем называть слоями. Здесь $\mathcal{X}_0 = \{0\}$, $\mathcal{X}_i = \{(i,j),\ i \geqslant 0,\ 0 \leqslant j \leqslant r\}$. Состояние (0) слоя $\mathcal{X}_0$ соответствует полностью свободной системе; состояние (i,j) слоя $\mathcal{X}_i$ означает, что в накопителе находится i заявок, а в бункере ожидают j заявок, вытесненных из накопителя.

Инфинитезимальная матрица переходов Q данного процесса является блочной трёхдиагональной вида

$$Q = \begin{pmatrix} N_0 & \Lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ M_0 & N_1 & \Lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & M & N & \Lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & M & N & \Lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где квадратные матрицы Λ, N, M размерности $(r+1)\times(r+1)$ имеют следующий вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \mu & \lambda^- & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \lambda^- & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu & \lambda^- \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu+\lambda^- \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$N = \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu+\lambda^-) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda+\mu+\lambda^-) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda+\mu+\lambda^-) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(\lambda+\mu+\lambda^-) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} -(\mu+\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -(\mu+\lambda) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(\mu+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu & -(\mu+\lambda) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

и $N_0 = (-\lambda)$, $\Lambda_1 = (\lambda,\ 0,\ 0,\ \dots 0,\ 0)$, $M_0 = (\mu,\ 0,\ 0,\ \dots 0,\ 0)^T$.

Матрица N, стоящая на пересечении k-й строки и k-го столбца матрицы Q, описывает переходы МП между состояниями внутри слоя k. Матрица Λ, стоящая на пересечении $(k-1)$-й строки и k-го столбца матрицы Q, описывает переходы МП из состояний слоя $(k-1)$ в состояния слоя k. Матрица M, стоящая на пересечении $(k+1)$-й строки и k-го столбца матрицы Q, описывает переходы МП из состояний слоя $(k+1)$ в состояния слоя k.

Обозначим через $\vec{p}^T = (p_0, \vec{p}_0^T, \vec{p}_1^T, \dots)$ вектор стационарных вероятностей МП $\{X(t),\ \ t \geqslant 0\}$, где $\vec{p}_i^T = (p_{i0}, p_{i1}, \dots, p_{ir})$ является вектором размерности $r+1$. Тогда из системы уравнений равновесия (СУР)

$$\vec{p}^T Q = \vec{0}^T \tag{5}$$

следует, что компоненты вектора $\vec{p}$ удовлетворяют уравнениям

$$p_0 N_0 + \vec{p}_0^T M_0 = 0, \tag{6}$$

$$p_0 \Lambda_1 + \vec{p}_0^T N_1 + \vec{p}_1^T M = \vec{0}^T, \tag{7}$$

$$\vec{p}_{i-1}^T \Lambda + \vec{p}_i^T N + \vec{p}_{i+1}^T M = \vec{0}^T, \quad i \geqslant 1, \tag{8}$$

с условием нормировки

$$p_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \vec{p}_i^{\,T} \vec{1} = 1, \tag{9}$$

где $\vec{1}$ — вектор-столбец из единиц размерности $r+1$.

Существование стационарного распределения для рассматриваемой системы и решение СУР (6)–(9) следует из следующей теоремы [4, стр. 32, теорема 1.7.1.].

Теорема 1. *Неприводимый МП $\{X(t),\ t \geqslant 0\}$ является положительно возвратным тогда и только тогда, когда минимальное неотрицательное решение R уравнения*

$$\Lambda + RN + R^2 M = 0 \tag{10}$$

имеет спектральный радиус $\rho(R) < 1$, и если существует неотрицательный вектор $(p_0, \vec{p}_0^T)$ такой, что выполняется

$$p_0 N_0 + \vec{p}_0^T M_0 = 0, \tag{11}$$

$$p_0\Lambda_1 + \vec{p}_0^{\,T}(N_1 + RM) = \vec{0}^{\,T}. \tag{12}$$

Тогда решение СУР (6)–(9) имеет вид

$$\vec{p}_i^{\,T} = \vec{p}_0^{\,T} R^i, \ i \geqslant 0, \tag{13}$$

$$\vec{p}_0^{\,T} = -p_0\Lambda_1(N_1 + RM)^{-1}, \tag{14}$$

$$p_0 = \frac{1}{1 - \Lambda_1(N_1 + RM)^{-1}(I - R)^{-1}\vec{1}}, \tag{15}$$

где I — единичная матрица размерности $(r+1)\times(r+1)$.

Покажем, что условия теоремы выполняются.

Нетрудно видеть, что все состояния МП $\{X(t),\quad t \geqslant 0\}$ с инфинитезимальной матрицей Q сообщаются между собой, поэтому процесс является неприводимым.

В [5] показано, что достаточным условием того, что максимальное по модулю собственное значение (спектральный радиус) $\rho(R)$ имел алгебраическую кратность 1 и все остальные собственные значения были по модулю меньше $\rho(R)$, является неразложимость матрицы Q.

Однако в данном случае достаточное условие не выполняется, потому что матрица Q является разложимой. В самом деле, если рассмотреть матрицу A:

$$A = \Lambda + N + M = \begin{pmatrix} -\lambda^- & \lambda^- & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^- & \lambda^- & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^- & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda^- & \lambda^- \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

то видно, что она является разложимой, а значит разложимой является и матрица Q. Тем не менее вид матриц Λ, N и M позволяет убедиться непосредственной проверкой, что спектральный радиус $\rho(R)$ имеет алгебраическую кратность 1 и все остальные собственные значения по модулю меньше $\rho(R)$. Покажем это.

Рассматривая уравнение (10) в скалярном виде, нетрудно убедиться, что матрица R является верхней треугольной:

$$R = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & \dots & r_{0,r-1} & r_{0,r} \\ 0 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1,r-1} & r_{1,r} \\ 0 & 0 & r_{22} & \dots & r_{2,r-1} & r_{2,r} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{3,r-1} & r_{3,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r_{r,r} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Следовательно, все собственные значения матрицы R — это её диагональные элементы r_{jj}, $0 \leqslant j \leqslant r$. Таким образом, матрица $\Lambda + RN + R^2M$ в левой части уравнения (10) является верхней треугольной.

Введём производящие функции (ПФ)

$$\varphi_j(z) = (\Lambda)_{jj} + (N)_{jj}z + (M)_{jj}z^2, \quad 0 \leqslant j \leqslant r, \tag{18}$$

где через $(\cdot)_{jj}$ обозначается элемент, стоящий на пересечении j-й строки и j-го столбца соответствующей матрицы. Тогда условие (10) равносильно тому, что

$$\varphi_j(r_{jj}) = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant r. \tag{19}$$

Если переписать данные уравнения, учитывая вид матриц Λ, N и M, то для $j=\overline{0,r-1}$ все уравнения будут одинакового вида

$$\lambda-(\lambda+\mu+\lambda^-)r_{jj}+\mu r_{jj}^2=0, \tag{20}$$

а при $j=r$ имеем:

$$\lambda-(\lambda+\mu+\lambda^-)r_{jj}+(\mu+\lambda^-)r_{jj}^2=0. \tag{21}$$

Решая эти уравнения, получаем, что минимальное неотрицательное решение уравнения (10) со спектральным радиусом $\rho(R)<1$ существует, причём собственные значения матрицы R определяются следующим образом:

$$r_{jj}=\begin{cases}\dfrac{\lambda+\mu+\lambda^- -\sqrt{(\lambda+\mu+\lambda^-)^2-4\lambda\mu}}{2\mu}, \quad j=\overline{0,r-1},\\ \dfrac{\lambda+\mu+\lambda^- -\sqrt{(\lambda+\mu+\lambda^-)^2-4\lambda(\mu+\lambda^-)}}{2(\mu+\lambda^-)}=\dfrac{\lambda}{\mu+\lambda^-}, \quad j=r.\end{cases} \tag{22}$$

Отсюда видно, что спектральный радиус $\rho(R)=r_{rr}$.

Как показано в [4, см. 1.7.11, с. 32], спектральный радиус матрицы R меньше 1 тогда и только тогда, когда

$$\vec{\pi}^T\Lambda\vec{1}<\vec{\pi}^T M\vec{1}, \tag{23}$$

где $\vec{\pi}$ — единственное положительное решение СУР

$$\vec{\pi}^T A=\vec{0}^T \tag{24}$$

с условием нормировки

$$\vec{\pi}^T\vec{1}=1. \tag{25}$$

Если матрица A неразложима или разложима, но имеет единственную неразложимую группу индексов, то вектор $\vec{\pi}$, удовлетворяющий условиям (24) и (25), существует и единственен, и в данном случае имеет вид $\vec{\pi}^T=(0,0,0\ldots 0,1)$.

Окончательно из (23) получаем, что условие существования стационарного режима выглядит следующим образом: $\lambda<(\mu+\lambda^-)$.

Последнее условие теоремы, которое осталось проверить — это то, что существует неотрицательный вектор $(p_0,\vec{p}_0^T)$ вида (14) и (15), удовлетворяющий уравнениям (11) и (12). Проверить это можно непосредственной подстановкой (14) и (15) в СУР. Неотрицательность вектора $(p_0,\vec{p}_0^T)$ вытекает из того, что согласно [6] (см. Предложение 1. стр. 366) матрица $(I-R)^{-1}\geqslant 0$, а матрица N_1+RM имеет отрицательные диагональные элементы (и неотрицательные недиагональные) и, значит, $(N_1+RM)^{-1}\leqslant 0$.

Таким образом, все условия теоремы 1 выполняются и стационарное распределение задаётся формулами (13)–(15).

Зная стационарное распределение вероятностей состояний, выпишем некоторые вероятностно-временные характеристики системы.

Пусть $\vec{e}_i$ — вектор-столбец размерности $(r+1)$, у которого все элементы равны 0, кроме элемента на i-м месте.

Тогда, вероятность p_{loss} потери положительной заявки вследствие переполнения очереди в бункере имеет вид

$$p_{loss}=\frac{\lambda^-}{\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\vec{p}_i^T\vec{e}_{r+1}=\frac{\lambda^-}{\lambda}\vec{p}_0^T R(I-R)^{-1}\vec{e}_{r+1}.$$

Среднее число M_{nak} и дисперсия D_{nak} числа заявок в накопителе рассчитываются по формулам:

$$M_{nak} = \sum_{i=1}^{\infty} i\vec{p}_i^T\vec{1} = \vec{p}_0^T R(I-R)^{-2}\vec{1}, \quad D_{nak} = 2\vec{p}_0^T R^2(I-R)^{-3}\vec{1} + M_{nak}(1-M_{nak}).$$

Среднее число M_{bun} и дисперсия D_{bun} числа заявок в бункере можно найти с помощью следующих выражений:

$$M_{bun} = \sum_{i=0}^{\infty} \vec{p}_i^T \sum_{i=1}^{r} i\vec{e}_{i+1} = \vec{p}_0^T(I-R)^{-1}\sum_{i=1}^{r} i\vec{e}_{i+1}, \; D_{bun} = \vec{p}_0^T(I-R)^{-1}\sum_{i=1}^{r} i^2\vec{e}_{i+1} - M_{bun}^2.$$

Формула для вычисления среднего числа N заявок в системе имеет вид:

$$N = 1 - p_0 + M_{nak} + M_{bun}.$$

Для среднего времени ω пребывания заявки в накопителе до её ухода либо на прибор, либо в бункер, либо из системы вследствие полностью заполненной очереди в бункере, используя формулу Литтла [7], имеем следующее выражение:

$$\omega = \frac{1}{\lambda}\vec{p}_0^T R(I-R)^{-2}\vec{1}.$$

3. Заключение

Таким образом, для рассматриваемой системы были получены формулы для расчёта совместного стационарного распределения числа заявок в накопителе и бункере, а также выражения для ряда основных вероятностных характеристик системы, включая вероятность потери заявки из-за переполнения очереди в бункере.

Отдельно отметим, что в формулах расчёта стационарного распределения (13)–(15) участвует матрица R, которая имеет вид (17). Вопрос нахождения матрицы R является хорошо изученным. Для непосредственного расчёта матрицы R можно воспользоваться алгоритмами, предложенными в [7–15].

Для проверки аналитических методов была разработана имитационная модель с помощью программных средств GPSS, которая показала хорошее совпадение с результатами численных расчётов.

Литература

1. *Gelenbe E., Glynn P., Sigman K.* Queues with Negative Arrivals // J. Appl. Probab. — 1991. — Vol. 28. — P. 245–250.
2. *Мандзо Р., Касконе Н., Разумчик Р. В.* Экспоненциальная система массового обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 9. — С. 103–113. [*Mandzo R., Kaskone N., Razumchik R. V.* Ehksponencialjnaya sistema massovogo obsluzhivaniya s otricateljnihmi zayavkami i bunkerom dlya vihtesnennihkh zayavok // Avtomatika i telemekhanika. — 2008. — No 9. — S. 103–113.]
3. *Печинкин А. В., Разумчик Р. В.* Система массового обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок в дискретном времени // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 12. — С. 109–120. [*Pechinkin A. V., Razumchik R. V.* Sistema massovogo obsluzhivaniya s otricateljnihmi zayavkami i bunkerom dlya vihtesnennihkh zayavok v diskretnom vremeni // Avtomatika i telemekhanika. — 2009. — No 12. — S. 109–120.]

4. *Neuts M. F.* Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach. — The John Hopkins University Press, 1981.
5. *Latouche G., Taylor P. G.* Level-Phase Independence for $GI|M|1$ Type Markov Chains // J. Appl. Probab. — 2000. — Vol. 37, No 4. — Pp. 984–998.
6. *Гантмахер Ф. М.* Теория матриц. — М., 1966. [*Gantmakher F. M.* Teoriya matric. — M., 1966.]
7. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. — М.: Изд-во РУДН, 1995. [*Bocharov P. P., Pechinkin A. V.* Teoriya massovogo obsluzhivaniya. — M.: Izd-vo RUDN, 1995.]
8. *Favati P., Meini B.* On Functional Iteration Methods for Solving Nonlinear Matrix Equations Arising in Queueing Problems // IMA J. Numer. Anal. — 1999. — No 19. — Pp. 39–49.
9. *Guo C.-H.* On the Numerical Solution of a Nonlinear Matrix Equation in Markov Chains // Linear Algebra Appl. — 1999. — No 288. — Pp. 175–186.
10. *Latouche G.* Newton's Iteration for Non-Linear Equations in Markov Chains // IMA J. Numer. Anal. — 1994. — No 14. — Pp. 583–598.
11. *Latouche G.* Algorithms for Evaluating the Matrix G in Markov Chains of $Ph|G|1$ Type // Cahiers Centre Etudes Rech. Oper. — 1994. — No 36. — Pp. 251–258.
12. *Meini B.* New Convergence Results on Functional Iteration Techniques for the Numerical Solution of $M|G|1$ Type Markov Chains // Numer. Math. — 1997. — No 78. — Pp. 39–58.
13. *Neuts M. F.* Moment Formulas for the Markov Renewal Branching Process // Adv. in Appl. Probab. — 1976. — No 8. — Pp. 690–711.
14. *Ye Q.* High Accuracy Algorithms for Solving Nonlinear Matrix Equations in Queueing Models // Advances in Algorithmic Methods for Stochastic Models. — 2000. — Pp. 401–415.
15. *Latouche G., Ramaswami V.* A Logarithmic Reduction Algorithm for Quasi-Birth-Death Processes // J. Appl. Probab. — 1993. — No 30. — Pp. 650–674.

UDC 53.082

A Queueing System with Negative Claims, Infinite Buffer and Finite Bunker for Superseded Claims

R. V. Razumchik

Department of Probability Theory and Mathematical Statistics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

Study is performed of the queuing system with Poisson incoming flows of ordinary and negative claims. For ordinary claims, there is an infinite-capacity buffer. The arriving negative claim knocks out an ordinary claim queued in the buffer and moves it to a finite-capacity buffer of superseded claims (bunker). If upon the knock out of the ordinary claim bunker is full, knocked out claim is lost. If the buffer is empty, then the negative claim discharges the system without affecting it. After servicing the current claim, the server receives a claim from the buffer or, if the buffer is empty, the bunker. The claims arriving from both the buffer and bunker are served exponentially with the same parameter.

Expressions for the stationary joint probability distribution of number of claims in buffer and bunker and for main probabilistic characteristics of the system were obtained.

Key words and phrases: queueing system, negative claim, bunker.